**Universidade Federal do Pará**

**Instituto de Ciências Exatas e Naturais**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística**

# II Exame de Qualificação de Álgebra Linear (Mestrado)

Nome do Aluno(a):

Matrícula:

Data: 10/12/2017

## INSTRUÇÕES PARA A PROVA

- A prova é constituída por 5 (cinco) questões valendo 2 (dois) pontos cada totalizando 10 (dez) pontos;
- A duração da prova será de no máximo 2 (duas) horas;
- A prova deve ser realizada individualmente com caneta esferográfica azul ou preta e sem consulta bibliográfica;
- Não é permitido destacar folhas do caderno de questões;
- Não é permitido o uso de papel que não seja o fornecido na prova.
- Justifique todas as suas respostas.

**Boa Prova.**

1) (2,0 pts) Considere os seguintes vetores em $\mathbb{R}^3$

$$\beta_1 = (1,0,1), \beta_2 = (0,1,-2), \beta_3 = (-1,-1,0).$$

a) (1,0 pt) Se $f$ é um funcional linear em $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\beta_1) = 1, f(\beta_2) = -1$ e $f(\beta_3) = 3$, encontre $f(x,y,z)$ para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

b) (1,0 pt) É possível descrever um funcional linear $f$ sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\beta_1) = f(\beta_2) = 0$ e $f(\beta_3) \neq 0$? Justifique.

2)(2,0 pts) Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $F$. Mostre que a aplicação $\phi : L(V,V) \to L(V^*, V^*)$ dada por $\phi(T) = T^t$ é um isomorfismo.

3)(2,0 pts) Considere $V$ um espaço vetorial de dimensão finita e $W$ um subespaço de $V$. Prove que $dimV = dimW + dimW^\circ$.

4) (2,0 pts) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear cuja matriz em relação a base canônica é

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) (1,0 pt) Encontre o polinômio característico e o polinômio minimal de $T$;

b) (1,0 pt) Prove que $T$ é diagonalizável e encontre uma base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovetores de $T$.

5) (2,0 pts) Seja $V$ um espaço vetorial real munido de um produto interno $<,>$ e $x, y \in V$. Prove que

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4 < x, y > .$$