Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais - ICEN

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME

Prova de Seleção de Mestrado 2019 - Tipo 2

**Instruções para a prova:**

1. A prova é estritamente individual e sem consulta;
2. Não é permitido empréstimo do material entre os candidatos;
3. O aparelho celular deve permanecer desligado durante a prova;
4. É permitido o uso de máquina de calcular;
5. Usar caneta esferográfica, azul ou preta;
6. Assinale apenas UMA opção para cada questão.
7. **SÓ SERÃO CONSIDERADAS AS RESPOSTAS ASSINALADAS NO QUADRO ABAIXO**.

| Questão | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | | | |
| 6 | | | | | |
| 7 | | | | | |
| 8 | | | | | |
| 9 | | | | | |
| 10 | | | | | |
| 11 | | | | | |
| 12 | | | | | |

**Nome:** ______________________________________________________________

1) (0,5 PONTO) Considere os seguintes modelos de probabilidade envolvendo repetições de experimentos de Bernoulli:
   a. Distribuição Binomial b. Distribuição Geométrica c. Distribuição Binomial Negativa

   Para cada uma das situações abaixo, associe o modelo correto:
   ( ) Observa-se o número de repetições do experimento até a ocorrência de 10 "sucessos";
   ( ) Observa-se o número de "sucessos" em 10 repetições do experimento;
   ( ) Observa-se o número de repetições do experimento até a ocorrência do primeiro "sucesso";

   A associação correta é
   A) b a c B) b c a C) c a b D) c b a E) a c b

2) (0,7 PONTO) Considere que uma moeda honesta é lançada 3 vezes. Sejam $X$ o número de "caras" nos dois primeiros lançamentos e $Y$ o número de "caras" nos dois últimos lançamentos. O coeficiente de correlação entre $X$ e $Y$ é

   A) 1/3 B) 2/3 C) 1/4 D) 3/4 E) 1/2

3) (0,8 PONTO) Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias contínuas com

   $$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < y < x+1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad f_X(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 < x < 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

   A probabilidade $P(X + Y < 1)$ é

   A) 1/2 B) 1/8 C) 1/4 D) 3/8 E) 1/3

4) (0,7 PONTO) Considere $\boldsymbol{n}$ repetições independentes de um experimento, cada uma com os possíveis *k+1* resultados: $s_1, s_2, \cdots, s_{k+1}$. Seja $P_j$ a probabilidade de ocorrência de $s_j$, e seja $X_j$ o número de repetições do experimento em que ocorreu o resultado $s_j$, $j = 1, 2, \cdots, k+1$. Seja $Z_{jr}$ a variável binária que toma valor um quando a $r$-ésima repetição resulta em $s_j$, e zero em caso contrário. Assim, tem-se $X_j = Z_{j1} + Z_{j2} + \cdots + Z_{jn}$. Logo, a covariância entre $X_i$ e $X_j$ é

   A) Zero B) $-nP_iP_j$ C) $-n(1-P_i)P_j$ D) $nP_iP_j$ E) $nP_i(1-P_j)$

5) (1,8 PONTO) Seja (X, Y) um vetor aleatório com distribuição conjunta dada por

   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}x(x-y), & 0 < x < 2, \ -x < y < x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   A esperança de $Y$, $E(Y)$, é

   A) Zero B) -0,533 C) -1,333 D) 0,133 E) 0,667

6) (1,2 PONTO) Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias contínuas com distribuição conjunta

   $$f(x,y) = 3(x+y), \quad 0 < x+y < 1, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

   A esperança condicional $E(Y|X)$ é dada por

   A) $\frac{X^3-3X+2}{3(1-X^2)}$ B) $\frac{3}{2}(1-X^2)$ C) 3/8 D) 3 E) $3\left(X+\frac{1}{2}\right)$

7) (0,5 PONTO) A resistência (em toneladas) de vigas de concreto produzidas por uma empresa segue a distribuição de probabilidades abaixo:

| Resistência (em toneladas) | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidade | 0,25 | 0,20 | 0,15 | 0,20 | 0,20 |

Admite-se que essas vigas são aprovadas para uso em construções se suportam pelo menos 5 toneladas. De um grande lote de vigas fabricado pela empresa escolhemos ao acaso 4 vigas. Qual a probabilidade de que pelo menos duas sejam aptas para construções?

A) 0,3456 B) 0,1600 C) 0,5248 D) 0,6544 E) 0,0256

8) (0,5 PONTO) Estudos meteorológicos indicam que a precipitação pluviométrica mensal em períodos de seca numa certa região pode ser considerada como seguindo a distribuição Normal de média 30mm e variância 16mm$^2$. Qual seria o valor da precipitação pluviométrica de modo que exista apenas 10% de chance de haver uma precipitação inferior a este valor?

A) 35,12mm B) 31mm C) 29mm D) 24,88mm E) 23,44mm

9) (0,8 PONTO) Seja $X$ uma variável aleatória contínua com $f_X(x) = e^{-x}$ , $x > 0$ e seja $Y = \frac{X}{1+X}$ . A função densidade de probabilidade de $Y$ é

A) $f_Y(y) = 6y(1-y),\ 0 < y < 1$
B) $f_Y(y) = 2(1-y), \quad 0 < y < 1$
C) $f_Y(y) = e^{-\frac{y}{1-y}}, \quad 0 < y < 1$
D) $f_Y(y) = (1-y)^{-2}e^{-\frac{y}{1-y}}, \quad 0 < y < 1$
E) $f_Y(y) = 12y^2(1-y), \quad 0 < y < 1$

10) (0,5 PONTO) Seja $X$ uma variável aleatória com função de probabilidade $p(x_i)$ dada por

| $x_i$ | -1 | -3 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_X(x_i) = P(X = x_i)$ | 0,20 | 0,25 | 0,15 | 0,40 |

Os valores da $E(X)$ e $Var(-2X+4)$ são, respectivamente,

A) 0 e 24,80 B) 6,04 e 24,80 C) 0 e 16,08 D) 0,40 e 24,16 E) 0,40 e 28,16

11) (1,2 PONTO) Suponha que se distribui *n* bolas em *n* caixas numeradas de 1 a *n*. Qual a probabilidade de que somente a caixa 1 fique vazia?

A) $\frac{\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n}$ B) $\frac{\binom{n}{2}(n-1)!}{n^n}$ C) $\frac{(n-1)!}{n^n}$ D) $\frac{\binom{n}{n-2}}{n!}$ E) $\frac{n-1}{2\,n^{n-1}}$

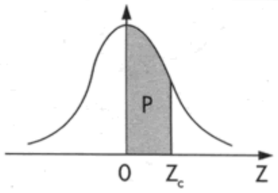
12) (0,8 PONTO) A função de probabilidade da variável discreta $X$ é dada por $p_X(x) = \frac{x}{3}$, para $x = 1, 2$, e a distribuição condicional de $Y$, dado $X = x$, é Binomial com parâmetros *x* e 1/2. A esperança $E(Y)$ é dada por

A) 5/6 B) 3/2 C) 5/3 D) 1 E) 2

## **Tabela III** — Distribuição Normal Padrão

$Z \sim N(0, 1)$

Corpo da tabela dá a probabilidade $p$, tal que $p = P(0 < Z < Z_c)$




| parte inteira e primeira decimal de $Z_c$ | Segunda decimal de $Z_c$ 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | parte inteira e primeira decimal de $Z_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | p = 0 | | | | | | | | | | |
| 0,0 | 00000 | 00399 | 00798 | 01197 | 01595 | 01994 | 02392 | 02790 | 03188 | 03586 | 0,0 |
| 0,1 | 03983 | 04380 | 04776 | 05172 | 05567 | 05962 | 06356 | 06749 | 07142 | 07535 | 0,1 |
| 0,2 | 07926 | 08317 | 08706 | 09095 | 09483 | 09871 | 10257 | 10642 | 11026 | 11409 | 0,2 |
| 0,3 | 11791 | 12172 | 12552 | 12930 | 13307 | 13683 | 14058 | 14431 | 14803 | 15173 | 0,3 |
| 0,4 | 15542 | 15910 | 16276 | 16640 | 17003 | 17364 | 17724 | 18082 | 18439 | 18793 | 0,4 |
| 0,5 | 19146 | 19497 | 19847 | 20194 | 20540 | 20884 | 21226 | 21566 | 21904 | 22240 | 0,5 |
| 0,6 | 22575 | 22907 | 23237 | 23565 | 23891 | 24215 | 24537 | 24857 | 25175 | 25490 | 0,6 |
| 0,7 | 25804 | 26115 | 26424 | 26730 | 27035 | 27337 | 27637 | 27935 | 28230 | 28524 | 0,7 |
| 0,8 | 28814 | 29103 | 29389 | 29673 | 29955 | 30234 | 30511 | 30785 | 31057 | 31327 | 0,8 |
| 0,9 | 31594 | 31859 | 32121 | 32381 | 32639 | 32894 | 33147 | 33398 | 33646 | 33891 | 0,9 |
| 1,0 | 34134 | 34375 | 34614 | 34850 | 35083 | 35314 | 35543 | 35769 | 35993 | 36214 | 1,0 |
| 1,1 | 36433 | 36650 | 36864 | 37076 | 37286 | 37493 | 37698 | 37900 | 38100 | 38298 | 1,1 |
| 1,2 | 38493 | 38686 | 38877 | 39065 | 39251 | 39435 | 39617 | 39796 | 39973 | 40147 | 1,2 |
| 1,3 | 40320 | 40490 | 40658 | 40824 | 40988 | 41149 | 41309 | 41466 | 41621 | 41774 | 1,3 |
| 1,4 | 41924 | 42073 | 42220 | 42364 | 42507 | 42647 | 42786 | 42922 | 43056 | 43189 | 1,4 |
| 1,5 | 43319 | 43448 | 43574 | 43699 | 43822 | 43943 | 44062 | 44179 | 44295 | 44408 | 1,5 |
| 1,6 | 44520 | 44630 | 44738 | 44845 | 44950 | 45053 | 45154 | 45254 | 45352 | 45449 | 1,6 |
| 1,7 | 45543 | 45637 | 45728 | 45818 | 45907 | 45994 | 46080 | 46164 | 46246 | 46327 | 1,7 |
| 1,8 | 46407 | 46485 | 46562 | 46638 | 46712 | 46784 | 46856 | 46926 | 46995 | 47062 | 1,8 |
| 1,9 | 47128 | 47193 | 47257 | 47320 | 47381 | 47441 | 47500 | 47558 | 47615 | 47670 | 1,9 |
| 2,0 | 47725 | 47778 | 47831 | 47882 | 47932 | 47982 | 48030 | 48077 | 48124 | 48169 | 2,0 |
| 2,1 | 48214 | 48257 | 48300 | 48341 | 48382 | 48422 | 48461 | 48500 | 48537 | 48574 | 2,1 |
| 2,2 | 48610 | 48645 | 48679 | 48713 | 48745 | 48778 | 48809 | 48840 | 48870 | 48899 | 2,2 |
| 2,3 | 48928 | 48956 | 48983 | 49010 | 49036 | 49061 | 49086 | 49111 | 49134 | 49158 | 2,3 |
| 2,4 | 49180 | 49202 | 49224 | 49245 | 49266 | 49286 | 49305 | 49324 | 49343 | 49361 | 2,4 |
| 2,5 | 49379 | 49396 | 49413 | 49430 | 49446 | 49461 | 49477 | 49492 | 49506 | 49520 | 2,5 |
| 2,6 | 49534 | 49547 | 49560 | 49573 | 49585 | 49598 | 49609 | 49621 | 49632 | 49643 | 2,6 |
| 2,7 | 49653 | 49664 | 49674 | 49683 | 49693 | 49702 | 49711 | 49720 | 49728 | 49736 | 2,7 |
| 2,8 | 49744 | 49752 | 49760 | 49767 | 49774 | 49781 | 49788 | 49795 | 49801 | 49807 | 2,8 |
| 2,9 | 49813 | 49819 | 49825 | 49831 | 49836 | 49841 | 49846 | 49851 | 49856 | 49861 | 2,9 |
| 3,0 | 49865 | 49869 | 49874 | 49878 | 49882 | 49886 | 49889 | 49893 | 49897 | 49900 | 3,0 |
| 3,1 | 49903 | 49906 | 49910 | 49913 | 49916 | 49918 | 49921 | 49924 | 49926 | 49929 | 3,1 |
| 3,2 | 49931 | 49934 | 49936 | 49938 | 49940 | 49942 | 49944 | 49946 | 49948 | 49950 | 3,2 |
| 3,3 | 49952 | 49953 | 49955 | 49957 | 49958 | 49960 | 49961 | 49962 | 49964 | 49965 | 3,3 |
| 3,4 | 49966 | 49968 | 49969 | 49970 | 49971 | 49972 | 49973 | 49974 | 49975 | 49976 | 3,4 |
| 3,5 | 49977 | 49978 | 49978 | 49979 | 49980 | 49981 | 49981 | 49982 | 49983 | 49983 | 3,5 |
| 3,6 | 49984 | 49985 | 49985 | 49986 | 49986 | 49987 | 49987 | 49988 | 49988 | 49989 | 3,6 |
| 3,7 | 49989 | 49990 | 49990 | 49990 | 49991 | 49991 | 49992 | 49992 | 49992 | 49992 | 3,7 |
| 3,8 | 49993 | 49993 | 49993 | 49994 | 49994 | 49994 | 49994 | 49995 | 49995 | 49995 | 3,8 |
| 3,9 | 49995 | 49995 | 49996 | 49996 | 49996 | 49996 | 49996 | 49996 | 49997 | 49997 | 3,9 |
| 4,0 | 49997 | 49997 | 49997 | 49997 | 49997 | 49997 | 49998 | 49998 | 49998 | 49998 | 4,0 |
| 4,5 | 49999 | 50000 | 50000 | 50000 | 50000 | 50000 | 50000 | 50000 | 50000 | 50000 | 4,5 |