Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Exame de Qualificação - Cálculo Avançado

Aluno(a):

Data:

ATENÇÃO !

a) A prova é constituída de 05 (cinco) questões, valendo 02 (dois) pontos cada questão, totalizando 10 (dez) pontos;

b) A prova é estritamente individual e sem consulta;

c) Não será permitido o uso de material entre os candidatos;

d) Não será permitido o uso de aparelho celular durante a prova;

e) Usar caneta esferográfica na cor preta ou azul;

f) A prova terá duração de 02 (duas) horas.

1. Mostre que a imagem de $f(K)$ do compacto $K \subset X \subset \mathbb{R}^n$ pela aplicação contínua $f : X \to \mathbb{R}^n$, é também um conjunto compacto.

2. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ caminhos de classe C^1. Prove que

$$\int_a^b \langle f(t), g'(t)\rangle dt = \langle f(b), g(b)\rangle - \langle f(a), g(a)\rangle - \int_a^b \langle f'(t), g(t)\rangle dt.$$

3. Dada $f : B((0,0); 1) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $B((0,0); 1)$, fixe $a = (2, 3, 4)$ em $\mathbb{R}^3$ e defina $\varphi : B((0,0); 1) \to \mathbb{R}^3$ pondo $\varphi(x, y) = f(x, y)(2, 3, 4)$. Para cada $(x, y) \in B((0,0); 1)$, determine $\varphi'(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

4. Use o Teorema da Função Implícita para analisar as soluções, em uma vizinhança do ponto $(0, 0, 0)$, do seguinte sistema

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2)^3 - y + z &= 0 \\ sen(x^4 + y^2) + e^z - 1 &= 0 \end{cases}.$$

5. Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se no ponto $a \in U$, a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, prove que

$$\lim_{r \to 0} \frac{vol.f(B(a; r))}{vol.B(a; r)} = |det f'(a)|.$$