UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
EXAME DE SELEÇÃO - MATEMÁTICA - junho de 2019

Candidato(a):

Data: 19/06/2019

INSTRUÇÕES

1. Resolva um item (somente um item), das 05 (cinco) questões apresentadas.
2. O exame iniciará às 9h e terminará às 12h. Alunos com deficiência visual terão uma hora a mais para fazer o exame, ou seja, seu horário de exame será de 9h às 13h;
3. O exame deve ser realizado individualmente por cada candidato com caneta esferográfica azul ou preta e sem consulta a qualquer tipo de material que não seja o fornecido no exame;
4. É proibido o empréstimo de materiais (tais como caneta, lápis, borracha, corretivo, dentre outros) durante a realização do exame;
5. É proibido o uso de qualquer aparelho eletrônico durante a realização deste exame, incluindo celular, calculadora e notebook. Os mesmos devem estar desligados;
6. Caso o candidato(a) necessite uso de banheiro, o mesmo(a) deve dirigir-se a um fiscal volante, permanecendo em silêncio no trajeto de ida e volta;

AS 05 (CINCO) QUESTÕES:

1. a) Mostre que a sucessão $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots,$ converge para 2.

   b) Enuncie e demonstre o Teorema de Bolzano-Weierstrass, para sucessões numéricas.

2. a) Mostre que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n \geq 0$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{1+x_n^2}$ converge. Se a primeira divergir, mostre que a segunda pode convergir ou divergir.

   b) Consideremos uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e suponhamos que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ exista. Seja x_0 tal limite. Mostre que a série converge absolutamente se $x_0 < 1$. A referida série converge se $x_0 = 1$?

3. a) Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

   para todo x e y em $\mathbb{R}$. Prove que φ é linear, ou mais precisamente, da forma ax.

   b) Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida assim: $\varphi(x) = 0$, se x for irracional. Se x for racional, tome a representação de x por uma fração irredutível $\frac{p}{q}$, onde $q > 0$, defina $\varphi(x) = \frac{1}{q}$. Mostre que φ é contínua nos irracionais e descontínua nos racionais.

4. a) Enuncie e demonstre o Teorema do Valor Médio.

   b) Seja $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo (a, b). Mostre que se φ é convexa então a derivada φ' é não-decrescente.

5. a) Seja φ uma função contínua e limitada no intervalo $[a, b)$. Tome $\varphi(b) = 0$. Mostre que φ é integrável no intervalo $[a, b]$.

   b) Seja $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função (limitada) integrável tal que $\varphi(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Mostre que a função $\varphi^2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi^2(x) = [\varphi(x)]^2$ é integrável.