Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Mestrado em Matemática e Estatística
I Exame de Qualificação de Álgebra Linear (Mestrado)

Aluno(a):____

Matrícula:________________________ Data:________________________

INSTRUÇÕES PARA PROVA

- A prova é constituída por 5 (cinco) questões valendo 2,0 (dois) pontos cada totalizando 10,0 (dez) pontos;
- A duração da prova será de no máximo 2 (duas) horas;
- A prova deve ser realizada individualmente com caneta esferográfica azul ou preta e sem consulta bibliográfica;
- Não é permitido destacar folhas do caderno de questões;
- Não é permitido o uso de papel que não seja o fornecido na prova;
- Justifique todas as suas respostas.

Boa Prova!

1. (2,0 pts) Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ com $dim_{\mathbb{K}}U$ finita e $T : U \to V$ uma transformação linear. Mostre que

$$dim_{\mathbb{K}}U = dim_{\mathbb{K}}\text{Nuc } T + dim_{\mathbb{K}}\text{Im } T.$$

2. (2,0 pts) Considere o espaço vetorial real $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem n. Seja T uma transformação dada por

$$\begin{aligned} T : M_n(\mathbb{R}) &\to M_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto T(A) = A - A^t. \end{aligned}$$

a) (1,0 pts) Mostre que T é uma transformação linear.

b) (1,0 pts) Determine o núcleo de T, uma base e a dimensão deste subespaço.

3. (2,0 pts) Seja $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ uma base de $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{C}$ definida por

$$\alpha_1 = (1, 0, -1), \quad \alpha_2 = (1, 1, 1), \quad \alpha_3 = (2, 2, 0).$$

Determinar a base dual de $\mathcal{B}$.

4. (2,0 pts) Considere o espaço vetorial $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ com produto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx, \quad p, q \in V.$$

Seja $W = [-1, 1 - x]$ um subespaço de V. Determine uma base ortonormal de W utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

5. (2,0 pts) Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável e calcule A^n, para $n \in \mathbb{N}$.