Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais – ICEN

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística – PPGME

Exame de Seleção de Mestrado 2019.2 (Probabilidade) – Tipo A

Instruções:

1. O Exame é estritamente individual e sem consulta;
2. Não é permitido empréstimo de material entre os candidatos;
3. O aparelho celular deve permanecer desligado durante o exame;
4. É permitido o uso de máquina de calcular;
5. Usar caneta esferográfica azul ou preta;
6. Assinale apenas **UMA** opção para cada questão;
7. Evite **RASURAS** em cada questão;

8. **SÓ SERÃO CONSIDERADAS AS RESPOSTAS ASSINALADAS NO QUADRO ABAIXO:**

Questão	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Nome: ____

1) (1,0 ponto) Uma empresa realiza um processo interno para seleção de um funcionário que irá ocupar um cargo de chefia. Só poderão participar da seleção os funcionários de 3 setores da empresa, setor A, setor B e setor C, que correspondem a 20%, 35% e 45% dos funcionários aptos ao processo seletivo, respectivamente. Sabe-se, também, que a proporção de funcionários com nível superior nos setores A, B e C, é 40%, 50% e 70%, respectivamente. Se o funcionário selecionado para o cargo de chefia tem nível superior, qual a probabilidade dele ser do setor B?

A) 0,175 B) 0,615 C) 0,307 D) 0,570 E) 0,107

2) (1,2 ponto) O comprimento X de uma peça usada na fabricação de navios é uma variável aleatória cuja função de distribuição acumulada é dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - exp(-0{,}25\, x^2), & x \geq 0 \\ 0 & , \ x < 0 \end{cases} .$$

Assinale a alternativa correta:

A) A função densidade de probabilidade de X é $f(x) = x \exp(-0{,}25\, x^2)\,,\ x \geq 0.$
B) $P(X \leq 2) = 0{,}37.$
C) O valor esperado e a variância da variável aleatória $W = exp(-0{,}25\, X^2)$ são, respectivamente, iguais a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{12}$.
D) A variável aleatória $Y = \sqrt{X}$ tem distribuição Exponencial.
E) O valor esperado da variável aleatória X é $\sqrt{\pi} + 2$.

3) (0,8 ponto) Considere que duas bolas tenham sido selecionadas aleatoriamente, e sem reposição, de uma urna contendo 10 bolas numeradas de 1 a 10. Se a soma dos números das bolas selecionadas é um número par, a probabilidade de ambos os números serem ímpares é:

A) 0,50 B) 0,22 C) 0,44 D) 0,65 E) 0,78

4) (1,0 ponto) Sejam X e Y variáveis aleatórias com variâncias $Var(X) = 4$ e $Var(Y) = 9$, respectivamente, e com coeficiente de correlação igual a $\rho(X,Y) = -\frac{1}{3}$. Se $Z = 2X - Y$, a $Var(Z)$ é dada por:

A) 7 B) 33 C) 17 D) 25 E) 75

5) (1,0 ponto) Se $f(x,y) = \frac{1}{8}\,(x+y),\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2$, é a função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y. É correto afirmar que:

A) X e Y são variáveis independentes.
B) X e Y são variáveis identicamente distribuídas, ambas com valor esperado igual a $\frac{1}{8}$.
C) X e Y são variáveis identicamente distribuídas, ambas com variância igual a $\frac{10}{6}$.
D) O coeficiente de correlação entre X e Y é igual a $-\frac{1}{11}$.
E) $P(X > Y) = 0{,}25.$

6) (0,5 ponto) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com $X \sim Binomial(n, p_1)$ e $Y \sim Binomial(n, p_2)$. O valor esperado e a variância de $X + Y$ são, respectivamente:

A) $E(X+Y) = n^2 + p_1 p_2$ e $Var(X+Y) = n(2 - p_1 - p_2)$.
B) $E(X+Y) = n(p_1 - p_2)$ e $Var(X+Y) = n(2 - p_1 - p_2)$.
C) $E(X+Y) = n(p_1 + p_2)$ e $Var(X+Y) = n\left(p_1 - p_2 - (p_1^2 - p_2^2)\right)$.
D) $E(X+Y) = n(p_1 + p_2)$ e $Var(X+Y) = n\left(p_1 + p_2 - (p_1^2 + p_2^2)\right)$.
E) $E(X+Y) = n^2 p_1 p_2$ e $Var(X+Y) = n p_1 p_2 (p_1 + p_2)$.

7) (0,8 ponto) A distribuição conjunta das variáveis aleatórias X e Y é dada na tabela abaixo.

X \ Y	-1	0	1
-1	1/4	1/8	1/8
1	1/8	1/8	1/4

A $Var(-2X + 2Y)$ é dada por:

A) $\frac{14}{8}$ B) 7 C) $\frac{6}{8}$ D) $\frac{3}{8}$ E) 5

8) (1,2 ponto) João foi submetido a um teste de laboratório para o diagnóstico de uma doença rara. A probabilidade dessa doença se desenvolver em um indivíduo como o João é igual a 0,001. Sabe-se que esse teste pode resultar em “falso positivo”, ou seja, indicar que João possui essa doença, quando na verdade ele não a tem. Ou, o teste pode resultar em “falso negativo”, isto é indicar que João não possui a doença, quando na verdade ele está doente. A probabilidade de o teste resultar em “falso positivo” é igual a 0,05 e a probabilidade de o teste resultar em “falso negativo” é igual a 0,02. Assinale a alternativa correta:

A) Se qualquer indivíduo como João submeter-se ao teste, então a probabilidade de o teste produzir um resultado negativo é superior a 0,98.
B) Se o teste ao qual João foi submetido der resultado positivo, então a probabilidade de ele estar de fato com a doença é inferior a 0,02.
C) Se qualquer indivíduo como João submeter-se ao teste, então a probabilidade de o teste produzir um resultado positivo é superior a 0,08.
D) Se o teste ao qual João foi submetido der resultado positivo, então a probabilidade de ele não estar com a doença é inferior a 0,08.
E) Se o João não tiver a doença, então a probabilidade de o teste acertar o diagnóstico é superior a 0,98.

9) (1,0 ponto) O tempo (em horas) gasto na fabricação de uma peça é uma variável aleatória T, com função densidade dada por

$$f(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t/4}}{4}, & t > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

e seja C o custo para se produzir uma dessas peças. Suponha que o preço de venda de uma peça é uma variável aleatória X dada por

$$X = \begin{cases} p_1\,, & \text{se } T < 2 \\ p_2\,, & 2 \leq T < 3 \\ p_3\,, & \text{se } T \geq 3 \end{cases}.$$

O lucro esperado por peça é:

A) $\frac{p_1+p_2+p_3}{4} - C$.
B) $p_1 e^{-2/4} + p_2 e^{-5/4} + p_3 e^{-3/4} - C$.
C) $p_1 + (p_2 - p_1)e^{-2/4} + (p_3 - p_2)e^{-3/4} - C$.
D) $\frac{(p_1+p_2+p_3)C}{4} - Ce^{-2/4}$.
E) $2p_1 e^{-2/4} + p_2 e^{-5/4} + 3p_3 e^{-3/4} - C$.

10) (1,5 ponto) Seja $f(x,y) = 6\,(1 - x - y),\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x,$ a função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y. É correto afirmar que:

A) A função densidade marginal da variável aleatória X é $f(x) = (x-1)^2,\ 0 < x < 1.$
B) A função densidade condicional de $X|Y$ é $f(x|y) = \frac{(1-x-y)}{(1-y)^2}$, $0 < x < 1.$
C) A função densidade condicional de $Y|X$ é $f(y|x) = \frac{2(1-y)}{(1-x)^2}$, $0 < y < 1 - x.$
D) O valor esperado da variável aleatória X é igual a 0,25.
E) O valor esperado condicional de $X|Y$ é $E(X|Y = y) = \frac{1-y}{3}$.