Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

I Exame de Qualificação de Cálculo Avançado(Mestrado)

Nome do Aluno(a):

Matrícula:

Data: 09/08/2016

INSTRUÇÕES PARA A PROVA

- A prova é constituída por 5 (cinco) questões valendo 2 (dois) pontos cada totalizando 10 (dez) pontos;
- A duração da prova será de no máximo 2 (duas) horas;
- A prova deve ser realizada individualmente com caneta esferográfica azul ou preta e sem consulta bibliográfica;
- Não é permitido destacar folhas do caderno de questões;
- Não é permitido o uso de papel que não seja o fornecido na prova.
- Justifique todas as suas respostas.

Boa Prova.

1) (2,0 pts) Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Prove a afirmação que você julgar verdadeira e exiba um contra-exemplo no caso em que a afirmação for falsa.

a) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, contínua, diferenciável em (a,b). Então existe $t_0 \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(t_0)(b-a)$.

b) A norma do máximo em $\mathbb{R}^n$ provém de um produto interno.

c) $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

2) (2,0 pts) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(tx) = tf(x)$, para todo $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Prove que f é uma função linear, isto é, $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$.

3) (2,0 pts) Seja f a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^2}{x^4 + y^4}, se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Mostre que existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$ e calcule $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, onde $v = (v_1, v_2)$.

b) A igualdade é sempre válida $< \nabla f(0,0), v >= \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$? Prove ou dê um contra-exemplo.

c) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

4) (2,0 pts) Seja $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação bilinear. Mostre que B é diferenciável com derivada dada por $B'(x,y) \cdot (u,v) = B(u,y) + B(x,v)$. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável explique porque a função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(x) =< f(x), f(x) >$ é diferenciável e calcule $F'(x)$.

5) (2,0 pts)

a) Enuncie o Teorema da Aplicação Inversa

b) Dadas as matrizes $x, m \in M(n \times n)$, dizemos que x é uma raíz quadrada de m quando $x^2 = m$. Mostre, utilizando o teorema da aplicação inversa, que toda matriz próxima da identidade I_n tem raiz quadrada.