UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

SOBRE PROBLEMAS ELÍPTICOS NÃO-LOCAIS COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA MISTA

Wanessa Shoraya Silva Santos

BELÉM
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Wanessa Shoraya Silva Santos

SOBRE PROBLEMAS ELÍPTICOS NÃO-LOCAIS COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA MISTA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e, defendida por Wanessa Shoraya Silva Santos como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Joelma Morbach. BELÉM

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237s Santos, Wanessa Shoraya Silva.
SOBRE PROBLEMAS ELÍPTICOS NÃO-LOCAIS COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA MISTA / Wanessa Shoraya Silva Santos. — 2021.
x,39 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Joelma Morbach
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Kirchhoff. 2. Fronteira Integral. 3. Fronteira mista. 4. Principio Variacional de Ekeland. 5. Teoria de Morse. I. Título.

CDD 515.353

Wanessa Shoraya Silva Santos

SOBRE PROBLEMAS ELÍPTICOS NÃO-LOCAIS COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA MISTA

Esta dissertação foi julgada e aprovada para a obtenção do título de Mestre em Matemática no Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Joelma Morbach - Orientadora (PPGME/UFPA)

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Junior - Membro Interno (PPGME/UFPA)

Prof. Dr. José Roberto Silva do Nascimento - Membro Externo

Belém 04 , de março de 2021

Resultado: Aprovado

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me iluminar, por tornar o caminho menos tortuoso e por me dar forças para continuar sempre. À Universidade Federal do Pará (UFPA), Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN) e ao Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística (PPGME).

Agradeço a minha orientadora Professora Joelma Morbach por ter me apoiado nessa jornada, por seus ensinamentos, pela dedicação nas orientações desse trabalho. Tenho grande admiração pelo seu trabalho e pela pessoa que é, muito obrigada.

Gratidão por essas pessoas que sempre me apoiaram e sei que continuarão a me apoiar: a minha rainha e mãe Marinalva Sousa dos Santos que sempre me incentivou na jornada dos estudos assim como meu pai, Antonio Reginaldo Silva dos Santos, que com sua simplicidade como agricultor sempre tentou mostrar que a educação era o melhor caminho a seguir para conseguir um futuro melhor. Muito obrigada mãe e pai. A minha irmã, Flávia Silva Santos pelo apoio que me deu e suas palavras de carinho.

Sem dúvidas não poderia deixar de mencioná-los, o meu marido, companheiro e amigo André Renan e ao nosso querido filho Arthur Silva Barros motivo de alegria infinita e muitas noites em claro “kkk”. Sou muito grato a vocês por sempre estarem comigo e serem parte disso durante toda essa trajetória, mesmo antes da aprovação. Um dos meus esteios! obrigado André por me dar forças nos momentos mais difíceis, por simplesmente estar ali do lado. Para mim já era o suficiente. Obrigada por acreditar em mim e por me fazer acreditar também. Te amo.

A todos que de forma direta ou indireta fizeram parte dessa caminhada. Meus sinceros agradecimentos!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste breve estudo usaremos algumas técnicas de Análise Funcional Não-Linear para investigar existência e multiplicidade de soluções para o seguinte problema elíptico não-local com condição de fronteira mista sob a forma

$$(P)\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2dx\right)\Delta u = \rho(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \Gamma_0, \\ M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2dx\right)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = f(u)\displaystyle\int_{\Gamma_1} F(u)d\sigma & \text{em} \quad \Gamma_1, \end{cases}$$

no qual vamos utilizar métodos variacionais para encontrar a solução de tal problema. Este trabalho está dividido em duas partes, no primeiro momento vamos utilizar o Principio Variacional de Ekeland para garantir a existência de pelo menos uma solução não trivial, depois Teoria de Morse para garantir a multiplicidade de soluções.

Palavras chave: Kirchhoff, Fronteira Integral, Fronteira mista, Principio Variacional de Ekeland, Teoria de Morse.

Abstract

In this brief study we will use some Nonlinear Functional Analysis techniques to investigate the existence and multiplicity of solutions for the following nonlocal elliptical problem with mixed boundary condition in the form

$$(P)\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = \rho(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \Gamma_0, \\ M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = f(u)\displaystyle\int_{\Gamma_1} F(u)d\sigma & \text{in } \Gamma_1, \end{cases}$$

where we will use variational methods to find the solution to such a problem. This work is divided in two parts, in the firsd moment we will use the Ekeland Variational Principle to ensure the existence of at least one non-trivial solution, then Morse Theory to guarantee the multiplicity of solutions.

Keywords: Kirchhoff, Boundary Integral, Boundary mixed, Ekeland Variational Principle, Morse Theory.

Índice de Notações

$\overline{\Omega}$, $|\,\Omega\,|$ e $\partial\Omega$ são, respectivamente, o fecho, a medida e a fronteira do conjunto Ω.

$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ u \text{ é mensurável e } \displaystyle\int_\Omega |u|^2 dx < +\infty \right\}.$

$\|u\|_2 = \left(\displaystyle\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma usual em $L^2(\Omega)$.

$W^{1,2}(\Omega)$ é espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$ tal que $\nabla u \in L^2(\Omega)$.

$\langle u, v \rangle = \displaystyle\int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv) dx$ é o produto interno usual em $W^{1,2}(\Omega)$.

$\|u\| = \left(\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma usual em $W^{1,2}(\Omega)$.

$W_0^{1,2}(\Omega)$ é espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$ tal que $\nabla u \in L^2(\Omega)$ e $\displaystyle\int_{\partial\Omega} u dx = 0$.

$\langle u, v \rangle_0 = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ é o produto interno usual em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

$\|u\|_0 = \left(\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma usual em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

$S(\Omega, 2, q) = \displaystyle\inf_{u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) dx}{\left(\displaystyle\int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma \right)^{2/q}}$ é a melhor constante de Sobolev da imersão compacta $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$.

$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o operador Laplaciano aplicado a função u.

$u_n \longrightarrow u$ convergência forte (em norma)

$u_n \rightharpoonup u$ convergência fraca

C^α é o conjunto das funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Hölder-contínuas de expoente α que possuem extensão contínua em $\overline{\Omega}$

$C^{1,\alpha}$ é o conjunto das funções $u \in C^1(\Omega)$ cuja derivada é Hölder-contínua com expoente $\alpha \in (0,1)$.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, utilizaremos Métodos Variacionais bem como a Teoria de Morse para investigar existência e multiplicidade de solução para um problema elíptico não-local com condição de fronteira mista sob a forma:

$$(P)\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2dx\right)\Delta u &= \rho(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 & \text{em} \quad \Gamma_0, \\ M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2dx\right)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= f(u)\displaystyle\int_{\Gamma_1} F(u)d\sigma & \text{em} \quad \Gamma_1, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular e Γ_0 e Γ_1 são superfícies não-vazias em $\partial\Omega$, com $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é contínua e $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 periódica de período $T > 0$. Vamos considerar que

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(\xi)d\xi \quad \text{e} \quad F(t) = \int_0^t f(\xi)d\xi$$

O problema (P) é denominado não-local devido a presença do termo $M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2dx\right)$ não ser calculado pontualmente.

Inicialmente, no capítulo 1 deste trabalho, buscou-se fazer uma abordagem sobre alguns conceitos e resultados da Teoria dos Pontos Críticos que serão utilizados no trabalho como Princípio Variacional de Ekeland e apresentamos uma noção básica a respeito da Teoria de Morse para que possamos aplicá-la no problema (P).

No capítulo 2, mostramos que existe uma solução não nula para o problema (P) utilizando o Príncipio Varioacional de Ekeland.

No capítulo 3, aplicamos a Teoria de Morse para mostrar a existência de pelo menos três soluções não triviais para o problema (P).

Capítulo 1

Uma breve recapitulação sobre a Teoria de Pontos Críticos

Este capítulo será reservado para a realização de um resumo sobre a teoria dos pontos críticos, em particular abordaremos dois métodos variacionais que são o Princípio Variacional de Ekeland e a Teoria de Morse.

1.1 Um resumo sobre a Teoria de Pontos Críticos

Nesta seção apresentamos um breve sumário de resultados recentes da teoria dos pontos críticos e dos métodos variacionais que utilizaremos.

Entendemos por métodos variacionais as técnicas usadas para demonstrar que um determinado funcional atinge um ponto crítico, em que encontrar este ponto equivale a determinar uma solução fraca para uma certa equação diferencial relacionada com o funcional.

Seja X um espaço de Banach real e seja $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional continuamente diferenciável, isto é, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $u \in X$ é um ponto crítico do funcional I se para toda $\varphi \in X$

$$I'(u)\varphi = 0, \tag{1.1}$$

em que $I'(u)$ denota a derivada de Fréchet. Nesse caso, o correspondente número $c = I(u)$ é chamado de valor crítico de I ou nível crítico de I. Veremos que na aplicação da teoria dos pontos críticos às equações diferencias, determinar um elemento $u \in X$ que verifica (1.1) é equivalente a determinar uma solução fraca para uma certa equação diferencial relacionada com o funcional.

No capitulo seguinte, veremos que o problema (P) possui estrutura variacional. Com isso queremos dizer que tal problema pode ser reformulado de maneira que a existência de solução pode ser obtida através da aplicação dos resultados da teoria de pontos críticos.

Ressaltamos que na Teoria dos Pontos Críticos existem diversos métodos variacionais, que são utilizados para resolver determinadas classes de problemas elípticos, tais como: O Método de Galerkin, O Teorema do Passo da Montanha, A Identidade de Pohozaev, entre outros. No entanto vamos nos atentar aos métodos utilizados neste trabalho para resolver o problema (P) que são os métodos descritos nas seções seguintes deste capitulo.

1.2 Princípio Variacional de Ekeland

O Princípio Variacional de Ekeland trata-se de um teorema provado por Ekeland em 1972 ver [12] e é uma forte ferramenta para resolver uma ampla classe de equações diferencias elípticas. Utilizaremos este teorema, mais precisamente uma de suas consequências para mostrar que o problema (P) possui uma solução não trivial.

Antes de enunciarmos o Princípio Variacional de Ekeland definimos um funcional semicontínuo inferiormente.

Definição 1.1. *Seja X um espaço topológico, a função $\phi : X \to \mathbb{R}$ é dita ser semicontínua inferiormente se, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $\phi^{-1}(\lambda, +\infty)$ é aberto em X, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Teorema 1.1. *(Princípio Variacional de Ekeland) Sejam X um espaço Métrico Completo e $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente. Suponhamos que ϕ seja limitado* *inferiormente e sejam* $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ *e* $u \in X$ *dados tais que*

$$\phi(u) \leq \inf_X \phi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

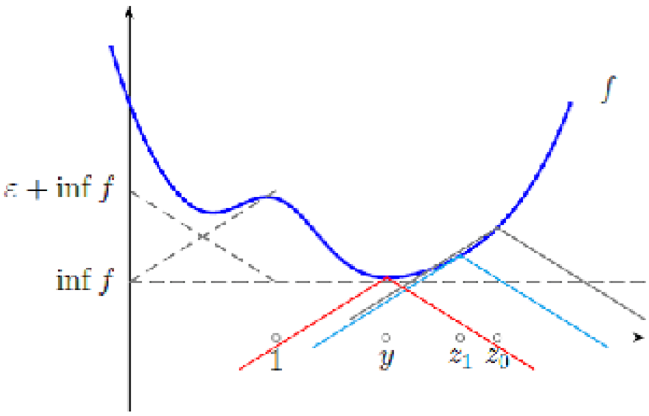
Então existe $u_\varepsilon \in X$ *tal que*

(a) $\phi(u_\varepsilon) \leq \phi(u)$;

(b) $d(u, u_\varepsilon) \leq \frac{1}{\lambda}$;

(c) *Para cada* $w \in X$, *com* $w \neq u_\varepsilon$, $\phi(u_\varepsilon) < \phi(w) + \varepsilon\lambda d(u_\varepsilon, w)$.

O Princípio Variacional de Ekeland apresenta uma forma de aproximação do ínfimo ao garantir que, para $\varepsilon > 0$, a função f possui um cone suporte da forma $f(y) - \varepsilon\|x - y\|$. Uma forma de verificar como isto acontece geometricamente é ilustrada na figura seguinte.



Começando com um ponto y_0 tal que $f(y_0) < \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$ e com cone $f(y_0) - \varepsilon\|x - y_0\|$. Se este cone não é suporte para f então existe um ponto

$$y_1 \in A_1 = \{x \in X : f(x) \geq f(y_0) - \varepsilon\|x - y_0\|\}$$

tal que

$$f(y_1) < \inf_{x \in A} f(x) + \frac{1}{2}\left(f(y_0) - \inf_{x \in A} f(x)\right).$$

Se $f(y_1) - \varepsilon\|x - y_1\|$ não é cone suporte para f, então repetimos o processo. Esse procedimento finalmente determina um cone suporte para f ou gera uma sequencia de subconjuntos fechados $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ cujos os diâmetros tendem a zero. No último caso, definimos $\{y\} = \cap_{i=1}^{+\infty} A_i$, deste modo obtemos o cone suporte $f(y) - \varepsilon\|x - y\|$.

Para apresentar uma consequência importante do Princípio Variacional de Ekeland para este trabalho, precisaremos da seguinte definição:

Definição 1.2. *Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que a seqüência $(u_n) \in X$ é Palais-Smale no nível c para I se as seguintes convergências ocorrem:*

$$I(u_n) \longrightarrow c \text{ e } I'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Dizemos que o funcional I satisfaz a condição Palais-Smale no nível c se toda seqüencia Palais-Smale no nível c possui subseqüência convergente em X.

Corolário 1.1. *Sejam X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 limitado inferiormente. Então, existe uma sequência Palais-Smale (u_n) no nível c para I, onde $c = \inf\limits_{u\in X} I(u)$.*

Mais adiante, quando nos referirmos ao Princípio Variacional de Ekeland, mais precisamente estaremos nos referindo ao próximo resultado que pode ser encontrado em [10] e [13].

Corolário 1.2. *Sejam X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 limitado inferiormente. Se I satisfaz a condição $(PS)_c$ com $c = \inf\limits_{u\in X} I(u)$, então c é atingido em um ponto $u_0 \in X$, e u_0 é ponto crítico de I.*

1.3 Teoria de Morse

A Teoria de Morse é uma importante ferramenta no estudo de multiplicidade de pontos críticos para o funcional energia associado a um problema Elíptico, e portanto, no estudo de multiplicidade de soluções do problema desde que este possua as características desejáveis para aplicação dos resultados. Nesta teoria, o comportamento de um funcional de classe C^1 definido sobre um espaço de Banach próximo de um de seus pontos críticos isolados é descrito por seus grupos críticos, que são grupos de homologia de um certo par topológico. Neste trabalho não entraremos em detalhes sobre como utilizar a Teoria de Morse de modo geral, mas pretendemos falar minimamente dos conceitos necessários ao entendimento da aplicação da teoria de Morse que faremos mais adiante. Vamos mostrar que o problema (P) possui caracterização variacional e que seu funcional associado é de classe C^2, dessa forma basta garantirmos algumas condições sob as quais os grupos críticos tenham dimensão finita e se anulem para dimensões grandes.

Seja H um espaço de Hilbert e $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear de classe $C^2(H, \mathbb{R})$. Denotaremos por K_f o conjunto dos pontos críticos de f.

A teoria de Morse "clássica"preocupa-se em estabelecer relações entre a topologia do domínio do funcional f e a "estrutura"do conjunto de pontos críticos de f quando estes são não-degenerados, ou seja, em um subconjunto de K_f. Lembrando que se Ω é um aberto de um espaço de Hilbert H e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável num ponto $u \in K_f$, então a diferencial segunda de f em u é uma aplicação bilinear simétrica $(d^2f)(u) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ ou equivalentemente uma aplicação linear simétrica $(d^2f)(u) : H \longrightarrow H^\star \simeq H$.

Vejamos algumas definições necessárias ao entendimento da aplicação que faremos neste trabalho.

Definição 1.3. *Seja H um espaço de Hilbert e $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear de classe $C^2(H, \mathbb{R})$ e $u \in K_f$ um ponto crítico de f.*

(a) Chama-se índice do ponto crítico u denotado por $m(f, u)$ a dimensão (possivelmente infinita) de um subespaço maximal sobre o qual $(d^2f)(u)$ é definida negativa.

(b) O ponto crítico u é dito um ponto crítico não-degenerado se $(d^2f)(u)$ é inversível (com inversa contínua).

Os pontos críticos não degenerados são completamente classificados pelo Lema de Morse. Quanto aos pontos críticos degenerados, a situação é diferente. O resultado que aplicaremos será enunciado a seguir e pode ser encontrado em [21]

Teorema 1.2. *Seja $f \in C^2(X;\mathbb{R})$ limitado inferiormente. Assuma que f satisfaz a condição Palais-Smale e que u_0 é um ponto crítico não degenerado de f que não é ponto de mínimo com índice de Morse finito. Então f tem pelo menos três ponto críticos.*

Demonstração. ver [21]

O teorema anterior é o principal resultado da Teoria de Morse, ao qual faremos uso para mostrar que o problema (P) tem múltiplas de soluções. Mas é importante ressaltar que existem resultados da Teoria de Morse em que e possível classificar e até contar os pontos críticos de um funcional, porém esses resultados não foram utilizados nessa dissertação.

Capítulo 2

Problema Não-Local com Condição de Fronteira Mista

Neste capítulo vamos mostrar que o problema (P) possui uma estrutura variacional, em seguida iremos utilizar o principio variacional de Ekeland para garantir a existência de ao menos uma solução fraca não nula.

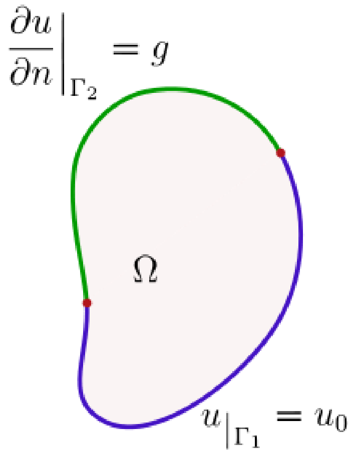
Definição 2.1. *A condição de fronteira de mista, também chamada de Robin, consiste em uma combinação linear das condições de Dirichlet e de Neumann.*

A condição de fronteira de Dirichlet (ou de primeiro tipo) é um tipo de condição de fronteira que quando aplicada sobre uma equação diferencial ordinária ou parcial, especifica os valores que uma solução necessita tomar na fronteira do domínio. A questão de encontrar-se soluções para tais equações é conhecida como problema de Dirichlet.

A condição de fronteira de Neumann (ou de segundo tipo) é um tipo de condição de fronteira que quando aplicada a uma equação diferencial ordinária ou parcial, especifica os valores que a derivada de uma solução deve tomar na fronteira do domínio. A condição de contorno de Neumann especifica a derivada normal à função no domínio, ou seja, é um fluxo.

O problema (P) é um problema com condição de fronteira mista e a condição de fronteira mista para uma equação diferencial parcial indica que diferentes condições de fronteira são usadas em diferentes partes da fronteira do domínio da equação.

A condição de fronteira mista pode ser pensada como no gráfico abaixo, onde em verde representa a condição de contorno de Neumann e azul representa a condição de contorno de Dirichlet, além disso $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$



2.1 Existência de solução para o problema (P) via Princípio Variacional de Ekeland

Consideremos o problema.

$$
(P)\begin{cases}
-M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u &= \rho(x) \quad \text{em} \quad \Omega,\\
u &= 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0,\\
M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= f(u)\displaystyle\int_{\Gamma_1} F(u)d\sigma \quad \text{em} \quad \Gamma_1,
\end{cases}
$$

em que Γ_0 e Γ_1 são superfícies não-vazias em $\partial\Omega$, com $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$ e $\Omega \in \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e regular.

Considere as seguintes hipóteses:

(ρ) $\rho \in L^2(\Omega)$ e $\displaystyle\int_\Omega \rho(x)dx = 0$;

(M) $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é contínua e existe $m_0 > 0$ tal que $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \geq 0$;

(F) $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1, periódica de período $T > 0$.

(λ) Sejam $\lambda_1 < \lambda_2 < ...$ os autovalores de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$. Suponhamos também que $\lambda_j < f'(0) < \lambda_{j+1}$, para algum $j \geq 1$.

Lembremos que dizer que F é periódica, de período T, equivale a dizer que $F(t+T) = F(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Além disso vamos considerar que $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(\xi)d\xi$ em que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Desde que F é periódica e $F'(t) = f(t)$ e como a derivada de funções periódicas é, também, periódica, segue-se que f é periódica de período T.

Consideremos o espaço em que vamos obter a solução do problema como sendo o espaço

$$V = \left\{v \in W^{1,2}(\Omega); v|_{\Gamma_0} = 0\right\}$$

o qual é subespaço fechado de $W^{1,2}(\Omega)$. Em V definamos a norma

$$\|u\|_V^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_1} u^2 d\sigma.$$

Designaremos por $\| \bullet \|_{L^2(\Omega)}$ a norma usual no espaço $L^2(\Omega)$ e por $\| \bullet \|_{L^p(\Gamma_1)}$ a norma usual no espaço $L^p(\Gamma_1)$, isto é,

$$\|u\|_{L(\Gamma_1)}^p = \left(\int_{\Gamma_1} |u|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}};$$

$$\|u\|_{L(\Omega)}^2 = \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Designaremos pot X_0 o subespaço de $W^{1,2}(\Omega)$ definido por:

$$X_0 = \left\{w \in W^{1,2}(\Omega); \int_\Omega w dx = 0\right\}$$

Seja também $X_1 = \langle 1 \rangle \subset W^{1,2}(\Omega)$. Desse modo, temos a seguinte decomposição

$$W^{1,2}(\Omega) = X_0 \oplus X_1.$$

E assim, podemos considerar a decomposição de V como

$$V = (V \cap X_0) \oplus (V \cap X_1)$$

e chamemos $Y_0 = (V \cap X_0)$ e $Y_1 = (V \cap X_1)$. Assim, $V = Y_0 \oplus Y_1$.

Temos também pela desigualdade de Poincaré que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega w dx \leq C \int_\Omega |\nabla w|^2 dx \quad \forall w \in X_0.$$

Além disso $(V, \| \cdot \|_V)$ é um espaço de Hilbert, pois satisfaz a Desigualdade do Paralelogramo. De fato, sejam $u, v \in V$, temos que

$$\begin{aligned} \|u+v\|_V^2 &= \int_\Omega |\nabla u + \nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} (u+v)^2 d\sigma \\ &= \int_\Omega (|\nabla u|^2 + 2\nabla u \nabla v + |\nabla v|^2) dx + \int_{\Gamma_1} (u^2 + 2uv + v^2) d\sigma \end{aligned} \tag{2.1}$$

e

$$\begin{aligned} \|u-v\|_V^2 &= \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} (u-v)^2 d\sigma \\ &= \int_\Omega (|\nabla u|^2 - 2\nabla u \nabla v + |\nabla v|^2) dx + \int_{\Gamma_1} (u^2 - 2uv + v^2) d\sigma \end{aligned} \tag{2.2}$$

somando (2.1) e (2.2) obtemos:

$$\begin{aligned} \|u+v\|_V^2 + \|u-v\|_V^2 &= 2\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_1} u^2 d\sigma + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} v^2 d\sigma \right) \\ &= 2(\|u\|_V^2 + \|v\|_V^2). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Vamos agora encontrar o funcional associado ao problema (P). Multiplicando a função teste $\varphi \in C_0^\infty$ em (P) e integrando em seguida, obtemos

(i) $M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right) \int_\Omega -\Delta u \varphi dx = \int_\Omega \rho(u) \varphi dx;$

(ii) $\int_{\Gamma_0} u \varphi dx = 0;$

(iii) $M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right) \int_{\Gamma_1} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma = \int_{\Gamma_1} f(u) \varphi d\sigma \left(\int_{\Gamma_1} F(u) d\sigma \right).$

Usando a identidade de Green em (i) obtermos:

$$\begin{aligned} M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Big(\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma\Big) &= \int_\Omega \rho(u)\varphi dx \\ M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx &= \int_\Omega \rho(u)\varphi dx + M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma \end{aligned}$$

Segue de (iii) que

$$M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega \rho(u)\varphi dx + \int_{\Gamma_1} f(u)\varphi d\sigma \Big(\int_{\Gamma_1} F(u) d\sigma\Big).$$

Assim, o funcional associado ao problema (P) é um funcional I cuja a derivada no sentido de frechet em u é dada por

$$I'(u)\varphi = M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega \rho(u)\varphi dx - \int_{\Gamma_1} f(u)\varphi d\sigma \Big(\int_{\Gamma_1} F(u) d\sigma\Big) \quad (2.4)$$

Logo $I : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big) - \int_\Omega \rho(x) u dx - \frac{1}{2}\Big(\int_{\Gamma_1} F(u) d\sigma\Big)^2 \quad (2.5)$$

onde,

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(\xi) d\xi \ \text{ e } \ F(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi$$

é o candidato natural a funcional associado ao problema (P).

Proposição 2.1. *Seja Ω um domínio limitado e regular do $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas satisfazendo as hipóteses do problema (P). Então o funcional $I : V \longrightarrow \mathbb{R}$ dado em (2.5) é de classe $C^1(V, \mathbb{R})$, com*

$$\begin{aligned} I'(u)\varphi &= M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega \rho(x)\varphi dx \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} f(u)\varphi d\sigma \Big(\int_{\Gamma_1} F(u) d\sigma\Big) \quad \forall u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega). \end{aligned}$$

Demonstração. Consideremos $I(u) = \frac{1}{2}J_1(u) - J_2(u) - \frac{1}{2}J_3(u)$ onde

$$J_1(u) = \hat{M}\bigg(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\bigg),\ J_2(u) = \int_\Omega \rho(x) u dx \text{ e } J_3(u) = \bigg(\int_{\Gamma_1} F(u) d\sigma\bigg)^2.$$

Mostraremos que $J_1, J_2, J_3 \in C_1(V, \mathbb{R})$ com

$$J_1'(u)\varphi = 2M\bigg(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\bigg)\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx;$$

$$J_2'(u)\varphi = \int_\Omega \rho(x)\varphi dx;$$

$$J_3'(u)\varphi = 2\bigg(\int_{\Gamma_1} F(u) d\sigma\bigg)\int_{\Gamma_1} f(u)\varphi d\sigma.$$

Vamos calcular, inicialmente, a derivada de Gateaux DJ_1. Para isso, definimos $H_1(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$, assim temos que $DJ_1(u)\varphi = M\bigg(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\bigg) DH_1(u)\varphi$. Basta então mostrar que $H_1 \in C^1(V, \mathbb{R})$. De fato, por definição:

$$\begin{aligned}
DH_1(u)\varphi &= \lim_{t\to 0} \frac{H_1(u+t\varphi) - H_1(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla(u+t\varphi)|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 + 2t\nabla u \nabla\varphi + t^2|\nabla\varphi|^2 - |\nabla u|^2 dx}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega 2t\nabla u\nabla\varphi + t^2|\nabla\varphi|^2 dx}{t} \\
&= 2\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$DH_1(u)\varphi = 2\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx. \tag{2.6}$$

Mostraremos agora que H_1 é contínuo, com isso DJ_1 é contínuo. Seja $(u_n) \subset V$ uma sequência tal que $u_n \to u$ em V. Assim, para cada $\varphi \in V$ com $\|\varphi\|_V \leq 1$, aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$
\begin{aligned}
|DH_1(u_n)\varphi - DH_1(u)\varphi| &= \left|2\int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi dx - 2\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx\right| \\
&\leq 2\int_\Omega |\nabla u_n\nabla\varphi - \nabla u\nabla\varphi|dx \\
&= 2\int_\Omega |(\nabla u_n - \nabla u)\nabla\varphi|dx \\
&= 2\int_\Omega |\nabla(u_n - u)\nabla\varphi|dx \\
&= 2\int_\Omega |\nabla(u_n - u)||\nabla\varphi|dx \\
&\leq 2\left(\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\left(\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 dx + \int_{\Gamma_1}(u_n - u)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx + \int_{\Gamma_1}\varphi^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\|u_n - u\|_V\|\varphi\|_V \\
&\leq 2\|u_n - u\|_V.
\end{aligned}
$$

Portanto, aplicando a norma em $(V)'$, concluímos que

$$\|DH_1(u_n) - DH_1(u)\| := \sup_{\|\varphi\|_V\leq 1}|DH_1(u_n)\varphi - DH_1(u)\varphi| \leq 2\|u_n - u\|.$$

Logo, $DH_1(u_n) \to DH_1(u)$ em $(V)'$ quando $u_n \to u$ em V. Portanto, DH_1 é contínuo e deste modo, DJ_1 é contínuo e temos que $DJ_1 = J_1'$. Assim $J_1 \in C^1(V, \mathbb{R})$ e por (2.6), temos

$$DJ_1(u)\varphi = J_1'(u)\varphi = 2M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx. \tag{2.7}$$

Agora, vamos calcular a derivada de Gateaux DJ_2. Por definição, para todos $u, \varphi \in V$ temos:

$$
\begin{aligned}
DJ_2(u)\varphi &= \lim_{t\to 0}\frac{J_2(u + t\varphi) - J_2(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\displaystyle\int_\Omega \rho(x)(u - t\varphi)dx - \int_\Omega \rho(x)udx}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \rho(x)\left(\frac{u - t\varphi - u}{t}\right)dx \\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \rho(x)\varphi dx \\
&= \int_\Omega \rho(x)\varphi dx.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$DJ_2(u)\varphi = \int_\Omega \rho(x)\varphi dx. \tag{2.8}$$

Afirmo agora que DJ_2 é contínuo. De fato, note que para toda sequência $(u_n) \subset V$ com $u_n \to u$ em V e toda $\varphi \in V$ tal que $\|\varphi\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \|DJ_2(u_n) - DJ_2(u)\| &:= \sup_{\|\varphi\|_V \leq 1} |DJ_2(u_n)\varphi - DJ_2(u)\varphi| \\ &= \sup_{\|\varphi\|_V \leq 1} \left| \int_\Omega \rho(x)\varphi dx - \int_\Omega \rho(x)\varphi dx \right| = 0. \end{aligned}$$

Portanto DJ_2 é contínuo e temos que $DJ_2 = J_2'$. Assim $J_2 \in C^1(V, \mathbb{R})$ e por (2.8), temos

$$DJ_2(u)\varphi = J_2'(u)\varphi = \int_\Omega \rho(x)\varphi dx. \tag{2.9}$$

Para calcular a derivada DJ_3, definamos $H_3(u) = \displaystyle\int_{\Gamma_1} F(u)d\sigma$. Desse modo temos que $DJ_3(u)\varphi = \left(\displaystyle\int_{\Gamma_1} F(u)d\sigma\right) DH_3(u)\varphi$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, e para cada $u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, consideremos a função $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$h(s) = F(u + st\varphi).$$

Observe que

$$h'(s) = f(u + st\varphi)t\varphi, \quad h(1) = F(u + t\varphi) \ \text{ e } \ h(0) = F(u).$$

Desde que h é contínuo e diferenciável em $(0,1)$. Temos, do Teorema do Valor Médio, que existe $c \in (0,1)$ tal que $h(1) - h(0) = h'(c)$, o que implica

$$\frac{F(u + t\varphi) - F(u)}{t} = f(u + ct\varphi)\varphi. \tag{2.10}$$

Como f é contínua e integrável, temos que $f \in L^1(\Omega)$ e além disso,

$$f(u(x) + ct\varphi(x))\varphi(x) \longrightarrow f(u(x))\varphi(x) \ \text{ q.t.p } \quad \text{em } \ \Omega.$$

Então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebergue segue que

$$
\begin{aligned}
DH_3(u)\varphi &= \lim_{t\to 0}\frac{H_3(u+t\varphi)-H_3(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{F(u+t\varphi)-F(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\int_{\Gamma_1}F(u+t\varphi)d\sigma-\int_{\Gamma_1}F(u)d\sigma}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\int_{\Gamma_1}\frac{F(u+t\varphi)-F(u)}{t}d\sigma\\
&= \lim_{t\to 0}\int_{\Gamma_1}(f(u+ct\varphi)\varphi)d\sigma\\
&= \int_{\Gamma_1}f(u)\varphi d\sigma
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Como $F'(x)=f(x)$ e $F\in C^1(V,\mathbb{R})$, segue que f é contínua. Portanto $I\in C^1(V,\mathbb{R})$. ∎

Veremos agora que o funcional (2.5) é limitado inferiormente. De fato, note que se definimos

$$J(u)=\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_1}F(u)d\sigma\right)^2$$

temos que

$$\Big|\int_{\Gamma_1}F(u)d\sigma\Big|\leq\int_{\Gamma_1}F(u)d\sigma\ \leq C_1|\Gamma_1|.$$

Portanto

$$|J(u)|=\frac{1}{2}\Big|\int_{\Gamma_1}F(u)d\sigma\Big|^2\leq C_1^2|\Gamma_1|^2.$$

Recordemos que $V=Y_0\oplus Y_1$ e, portanto se $u\in V$ então $u=u_0+\alpha$ com, $u_0\in Y_0$ e $\alpha\in\mathbb{R}$. Logo

$$
\begin{aligned}
I(u)=I(u_0+\alpha) &= \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2dx\right)-\int_\Omega\rho(x)(u_0+\alpha)dx-\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_1}F(u)d\sigma\right)^2\\
&\geq \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2dx\right)-C_1^2|\Gamma_1|^2-\int_\Omega\rho(x)(u_0+\alpha)dx\\
&= \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2dx\right)-C_1^2|\Gamma_1|^2-\int_\Omega\rho(x)u_0dx-\alpha\int_\Omega\rho(x)dx
\end{aligned}
$$

E desde que

- $\displaystyle\int_\Omega \rho(x) = 0$
- $\displaystyle\int_\Omega \rho(x)u_0 \leq |\rho|_{L^2(\Omega)}|u_0|_{L^2(\Omega)} \leq |\rho|_{L^2(\Omega)}\left(\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ pois $u_0 \in Y_0 \subset X_0$
- $\displaystyle\widehat{M}(t) = \int_0^t M(\xi)d\xi \geq m_0 t$ para todo $t \geq 0$

o que implica que

$$\widehat{M}\Big(\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx\Big) \geq m_0\Big(\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx\Big).$$

Assim,

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx\right) - |\rho|_{L^2(\Omega)}\left(\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} - C_1^2|\Gamma_1|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}m_0\left(\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx\right) - |\rho|_{L^2(\Omega)}\left(\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} - C_1^2|\Gamma_1|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}m_0\gamma^2\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right) - |\rho|_{L^2(\Omega)}\gamma\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} - C_1^2|\Gamma_1|^2 \end{aligned}$$

onde $u_0 = \gamma v$, desse modo, $I(u) \longrightarrow +\infty$ quando $\gamma \longrightarrow +\infty$, isto é $I(u)$ é coercivo. Além disso, desde que a função

$$t \longmapsto \frac{1}{2}m_0 t - |\rho|_{L^2(\Omega)}t^{\frac{1}{2}} - C_1^2|\Gamma_1|^2,\ t \geq 0$$

é limitada inferiormente, então I é limitado inferiormente.

Mostraremos agora que o problema (P) possui solução fraca. Para isto, vamos obter um ponto crítico para o funcional

$$I(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) - \int_\Omega \rho(x)u dx - \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_1} F(u)d\sigma\right)^2.$$

Como $I \in C^1(V, \mathbb{R})$ é limitado inferiormente, do Corolário 1.1 do Princípio Variacional de Ekeland, existe uma sequência $(u_n) \subset V$ tal que

$$I(u_n) \longmapsto \inf_{u \in V} I(u)$$

e

$$I'(u_n) \longmapsto 0.$$

Pela caracterização de V como soma direta temos que $u_n = u_n^0 + \alpha_n$ com $\int_\Omega u_n^0 dx = 0$ e $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Como $F(u_n + T) = F(u_n)$ podemos supor $0 \leq \alpha_n \leq T$. E desde que $I(u_n)$ é convergente, então

$$|I(u_n)| \leq C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e daí

$$C \geq \frac{1}{2} m_0 \left(\int_\Omega |\nabla u_n^0|^2 dx \right) - |\rho|_{L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega |\nabla u_n^0|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} - C_1^2 |\Gamma_1|^2.$$

De onde conclui-se que a sequência

$$\left(\int_\Omega |\nabla u_n^0|^2 dx \right)$$

é limitada e da desigualdade de Poincaré

$$\int_\Omega u_n^0 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u_n^0|^2 dx \leq K_1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos que

$$\| u \|_V^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_1} u^2 d\sigma.$$

Além disso, $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$ e, portanto, o fato de (u_n^0) ser limitada em $W^{1,2}(\Omega)$ implica que (u_n^0) que também é limitada em $L^2(\Gamma_1)$.

Como V é um espaço de Hilbert, assim como $W^{1,2}(\Omega)$, temos que

$$\begin{array}{rcl} u_n & \rightharpoonup & u_0 \text{ em } V \\ \|u_n\|_V & \longrightarrow & t_0^2 \text{ em } \mathbb{R} \\ u_n & \longrightarrow & u_0 \text{ em } L^s(\Omega); 1 \leq s \leq 2^* \\ u_n & \longrightarrow & u_0 \text{ em } L^t(\Gamma_1); 1 \leq t \leq 2^* \\ u_n(x) & \longrightarrow & u_0(x) \text{ q.s. em } \Omega \\ u_n(x) & \longrightarrow & u_0(x) \text{ q.s. em } \Gamma_1 \end{array}$$

Daí

$$\int_\Omega \rho u_n dx \longrightarrow \int_\Omega \rho u_0 dx$$

Da continuidade de F, tem-se que

$$F(u_n(x)) \longrightarrow F(u_0(x)) \text{ q.s. em } \Gamma_1.$$

Desde que

$$|F(u_n(x))| \leq C_1 \in L^1(\Gamma_1),$$

segue do Teorema da Convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_{\Gamma_1} F(u_n) d\sigma \longrightarrow \int_{\Gamma_1} F(u_0) d\sigma.$$

Agora, o funcional

$$\begin{array}{rcl} J(u) : V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & J(u) = \|u\|_V^2 \end{array}$$

é conexo e semicontínuo inferiormente, de onde segue que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_V^2 = \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_V^2 \geq \|u_0\|_V^2$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Gamma_1} u_n^2 d\sigma \right) \geq \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + \int_{\Gamma_1} u_0^2 d\sigma.$$

Além disso,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx = \|u_n\|_V^2 - \int_{\Gamma_1} u_n^2 d\sigma$$

e como

$$u_n \longrightarrow u_0 \text{ em } L^2(\Omega)$$

tem-se

$$u_n \longrightarrow u_0 \text{ em } L^2(\Gamma_1)$$

e assim, a sequência real

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \right)$$

é convergente. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + \lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_1} u_n^2 d\sigma \geq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \int_{\Gamma_1} u_0^2 d\sigma$$

o que equivale a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Gamma_1} u_0^2 d\sigma \geq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \int_{\Gamma_1} u_0^2 d\sigma$$

ou seja

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx.$$

Como M é positiva, segue- se que $\widehat{M}$ é crescente e portanto,

$$\widehat{M} \left(\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \right) \geq \widehat{M} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\inf_{u\in V} I(u) &= \lim_{n\to\infty} I(u_n) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx\right) - \int_\Omega \rho(x) u_n dx - \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_1} F(u_n) d\sigma\right)^2\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx\right) - \int_\Omega \rho(x) u_0 dx - \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_1} F(u_0) d\sigma\right)^2 \\
&= I(u_0) \\
&\geq \inf_{u\in V} I(u).
\end{aligned}$$

Portanto, $I(u_0) = \inf\limits_{u\in V} I(u)$. ■

Isso mostra que o ínfimo $\inf\limits_{u\in V} I(u)$ e atingido em $u_0 \in V$. E temos pelo Princípio Variacional de Ekeland que u_0 ponto crítico do funcional (2.5), isto é, u_0 é solução fraca não trivial do problema (P).

O que acabamos de mostrar foi que o problema (P) possui uma solução fraca não nula, mas a pergunta natural que se faz agora é: Será que tal solução é única? A resposta na verdade e negativa, vamos exibir no próximo capítulo deste trabalho o estudo feito para mostrar que o problema (P) possui pelo menos três soluções fracas não triviais distintas.

Capítulo 3

Multiplicidade de Soluções para o problema (P) via Teoria de Morse

Vimos no capítulo anterior que o problema (P) possui uma solução fraca não trivial, agora com o uso da Teoria de Morse vamos garantir que tal problema possui pelo menos três soluções distintas. Para isso vamos garantir que o funcional energia associado ao problema (P) satisfaz as hipóteses da Teoria de Morse.

3.1 Multiplicidade de soluções via Teoria de Morse

Proposição 3.1. *Sejam f e M nas mesma condições do problema (2.1) com $M' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, funções contínuas. Então o funcional $I : V \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$I(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) - \int_\Omega \rho(x) u dx - \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_1} F(u) d\sigma\right)^2$$

é de classe $C^2(V, \mathbb{R})$, com

$$\begin{aligned} I''(u)(\varphi, \psi) &= 2M'\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla \psi \nabla \varphi dx \\ &\quad - \int_{\Gamma^1} f'(u)\varphi\psi d\sigma \left(\int_{\Gamma^1} F(u) d\sigma\right) - \left(\int_{\Gamma^1} f(u)\varphi d\sigma\right)\left(\int_{\Gamma^1} f(u)\psi d\sigma\right). \end{aligned}$$

Demonstração. Consideremos

$$I'(u)\varphi = \phi_1(u) - \phi_2(u) - \phi_3(u)$$

onde

$$\phi_1(u) = M\bigg(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\bigg)\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx,$$

$$\phi_2(u) = \int_\Omega \rho(x)\varphi dx$$

e

$$\phi_3(u) = \int_{\Gamma_1} f(u)\varphi d\sigma\left(\int_{\Gamma_1} F(u)d\sigma\right).$$

Mostraremos que $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in C^1(V, \mathbb{R})$ com

$$\begin{aligned}
\phi_1'(u) &= 2M'\bigg(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\bigg)\int_\Omega \nabla u\nabla\psi dx\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx + M\bigg(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\bigg)\int_\Omega \nabla\psi\nabla\varphi dx;\\
\phi_2'(u) &= 0;\\
\phi_3'(u) &= \left(\int_{\partial\Omega} f(u)\psi d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma\right) + \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} f'(u)\varphi\psi d\sigma\right).
\end{aligned}$$

Inicialmente vamos calcular a derivada de Gateaux $D\phi_1$, para isso definamos $\omega_1(u) = \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx$ e pela Proposição 2.1 temos que

$$D\phi_1(u)\psi = 2M'\bigg(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\bigg)\int_\Omega \nabla u\nabla\psi dx\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx + M\bigg(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\bigg)D\omega_1(u)\varphi.$$

Vamos então calcular a derivada de Gateaux $D\omega_1$,

$$\begin{aligned}
D\omega_1(u)\psi &= \lim_{t\to 0}\frac{\omega_1(u+t\psi) - \omega_1(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\displaystyle\int_\Omega \nabla(u+t\psi)\nabla\varphi dx - \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\displaystyle\int_\Omega t\nabla\psi\nabla\varphi dx}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t}{t}\int_\Omega \nabla\psi\nabla\varphi dx\\
&= \int_\Omega \nabla\psi\nabla\varphi dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$D\omega_1(u)\psi = \lim_{t\to 0} \frac{\omega_1(u+t\psi)-\omega_1(u)}{t} = \int_\Omega \nabla\psi\nabla\varphi dx. \tag{3.1}$$

Mostraremos agora que $D\omega_1$ é contínuo, com isso $D\phi_1$ é contínuo. Seja (u_n) uma sequência em V tal que $u_n \to u$ em V. Assim, para cada $\psi \in V$ com $\|\psi\| \leq 1$, temos

$$|[D\omega_1(u_n) - D\omega_1(u)]\,\psi| \;=\; \left|\int_\Omega \nabla\psi\nabla\varphi dx - \int_\Omega \nabla\psi\nabla\varphi dx\right| = 0.$$

Deste modo concluímos que

$$\|D\omega_1(u_n) - D\omega_1(u)\| := \sup_{||\psi||\leq 1} |D\omega_1(u_n)\psi - D\omega_1(u)\psi| = 0.$$

Logo, $D\omega_1(u_n) \to D\omega_1(u)$ em V' quando $u_n \to u$ em V. Portanto, o operador $D\omega_1$ é contínuo e deste modo, $D\phi_1$ é contínuo e temos que $D\phi_1 = \phi_1'$. Assim $\phi_1 \in C^1(V,\mathbb{R})$ e por (3.1), temos

$$\begin{aligned} \phi_1'(u)\psi &= D\phi_1(u)\psi \\ &= 2M'\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla u\nabla\psi dx \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx \\ &\quad +M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla\psi\nabla\varphi dx. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Vamos calcular a derivada de Gateaux $D\phi_2$, por definição

$$\begin{aligned} D\phi_2(u)\psi &= \lim_{t\to 0} \frac{\phi_2(u+t\psi)-\phi_2(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega \rho(x)\varphi dx - \int_\Omega \rho(x)\varphi dx}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$D\phi_2(u)\psi = 0. \tag{3.3}$$

Calcularemos a derivada de Gateaux de $D\phi_3$. Definamos inicialmente $\omega_3(u) =$

$\int_{\Gamma_1} f(u)d\sigma$ e pela proposição 2.1 temos

$$D\phi_3(u)\psi = D\omega_3(u)\psi\Big(\int_{\Gamma_1} F(u)d\sigma\Big) - \Big(\int_{\Gamma_1} f(u)\varphi d\sigma\Big)\Big(\int_{\Gamma_1} f(u)\psi d\sigma\Big).$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e para cada $u, \varphi, \psi \in V$, consideremos a função $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $h(s) = f(u + st\psi)\varphi$. Observe que

$$h(s)' = f'(u + st\psi)t\psi\varphi,$$

$$h(1) = f(u + t\psi)\varphi$$

e

$$h(0) = f(u)\varphi.$$

Desde que h é contínuo e diferenciável em $(0,1)$, temos do teorema do valor médio que existe $c \in (0,1)$ tal que $h(1) - h(0) = h'(c)$, o que implica

$$\frac{f(u + t\psi)\varphi - f(u)\varphi}{t} = f'(u + ct\psi)\psi\varphi. \tag{3.4}$$

Como f é periódica, contínua e integrável, temos f' é contínua e integrável por períodos implica que $f' \in L^1(\Omega)$. Além disso, como f' é contínua ao tomarmos uma sequência $|t_n| \to 0$ quando $n \to +\infty$, encontramos

$$f'(u(x) + ct_n\varphi(x))\varphi(x) \longrightarrow f(u(x))\varphi(x) \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned} D\omega_3(u)\psi &= \lim_{t_n \to 0} \frac{\omega_3(u + t_n\psi) - \omega_3(u)}{t_n} \\ &= \lim_{t_n \to 0} \frac{\int_{\Gamma_1} f(u + t_n\psi)\varphi - \int_{\Gamma_1} f(u)\varphi}{t_n} \\ &= \lim_{t_n \to 0} \int_{\Gamma_1} f'(u + ct_n\psi)\psi\varphi \\ &= \int_{\Gamma_1} f'(u)\psi\varphi. \end{aligned}$$

Portanto $I \in C^2(V, \mathbb{R})$ ■

Lema 3.1. *A origem de* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *é um ponto crítico não degenerado de* I.

Demonstração.

$$I(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right) - \int_\Omega \rho(x)u dx - \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_1} F(u) d\sigma\right)^2$$

temos

$$\begin{aligned} I''(0)(\varphi,\psi) = \;& 2M'\left(\int_\Omega |\nabla 0|^2 dx\right)\left(\int_\Omega \nabla 0 \nabla \varphi dx\right) + M\left(\int_\Omega |\nabla 0|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla\psi\nabla\varphi dx \\ & - \int_{\Gamma_1} f'(0)\varphi\psi d\sigma \left(\int_{\Gamma_1} F(0) d\sigma\right) - \left(\int_{\Gamma_1} f(0)\varphi d\sigma\right)\left(\int_{\Gamma_1} f(0)\psi d\sigma\right) \end{aligned}$$

Para mostrar que 0 é um ponto não degenerado, devemos mostrar que

$$L = I''(0) : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$$

dado por

$$I''(0)(\varphi,\psi) = \langle L\varphi, \psi\rangle$$

é invertível.

O Teorema A.6 garante a existência de uma aplicação linear e contínua $T : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$\langle T\varphi, \psi\rangle = \int_{\Gamma_1} f'(0)\varphi\psi d\sigma.$$

Assim, se indicarmos por Id a aplicação identidade de $W_0^{1,2}(\Omega)$, podemos escrever

$$I''(0)(\varphi,\psi) = \langle Id\varphi, \psi\rangle - \langle T\varphi, \psi\rangle\,,$$

ou melhor

$$I''(0)(\varphi,\psi) = \langle (Id - T)\varphi, \psi\rangle\,.$$

Portanto $L = Id - T$.

Claramente o operador $Id-T$ é linear contínuo e simétrico. Vamos mostrar que T é um operador compacto. Seja φ_n uma sequência limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Pela imersão compacta $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, existe uma subsequência φ_{n_j} de $\varphi_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$\varphi_{n_j} \to \varphi \text{ em } L^2(\Omega).$$

Vamos mostrar que $T\varphi_{n_j} \to T\varphi$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. De fato, note que

$$\begin{aligned} \|T\varphi_{n_j} - T\varphi\|_0^2 &= \left\langle T\varphi_{n_j} - T\varphi, T\varphi_{n_j} - T\varphi \right\rangle \\ &= \left\langle T\varphi_{n_j}, T\varphi_{n_j} - T\varphi \right\rangle - \left\langle T\varphi, T\varphi_{n_j} - T\varphi \right\rangle \\ &= \int_{\Gamma_1} f'(0)\varphi_{n_j}(T\varphi_{n_j} - T\varphi)d\sigma - \int_{\Gamma_1} f'(0)\varphi(T\varphi_{n_j} - T\varphi)d\sigma, \end{aligned}$$

ou melhor,

$$\|T\varphi_{n_j} - T\varphi\|_0^2 = \int_{\Gamma_1} f'(0)(\varphi_{n_j} - \varphi)(T\varphi_{n_j} - T\varphi)d\sigma.$$

Usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|T\varphi_{n_j} - T\varphi\|_0^2 \leq f'(0)\|\varphi_{n_j} - \varphi\|_{L^2(\Omega)}\|T\varphi_{n_j} - T\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pela desigualdade de Poincaré,

$$\|T\varphi_{n_j} - T\varphi\|_0^2 \leq f'(0)\|\varphi_{n_j} - \varphi\|_{L^2(\Omega)}C\|T\varphi_{n_j} - T\varphi\|_0$$

de onde segue que

$$\|T\varphi_{n_j} - T\varphi\|_0 \leq Cf'(0)\|\varphi_{n_j} - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \to 0,$$

logo $T\varphi_{n_j} \to T\varphi$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Portanto T é um operador compacto. Pela alternativa de Fredholm (Proposição A.2) mostraremos que $Id-T$ é bijetivo, basta mostrar que o mesmo é injetivo, isto é, $Ker(Id-T) = \{0\}$. Se $\varphi \in Ker(Id-T)$, temos

$$\langle (Id-T)\varphi, \psi \rangle = 0, \ \forall \psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

implicando que

$$\int_\Omega \nabla\varphi\nabla\psi dx = \int_{\Gamma_1} f'(0)\varphi\psi d\sigma,\ \forall\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

donde segue que $\varphi \in Ker(Id - T)$ é solução do problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta\varphi &= f'(0)\varphi \quad \text{em } \Omega, \\ \varphi &= 0 \quad \text{em } \Gamma_0. \end{cases}$$

Devemos garantir que $f'(0) \neq 0$, mas caso seja zero, desde que f' é periódica, podemos acrescentar uma constante K, com $0 < K < T$ e assim garantir que $f'(0) \neq 0$ e com isso temos que $\varphi = 0$. Logo $L = Id - T$ é linear contínuo e bijetivo. Além disso, pelo Teorema da Aplicação Aberta, $L = Id - T$ é um isomorfismo linear. Portanto 0 é um ponto critico não degenerado de I. ■

Lema 3.2. *O índice de Morse de I em $u_0 = 0$ é maior do que ou igual a 1, ou seja, $m(I, 0) \geq 1$.*

Demonstração. O índice de Morse de I em 0 é o supremo das dimensões de subespaços de $W_0^{1,2}(\Omega)$, sobre os quais $I''(0)$ é negativo definido, isto é, $I''(0)(\varphi,\psi) < 0$. Sabemos que

$$I''(0)(\varphi,\varphi) = \langle L\varphi, \varphi\rangle = \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx - f'(0)\int_\Omega |\varphi|^2 dx.$$

Assim, se φ_i é uma autofunção de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$ associado ao autovalor λ_i temos

$$I''(0)(\varphi_i, \varphi_i) = \int_\Omega |\varphi_i|^2(\lambda_i - f'(0))dx < 0$$

para todo $1 \leq i \leq j$, onde j é dado na hipótese (
lambda). Portanto $m(I, 0) \geq j \geq 1$. ■

Desde de que $I \in C^2(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ satisfaz a condição Palais-Smale, desde que I é limitado inferiormente e dos Lemas 3.1 e 3.2 que $u_0 = 0$ é ponto crítico não degenerado de I que não é ponto de mínimo com índice de Morse j finito. Pelo Teorema 1.2, I tem pelo menos três pontos críticos.

Capítulo 4

Considerações Finais

Vimos nos capítulos anteriores que o problema (P) possui solução não trivial, utilizando o Princípio Variacional de Ekeland. E com o uso da Teoria de Morse, garantimos a existência de pelo menos três soluções não triviais e distintas. Mas apenas com os estudos feitos até então, não tem como saber se a primeira solução obtida está entre as três obtidas posteriormente ou não.

Com isso em vista, um proposta para estudos futuros será, estudar mais a fundo o funcional energia associado ao problema (P) com o objetivo de aplicar resultados mais relevantes da Teoria de Morse, isto é, o objetivo é que possamos classificar ou até mesmo contar as soluções do problema.

Apêndice A

Conceitos e resultados

Nessa seção faremos uma abordagem superficial com respeito a Análise Funcional trazendo as principais definições e resultados que foram utilizados para realizar este estudo.

Definição A.1. *Sejam X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional, I é dito ser Fréchet diferenciável em $u \in X$ quando existe um funcional linear $T \in X'$, tal que,*

$$\lim_{||v|| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Tv}{||v||} = 0.$$

A derivada de Fréchet no ponto u, quando existe, é única. Vamos denotá-la por $I'(u)$.

Definição A.2. *Se A é um conjunto aberto em X, dizemos que funcional I é de classe C^1 em A ou simplesmente $I \in C^1(A, \mathbb{R})$ quando é Fréchet diferenciável em todo ponto $u \in X$ e o operador $I' : A \to X'$ é contínuo.*

Definição A.3. *Sejam X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional, I é dito ser Gâteaux diferenciável em u, se existe um funcional linear $T_u \in X'$, tal que,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - f(x)}{t} = T_u v, \quad \forall v \in X.$$

A derivada de Gâteaux no ponto u, quando existe, é única. Vamos denotá-la por $DI(u)$. Mais além, I é de classe C^1 em A se, a derivada de Gateaux existe e o operador $DI : E \to X'$ existe e é continuo.

Definição A.4. *Sejam E_1, E_2 dois Espaços Normados tais que $E_1 \subset E_2$. Diz-se que E_1 está imerso continuamente em E_2 ou que a imersão $E_1 \hookrightarrow E_2$ é contínua, quando a aplicação $i : E_1 \to E_2$ tal que $i(x) = x$ é uma aplicação contínua.*

Definição A.5. *Sejam E_1, E_2 dois Espaços Normados tais que $E_1 \subset E_2$. Diz-se que E_1 está imerso compactamente em E_2 ou que a imersão $E_1 \hookrightarrow E_2$ é compacta, quando a aplicação $i : E_1 \to E_2$ tal que $i(x) = x$ é uma aplicação compacta.*

Teorema A.1. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se (x_n) é uma seqüencia limitada em X, então existem uma subseqüência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ e $x \in X$ tais que $x_{n_j} \longrightarrow x$ em X.*

Demonstração. Ver [7].

Teorema A.2. *(de Vainberg): Seja (f_n) uma seqüencia de funções em $L^p(\Omega)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subseqüência $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ tal que*

(a) $f_{n_j}(x) \longrightarrow f_n(x)$ q.t.p. em Ω;

(b) Existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Ver [7].

Teorema A.3. *(da Convergência Dominada de Lebesgue): Seja (f_n) uma seqüencia de funções em $L^1(\Omega)$ e suponha que:*

(a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω;

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\displaystyle\int_\Omega f_n dx \longrightarrow \int_\Omega f dx$.

Demonstração. Ver [5].

Lema A.1. *(de Brezis-Lieb): Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$ e $(f_n) \subset L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ com $p > 1$. Suponha que $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω e exita $C > 0$, tal que*

$$\int |f_n|^p \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\int f_n\varphi \to \int f\varphi,\ \forall \varphi \in L^q(\Omega)$$

onde, $1/p + 1/q = 1$.

Demonstração. Ver [16].

Teorema A.4. *(Teorema de Rellich-Kondrachov): Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *seja um domínio limitado de classe* C^1. *Então as seguintes afirmações são válidas*

(i) Se $p < N$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para* $1 \leq q < p^*$ *em que* $1/p^* = 1/p - 1/N$;

(ii) Se $p = N$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para* $1 \leq q < +\infty$;

(iii) Se $p > N$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. *Além disso, as imersões são compactas.*

Demonstração. Ver [7]

Proposição A.1. *(Identidade de Green). Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto com fronteira* $\partial\Omega$ *de classe* C^1 *e* $u, \varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$. *Então*

$$-\int_\Omega \varphi \Delta u dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma.$$

Demonstração. Ver [16]

Teorema A.5. *(Desigualdade de Hölder) Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq P < +\infty$ *e* $1/p + 1/q = 1$. *Então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [5]

Teorema A.6. *(Teorema da Representação de Riesz-Fréchet): Sejam* H *um espaço de Hilbert e* $f \in H'$, *existe* $u \in H$ *tal que*

$$f(v) = \langle u, v \rangle,\ \forall v \in H.$$

Além disso,

$$|f|_{h'} = \|u\|_H.$$

Demonstração. Ver [7]

Proposição A.2. *(Alternativa de Fredholm): Sejam E um espaço de Banach e $T : E \to E$ um operador compacto. Então*

(i) $Ker(I - T)$ *tem dimensão finita;*

(ii) $R(I - T)$ *é fechado em* E *e* $R(I - T) = Ker(I - T^*)^{\perp}$*;*

(iii) $Ker(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I - T) = E$*;*

(iv) $dim(Ker(I - T)) = dim(Ker(I - T^*))$*.*

Demonstração. Ver [7]

Teorema A.7. *(Desigualdade de Poincaré): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado em relação a alguma direção do $\mathbb{R}^N$. Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \ \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [7]

O próximo resultado esta demostrado em [1]

Lema A.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$ um domínio limitado com fronteira regular $\partial\Omega$. Se $1 < p < N$ e $p \leq q \leq p^* = \frac{(N-1)p}{N-p}$. Então a imersão*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$$

é contínua. Além disso, se $q < p^* = \frac{(N-1)p}{N-p}$ então a imersão é compacta.

Assim, as funções de $W^{1,2}(\Omega)$ admitem um traço em $L^q(\partial\Omega)$ e temos a desigualdade do traço Sobolev

$$S_T(\Omega,2,q)\|u\|^2_{L^q(\partial\Omega)} \leq \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)},\ 1 \leq q \leq 2^* = \frac{2(N-1)}{N-2}.$$

Além disso, a melhor constante de Sobolev $S_T(\Omega,2,q)$ é dada

$$\lambda_1 = \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)\setminus W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)dx}{\left(\displaystyle\int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma\right)^{2/q}} > 0. \tag{1.1}$$

e as funções que fazem com que esse ínfimo seja atingido são justamente as autofunções associadas ao λ_1.

Referências Bibliográficas

[1] R.A. Adams, J.J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press (2003).

[2] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, G.M. Figueiredo, *On a class of nonlocal elliptic problems with critical growth*, Differential Equations Applications 3 (2010), 409-417.

[3] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and apllications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[4] G. Anello; *On a pertubed Dirichlet problem for a nonlocal differential equation of Kirchhoff type*, Bound. Val. Prob. 2011 (2011), 1-10.

[5] R. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley-Interscience (1995).

[6] V. Benci, G. Cerami, Multiple positive solutions of some elliptic problems via the morse theory and the domain topology, Calc. Var. 2 (1994), 29-48.

[7] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011)..

[8] F.J.S.A. Corrêa, G.M. Figueiredo, *On an elliptic equation of p-Kirchhoff-type via variational methods*, Bull. Austral. Math. Soc. 74 (2006), 263-277.

[9] F.J.S.A. Corrêa, G.M. Figueiredo, *On a p-Kirchhoff equation via Krasnoselskii's genus*, Appl. Math. Lett. 22 (2009), 819-822.

[10] D. G. De Figueiredo, *Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Tata Inst. Fund. Res. Lect. Math. Phys., Springer-Verlag 81 (1989).

[11] T. M. L. Diogo, *Existência e Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos Não-Locais com Condição de Fronteira Integrais*, Dissertação (mestrado) - Programa DE Pós-graduação em Matemática e Estatística(PPGME), Instituto de Ciências Exatas e Naturais(ICEN), Universidade Federal do Pará(UFPA), Belém, (2018).

[12] I. Ekeland, *On The Variational Principle*, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.

[13] G.M. Figueiredo, *Uma introdução à teoria dos pontos críticos*, PPGME-UFPA (2015).

[14] J. Jin, X. Wu, *Infinitely many radial solutions for Kirchhoff-type problems in R*, J. Math. Anal. Appl. 369 (2010), 564-574.

[15] N.I. Kavallaris, D.E. Tzanetis,*On the blow-up of a non-local parabolic problem*, Appl. Math. Lett. 19 (2006), 921-925.

[16] O. Kavian, *Introduction à théorie des points critiques et applications aux problémes elleptiques*, Springer-Verlag (1993).

[17] M. Lazzo, *Morse Theory and Multiple Positive Solutions to a Neumann Problem*, Ann. Mat. Pura Appl. 168 (1995), 205-217.

[18] J.L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics, International Symposium on Continuum*, Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro (1977), Mathematics Studies, 30 (1978), 284-346.

[19] T.F. Ma, J.E. Muñoz Rivera, *Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem*, Appl. Math. Lett. 16 (2003) 243-248.

[20] J. Morbach, *Problemas Elípticos Não-Locais com Condições de Fronteira Integrais.* Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Doutorado em Matemática, Belém, (2014).

[21] D. Pereira, *Existência e multiplicidade de solução para uma classe de Equações elípticas via teoria de Morse*, Dissertação (Mestrado), CCT-UFCG (2010).

[22] K. Perera, Z. Zhang, *Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index.* J. Differ. Equ. 221, 246-255 (2006).

[23] L. Sandra, *Existência de solução para duas classes de problemas elípticos usando a aplicação fibração relacionada à Variedade de Nehari*, Dissertação (Mestrado), UFJF (2014).

[24] S. Dias, *Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de equações elípticas quase lineares*, ICEX-UFMG (2011).

[25] Y. Wang, *Solutions to nonlinear elliptic equations with a nonlocal boundary condition*, Eletron. J. Diff. Eq. 2002 (2002), 1-16.

[26] M. Willem, *Minimax Theorems*, Boston, MA: Birkhauser, (1996).