UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

EXISTÊNCIA E CONCENTRAÇÃO DE SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS DO TIPO KIRCHHOFF-SCHRÖDINGER

Rosinildo Nunes Mota

Orientador: Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

BELÉM-PA
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Rosinildo Nunes Mota

EXISTÊNCIA E CONCENTRAÇÃO DE SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS DO TIPO KIRCHHOFF-SCHRÖDINGER

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

BELÉM-PA
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M917e Mota, Rosinildo Nunes.

Existência e concentração de soluções para uma classe de problemas elípticos do tipo Kirchhoff-Schrödinger / Rosinildo Nunes Mota. — 2021.

116 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Equação Elíptica Fracionária. 2. Métodos Variacionais. 3. Crescimento Crítico. 4. Argumentos de Truncamento. 5. Concentração de Soluções. I. Título.

CDD 510

Rosinildo Nunes Mota

EXISTÊNCIA E CONCENTRAÇÃO DE SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS DO TIPO KIRCHHOFF-SCHRÖDINGER

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial, para a obtenção do título de Mestre em Matemática, julgada pela seguinte banca examinadora.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa (Orientador)
PPGME/PDM-UFPA

Olímpio Hiroshi Miyagaki
Prof. Titular UFSCar
SIAPE 0413645

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
PPGM-UFSCar

Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa
UAMat-UFCG

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva
PPGME/PDM-UFPA

Data da defesa: 30/11/2021

Resultado: Aprovado

"Aos meus pais, Raimundo Ferreira Mota

e Dulcinéia Nunes Mota."

"A História está repleta de pessoas que, como resultado
do medo, ou por ignorância, ou por cobiça de poder,
destruíram conhecimentos de imensurável
valor que, em verdade, pertenciam a todos nós.
Nós não devemos deixar isso acontecer de novo."

Carl Sagan

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me proporcionar mais essa etapa da minha vida acadêmica, por me dar força e coragem ao longo dessa árdua caminhada, por fazer superar todas as dificuldades e alcançar esse objetivo. Dedico a ele toda minha honra.

Aos meus pais, Raimundo Ferreira Mota e Dulcinéia Nunes Mota, por me darem todas as condições necessárias e incentivos, e que nunca mediram esforços para que eu pudesse realizar meus objetivos. Sempre que pensei em desistir, também pensei neles, pois eles, são o motivo e a energia que me impulsionam. Portanto, sou muito grato, por te-los em minha presença.

Aos meu irmãos, por estarem sempre contribuindo junto a mim.

Aos nobres amigos e colegas que conheci nessa instituição, pela momentos de estudos, risadas e descontrações que juntos passamos durante este curso. A amizade é algo que necessitamos e portanto nunca esquecerei de vocês.

Ao meu orientador e amigo, professor Dr. Augusto César dos Reis Costa, agradeço imensamente pelo seu apoio, por ter acreditado em minha capacidade, por direcionar meus estudos com sua estimada experiência, pelos conselhos que repassou durantes esse curso, essenciais para meu conhecimento e crescimento pessoal, e que também, foram de suma importância para realizar esse sonho.

Agradeço os Professores Doutores, Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa, João Pablo Pinheiro da Silva e Olimpio Hiroshi Miyagaki por aceitarem participar desta banca examinadora.

À Universidade Federal do Pará pela oportunidade dada não só a mim, mas à toda a comunidade.

Aos professores e coordenadores do PPGME, pelas aulas ministradas, pelas dicas e direcionamentos dadas durante esse curso. De modo geral, agradeço ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN), pela oportunidade.

Agradeço também, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, concedido durantes este curso de mestrado.

Resumo

Neste trabalho, investigamos a existência e concentração de soluções, com energia mínima, para uma classe de equações elípticas fracionárias não-locais do tipo Kirchhoff-Schrödinger. Primeiro estudamos o problema

$$\begin{cases} M\left([u]_s^2 + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\right)((-\Delta)^s u + V(x)u) = \bar{c}u + f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u > 0, \quad u \in H^s(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $s \in (0,1)$, $N > 2s$, $[\,.\,]_s$ é a seminorma de Gagliardo, $\bar{c}$ é uma constante adequada, M é a função de Kirchhoff da forma $M(t) = m + bt^\alpha$ contínua e não degenerada, $V(x) = \lambda a(x) + 1$ é um potencial com $a(x) \geq 0$, onde a é identicamente nulo no conjunto limitado Ω_Υ, e f denota uma função com não linearidade contínua e crescimento subcrítico no infinito. A prova baseia-se em argumentos de penalização e métodos variacionais para obter a existência de solução com energia mínima para um valor grande de λ. Além disso, assumindo que $M(t) = m_0 + b_0 t^\alpha$ e utilizando as mesmas técnicas combinadas com um lema de concentração e compacidade, estabelecemos a existência e concentração de soluções para o problema

$$\begin{cases} M\left([u]_s^2 + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx\right)((-\Delta)^s u + V(x)u) = h(x)u + u^{2_s^*-1} \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u > 0, \quad em \quad \mathbb{R}^N, \quad u \in H^s(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

se λ for suficientemente grande e b_0 for pequena ou m_0 grande, onde $h \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}(\mathbb{R}^N)$ e 2_s^* é o expoente crítico fracionário de Sobolev. Os resultados aqui obtidos é devido a Augusto C. R. Costa, Bráulio B. V. Maia e Olímpio H. Miyagaki.

Palavra-chave: Equação Elíptica Fracionária, Equações Não-Locais, Métodos Variacionais, Crescimento Crítico, Argumentos de Truncamento, Concentração de Soluções.

Abstract

In this paper, we investigate the existence and concentration of solutions, with minimum energy, for a class of non-local fractional elliptic equations of the Kirchhoff-Schrödinger type. First we study the problem

$$\begin{cases} M\left([u]_s^2 + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2dx\right)((-\Delta)^s u + V(x)u) = \bar{c}u + f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u > 0, \quad u \in H^s(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

where $s \in (0,1)$, $N > 2s$, $[\,.\,]_s$ is the Gagliardo semi-norm, $\bar{c}$ is a suitable constant, M is the Kirchhoff function of the form $M(t) = m + bt^\alpha$ continuous and non-degenerate, $V(x) = \lambda a(x)+1$ is a potential with $a(x) \geq 0$, where a is identically zero on the bounded set Ω_Υ, and f denotes a function with continuous nonlinearity and subcritical growth at infinity. The proof relies on penalization arguments and variational methods to obtain the existence of a solution with minimal energy for a large value of λ. Furthermore, assuming that $M(t) = m_0 + b_0t^\alpha$ and using the same techniques combined with a concentration and compactness lemma, we establish the existence and concentration of solutions to the problem

$$\begin{cases} M\left([u]_s^2 + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\right)((-\Delta)^s u + V(x)u) = h(x)u + u^{2_s^*-1} \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u > 0, \quad em \quad \mathbb{R}^N, \quad u \in H^s(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

if λ is sufficiently large and b_0 is small or m_0 large, where $h \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}(\mathbb{R}^N)$ and 2_s^* is the critical fractional Sobolev exponent. The results obtained here are due to Augusto C. R. Costa, Bráulio B. V. Maia and Olímpio H. Miyagaki.

Keywords: Fractional Elliptic Equation, Non-Local Equations, Variational Methods, Critical Growth, Truncation Arguments, Concentration of Solution.

Índice de notações

- Nesta dissertação C denota constantes positivas que podem variar em cada linha;
- $\mathbb{R}^N$ denota o espaço euclidiano $N-$dimensional;
- Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$;
- $C^{0,1}$ denota espaço das funções Höder contínua;
- $\Omega_\Upsilon \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto e limitado de classe $C^{0,1}$;
- $(PS)_c$ denota a condição de Palais-Smale no nível c;
- $q.t.p.$ é uma abreviação de *"quase toda parte"* ou *"quase todo ponto"*;
- $supp(\varphi)$ denota o suporte da função φ;
- $o_n(1)$ uma sequência tal que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} o_n(1) = 0$;
- χ_{Ω_Υ} é a função característica do conjunto Ω_Υ;
- $C^k(\mathbb{R}^N) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ u \text{ é } k\text{-vezes continuamente diferenciável}\}$;
- $C^\infty(\mathbb{R}^N) = \bigcap\limits_{k \geq 1} C^k(\mathbb{R}^N)$ é o espaço infinitamente continuamente diferenciável;
- $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é o espaço das funções infinitamente continuamente diferenciável com suporte compacto;
- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ mensurável; \int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\}$ denotará o espaço de Lebesgue com $1 \leq p < \infty$;
- $|u|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ é a norma do espaço $L^p(\Omega)$;
- $L^\infty(\Omega) = (u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ mensurável; |u(x)| \leq C \ \ q.t.p \ \ x \in \Omega \ \ para \ \ algum \ \ C > 0)$
- $|u|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |u(x)| \leq C \ \ q.t.p \ \ em \ \ \Omega\}$ se $p = \infty$

- $[u]_s = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N-2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}$ é a seminorma de Gagliardo;
- $H^s(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N); [u]_s < +\infty\}$ denotará o espaço fracionário de Hilbert com $s \in (0,1)$;
- $||u||_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \left(|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + [u]^2_s \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma do espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$;
- $X(\Omega) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^N); u = 0 \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}$ denota o espaço das funções de $H^s(\mathbb{R}^N)$ que se anulam fora de Ω;
- $||u||_{X(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N-2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma de $X(\Omega)$;
- $E_\lambda = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^2 dx < +\infty \right\}$ é o espaço das funções $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ cuja integral $\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^2 dx$ é finita;
- $\langle u, v \rangle_\lambda = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1) uvdx$ é o produto interno em E_λ;
- $||u||_\lambda = \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma de E_λ;
- $(-\Delta)^s : S(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ denotará o operador Laplaciano fracionário;
- $S(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) / \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N, \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial_\beta u(x)| < \infty \right\}$ é o espaço de Schwartz;
- $\to$ denota a convergência forte em um espaço normado;
- $\rightharpoonup$ denota a convergência fraca em um espaço normado;
- $\overset{*}{\rightharpoonup}$ denota a convergência fraca estrela em um espaço normado.

Sumário

Introdução

Esta dissertação tem como objetivo explanar de maneira detalhada o artigo de Augusto C. R. Costa, Bráulio B. V. Maia e Olímpio H. Miyagaki [18]. Neste trabalho os autores estudaram a existência e concentração de soluções positivas para a seguinte classe de equações não lineares e não locais do tipo Kirchhoff-Schrödinger

$$(P_\lambda)\begin{cases} M\left([u]_s^2+\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2dx\right)((-\Delta)^s u+V(x)u)=\bar{c}u+f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u>0, \quad u\in H^s(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é uma função não linear, contínua com crescimento subcrítico, $V:\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$ é um potencial que iremos especificar posteriormente, $\bar{c}$ é uma constante positiva com uma certa condição e $s\in(0,1)$. Além disso, os autores fizeram o mesmo estudo para o problema com crescimento crítico, especificamente analisaram a seguinte equação

$$(P_*)\begin{cases} M\left([u]_s^2+\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2dx\right)((-\Delta)^s u+V(x)u)=h(x)u+u^{2_s^*-1} \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u>0, \quad em \quad \mathbb{R}^N, \quad u\in H^s(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $h:\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$ é uma função tal que $h\in L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}(\mathbb{R}^N)$ e 2_s^* é o expoente crítico fracionário de Sobolev.

As soluções dos problemas acima estão relacionadas com a equação não linear fracionária de Schrödinger

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=(-\Delta)^s\psi(x,t)+V(x)\psi(x,t)-\bar{c}\psi(x,t)-f(\psi(x,t)), \tag{1}$$

onde $\psi(x,t)$ representa a amplitude da probabilidade de uma particula de massa unitária na "mecânica quântica"para obtenção da posição x no momento t. As soluções da equação (1) são da forma

$$\psi(x,t) = e^{-i\omega t}u(x), \ \ \omega \in \mathbb{R},$$

onde u resolve os problemas (P_λ) e (P_*) quando $M \equiv 1$.

A equação (1) é uma variante da equação fracionária de Schrödinger

$$(FSE) \qquad ih\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = D_\alpha (h\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t),$$

introduzida por Laskin em [30] e [31], onde esta é usada na mecânica quântica para descrever partículas em campos estocásticos modelados por processos de Lévy. Além disso, o operador Laplaciano fracionário, surge naturalmente em certos problemas de diferentes áreas, bem como Finanças, probabilidade, Química, biologia entre outras, para o leitor interessado indicamos [9], [11] e [17].

Pela sua aplicabilidade e também pelo interesse puramente matemático esta equação vem sendo amplamente estudada. Ressaltamos aqui a equação

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = f(x,u) \ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

onde também as suas variantes vem sendo estudadas intensivamente. Por exemplo em [23] Felmer, Quaas e Tan consideraram $V \equiv 1$ e mostraram a existência de uma solução positiva, regular e simétrica para o problema

$$\begin{cases} -(\Delta)^s u + u = f(x,u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u > 0 \quad em \quad \mathbb{R}^N, \quad \lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0, \end{cases}$$

onde $0 < s < 1$, $N \geq 2$ e f tem crescimento subcrítico com respeito a u. Secchi em [37] mostrou a existência de solução com energia mínima ao considerar o potencial V limitado por baixo por uma constante positiva. É importante enfatizar que os estudos da equação acima para o caso crítico avançaram bastante desde a publicação do trabalho de Brézis e Nirenberg [16] em 1993 onde eles mostraram que para o parâmetro λ suficientemente grande o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) + u^{2^*-1} \quad em \quad \Omega \\ u > 0, \quad em \quad \Omega \\ u = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

tem solução não trivial. A partir dai, muitos outros autores têm estudado as variantes desse problema, por exemplo Miyagaki em [35] estendeu o trabalho de Brézis e Nirenberg ao considerar a equação

$$-\Delta u + a(x)u = \lambda |u|^{q-1}u + |u|^{2^*-2} \quad em \quad \mathbb{R}^N$$

e mostrou a existência de solução para $N = 3$, $1 < q \leq 3$ e λ grande. Para o caso fracionário, citamos o trabalho de Servadei e Valdinoci [38], onde eles estabeleceram um resultado do tipo Brezis-Niremberg para o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u - \lambda u = |u|^{2^*_s-2}u \quad em \quad \Omega \\ u = 0 \quad em \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $\lambda > 0$ é um parâmetro.

Ambrósio e Figueiredo mostraram em [8] a existência de solução ground station para a equação

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N,$$

aqui eles consideraram dois casos, primeiro supuseram o potencial V como uma constante e depois como não constante e utilizando o argumento de Jeanjean–Tanaka mostraram a existência de solução para o caso não autônomo. Para mais referências sobre a equação semilinear fracionária de Schrödinger, indicamos os artigos [4], [5].

Quando $M \neq 1$ a equação (P_λ) está relacionada com a equação de Kirchhoff

$$\rho u_{tt} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L |u_x|^2 dx \right) u_{xx} = 0$$

a qual apareceu pela primeira vez no trabalho de Kirchhoff em [29], onde esta representa as vibrações transversais de cordas elásticas. Ela é uma extensão da equação da onda de D'Alembert ao considerar os efeitos das mudanças de comprimento nas cordas durante as vibrações. Os parâmetros desta equação tem os seguintes significado; L é o comprimento da corda, $u = u(x,t)$ é o deslocamento da mesma na coordenada espacial x e no tempo t, h é a área seção transversal, E é o módulo de Young do material, ρ é a densidade da massa e P_0 é a tensão inicial. Até onde sabemos Vasconcelos em [39] foi quem primeiro introduziu o termo não local do tipo Kirchhoff em problemas elípticos. Citamos também os trabalhos de [32] e [2] que impulsionaram os estudos envolvendo este termo. Em [26], os autores estabeleceram um modelo estacionário de Kirchhoff na perspectiva fracionária para o problema

$$\begin{cases} -M(||u||_Z^2)\mathcal{L}_k u = \lambda f(x,u) + u^{2^*-2} \quad em \ \ \Omega \\ u = 0 \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

onde $\mathcal{L}_k$ é um operador integro-diferenciável. No qual, consideraram o aspecto não local da tensão nas cordas.

Seguindo nesta direção, os estudos sobre os problemas de Kirchhoff-Schrödinger tiveram avanços significativos à medida que foram considerados diferentes operadores, em diferentes domínio de $\mathbb{R}^N$ e outras condições de crescimento sobre f. Como por exemplo, em [33] Mingqi e seus colaboradores estudaram o seguinte problema envolvendo o operador magnético fracionário

$$M([u]_{s,A}^2)(-\Delta)_A^s u \ + V(x)u = f(x,|u|)u$$

em $\mathbb{R}^N$, onde f tem crescimento subcrítico e mostraram a existência e multiplicidade de soluções. Ao considerar a não linearidade de f do tipo Trudinger-Moser Mingqi, Zhang e Repovs também provaram em [34] a existência de múltiplas soluções.

Na referência [7] Ambrósio e Isernia mostraram, utilizando tecnicas de penalização, a multiplicidade e concentração de soluções positivas para a seguinte classe de problemas fracionário do tipo Kirchhoff-Schrödinger

$$M\left(\frac{1}{\varepsilon^{3-2s}}[u]_s^2 + \frac{1}{\varepsilon^3}\int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2 dx\right)[\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s u + V(x)u] = f(x)$$

no espaço de dimensão finita $\mathbb{R}^3$, onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro grande e f tem crescimento subcrítico. Além disso, usando teoria Ljusternik-Schnirelmann, investigaram a relação entre o número de soluções positivas com a topologia do conjunto onde o potencial atinge seu mínimo.

Para o caso crítico envolvendo o termo não local de Kirchhoff, ressaltamos o trabalho de Figueiredo em [24] no qual mostrou a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = \lambda f(u) + u^{2^*-1} \ \ em \ \ \Omega \\ u > 0, \ \ em \ \ \Omega \\ u = 0 \ \ sobre \ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde o a função de Kirchhoff satisfaz $M(t) \geq m_0$, f tenha crescimento subcrítico e λ seja um parâmetro suficientemente grande. Para o caso de kirchhoff com dominio ilimitado destacamos o trabalho de He e Zou [27], onde mostraram que para ε pequeno e λ grande, o problema

$$\begin{cases} -\left(\varepsilon^2 a + \varepsilon b \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + V(x)u = \lambda f(u) + u^{2^*-1} \ \ em \ \ \mathbb{R}^3 \\ u \in H^s(\mathbb{R}^3), u > 0, \ \ em \ \ \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

possui pelo menos uma categoria de soluções positivas.

O artigo estudado nesta dissertação contribui junto aos trabalhos citados anteriormente no sentido de que, iremos garantir a existência e concentração de soluções para os problemas (P_λ) e (P_*) trabalhando em todo o espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ e com o operador Laplaciano fracionário. Estes dois pressupostos dificultam ainda mais as contas, uma vez que, o operador Laplaciano fracionário tem caráter não-local, que juntamente com o termo de Kirchhoff dão caráter não local aos problemas, e ao considerar todo o espaço $N-$dimensional perdemos a compacidade dos funcionais associado aos problemas. Diante desses desafios e para que o leitor tenha uma boa compreensão do conteúdo dessa dissertação, dividimos ela da seguinte forma;

No capítulo 1 fizemos uma pequena introdução aos espaços de Sobolev fracionário onde apresentamos algumas de suas principais propriedades, introduzimos o espaço H^s que é um caso particular desses e definimos o operador Laplaciano fracionário.

No capítulo 2, vamos mostrar a existência e concentração de soluções positivas para o problema (P_λ), para tal feito, vamos utilizar um argumento de truncamento idealizado por Del Pino e Felmer em [19], sobre a não linearidade de f para contornar a falta de compacidade e assim construir um funcional auxiliar que satisfaça a condição Palais-Smale. Mostraremos que este funcional assume ponto de mínimo e em seguida recuperar a solução do problema (P_λ). Além disso, mostraremos que as soluções de (P_λ) se concentram em torno de uma solução de $(P)_{\Upsilon,\infty}$.

No capítulo 3, vamos fazer o mesmo estudo do capítulo 2, entretanto, neste caso consideraremos a não linearidade crítica de f. Utilizaremos os argumentos de Fiscella em [25] e uma versão do lema da concentração e compacidade de Lions, para superar a falta de compacidade causada pelo expoente crítico fracionário de Sobolev.

No apêndice, A expomos alguns resultados utilizados ao longo do texto. Já no apêndice B, mostramos que o funcional associado ao problema (P_λ) é de classe $C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$ e calculamos a derivada de Frechét. E por fim, no apêndice C, mostramos a limitação em L^∞ e a regularidade das soluções fracas.

Capítulo 1

Os Espaços de Sobolev Fracionário

Neste capítulo, seguindo Di Nezza, Palatucci e Valdinoci em [20] e Bisci, Radulescu e Servadei em [12], apresentaremos os espaços de Sobolev fracionário $W^{s,p}(\Omega)$ com $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty]$ e veremos que, como no caso clássico, ele apresenta as propriedades geométricas de reflexibilidade, separabilidade, densidade e verificamos as condições para a validade das imersões. Além disso, definiremos o operador Laplaciano fracionário e provaremos algumas de suas principais propriedades.

1.1 O Espaço $W^{s,p}(\Omega)$

Definição 1.1. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Para qualquer $p \in [1,\infty)$ e $s \in (0,1)$, defini-se o espaço de Sobolev Fracionário, como sendo*

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

Esse espaço é um espaço vetorial e munido com a norma

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx + \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach, onde o termo

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$$

é conhecido como seminorma de Gagliardo.

É importante observamos que se $s > 1$ com $s \notin \mathbb{N}$ a definição acima não é conveniente, pois se $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é uma função que cumpre

$$\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy < +\infty$$

então, de acordo com a proposição 2 em [14] u é uma constante. Portanto, para dá sentido ao espaço $W^{s,p}(\Omega)$ quando $s > 1$ e $s \notin \mathbb{N}$, podemos escrever $s = m + \sigma$, onde $m \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in (0,1)$ e assim definir $W^{s,p}(\Omega)$ por

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m,p}(\Omega) : D^{\alpha}u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \;\; para \;\; todo \;\; \alpha \; com \;\; |\alpha| = m \right\}.$$

Munido com a norma

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(||u||^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} ||D^{\alpha}u||^p_{W^{\sigma,p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

esse espaço é um espaço de Banach.

Uma das principais propriedades dos espaços de Sobolev clássico é a reflexibilidade para $1 < p < \infty$ e a separabilidade para $1 \leq p < \infty$ e de fato, essas propriedades continuam sendo válidas para o espaço fracionário.

Proposição 1.1. *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $s \in (0,1)$. Então, o espaço de Sobolev Fracionário $W^{s,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} T : W^{s,p}(\Omega) &\longrightarrow L^P(\Omega) \times L^P(\Omega\times\Omega) \\ u &\longmapsto T(u) = (u, v) \end{aligned}$$

onde $v(x,y) = \dfrac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+sp}}$. Observe que pelo fato de, $L^p(\Omega)$ ser um espaço de Banach, então $L^P(\Omega) \times L^P(\Omega \times \Omega)$ é também um espaço de Banach, assim ver-se facilmente que T é uma isometria sobre sua imagem. Além disso temos que $T\left(W^{s,p}(\Omega)\right)$ é um subespaço fechado de $L^p(\Omega)$ e sendo $L^p(\Omega)$ um espaço reflexivo para $1 < p < +\infty$ segue que $W^{s,p}(\Omega)$ é reflexivo para este p. Uma vez que, $L^p(\Omega)$ é separável para $1 \leq p < \infty$ do fato de $T\left(W^{s,p}(\Omega)\right)$ ser um subespaço fechado e da isometria segue a separabilidade de $(W^{s,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

Definição 1.2. *Definimos o espaço $W_0^{s,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma de $||.||_{W^{s,p}(\Omega)}$. Além disso, de acordo com a proposição anterior, temos*

$$W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N) = W^{s,p}(\mathbb{R}^N).$$

Estes espaços são de suma importância na busca por soluções de EDP, ja que, elas têm a característica de se anularem na fronteira de um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$.

Uma vez definido espaço de Sobolev fracionário, somos induzidos a questionar qual a relação existente entres os espaços $W^{s,p}(\Omega)$ e $W^{t,p}(\Omega)$ com $s \leq t$ e $s,t \in (0,1)$ a proposição abaixo justificará que o espaço $W^{t,p}(\Omega)$ está imerso continuamente em $W^{s,p}(\Omega)$.

Proposição 1.2. *Sejam $p \in (0,1]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e considere $0 < s \leq t < 1$ com $s,t \in (0,1)$. Então o espaço $W^{t,p}(\Omega)$ está imerso continuamente em $W^{s,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Considere $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Vamos mostrar que existe uma constante positiva $C > 1$ tal que

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C||u||_{W^{t,p}(\Omega)}.$$

Observe que, podemos escrever

$$[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy + \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy. \quad (1.1)$$

Sendo $s \leq t$ e para x e y em Ω, tais que $|x-y| < 1$, temos

$$\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \leq \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+tp}}$$

assim,

$$\int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \leq \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+tp}}dxdy \leq [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \quad (1.2)$$

Para estimamos a segunda integral, vamos fazer a seguinte mudança de variável $z = x - y$ e aplicar o teorema de Fubini para, obter

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy &\leq \int_\Omega |u(x)|^p dx \int_{\{\Omega\cap|z|\geq 1\}} \frac{1}{|z|^{N+sp}}dz \\ &\leq ||u||^p_{L^p(\Omega)} \int_{\{\Omega\cap|z|\geq 1\}} \frac{1}{|z|^{N+sp}}dz. \end{aligned}$$

Como $N + sp > N$, então $f(z) = \dfrac{1}{|z|^{N+sp}}$ é integrável, logo

$$\int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy = C_1(N,s,p)||u||^p_{L^p(\Omega)}.$$

Note que, para todo x e y em Ω tem-se $|u(x)-u(y)|^p \leq 2^{p-1}(|u(x)|^p + |u(y)|^p)$ e usando a igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy &\leq 2^{p-1}\int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p+|u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \\ &\leq 2^p \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \\ &\leq 2^p C_1(N,s,p)||u||^p_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

De (1.1), (1.2) e (1.3), obtemos

$$[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \leq 2^p C_1(N,s,p)||u||^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{t,p}(\Omega)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} ||u||^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= ||u||^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \\ &\leq ||u||^p_{L^p(\Omega)} + 2^p C_1(N,s,p)||u||^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{t,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
||u||^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= (2^pC_1(N,s,p)+1)||u||^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{t,p}(\Omega)}\\
&\leq C(N,s,p)(||u||^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{t,p}(\Omega)})\\
&= C(N,s,p)||u||^p_{W^{t,p}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Observe que a constante $C = C(N,s,p) > 1$. Daí, segue o resultado.

$\blacksquare$

Proposição 1.3. *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$, $p \in [1,+\infty)$ e $s \in (0,1)$. Então*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega)$$

e existe uma constante $C = C(N,s,p) \geq 1$, tal que

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Em outras palavras, $W^{1,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $W^{s,p}(\Omega)$.

Demonstração: Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Fazendo a mudança de variável $z = y - x$ e aplicando o teorema de Tonelli, temos

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Omega^2\cap\{|x-y|\leq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy &\leq \int_\Omega\int_{B_1} \frac{|u(x)-u(z+x)|^p}{|z|^{N+sp}}dxdz\\
&= \int_\Omega\int_{B_1} \frac{|u(x)-u(z+x)|^p}{|z|^p}\frac{1}{|z|^{N+(s-1)p}}dxdz\\
&= \int_\Omega\int_{B_1} \left(\int_0^1 \frac{\nabla u(x+tz)}{|z|^{\frac{N}{p}+s-1}}dt\right)^p dzdx\\
&\leq \int_\Omega\int_{B_1}\int_0^1 \frac{|\nabla u(x+tz)|^p}{|z|^{N+p(s-1)}}dtdzdx. \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

Pela regularidade do domínio Ω, podemos estender a função u para uma função $\tilde{u} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ e } ||\tilde{u}||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C||\tilde{u}||_{W^{1,p}(\Omega)}$$

para alguma constante $C > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_{B_1}\int_0^1 \frac{|\nabla u(x+tz)|}{|z|^{N+p(s-1)}}dtdzdx &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{B_1}\int_0^1 \frac{|\nabla \tilde{u}(x+tz)|^p}{|z|^{N+p(s-1)}}dtdzdx\\ &\leq \int_{B_1}\int_0^1 \frac{||\nabla \tilde{u}||^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{|z|^{N+p(s-1)}}dtdz\\ &\leq C_1(N,s,p)||\nabla \tilde{u}||^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\ &\leq C_2(N,s,p)||u||^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}\end{aligned}$$

dai e de (1.4), temos

$$\iint_{\Omega^2\cap\{|x-y|\leq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \leq C_2(N,s,p)||u||^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.5}$$

De acordo com 1.3, existe uma constante $D = D(N,s,p)$ tal que

$$\iint_{\Omega^2\cap\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \leq 2^p D(N,s,p)||u||^p_{L^p(\Omega)}, \tag{1.6}$$

comparando 1.5 e 1.6, segue que

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \leq 2^p D(N,s,p)||u||^p_{L^p(\Omega)} + C_2(N,s,p)||u||^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Portanto, $u \in W^{s,p}(\Omega)$ e

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$$

onde $C = \max\{2^p D(N,s,p)+1, C_2(N,s,p)\}$.

■

Vamos agora apresentar alguns resultados de imersões que envolve o espaço de Sobolev fracionário com outro espaço de L^q (não iremos fazer a demonstração desses resultados, para o leitor interessado, consultar [di nezza] ou [bisci]). Este fato, esta estritamente relacionado com a dimensão do domínio e com os valores de s e p onde $p \in [1, +\infty)$ e $s \in (0,1)$. Para isso, vamos apresentar a seguinte definição;

Definição 1.3. *Sejam $p \in [1,+\infty)$ e $s \in (0,1)$ tal que $sp < N$. O valor numérico $\dfrac{2N}{N-sp}$ é chamado Expoente Crítico Fracionário de Sobolev e denotado por p_s^*.*

Proposição 1.4. *Seja $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$, tal que $sp < N$. Então, existe uma constante positiva $C = C(N,p,s)$ tal que, para qualquer $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$*

$$||u||_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy.$$

Como consequência dessa proposição, temos as seguintes imersões;

- Contínua $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [p, p_s^*]$,
- Compacta $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q_{Loc}(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [p, p_s^*)$.

Proposição 1.5. *Seja $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$, tal que $sp < N$ e Ω um domínio limitado de classe $C^{0,1}$. Então existe uma constante positiva $C = C(N,p,s)$ tal que para qualquer $u \in W^{s,p}(\Omega)$, temos*

$$||u||_{L^q(\Omega)} \leq C||u||_{W^{s,p}(\Omega)},$$

para todo $q \in [p, p_s^*]$. Além disso, a imersão $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta para todo $q \in [1, p_s^*)$.

Agora, observe que no caso onde $sp = N$, teremos que $p_s^* \longrightarrow +\infty$ quando $sp \longrightarrow N$, assim o espaço $W^{s,p}$ está continuamente imerso em L^q para qualquer $q \in [p,+\infty)$. Mas especificamente, temos

Proposição 1.6. *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$ tais que $sp = N$. Então, existe uma constante $C = C(N,s,p) > 0$ tal que para todo $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, tem-se que*

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C||u||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$$

para qualquer $q \in [p,+\infty)$.

Observação 1. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio de extensão, então vale a imersão contínua $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ com $q \in [p,+\infty)$. Além disso, se Ω for limitado, a imersão vale para qualquer $q \in [1,+\infty)$.

Observação 2. Veja que nas proposições 1.3 e 1.5 exigimos que o domínio Ω tenha uma certa regularidade. Este fato, é essencial para a validade das imersões, uma vez que, sem essa condição as imersões podem falhar.

Para resultados envolvendo o caso $sp > n$ consultar as referências mencionadas acima. Assim como no caso clássico dos espaços de Sobolev, qualquer função no espaço fracionário $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ pode ser aproximada por uma sequência de funções suaves com suporte compacto.

Proposição 1.7. *Para qualquer $s > 0$ o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Ver [1].

1.2 O espaço H^s e o operador Laplaciano Fracionário

Nessa seção, concentraremos nossa atenção no caso em que $p = 2$. Quando isso ocorre o espaço $W^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$\langle u, v\rangle_{W^{s,2}(\mathbb{R}^N)} = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy$$

e é denotado por $W^{s,2}(\mathbb{R}^N) = H^s(\mathbb{R}^N)$.

Para vermos algumas das propriedades mais relevantes desses espaços vamos definir o operador Laplaciano fracionário. Com esse intuito, temos duas formas distintas de defini-los, via Valor Principal e via transformada de Fourier. Contudo, veremos que essas duas definições são equivalentes. Antes, vamos precisar de uma classe especial de funções

Definição 1.4. *O espaço de Schwartz ou espaço das funções que decrescem rapidamente pra zero no infinito é o espaço dado por*

$$S(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) / \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N, \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial_\beta u(x)| < \infty \right\}.$$

Definição 1.5 (Via Valor Principal)**.** *Seja $s \in (0,1)$. Definimos o operador $(-\Delta)^s : S(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ por*

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s) \lim_{\epsilon\longrightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ onde $C(N,s)$ é uma constante positiva.

A constante que aparece na definição acima depende dos valores de N e de s e é chamada de constante de normalização, dada por

$$C(N,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{N+2s}} d\zeta \right)^{-1} \tag{1.7}$$

com $\zeta = (\zeta_1, \zeta')$, $\zeta' \in \mathbb{R}^{N-1}$. O limite da integral na definição acima é chamado na literatura de Valor Principal e abreviado por $P.V$, assim

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy$$

e portanto, daqui por diante, vamos escrever

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy. \tag{1.8}$$

Observação 3. O limite acima está bem definido para toda função $u \in S(\mathbb{R}^N)$ com $s \in (0,1)$. O que poderia gerar confusão seria o caso que $s \in (1/2, 1)$ ao consideramos y próximo de x pois, nessa configuração a singularidade não é integrável no sentido de Lebesgue. Mas, essa dificuldade é superada através de um argumento de simetria. Contudo, podemos reescrever a definição do operador de acordo com a seguinte proposição;

Proposição 1.8. *Sejam* $s \in (0,1)$ *e* $(-\Delta)^s$ *o operador definido em* (1.8)*. Então, para todo* $u \in S(\mathbb{R}^N)$

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy \tag{1.9}$$

Demonstração: De acordo com a definição 1.8 e fazendo $z = y - x$, temos

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) &= C(N,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy \\ &= -C(N,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(y)-u(x)}{|x-y|^{N+2s}} dy \\ &= -C(N,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{N+2s}} dz. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Além disso, substituindo $\bar{z} = -z$ no ultimo termo da igualdade acima, temos

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(z+x) - u(x)}{|z|^{N+2s}} dz = P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x-\bar{z}) - u(x)}{|z|^{N+2s}} dz$$

assim,

$$\begin{aligned} 2P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{N+2s}} dz &= P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(z+x) - u(x)}{|z|^{N+2s}} dz + P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x-z) - u(x)}{|z|^{N+2s}} dz \\ &= P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+z) - u(x-z) - 2u(x)}{|z|^{N+2s}} dz \end{aligned} \tag{1.11}$$

De (1.10) e (1.11) e chamando $z = y$, segue que

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C(N,p) P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y) - u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy. \tag{1.12}$$

Com o intuito de remover a singularidade da integral na origem, vamos usar o fato de que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Assim, podemos expandir a função u através da fórmula de Taylor com resto de Lagrange, isto é,

$$u(x+y) = u(x) + Du(x)y + \frac{1}{2} D^2 u(x) y^2$$

e

$$u(x-y) = u(x) - Du(x)y + \frac{1}{2} D^2 u(x) y^2.$$

Somando as igualdades acima, obtemos

$$u(x+y) + u(x-y) - 2u(x) = D^2 u(x) y^2 \leq D^2 u(x) y^2 + \epsilon |y|^2 \leq ||D^2 u||_{L^\infty} |y|^2$$

assim,

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y) - u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy \leq ||D^2 u||_{L^\infty} P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|y|^{N+2s-2}} dy < \infty$$

desde que $u \in S(\mathbb{R}^N)$, então podemos escrever

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y) - u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y) - u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy.$$

Portanto, de (1.12) conclui-se o resultado.

Como dito anteriormente, podemos definir o operador laplaciano fracionário via transformada de Fourier. Na realidade ele é definido como sendo a inversa da transformada de Fourier de uma função de $S(\mathbb{R}^N)$. Para ver esse fato, considere $u \in S(\mathbb{R}^N)$ e a transformada de Fourier dada por

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx,$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^N$ e $\langle .,.\rangle$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^N$. Tomando a inversa da transformada de Fourier da igualdade acima, temos

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi.$$

Aplicando o operado laplaciano acima com o sinal negativo, temos

$$\begin{aligned}
-\Delta u(x) &= -\Delta\left(\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi\right)\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (2\pi|\xi|)^2\hat{u}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi\\
&= \mathcal{F}^{-1}\left((2\pi|\xi|)^2\hat{u}(\xi)\right).
\end{aligned}$$

Logo, podemos definir o operador Laplaciano fracionário, tomando a potência s no multiplicador associado ao operador Laplaciano clássico e obter a seguinte igualdade;

Proposição 1.9. *Seja $u \in S(\mathbb{R}^N)$, então*

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left((2\pi|\xi|)^{2s}\hat{u}(\xi)\right)$$

Demonstração: Aplicando a transformada de Fourier a igualdade (1.9), temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left((-\Delta)^s u(x)\right) &= \mathcal{F}\left(\frac{C(N,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{2u(x)-u(x+y)-u(x-y)}{|y|^{N+2s}}dy\right)\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{C(N,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{2u(x)-u(x+y)-u(x-y)}{|y|^{N+2s}}dye^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx\\
&= \frac{C(N,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|y|^{N+2s}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(2u(x)-u(x+y)-u(x-y))e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx\right)dy
\end{aligned}$$

Agora fazendo a seguinte mudança de variável $\eta = x+y$ e $\gamma = x-y$, podemos escrever a ultima integral, da seguinte forma

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(2u(x)-u(x+y)-u(x-y))e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx &= 2\int_{\mathbb{R}^N}u(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx-\int_{\mathbb{R}^N}u(x+y)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx\\ &\quad -\int_{\mathbb{R}^N}u(x-y)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx\\ &= 2\hat{u}(\xi)-\int_{\mathbb{R}^N}u(\eta)e^{-2\pi i\langle \eta-y,\xi\rangle}d\eta\\ &\quad -\int_{\mathbb{R}^N}u(\eta)e^{-2\pi i\langle \gamma+y,\xi\rangle}d\gamma\\ &= 2\hat{u}(\xi)-\hat{u}(\xi)e^{2\pi i\langle y,\xi\rangle}-\hat{u}(\xi)e^{-2\pi i\langle y,\xi\rangle}\\ &= \hat{u}(\xi)\left(2-e^{2\pi i\langle y,\xi\rangle}-e^{-2\pi i\langle y,\xi\rangle}\right).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left((-\Delta)^s u(x)\right) &= \frac{C(N,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\hat{u}(\xi)\left(\frac{2-e^{2\pi i\langle y,\xi\rangle}-e^{-2\pi i\langle y,\xi\rangle}}{|y|^{N+2s}}\right)dy\\ &= \frac{C(N,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\hat{u}(\xi)\left(\frac{2-2\cos(2\pi\langle\xi,y\rangle)}{|y|^{N+2s}}\right)dy\\ &= C(N,s)\hat{u}(\xi)\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1-\cos(2\pi\langle\xi,y\rangle)}{|y|^{N+2s}}\right)dy. \qquad (1.13)\end{aligned}$$

Agora, fazendo a mudança de variável $z=|\xi|y$, temos $y=\dfrac{z}{|\xi|}$. Logo,

$$\frac{1}{|y|^{N+2s}}=\frac{|\xi|^{N+2s}}{|z|^{N+2s}} \text{ e } 2\pi\langle\xi,y\rangle=2\pi\left\langle\xi,\frac{z}{|\xi|}\right\rangle$$

além disso, $dy=\dfrac{1}{|\xi|^N}dz$. Daí, definindo

$$\begin{aligned}J(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1-\cos(2\pi\langle\xi,y\rangle)}{|y|^{N+2s}}dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1-\cos\left(2\pi\left\langle\xi,\frac{z}{|\xi|}\right\rangle\right)}{|z|^{N+2s}}\frac{|\xi|^{N+2s}}{|\xi|^N}dz\\ &= |\xi|^{2s}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1-\cos\left(2\pi\left\langle\xi,\frac{z}{|\xi|}\right\rangle\right)}{|z|^{N+2s}}dz.\end{aligned}$$

Vamos agora usar o fato de J ser invariante por rotações. Com efeito, seja R uma rotação que envia $e_1=(1,0,0...,0)$ em $\dfrac{\xi}{|\xi|}$, ou seja, $Re_1=\dfrac{\xi}{|\xi|}$ e chamaremos R^T sua transposição.

Usando a mudança de variável $\zeta = R^T z$, obtemos

$$\begin{aligned} J(\xi) &= |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - \cos(2\pi \langle Re_1, z \rangle)}{|z|^{N+2s}} dz \\ &= |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - \cos(2\pi \langle R^T z, e_1 \rangle)}{|R^T z|^{N+2s}} dz \\ &= |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - \cos(2\pi\zeta)}{|\zeta|^{N+2s}} dz. \end{aligned}$$

Chame $\zeta' = 2\pi\zeta$, então $d\zeta' = (2\pi)^N d\zeta$ e $\dfrac{1}{|\zeta'|^{N+2s}} = \dfrac{1}{(2\pi)^{N+2s}|\zeta|^{N+2s}}$ daí, (ainda denotando ζ como variável de integração), obtemos

$$J(\xi) = (2\pi|\xi|)^{2s} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - \cos(\zeta)}{|\zeta|^{N+2s}} d\zeta.$$

Considerando $B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$ e usando a fórmula de expansão de Taylor, prova-se que a integral acima é finita e de acordo com a definição (1.7), segue que

$$J(\xi) = (2\pi|\xi|)^{2s}(C(N,s))^{-1}.$$

Conforme a definição de J e aplicando em (1.13), temos

$$\mathcal{F}\left((-\Delta)^s u(x)\right) = C(N,s)\hat{u}(\xi)J(\xi) = (2\pi|\xi|)^{2s}\hat{u}(\xi).$$

Aplicando a inversa da transformada de Fourier,

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left((2\pi|\xi|)^{2s}\hat{u}(\xi)\right).$$

■

Em suma, a proposição acima afirma que as definições via valor principal (1.10) e via transformada de Fourier são equivalentes. Mostraremos mais adiante a relação existente entre o operador laplaciano fracionário e o espaço $H^2(\mathbb{R}^N)$, para isso precisaremos do seguinte lema.

Lema 1.1. *Sejam $s \in (0,1)$ e $C(N,s)$ a constante de normalização definida em* 1.6. *Então,* *para todo* $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$*,*

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = 2C(N,s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi.$$

Demonstração: Para cada $y \in \mathbb{R}^N$ fixado considere a mudança de variável $z = x - y$ e usando a identidade de Plancherel, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx \right) dy &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(z+y)-u(y)|^2}{|z|^{N+2s}} dz dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(z+y)-u(y)|^2}{|z|^{N+2s}} dy \right) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{N+2s}} \right|_{L^2(\mathbb{R}^N)} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \mathcal{F} \left(\frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{N+2s}} \right) \right|_{L^2(\mathbb{R}^N)} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|e^{i\langle \xi, z\rangle} - 1|^2}{|z|^{N+2s}} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi dz \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-\cos(\langle \xi, z\rangle)}{|z|^{N+2s}} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi dz \\
&= 2C(N,s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} \mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi,
\end{aligned}$$

que demonstra o lema.

■

Proposição 1.10. *Sejam* $s \in (0,1)$ *e* $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$*. Então*

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = 2C(N,s)^{-1} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Demonstração: A demonstração segue diretamente da proposição (1.9) e do lema anterior.

De fato, veja que

$$
\begin{aligned}
|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= |\mathcal{F}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= ||\xi|^s\mathcal{F}u|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{C(N,s)}{2}[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}
$$

o que conclui a demonstração.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Existência e Concentração de Solução para o caso Subcrítico

2.1 Problema proposto

Neste capitulo estudaremos existência e concentração de soluções para uma classe de equações elípticas fracionárias não linear do tipo Kirchhoff-Schrödinger em $\mathbb{R}^N$ com crescimento subcrítico. Especificamente vamos estudar o seguinte problema não local

$$(P_\lambda) \begin{cases} M\left([u]_s^2 + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\right)((-\Delta)^s u + V(x)u) = \bar{c}u + f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u > 0, \quad u \in H^s(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $s \in (0,1)$ é a potência fracionária, $N > 2s$, $[\,.\,]_s$ é a seminorma de Gagliardo de u dado por

$$[u]_s := \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$$

e M denota uma função contínua que será especificada posteriormente. O potencial V tem a forma $V(x) = \lambda a(x) + 1$ onde $a : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função continua e não negativa que se anula em um domínio limitado $\Omega_\Upsilon \subset \mathbb{R}^N$, λ é um parâmetro positivo e $\bar{c}$ é um parâmetro escolhido de forma adequada.

Neste trabalho, vamos supor que o potencial $V(x) = \lambda a(x) + 1$ satisfaça as seguintes condições;

(a_1) $a(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(a_2) O interior do conjunto $a^{-1}\{0\}$ será denotado por $int(a^{-1}\{0\})$ que é não vazio e $a^{-1}(0) = \Omega_\Upsilon$ é um domínio limitado e aberto do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de classe $C^{0,1}$.

As hipótese sobre a função a foram introduzidas por Ding e Tanaka em [21] elas são essenciais para ajudar a contornar a falta de compacidade causada pelo $\mathbb{R}^N$ e também para mostrar a concentração de soluções.

Para este caso vamos assumir que a função $M : [0, +\infty] \longrightarrow (0, +\infty)$ pertença a $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e satisfaça a seguinte condição

(M_1) Para $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$ tem-se que

$$m_0 + b_0 t^{\alpha_1} \leq M(t) \leq m_1 + b_1 t^{\alpha_2}$$

onde m_0, m_1, b_0 e b_1 são constantes positivas de modo que $m_1 < \dfrac{\bar{c}}{2(\rho(\Omega'))^2}$ para algum aberto $\Omega' \subset \Omega_\Upsilon$, o termo $\rho(\Omega)$ denota o número

$$\rho(\Omega') = \min_{\int_{\Omega'} |u|^2 = 1} \left(\iint_{\Omega' \times \Omega'} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\Omega'} |u|^2 dx \right). \tag{2.1}$$

A não linearidade de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições

(f_1) A aplicação $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ é crescente

(f_2) f tem crescimento subcrítico no infinito, isto é,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{|t|^{\gamma - 1}} < +\infty$$

com $2 \leq \gamma < min\{2_s^*, 2\alpha_1 + 2\}$, onde 2_s^* é o expoente crítico fracionário dado por $2_s^* = \dfrac{2N}{N - 2s}$

(f_3) $\lim_{t \to 0} \dfrac{f(t)}{t} = 0$

(f_4) Existem $2 \leq \vartheta < 2\alpha_2 + 2$, e t_0, $C_2 > 0$ tal que

$$f(t) \geq C_2 t^{\vartheta - 1}$$

para todo $0 \leq t \leq t_0$.

Como buscamos soluções positivas, vamos impor ao longo da dissertação que, $f(t) = 0$ se $t \leq 0$.

Observe que, a partir das condições (f_2) e (f_3), para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe $C_1 > 0$ de modo que,

$$|f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t| + C_1|t|^{\gamma-1}, \quad \forall \ t \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

Estabelecidas as condições acima enunciamos o teorema central deste capitulo:

Teorema 2.1. *Suponha verdadeira as hipóteses* $(f_1) - (f_4)$ *para* f*, o termo não local* M *satisfaz* (M_1) *e a função* $a(x)$ *verifica* (a_1) *e* (a_2)*. Então para o subconjunto fixo não vazio* Ω_Υ*, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que para todo* $\lambda > \lambda^*$ *o problema* (P_λ) *tem uma solução com energia mínima. Além disso, para qualquer sequência* (λ_n) *com* $\lambda_n \to \infty$*, podemos extrair uma subsequência* (λ_{n_i}) *tal que* $(u_{\lambda_{n_i}})$ *converge fortemente em* $H^s(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ *para* u *de modo que,* $u = 0$ *fora de* Ω_Υ *e* $u \in \Omega_\Upsilon$ *é uma solução do problema*

$$(P)_{\Upsilon,\infty} \begin{cases} M\left(|u|^2_{X(\Omega_\Upsilon)} + |u|^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)}\right)((-\Delta)^s u + u) = \bar{c}u + f(u) \ \ em \ \ \Omega_\Upsilon \\ u > 0, \ \ em \ \ \Omega_\Upsilon, u \in X(\Omega_\Upsilon) \end{cases}$$

onde

$$||u||^2_{X(\Omega_\Upsilon)} = \iint_{\Omega_\Upsilon \times \Omega_\Upsilon} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy.$$

2.2 Estrutura Variacional

Nesta seção, apresentamos o espaço/ambiente no qual o nosso estudo se desenvolverá, e além disso, vamos definir o funcional energia associado ao problema (P_λ).

Considere o espaço fracionário de Sobolev definido como

$$H^s(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^N); [u]_s < \infty\}$$

onde $[\cdot]_s$ é a semi-norma de Gagliardo com $p = 2$. Este espaço é um espaço de Hilbert com a norma

$$||\cdot||_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \left(|\cdot|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + [\cdot]^2_s\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Em problemas elípticos que envolvem o laplaciano fracionário em um domínio Ω, a condição de Dirichlet pede que a solução seja nula em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Desta forma, definimos o espaço

$$X(\Omega) := \{u \in H^s(\mathbb{R}^N); u = 0 \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}$$

este é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_{X(\Omega)} := \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy$$

que induz a norma

$$||u||_{X(\Omega)} = [u]_s = \left(\iint_{\Omega^2} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Observação 2.2.1. Para $N > 2s$, $s \in (0,1)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, vale as imersões compacta $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < 2^*_s$ e continua $H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq p \leq 2^*_s$, onde 2^*_s é o expoente crítico fracionário de Sobolev definido na seção anterior . Daqui por diante, vamos assumir que $s \in (0,1)$ e $N > 2s$.

Definamos agora o seguinte espaço linear

$$E_\lambda = \left\{u \in H^s(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^2 dx < +\infty\right\}$$

munido com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_\lambda = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x)+1)uvdx.$$

A norma induzida por esse produto interno denotaremos por $||\cdot||_\lambda$ e é dado por

$$||u||_\lambda = \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mostramos na proposição A.1 que E_λ munido com o produto interno acima é um espaço de Hilbert, além disso, as normas $||\cdot||_\lambda$ e $||\cdot||_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ são equivalentes. De fato, sendo $\lambda > 0$ e $a(x) \geq 0$, então

$$\lambda a(x) + 1 \geq 1 \Longrightarrow (\lambda a(x) + 1)u^2 \geq u^2$$

assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx$$

logo,

$$\begin{aligned} ||u||_{H^s(\mathbb{R}^N)} &= \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= ||u||_\lambda. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} ||u||_\lambda &= \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x)u^2 + u^2) dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} \lambda a(x)u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2 dx < +\infty$ então, existe $k > 0$, tal que $\int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2 dx < k$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda a(x)u^2 dx < K.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
||u||_\lambda &\leq \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + K + \int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + K\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx + \int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + (K+1)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left((K+1)\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + (K+1)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left((K+1)\left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + \int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (K+1)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + \int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (K+1)^{\frac{1}{2}}||u||_{H^s(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}
$$

o que mostra a equivalência das normas. Logo, podemos usar os resultados de imersão para o espaço E_λ definido acima.

Lembre que uma solução fraca de (P_λ) é uma função $u \in E_\lambda$ tal que

$$
M(||u||_\lambda^2)\langle u, v\rangle_\lambda = \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N} uvdx + \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx
$$

para todo $v \in E_\lambda$. Definimos então o funcional $J_\lambda : E_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (P_λ) dado por

$$
J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(||u||_\lambda^2) - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx
$$

onde $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(s)ds$ e $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(\tau)d\tau$. O funcional acima é de classe $C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$, ver Proposição B.2, no Apêndice B, e

$$
J'_\lambda(u)v = M(||u||_\lambda^2)\langle u, v\rangle_\lambda - \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N} uvdx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx.
$$

Observe que os pontos críticos do funcional J_λ são exatamente as soluções de (P_λ).

2.3 Funcional Auxiliar para o problema (P_λ)

Para mostrar que o problema (P_λ) possui uma solução ground state (com energia mínima), precisamos garantir a existência desse ponto de mínimo, no entanto, pelo fato de estamos trabalhando em um domínio ilimitado, perdemos a condição de compacidade para o funcional energia e isso cria uma série de dificuldades. Para contornar esse problema, vamos adaptar um argumento de truncamento utilizado por Del Pino e Felmer em [19] e usar a metodologia utilizada por Alves e Figueiredo em [3] onde eles trabalham com um problema subcrítico no $\mathbb{R}^N$ envolvendo o operador Laplaciano tradicional e depois recuperam a solução.

Veja que da condição (f_2), (f_3) e (f_4),

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} = 0 \quad e \quad \lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} = +\infty,$$

e da condição (f_1) a função f é monótona, logo para cada $0 < \sigma$ fixado existe um único ξ, tal que

$$\frac{f(\xi)}{\xi} = \sigma.$$

Definindo a função truncada $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), t \leq \xi \\ \sigma t, t \geq \xi. \end{cases}$$

Por (f_1), $\forall\ t > 0$,

$$|\tilde{f}(t)| \leq \sigma t. \tag{2.4}$$

Sendo $\Omega_\Upsilon \subset \mathbb{R}^N$ defina a aplicação $\tilde{h} : \Omega_\Upsilon \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{h}(x,t) = \chi_\Upsilon(x) f(t) + (1 - \chi_\Upsilon(x))\tilde{f}(t)$$

para todo $(x,t) \in \Omega_\Upsilon \times \mathbb{R}$, onde χ_Υ é a função característica em Ω_Υ, i.é

$$\chi_\Upsilon(x) = \begin{cases} 1 \quad se \quad x \in \Omega_\Upsilon \\ 0, \quad se \quad x \notin \Omega_\Upsilon. \end{cases}$$

Defina o funcional $\tilde{J}_\lambda : E_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(||u||_\lambda^2) - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(u)dx$$

onde $\tilde{F}(s) = \displaystyle\int_0^s \tilde{h}(x,t)dt$.

De modo análogo ao funcional J_λ é possível mostrar que $\tilde{J}_\lambda \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$. Além disso, temos que se u_0 é ponto crítico de $\tilde{J}_\lambda$ com $u_0 \leq \xi$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\Upsilon$, então u_0 é ponto crítico de J_λ e consequentemente solução do problema (P_λ). De fato, supondo que u_0 seja seja ponto critico do funcional auxilar com $u_0 \leq \xi$ e $x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\Upsilon$, então a função

$$\tilde{h}(x, u_0) = \tilde{f}(u_0) = f(u_0).$$

Assim,

$$\int_0^{u_0} \tilde{h}(x,t)dt = \int_0^{u_0} f(t)dt$$

o que implica

$$\tilde{F}(u_0) = F(u_0),$$

e portanto

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\lambda(u_0) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(||u_0||_\lambda^2) - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(u_0)dx \\ &= \frac{1}{2}\widehat{M}(||u_0||_\lambda^2) - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_0)dx \\ &= J_\lambda(u_0). \end{aligned}$$

Devido o truncamento feito na não linearidade da f, é de se esperar que o funcional auxiliar satisfaça a condição de Palais-Smale. Contudo, sendo $\mathbb{R}^N$ ilimitado precisamos garantir que sequências (PS) em $\mathbb{R}^N$ sejam limitadas. Diante disso, vamos mostrar que $\tilde{J}_\lambda$ é coercivo. Antes porém, enunciaremos e seguinte lema;

Lema 2.1. *Considere $(u_n) \in H^s(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada neste espaço e $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $0 \leq \phi \leq 1$ tal que $\phi = 0$ em $B_{\frac{R}{2}}(0)$ e $\phi = 1$ fora de $B_R(0)$ além disso, $|\bigtriangledown \phi| \leq \dfrac{C}{R}$. Se*

$\phi_R(x) = \phi\left(\dfrac{x}{R}\right)$ *então,*

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\longrightarrow\infty}\iint_{\mathbb{R}^{2N}}|u_n(x)|^2\frac{|\phi_R(x)-\phi_R(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy = 0.$$

Demonstração: Ver Lema 2.2 em [6].

Proposição 2.1. *O funcional auxiliar $\tilde{J}_\lambda$ é coercivo, isto é, $\tilde{J}_\lambda \to +\infty$ quando $||u||_\lambda \to +\infty$.*

Demonstração: De fato, considere o funcional auxiliar

$$\tilde{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(||u||_\lambda^2) - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2dx - \int_{\mathbb{R}^N}\tilde{F}(u)dx$$

pela condição de crescimento (M_1) e para u restrito a $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{J}_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2}\int_0^{||u||_\lambda^2}[m_0 + b_0 s^{\alpha_1}]\,ds - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}u^2dx - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\tilde{F}(u)dx\\ &\geq \frac{1}{2}\left[m_0||u||_\lambda^2 + \frac{b_0}{\alpha_1+1}||u||_\lambda^{2(\alpha_1+1)}\right] - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}u^2dx - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\int_0^u\tilde{f}(\tau)d\tau dx\end{aligned}$$

usando (2.4), temos

$$\begin{aligned}\tilde{J}_\lambda(u) &\geq \frac{m_0}{2}||u||_\lambda^2 + \frac{b_0}{2(\alpha_1+1)}||u||_\lambda^{2(\alpha_1+1)} - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}u^2dx - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\frac{\sigma}{2}u^2dx\\ &\geq \frac{m_0}{2}||u||_\lambda^2 + \frac{b_0}{2(\alpha_1+1)}||u||_\lambda^{2(\alpha_1+1)} - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}u^2dx - \frac{\sigma}{2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}u^2dx\\ &\geq \frac{m_0}{2}||u||_\lambda^2 + \frac{b_0}{2(\alpha_1+1)}||u||_\lambda^{2(\alpha_1+1)} - \frac{\bar{c}}{2}||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)} - \frac{\sigma}{2}||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)}.\end{aligned}$$

Como, $||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Omega)} \leq ||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ e pela imersão contínua $E_\lambda \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$, existe $c_* > 0$ tal que

$$||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)} \leq c_*^2||u||_\lambda^2$$

e fazendo $c = c_*^2$, obtém-se

$$\begin{aligned}\tilde{J}_\lambda(u) &\geq \frac{m_0}{2}||u||_\lambda^2 + \frac{b_0}{2(\alpha_1+1)}||u||_\lambda^{2(\alpha_1+1)} - \frac{\bar{c}c}{2}||u||_\lambda^2 - \frac{\sigma c}{2}||u||_\lambda^2 \\ &= \frac{b_0}{2(\alpha_1+1)}||u||_\lambda^{2(\alpha_1+1)} + ||u||_\lambda^2\left(\frac{m_0}{2} - \frac{\bar{c}c}{2} - \frac{\sigma c}{2}\right).\end{aligned}$$

Descartando o termo positivo $\frac{m_0}{2}$ e chamando $C_1 = \frac{\bar{c}c + \sigma c}{2}$, segue que

$$\tilde{J}_\lambda(u) \geq \frac{b_0}{2(\alpha_1+1)}||u||_\lambda^{2(\alpha_1+1)} - C_1||u||_\lambda^2. \tag{2.5}$$

Fazendo a restrição de u a Ω_Υ teremos inicialmente que $\tilde{h} = f(t)$. Logo,

$$\tilde{F}(u) = F(u) \quad \Longrightarrow \quad \int_0^u \tilde{h}(x,s)ds = \int_0^u f(s)ds$$

e da condição (M_1) obtemos

$$\tilde{J}_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\int_0^{||u||_\lambda^2}(m_0 + b_0 s^{\alpha_1})\,ds - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\Omega_\Upsilon}|u|^2dx - \int_{\Omega_\Upsilon}\int_0^u f(s)dsdx. \tag{2.6}$$

Agora, veja que

$$\frac{1}{2}\int_0^{||u||_\lambda^2}(m_0 + b_0 s^{\alpha_1})\,ds = \frac{1}{2}m_0||u||_\lambda^2 + \frac{b_0}{2(\alpha_1+1)}||u||_\lambda^{2(\alpha_1+1)}. \tag{2.7}$$

Usando a imersão de E_λ em $L^\gamma(\Omega)$ onde $2 \leq \gamma < \min(2^*s, 2(\alpha_1+1))$, existe um $c' > 0$ tal que

$$\frac{\bar{c}}{2}\int_{\Omega_\Upsilon}|u|^2dx \leq \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx = \frac{\bar{c}}{2}||u||_\lambda^2 \leq \frac{\bar{c}}{2}c'||u||_\lambda^2. \tag{2.8}$$

Da condição (f_2) existe uma constante positiva a_1 tal que

$$f(t) \leq a_1|t|^{\gamma-1},$$

assim,

$$\int_0^u f(s)ds \leq \frac{a_1}{\gamma}|u|^\gamma,$$

de onde vem que

$$\int_{\Omega_\Upsilon}\int_0^u f(s)dsdx \leq \int_{\Omega_\Upsilon}\frac{a_1}{\gamma}|u|^\gamma dx = \frac{a_1}{\gamma}||u||^\gamma_{L^\gamma(\Omega_\Upsilon)} \leq \frac{a_1}{\gamma}||u||^\gamma_{L^\gamma(\mathbb{R}^N)}$$

e novamente da imersão, existe um $c_1 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega_\Upsilon}\int_0^u f(s)dsdx \leq \frac{a_1 c_1}{\gamma}||u||^\gamma_\lambda. \tag{2.9}$$

Agora usando (2.7), (2.8) e (2.9) em (2.6) segue que

$$\begin{aligned}\tilde{J}_\lambda(u) &\geq \frac{m_0}{2}||u||^2_\lambda + \frac{b_0}{2(\alpha_1+1)}||u||^{2(\alpha_1+1)}_\lambda - \frac{\bar{c}}{2}c'||u||^2_\lambda - \frac{a_1c_1}{\gamma}||u||^\gamma_\lambda \\ &= \frac{b_0}{2(\alpha_1+1)}||u||^{2(\alpha_1+1)}_\lambda + ||u||^2_\lambda\left(\frac{m_0}{2} - \frac{\bar{c}c'}{2}\right) - \frac{a_1c_1}{\gamma}||u||^\gamma_\lambda\end{aligned}$$

descartando o termo positivo $\dfrac{m_0}{2}$ e chamando $C_2 = \dfrac{\bar{c}c'}{2}$ e $C_3 = \dfrac{a_1c_1}{\gamma}$, temos

$$\tilde{J}_\lambda(u) \geq \frac{b_0}{2(\alpha_1+1)}||u||^{2(\alpha_1+1)}_\lambda - C_2||u||^2_\lambda - C_3||u||^\gamma_\lambda \tag{2.10}$$

Sendo $\mathbb{R}^N = (\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon) \cup \Omega_\Upsilon$ somando (2.5) com (2.10) tem-se

$$\begin{aligned}\tilde{J}_\lambda(u) &\geq \frac{b_0}{2(\alpha_1+1)}||u||^{2(\alpha_1+1)}_\lambda - C_1||u||^2_\lambda + \frac{b_0}{2(\alpha_1+1)}||u||^{2(\alpha_1+1)}_\lambda - C_2||u||^2_\lambda - C_3||u||^\gamma_\lambda \\ &= \frac{b_0}{\alpha_1+1}||u||^{2(\alpha_1+1)}_\lambda - (C_1+C_2)||u||^2_\lambda - C_3||u||^\gamma_\lambda.\end{aligned}$$

Uma vez que, $2 \leq \gamma$, podemos estimar

$$\begin{aligned}\tilde{J}_\lambda(u) &\geq \frac{b_0}{\alpha_1+1}||u||^{2(\alpha_1+1)}_\lambda - (C_1+C_2)||u||^\gamma_\lambda - C_3||u||^\gamma_\lambda \\ &= \frac{b_0}{\alpha_1+1}||u||^{2(\alpha_1+1)}_\lambda - C||u||^\gamma_\lambda.\end{aligned}$$

Como $\gamma < 2(\alpha_1+1)$, então $\tilde{J}_\lambda(u) \to +\infty$ em $\mathbb{R}^N$, quando $||u||_\lambda \to +\infty$. Portanto, o funcional auxiliar $\tilde{J}_\lambda$ é coercivo.

Lema 2.2. *Seja (u_n) uma sequência (PS) para $\tilde{J}_\lambda$, então para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe um $R > 0$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))^2}\frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)}(\lambda a(x)+1)u_n^2dx\right)<\varepsilon$$

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ fixe $R > 0$. Considere a função *cut-off* $\eta_R : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\eta_R(x)=\begin{cases}0 \quad se \quad x\in B_{\frac{R}{2}}(0)\\ 1, \quad se \quad x\in\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)\end{cases}$$

com $0 \le \eta_R \le 1$, $|\nabla\eta_R| \le \dfrac{C}{R}$ e $\Omega_\Upsilon \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$.

Como $\tilde{J}_\lambda$ é coercivo e (u_n) é uma sequência Palais-Smale, então (u_n) é limitada em E_λ. De fato, suponha que (u_n) não seja limitado, então existe $M > 0$ tal que $||u_n||_\lambda \ge M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo $\tilde{J}_\lambda$ coercivo, então $\tilde{J}_\lambda \to +\infty$ quando $n \to +\infty$ o que é um absurdo, pois $\tilde{J}_\lambda(u_n) \to c_\lambda$. Isso, mostra a limitação de (u_n) em E_λ. Logo, existe $K > 0$, tal que $||u_n||_\lambda \le K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $0 \le \eta_R \le 1$, então

$$||\eta_R u_n||_\lambda \le ||\eta_R||_\lambda ||u_n||_\lambda \le ||u_n||_\lambda \le K$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja $(\eta_R u_n)$ é limitada em E_λ. Observe que,

$$\tilde{J}'_\lambda(u_n)\eta_R u_n = M(||u_n||^2_\lambda)\left\langle u_n,\eta_R u_n\right\rangle_\lambda - \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N}u_n\eta_R u_n dx-\int_{\mathbb{R}^N}\tilde{h}(u_n)\eta_R u_n dx$$

$$M(||u_n||^2_\lambda)\left\langle u_n,\eta_R u_n\right\rangle_\lambda = \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N}u_n^2\eta_R dx-\int_{\mathbb{R}^N}\tilde{h}(u_n)\eta_R u_n dx+\tilde{J}'_\lambda(u_n)\eta_R u_n.$$

Como $\Omega_\Upsilon \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$ e $\eta_R = 0$ em $B_{\frac{R}{2}}(0)$, então podemos escrever

$$M(||u_n||^2_\lambda)\left\langle u_n,\eta_R u_n\right\rangle_\lambda = \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}u_n^2\eta_R dx+\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\tilde{h}(u_n)\eta_R u_n dx+\tilde{J}'_\lambda(u_n)\eta_R u_n$$

$$M(||u_n||_\lambda^2)\left\langle u_n, \eta_R u_n \right\rangle_\lambda = \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_n^2\eta_R dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} \tilde{f}(u_n)\eta_R u_n dx + \tilde{J}'_\lambda(u_n)\eta_R u_n$$

expandindo o produto interno, temos

$$M(||u_n||_\lambda^2)\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2} \frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)u_n(x)-\eta_R(y)u_n(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+ \tag{2.11}$$

$$M(||u_n||_\lambda^2)\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}(\lambda a(x)+1)u_n\eta_R u_n dx = \tilde{J}'_\lambda(u_n)\eta_R u_n + \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_n^2\eta_R dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\tilde{f}(u_n)\eta_R u_n dx.$$

Agora observe que,

$$\begin{aligned}
&\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2} \frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)u_n(x)-\eta_R(y)u_n(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&= \iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2} \frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)u_n(x)+\eta_R(x)u_n(y)-\eta_R(x)u_n(y)-\eta_R(y)u_n(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&= \iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2} \frac{(u_n(x)-u_n(y))[\eta_R(x)(u_n(x)-u_n(y))+u_n(y)(\eta_R(x)-\eta_R(y))]}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&= \iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2} \frac{\eta_R(x)[(u_n(x)-u_n(y))^2+u_n(y)(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))]}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&= \iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2} \eta_R(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&+ \iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2} u_n(y)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy.
\end{aligned}$$

Substituindo em (2.11), obtemos

$$\begin{aligned}
&M(||u_n||_\lambda^2)\left(\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2}\eta_R(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}(\lambda a(x)+1)\eta_R u_n^2 dx\right)\\
&\quad = \tilde{J}'_\lambda(u_n)\eta_R u_n - M(||u_n||_\lambda^2)\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2} u_n(y)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\bar{c}u_n^2\eta_R dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\tilde{f}(u_n)\eta_R u_n dx.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Afirmamos que

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))^2} u_n(y)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy=0.$$

Com efeito, pela desigualdade de Hölder com expoente 2, temos

$$\begin{aligned}
&\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))^2} u_n(y)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&\leq \left(\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2}|u_n(y)|^2\frac{|\eta_R(x)-\eta_R(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left(\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}+\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}V(x)|u_n|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\left(\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2}|u_n(y)|^2\frac{|\eta_R(x)-\eta_R(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= ||u_n||_\lambda\left(\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2}|u_n(y)|^2\frac{|\eta_R(x)-\eta_R(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq ||u_n||_\lambda^2\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2}|u_n(y)|^2\frac{|\eta_R(x)-\eta_R(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxd\\
&\leq k\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2}|u_n(y)|^2\frac{|\eta_R(x)-\eta_R(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy.
\end{aligned}$$

Como $k>0$ e sendo $(u_n)\in E_\lambda(\mathbb{R}^N)$ temos, em particular, que $(u_n)\in H^s(\mathbb{R}^N)$ além disso, u_n é limitada em $H^s(\mathbb{R}^N)$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Pelo Lema (2.1), temos

$$k\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2}|u_n(y)|^2\frac{|\eta_R(x)-\eta_R(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy=0$$

de onde conclui-se que

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))^2} u_n(y)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy=0.$$

Logo, podemos considerar sem perda de generalidade que

$$\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))^2} u_n(y)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy<\frac{C}{R}.$$

Assim, de (2.12) temos

$$M(||u_n||_\lambda^2)\left(\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2}\eta_R(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}(\lambda a(x)+1)\eta_R u_n^2dx\right)=$$
$$\tilde{J}_\lambda'(u_n)\eta_R u_n-M(||u_n||_\lambda^2)\frac{C}{R}+\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\bar{c}u_n^2\eta_R dx+\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\tilde{f}(u_n)\eta_R u_n dx.$$

Pela propriedade (M_1)

$$\begin{aligned}M(||u_n||_\lambda^2)&\left(\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)^2}\eta_R(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}(\lambda a(x)+1)\eta_R u_n^2dx\right)\\&\leq\tilde{J}_\lambda'(u_n)\eta_R u_n-m_0\frac{C}{R}+\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\bar{c}u_n^2\eta_R dx+\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\tilde{f}(u_n)\eta_R u_n dx.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Designando

$$L=\left(\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))^2}\eta_R\frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)}(\lambda a(x)+1)\eta_R u_n^2dx\right).$$

De (2.4), temos

$$\tilde{f}(u_n)\leq|\tilde{f}(u_n)|\leq\sigma u_n,$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\tilde{f}(u_n)\eta_R u_n dx\leq\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\sigma\eta_R u_n^2dx\leq\sigma\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\eta_R u_n^2\leq\sigma L.\tag{2.14}$$

Além disso,

$$\bar{c}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\eta_R u_n^2\leq\bar{c}L.\tag{2.15}$$

Assim, de (2.14) e (2.15) em (2.13), obtemos

$$\begin{aligned}M(||u_n||_\lambda^2)L&\leq\tilde{J}_\lambda'(u_n)\eta_R u_n-m_0\frac{C}{R}+\sigma L+\bar{c}L\\&\leq\tilde{J}_\lambda'(u_n)\eta_R u_n-m_0\frac{C}{R}+(\sigma+\bar{c})L.\end{aligned}$$

Da condição (M_1), temos

$$m_0 L \leq M(||u_n||_\lambda^2)L \leq \tilde{J}'_\lambda(u_n)\eta_R u_n - m_0\frac{C}{R} + (\sigma + \bar{c})L,$$

que implica

$$L(m_0 - (\sigma + \bar{c})) \leq \tilde{J}'_\lambda(u_n)\eta_R u_n - m_0\frac{C}{R}.$$

Sendo m_0 e $\dfrac{C}{R}$ positivos

$$L \leq \left(\frac{1}{m_0 - (\sigma + \bar{c})}\right)(\tilde{J}'_\lambda(u_n)\eta_R u_n + m_0\frac{C}{R}).$$

Como (u_n) uma sequência (PS), então $\tilde{J}'_\lambda(u_n)u_n \to 0$ quando $n \to \infty$, assim tomando o limite da desigualdade acima com $n \to +\infty$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} L \leq \frac{m_0 C}{(m_0 - (\sigma + \bar{c}))R}.$$

Como, $\eta_R = 1$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_R(0))$ escolhendo R suficientemente grande tal que $\dfrac{m_0 C}{(m_0 - (\sigma + \bar{c}))R} <$ ε conclui-se

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\iint_{(\mathbb{R}^N\backslash B_R(0))^2}\frac{(u_n(x) - u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)}(\lambda a(x) + 1)u_n^2 dx\right) < \varepsilon.$$

■

Proposição 2.2. *Nas mesmas condições do Teorema 2.1, o funcional $\tilde{J}_\lambda$ satisfaz a condição Palais-Smale.*

Demonstração: Seja $(u_n) \in E_\lambda$ uma sequência Palais-Smale logo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{J}_\lambda \to c$ e $\tilde{J}'_\lambda \to 0$. Vamos mostrar que (u_n) admite uma subsequência que converge forte em E_λ. Pela Proposição 2.1 (u_n) é limitada em E_λ. Sendo E_λ um espaço de Hilbert, então E_λ é Banach reflexivo e como (u_n) é limitada neste espaço, então pelo Corolário 3.18 em [15] existe $u \in E_\lambda$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \;\; em \;\; E_\lambda.$$

Da imersão compacta $E_\lambda \hookrightarrow L^p(B_R(0))$ e por Vainberg, temos

$$\begin{cases} u_n \to u \ \ em \ \ L^p(B_R(0)) \\ u_n \to u \ \ q.t.p \ \ em \ \ B_R(0) \\ |u_n(x)| \leq g, \ \ q.t.p \ \ em \ \ B_R(0) \ \ com \ \ g \in L^p(B_R(0)) \ \ e \ \ p \in [1, 2_s^*). \end{cases} \tag{2.16}$$

Note que

$$M(||u_n||_\lambda^2)\left\langle u_n, u_n - u\right\rangle_\lambda = \tilde{J}'_\lambda(u_n)(u_n - u) + \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N} u_n(u_n - u)dx + \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{h}(u_n)(u_n - u)dx.$$

Como (u_n) é uma sequência Palais-Smale e $(u_n - u)$ é limitada em E_λ, então

$$M(||u_n||_\lambda^2)\left\langle u_n, u_n - u\right\rangle_\lambda = o_n(1) + \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N} u_n(u_n - u)dx + \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{h}(x, u_n)(u_n - u)dx \tag{2.17}$$

Primeiro vamos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{h}(x, x, u_n)(u_n - u)dx \to 0$$

quando $n \to \infty$. Observe que,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{h}(x, u_n)(u_n - u)dx &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \tilde{h}(x, u_n)(u_n - u)dx + \int_{B_R(0)} \tilde{h}(x, u_n)(u_n - u)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \tilde{f}(u_n)(u_n - u)dx + \int_{B_R(0)\setminus \Omega_\Upsilon} \tilde{f}(u_n)(u_n - u)dx \\ &+ \int_{\Omega_\Upsilon} f(u_n)(u_n - u)dx. \end{aligned}$$

Da condição (2.2), temos

$$\begin{aligned} |f(u_n)(u_n - u)| &\leq \left(\frac{\varepsilon}{2}|u_n| + C_1\,|u_n|^{\gamma-1}\right)|u_n - u| \\ &= \frac{\varepsilon}{2}|u_n^2 - u_n u| + C_1|u_n^\gamma - u_n^{\gamma-1}u| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}|u_n^2 + u_n u| + C_1|u_n^\gamma + u_n^{\gamma-1}u| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\left(|u_n|^| + |u_n||u|\right) + C_1(|u_n|^\gamma + |u_n|^{\gamma-1}|u|) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\left(|g|^2 + |g||u|\right) + C_1(|g|^\gamma + |g|^{\gamma-1}|u|), \end{aligned}$$

onde $2 \leq \gamma < min\{2_s^*, 2\alpha_1 + 2\}$. Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $\dfrac{\gamma}{\gamma - 1}$ e γ e com expoentes 2 tem-se que $g^{\gamma-1}|u| \in L^1(\Omega_\Upsilon)$ e $|g||u| \in L^1(\Omega_\Upsilon)$ respectivamente e como $g \in L^\gamma(\Omega_\Upsilon)$, então $g^\gamma \in L^1(\Omega_\Upsilon)$ além disso, $|g|^2 \in L^1(\Omega)$, onde $\Omega_\Upsilon \subset B_R(0)$. Dai, temos

$$\frac{\varepsilon}{2}\big(|g|^2 + |g||u|\big) + C_1(|g|^\gamma + |g|^{\gamma-1}|u|) \in \ L^1(\Omega_\Upsilon).$$

Logo, aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{\Omega_\Upsilon} f(u_n)(u_n - u)dx \to 0, \tag{2.18}$$

quando $n \to +\infty$. Da condição (2.4), da imersão compacta e do teorema da convergência dominada, mostra-se

$$\int_{B_R(0)\setminus\Omega_\Upsilon} \tilde{f}(u_n)(u_n - u)dx \to 0. \tag{2.19}$$

quando $n \to +\infty$.

A seguir analisaremos a expressão

$$\int \tilde{f}(u_n)(u_n - u)dx$$

em $\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)$. Da condição (2.4), por Hölder com expoente conjugados p e $q = \dfrac{p}{p-1}$ e da imersão contínua, temos

$$\begin{aligned}
\int_{(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} \tilde{f}(u_n)(u_n - u)dx &\leq \int_{(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} |\tilde{f}(u_n)(u_n - u)|dx \\
&= \int_{(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} |\tilde{f}(u_n)u_n - \tilde{f}(u_n)u|dx \\
&\leq \int_{(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} |\tilde{f}(u_n)||u_n|dx + \int_{(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} |\tilde{f}(u_n)||u|dx \\
&\leq \sigma \int_{(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} |u_n|^2dx + \sigma \int_{(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} |u_n u|dx \\
&\leq c_2||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} + c_3||u_n||_{E_\lambda(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))}||u||_{L^q(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)))}.
\end{aligned}$$

Uma vez que, $||u||_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)))}$ é um constante, segue do Lema 2.2 que

$$c_2||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} + c_3||u_n||_{E_\lambda(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}||u||_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)))} \to 0.$$

logo,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \tilde{f}(u_n)(u_n - u)dx = 0. \qquad (2.20)$$

Portanto, de (2.18), (2.19) e (2.20) tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{h}(u_n)(u_n - u)dx \to 0, \qquad (2.21)$$

quando $n \to \infty$.

Note que

$$\bar{c}\int_{\mathbb{R}^N} u_n(u_n - u)dx = \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} u_n(u_n - u)dx + \bar{c}\int_{B_R(0)} u_n(u_n - u)dx.$$

Por 2.16

$$\begin{aligned} |u_n^2 - u_n u| &\leq |u_n||u_n - u| \\ &\leq |u_n||u_n + u| \\ &\leq |u_n|(|u_n| + |u|) \\ &\leq |u_n|^2 + |u_n||u| \\ &\leq g_1^2 + g_1|u|. \end{aligned}$$

Temos g_1 e $|u|$ pertencem a $L^p(B_R(0))$ então pela desigualdade de Hölder com expoentes conjugados p e q, tem-se que $g_1|u| \in L^1(B_R(0))$, assim como $g_1^2 \in L^1(B_R(0))$ o que implica $g_1^2 + g_1|u| \in L^1(B_R(0))$. Logo, pelo teorema da convergência dominada, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} |u_n^2 - u_n u|dx = \int_{B_R(0)} |u^2 - u^2|dx = 0.$$

Assim,

$$\bar{c}\int_{B_R(0)} u_n(u_n-u)dx \to 0 \tag{2.22}$$

quando $n\to\infty$. Usando a desigualdade de Hölder e a imersão contínua

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} (u_n^2-u_nu)dx\right| &\le \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} |u_n^2-u_nu|dx\\
&\le \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} |u_n^2+u_nu|dx\\
&\le \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} |u_n|^2dx+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} |u_nu|dx\\
&\le c_4||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))}+c_5||u_n||_{E_\lambda(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))}||u||_{L^q(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)))}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2, segue que

$$\lim_{n\to+\infty}\bar{c}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} u_n(u_n-u)dx=0. \tag{2.23}$$

Por (2.22) e (2.23), temos

$$\lim_{n\to+\infty}\bar{c}\int_{\mathbb{R}^N} u_n(u_n-u)dx=0. \tag{2.24}$$

De (2.17), (2.21) e (2.24), obtemos que

$$M(||u_n||_\lambda^2)\left\langle u_n,u_n-u\right\rangle_\lambda\to 0$$

quando $n\to\infty$. Da hipótese (M_1),

$$m_0\left\langle u_n,u_n-u\right\rangle_\lambda\le M(||u_n||_\lambda^2)\left\langle u_n,u_n-u\right\rangle_\lambda\to 0,$$

e sendo m_0 uma constante positiva, segue que

$$\left\langle u_n,u_n-u\right\rangle_\lambda\to 0$$

quando $n \to \infty$. Desta forma,

$$\langle u_n, u_n \rangle_\lambda - \langle u_n, u \rangle_\lambda = ||u_n||_\lambda^2 - \langle u_n, u \rangle_\lambda .$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \left(||u_n||_\lambda^2 - \langle u_n, u \rangle_\lambda \right) = 0. \tag{2.25}$$

Como consequência da convergência $u_n \rightharpoonup u$ em E_λ, temos

$$||u||_\lambda \leq \liminf ||u_n||_\lambda,$$

e obtemos

$$||u||_\lambda^2 \leq \liminf ||u_n||_\lambda^2 \leq \lim_{n\to\infty} ||u_n||_\lambda^2.$$

Como

$$||u_n - u||_\lambda^2 = ||u_n||_\lambda^2 - 2\langle u_n, u \rangle_\lambda + ||u||_\lambda^2$$

tomando o limite quando $n \to \infty$, e utilizando a desigualdade anterior, temos, de (2.25)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} (||u_n||_\lambda^2 - 2\langle u_n, u \rangle_\lambda + ||u||_\lambda^2) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} ||u_n||_\lambda^2 - 2\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle u_n, u \rangle_\lambda + ||u||_\lambda^2 \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} ||u_n||_\lambda^2 - 2\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle u_n, u \rangle_\lambda + \lim_{n\longrightarrow\infty} ||u_n||_\lambda^2 \\
&= 2\lim_{n\longrightarrow\infty} (||u_n||_\lambda^2 - \langle u_n, u \rangle_\lambda) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de onde, segue que

$$||u_n - u||_\lambda^2 \to 0,$$

ou seja, $u_n \to u$ em E_λ. Portanto, o funcional $\tilde{J}_\lambda$ satisfaz a condição de Palais-Smale.

■

Em seguida mostraremos que o funcional $\tilde{J}_\lambda$ assume um mínimo em E_λ e que esse mínimo é ponto crítico.

Proposição 2.3. *Nas mesmas condições do Teorema 2.1, para todo $\lambda > 0$, existe um ponto crítico u_0 de $\tilde{J}_\lambda$ tal que*

$$\tilde{J}_\lambda(u_0) = \inf_{u \in E_\lambda} \tilde{J}_\lambda(u).$$

Demonstração: Ja sabemos que $\tilde{J}_\lambda$ é coercivo e portanto é limitado inferiormente em E_λ. Logo, existe um c_λ tal que

$$c_\lambda = \inf_{u \in E_\lambda} \tilde{J}_\lambda(u)$$

dessa forma, existe uma sequência minimizante $(u_n) \in E_\lambda$ tal que $\tilde{J}_\lambda(u_n) \to c_\lambda$. Desde que o funcional é coercivo, (u_n) é uma sequência limitada em E_λ. Logo, $u_n \rightharpoonup u \ \ em \ \ E_\lambda$. Como $\tilde{J}_\lambda$ satisfaz a condição de Palais-Smale, então, a menos de subsequência, temos que

$$u_n \to u \ \ em \ \ E_\lambda$$

e pela imersão contínua, temos que

$$u_n \to u \quad em \quad L^p(\mathbb{R}^N)$$

com $2 \leq p \leq 2_s^*$. Pelo teorema de Vainberg existe $g_2 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to u \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

e

$$|u_n(x)| \leq g_2(x) \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N.$$

Logo,

$$u_n^2 \to u^2 \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

e

$$|u_n(x)|^2 \leq g_2^2(x) \leq g_2^p(x) \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N.$$

Como $g_2 \in L^p(\mathbb{R}^N)$, então $g_2^p \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e assim, pelo teorema da convergência dominada de

Lebesgue, segue

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx. \tag{2.26}$$

Note que podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(u_n)dx = \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} \tilde{F}(u_n)dxdx + \int_{\Omega_\Upsilon} \tilde{F}(u_n)dxdx.$$

Observando que, em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$, tem-se

$$\tilde{F}(u_n) = \int_0^{u_n} \tilde{f}(t)dt$$

e em Ω_Υ

$$\tilde{F}(u_n) = \int_0^{u_n} f(t)dt.$$

Então da convergência $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)$ e por Vainberg, existe $\bar{g} \in L^p(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)$ e uma subsequência, que ainda denotaremos por u_n, tal que

$$u_n \to u \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon,$$

além disso,

$$|u_n(x)| \leq \bar{g}(x) \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon.$$

Da continuidade da integral

$$\tilde{F}(u_n) \to \tilde{F}(u) \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon,$$

e da condição (1.7), temos

$$\tilde{F}(u_n) = \int_0^{u_n} \tilde{f}(t)dt \leq \int_0^{u_n} \sigma t dt \leq \frac{\sigma}{2}u_n^2 \leq \frac{\sigma}{2}|u_n|^2 = \frac{\sigma}{2}\bar{g}^2 \leq \frac{\sigma}{2}\bar{g}^p.$$

Como $\bar{g} \in L^p(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)$, então $\bar{g}^p \in L^1(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)$. Assim, pelo teorema da convergência dominada, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} \tilde{F}(u_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} \tilde{F}(u)dx.$$

Da imersão compacta $E_\lambda \hookrightarrow L^\gamma(\Omega_\Upsilon)$, com $2 \leq \gamma < \min\{2_s^*, 2\alpha_2 + 2\}$, temos $u_n \to u$ em $L^\gamma(\Omega_\Upsilon)$. Usando o mesmo argumento anterior, existe uma $g_3 \in L^\gamma(\Omega_\Upsilon)$ e juntamente com a condição (f_2), obtemos

$$\tilde{F}(u_n) \leq \int_0^{g_3} a_2|t|^{\gamma-1}dt = \frac{a_2}{\gamma}g_3^\gamma.$$

Uma vez que, $g_3 \in L^\gamma(\Omega_\Upsilon)$ então $|g_3|^\gamma \in L^1(\Omega_\Upsilon)$ e pelo teorema da convergência dominada, tem-se

$$\int_{\Omega_\Upsilon} \tilde{F}(u_n)dx \to \int_{\Omega_\Upsilon} \tilde{F}(u)dx$$

e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(u_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(u)dx \tag{2.27}$$

Logo de (2.26), (2.27), da continuidade de $\widehat{M}$ e do fato de que a norma é fracamente semicontínua inferiormente, estimamos

$$\tilde{J}_\lambda(u) \leq \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\widehat{M}(||u_n||_\lambda^2) - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2dx - \int_{\mathbb{R}^N}\tilde{F}(u_n)dx\right).$$

Portanto, temos que $\tilde{J}_\lambda$ é semicontínuo inferiormente e pelo teorema da minimização global, ver teorema (A.4), existe u_λ tal que $\tilde{J}_\lambda(u_\lambda) = c_\lambda$ e como $\tilde{J}_\lambda$ é de classe C^1, então u_λ é ponto crítico do funcional auxiliar. Agora precisamos garantir que u_λ seja positivo e não trivial. Primeiro mostraremos que $u_\lambda \neq 0$. De fato, tome $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ com suporte em $\Omega' \subset \Omega_\Upsilon$ (para que não se tenha dependência do parâmetro λ, logo iremos omitir o índice λ na simbologia $||.||_\lambda$) tal que $||\varphi||_{L^2(\Omega_\Upsilon)} = 1$ e $||\varphi|| = \rho(\Omega')$ com $2 \leq \gamma < \min(2_s^*, 2\alpha_2 + 2)$. Agora observe que

$$\tilde{J}_\lambda(t\varphi) = \frac{1}{2}\widehat{M}(||t\varphi||^2) - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(t\varphi)^2dx - \int_{\mathbb{R}^N}\tilde{F}(t\varphi)dx \tag{2.28}$$

com $t > 0$. Da condição (M_1) temos

$$\frac{1}{2}\hat{M}(||t\varphi||^2) \leq \frac{1}{2}\int_0^{||t\varphi||^2} M(s)ds \leq \frac{1}{2}\int_0^{||t\varphi||^2}(m_1 + b_1s^{\alpha_2})\,ds \leq \int_0^{||t\varphi||^2}(m_1 + b_1s^{\alpha_2})\,ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\widehat{M}(||t\varphi||^2) &\leq m_1||t\varphi||^2 + \frac{b_1}{\alpha_2+1}||t\varphi||^{2(\alpha_2+1)}\\ &\leq m_1t^2||\varphi||^2 + \frac{b_1}{\alpha_2+1}t^{2(\alpha_2+1)}||\varphi||^{2(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(||t\varphi||^2) \leq m_1t^2||\varphi||^2 + b_1t^{2(\alpha_2+1)}||\varphi||^{2(\alpha_2+1)}. \tag{2.29}$$

Note que

$$\frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(t\varphi)^2dx = \frac{\bar{c}}{2}t^2\int_{\mathbb{R}^N}\varphi^2dx = \frac{\bar{c}}{2}t^2\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi^2|dx = \frac{\bar{c}}{2}t^2||\varphi||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Como $L^2(\mathbb{R}^N) = L^2(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon) \cup L^2(\Omega_\Upsilon)$ então

$$||\varphi||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = ||\varphi||^2_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)} + ||\varphi||^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)} = ||\varphi||^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)} = 1$$

de onde, segue que

$$\frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(t\varphi)^2dx = \frac{\bar{c}}{2}t^2. \tag{2.30}$$

Agora observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\tilde{F}(t\varphi)dx = \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\tilde{F}(t\varphi)dx + \int_{\Omega_\Upsilon}\tilde{F}(t\varphi)dx. \tag{2.31}$$

Da condição (f_4), temos

$$f(s) \geq C_2|s|^{\vartheta-1}$$

com $2 \leq \vartheta < \min(2^*_s, 2\alpha_2+2)$. Assim, em Ω_Υ, temos

$$\tilde{F}(t\varphi) = \int_0^{t\varphi} f(s)ds \geq C_2\int_0^{t\varphi}|s|^{\vartheta-1}ds = \frac{C_2}{\vartheta}|t\varphi|^\vartheta = \frac{C_2t^\vartheta}{\vartheta}|\varphi|^\vartheta.$$

Integrando a desigualdade acima sobre Ω_Υ, temos

$$\int_{\Omega_\Upsilon} \tilde{F}(t\varphi)dx \geq \frac{C_2}{\vartheta} t^\vartheta ||\varphi||^\vartheta_{L^\vartheta(\Omega_\Upsilon)} \tag{2.32}$$

Da condição 2.4, temos que $\tilde{f}(s) \leq \sigma s$ e $\tilde{f}(s) \geq -\sigma s$. Assim, dessa primeira desigualdade, temos

$$\tilde{F}(t\varphi) = \int_0^{t\varphi} sds \leq \int_0^{t\varphi} \sigma sds = \frac{\sigma^2}{2} t^2 \varphi^2 \leq \frac{\sigma^2}{2} t^2 |\varphi|^2.$$

Integrando a expressão acima, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon} \tilde{F}(t\varphi)dx \leq \frac{\sigma t^2}{2} ||\varphi||^2_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)}.$$

Como, o $supp(\varphi) \subset \Omega' \subset \Omega_\Upsilon$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon} \tilde{F}(t\varphi)dx \leq 0. \tag{2.33}$$

Por outro lado, da segunda desigualdade, e usando argumentos análogos ao anterior, estimamos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon} \tilde{F}(t\varphi)dx \geq 0. \tag{2.34}$$

Assim, de (2.33) e (2.34), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon} \tilde{F}(t\varphi)dx = 0. \tag{2.35}$$

De (2.32) e (2.35) em (2.31), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(t\varphi)dx \geq \frac{C_2}{\vartheta} t^\vartheta ||\varphi||^\vartheta_{L^\vartheta(\Omega_\Upsilon)}. \tag{2.36}$$

Dessa forma, de (2.29), (2.30) e (2.36) em (2.28) segue que

$$\begin{aligned}\tilde{J}_\lambda(t\varphi) &\leq m_1 t^2 ||\varphi||^2 + b_1 t^{2(\alpha_2+1)} ||\varphi||^{2(\alpha_2+1)} - \frac{\bar{c}}{2}t^2 - \frac{C_2}{\vartheta} t^\vartheta ||\varphi||^\vartheta_{L^\vartheta(\Omega_\Upsilon)} \\ &\leq m_1 t^2 ||\varphi||^2 + b_1 t^{2(\alpha_2+1)} ||\varphi||^{2(\alpha_2+1)} - \frac{\bar{c}}{2}t^2 - Ct^\vartheta\end{aligned}$$

da hipótese sobre m_1 e b_1, da escolha de φ, de (f_4) e da condição $m_1 < \dfrac{\bar{c}}{2(\rho(\Omega'))^2}$, temos para t suficientemente pequeno que $\tilde{J}_\lambda(t\varphi) < 0$, logo

$$\tilde{J}_\lambda(u_\lambda) = \inf_{u \in E_\lambda} (\tilde{J}_\lambda(u)) < 0$$

e assim $u_\lambda \neq 0$. Agora, para ver que $u_\lambda > 0$, defina $u_\lambda^+ = \max\{u_\lambda, 0\}$ e $u_\lambda^- = \max\{-u_\lambda, 0\}$ assim

$$u_\lambda^- = u_\lambda^+ - u_\lambda$$

pelo fato de u_λ ser ponto crítico de $\tilde{J}_\lambda$ e usando u_λ^- como função teste, então

$$\tilde{J}'_\lambda(u_\lambda)u_\lambda^- = 0$$

donde, segue que

$$M\left(||u_\lambda||^2_\lambda\right) < u_\lambda, u_\lambda^- >= \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda u_\lambda^- dx + \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{h}(x, u_\lambda)u_\lambda^- dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}M\left(||u_\lambda||^2_\lambda\right)\left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u_\lambda(x) - u_\lambda(y))(u_\lambda^-(x) - u_\lambda^-(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_\lambda^-)^2 dx\right) \\ = \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda u_\lambda^- dx + \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{h}(x, u_\lambda)u_\lambda^- dx\end{aligned}$$

como

$$[u_\lambda^-]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_\lambda^-(x) - u_\lambda^-(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \leq \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u_\lambda(x) - u_\lambda(y))(u_\lambda^-(x) - u_\lambda^-(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy$$

temos, da igualdade anterior

$$M\left(||u_\lambda||_\lambda^2\right)\left([u_\lambda^-]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_\lambda^-)^2 dx\right) \leq \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda u_\lambda^- dx + \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{h}(x,u_\lambda)u_\lambda^- dx$$

$$M\left(||u_\lambda||_\lambda^2\right)||u_\lambda^-||_\lambda^2 \leq \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda u_\lambda^- dx + \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{h}(x,u_\lambda)u_\lambda^- dx \tag{2.37}$$

Agora, observe que se $u_\lambda^- = 0$, o lado direito da expressão acima é igual a zero. Porém, se $u_\lambda^- = -u_\lambda$, então

$$-u_\lambda = u_\lambda^+ - u_\lambda \Longrightarrow u_\lambda^+ = 0.$$

logo, $u_\lambda \leq 0$. Assim,

$$\bar{c}\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda u_\lambda^- dx = -\bar{c}\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^2 dx = -\bar{c}||u_\lambda||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.38}$$

Desde que $f(t) = 0$ se $t \leq 0$, temos que $\displaystyle\int_{\Omega_\Upsilon} f(u_\lambda)u_\lambda^- dx = 0$. Utilizando a definição de $\tilde{h}$, (2.4) e a argumentação anterior, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{h}(x,u_\lambda)u_\lambda^- dx &\leq \int_{\Omega_\Upsilon} f(u_\lambda)u_\lambda^- dx + \sigma\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda u_\lambda^- dx \\ &= -\sigma\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^2 dx \\ &= -\sigma||u_\lambda||^2_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

De (2.37), (2.38) e (2.39), segue que

$$M\left(||u_\lambda||_\lambda^2\right)||u_\lambda^-||_\lambda^2 \leq 0$$

da positividade de M, tem-se que

$$||u_\lambda^-||_\lambda^2 \leq 0$$

logo, $u_\lambda^- = 0$. Portanto, conclui-se que u_λ é solução positiva.

2.4 Existência de Solução para (P_λ)

Para provar a existência de solução para (P_λ), precisamos garantir que exista um $\lambda^* > 0$ tal que os pontos críticos u_λ de $\tilde{J}'_\lambda$ obtidos anteriormente são tais que se $\lambda > \lambda^*$, então $u_\lambda(x) \leq \xi$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$. O lema a seguir nós dará informações de como a família de pontos críticos $(u_\lambda)_{\lambda>0}$ de $\tilde{J}_\lambda$ se comporta fora de Ω_Υ quando $\lambda \to +\infty$.

Lema 2.3. *Com mesmas hipóteses do teorema 2.1, considerando $\{u_n = u_{\lambda_n}\} \subset H^s(\mathbb{R}^N)$ uma sequência satisfazendo*

$$\tilde{J}_{\lambda_n}(u_n) \to c \;\; e \;\; ||\tilde{J}'{}_{\lambda_n}(u_n)||_{E'_\lambda} \to 0$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$ e tal que $\lambda_n \to +\infty$ quando $n \to \infty$. Então, a menos de subsequência, existe $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$ e vale que

(i) $u_n \to u$ *em* $H^s(\mathbb{R}^N)$;

(ii) $u = 0$ *em* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$ *e* u *é solução do problema*

$$(P_{\Upsilon,\infty}) \begin{cases} M([u]^2_{\Omega_\Upsilon} + |u|^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)})((\Delta)^s u + u) = \bar{c}u + f(u) \\ u \in X(\Omega_\Upsilon); \end{cases}$$

(iii) $\lambda_n \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^2 \to 0$;

(iv) $\tilde{J}_{\lambda_n}(u_n) \to \dfrac{1}{2}\hat{M}\left([u]^2_{\Omega_\Upsilon} + |u|^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)}\right) - \dfrac{\bar{c}}{2}\displaystyle\int_{\Omega_\Upsilon} u^2 dx - \int_{\Omega_\Upsilon} F(u)dx.$

Demonstração: A prova dessa proposição e semelhante aos argumentos apresentados por Alves e Figueiredo em [3]. Observe que, pelo fato de $\tilde{J}'_\lambda$ ser coercivo, temos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em E_λ, para todo $\lambda > 0$ e como $||u_n||_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq ||u_n||_\lambda$ então, $\{u_n\}$ é limitada em $H^s(\mathbb{R}^N)$. Como $H^s(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, existe uma subsequência de $\{u_n\}$, denotada por ela mesmo e $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \;\; H^s(\mathbb{R}^N)$$

e

$$u_n(x) \to u(x) \;\; em \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R}^N.$$

Agora, para cada $m \in \mathbb{N}$ considere o conjunto

$$C_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^N ; a(x) \geq \frac{1}{m} \right\}$$

dessa forma,

$$\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon = \bigcup_{m=1}^{+\infty} C_m.$$

Observe que

$$|u_n|^2 = \frac{\lambda_n a(x) + 1}{\lambda_n a(x) + 1} |u_n|^2. \tag{2.40}$$

Como

$$\begin{aligned} a(x) \geq \frac{1}{m} \quad & \Longrightarrow \quad \frac{\lambda_n}{m} \leq \lambda_n a(x) \\ & \Longrightarrow \quad \frac{\lambda_n}{m} + 1 \leq \lambda_n a(x) + 1 \\ & \Longrightarrow \quad \frac{1}{\lambda_n a(x) + 1} \leq \frac{m}{\lambda_n + m}. \end{aligned}$$

Multiplicando por $(\lambda_n a(x) + 1)|u_n|^2$ em ambos os membros, temos de (2.40)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_n a(x) + 1}{\lambda_n a(x) + 1} |u_n|^2 &\leq \frac{m}{\lambda_n + m} (\lambda_n a(x) + 1)|u_n|^2 \\ |u_n|^2 &\leq \frac{m}{\lambda_n + m} (\lambda_n a(x) + 1)|u_n|^2 \end{aligned}$$

aplicando a integral sobre C_m, temos

$$\begin{aligned} \int_{C_m} |u_n|^2 dx \quad & \leq \quad \frac{m}{\lambda_n + m} \int_{C_m} (\lambda_n a(x) + 1)|u_n|^2 dx \\ & \leq \quad \frac{m}{\lambda_n + m} \left(\iint_{C_m^2} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dxdy + \int_{C_m} (\lambda_n a(x) + 1)|u_n|^2 dx \right) \\ & \leq \quad \frac{m}{\lambda_n + m} ||u_n||^2_{E_{\lambda_n}}. \end{aligned}$$

Como (u_n) é limitada em E_{λ_n}, então existe $c > 0$ tal que

$$\int_{C_m} |u_n|^2 dx \leq \frac{mc}{\lambda_n + m}.$$

Pelo lema de Fatou, temos

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{C_m} |u_n|^2 dx = \int_{C_m} \liminf_{n\to\infty} |u_n|^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{C_m} |u_n|^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{mc}{\lambda_n + m} = 0.$$

Assim,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{C_m} |u_n|^2 = 0.$$

Por outro lado, da convergência anterior e do teorema da convergência dominada, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{C_m} |u_n|^2 = \int_{C_m} |u|^2,$$

e segue da unicidade do limite que

$$\int_{C_m} |u|^2 = 0.$$

de onde, obtemos que $u = 0$ em C_m para todo $m \in \mathbb{N}$ e assim $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$. Da limitação de $\{u_n\}$ em E_λ, temos que $\{u_n - u\}$ é limitada e do limite $\tilde{J}_{\lambda_n} \to 0$, tem-se

$$M(||u_n||^2) < u_n, u_n - u >_\lambda = o_n(1) + \bar{c} \int_{\mathbb{R}^N} u_n(u_n - u)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{h}(u_n)(u_n - u)dx$$

pois, $\tilde{J}'_\lambda(u_n)(u_n - u) \to 0$ quando $n \to \infty$. Observe que, como $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$, temos

$$\bar{c} \int_{\mathbb{R}^N} u_n(u_n - u)dx = \bar{c} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon} u_n^2 dx + \bar{c} \int_{\Omega_\Upsilon} u_n^2 - u_n u dx.$$

Da construção anterior,

$$\lim_{n\to\infty} \bar{c} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon} u_n^2 dx \leq \lim_{n\to\infty} \bar{c} \int_{\bigcup C_m} |u_n|^2 dx = \int_{\bigcup C_m} |u|^2 dx = 0.$$

Agora, pela imersão compacta, do teorema de Vainberg e do teorema da convergência dominada, segue que

$$\int_{\Omega_\Upsilon} \bar{c}|u_n^2 - u_n u| dx \to \int_{\Omega_\Upsilon} \bar{c}|u^2 - u^2| dx = 0,$$

de onde concluímos

$$\bar{c} \int_{\mathbb{R}^N} u_n(u_n - u)dx \to 0$$

quando $n \to \infty$. Usando argumentos análogos, aos da proposição (2.2) mostra-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{h}(u_n)(u_n - u) \to 0$$

quando $n \to \infty$. De onde, vem que

$$M(||u_n||^2) < u_n, u_n - u >_{\lambda_n} \to 0$$

quando $n \to \infty$. Usando novamente a argumentação da Proposição 2.2, prova-se

$$||u_n - u||_{\lambda_n} \to 0 \tag{2.41}$$

quando $n \to +\infty$. Como $||u_n - u||_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq ||u_n - u||_{\lambda_n}$, segue que $u_n \to u$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$.
(ii) Pelo fato de, $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ e $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$ temos que $u \in X(\Omega_\Upsilon)$. Para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\Upsilon)$, tem-se

$$J'_{\lambda_n}(u_n)\varphi = M(||u_n||^2) < u_n, \varphi >_{X(\Omega_\Upsilon)} -\bar{c} \int_{\Omega_\Upsilon} u_n \varphi dx - \int_{\Omega_\Upsilon} f(u_n)\varphi dx.$$

Como $J'_{\lambda_n}(u_n)\varphi \to 0$ quando $n \to \infty$ e da condição (i), segue que

$$\begin{aligned} M(||u_n||^2) \langle u, \varphi \rangle_{X(\Omega_\Upsilon)} &= \bar{c} \int_{\Omega_\Upsilon} u\varphi dx + \int_{\Omega_\Upsilon} f(u)\varphi dx \\ &= \int_{\Omega_\Upsilon} (\bar{c}u + f(u))\varphi dx, \end{aligned}$$

e como $C_0^\infty(\Omega_\Upsilon)$ é denso em $H^s(\Omega_\Upsilon)$ a equação acima implica

$$M(||u||^2) \langle u, \varphi \rangle_{X(\Omega_\Upsilon)} = \int_{\Omega_\Upsilon} (\bar{c}u + f(u))v dx$$

mostrando que u restrito a Ω_Υ é uma solução fraca do problema não local

$$(P)_\Upsilon, \infty \begin{cases} M(|u|^2_{X(\Omega_\Upsilon)} + |u|^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)})((\Delta)^s u + u) = \bar{c}u + f(u) \quad em \quad \Omega_\Upsilon \\ u > 0, \quad em \ \ \Omega_\Upsilon, u \in X(\Omega_\Upsilon). \end{cases}$$

(iii) Observe que

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^2 dx = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon} a(x)|u|^2 dx + \lambda_n \int_{\Omega_\Upsilon} a(x)|u|^2 dx,$$

e como $a(x) = 0$ em Ω_Υ e $u(x) = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$, então

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^2 dx = 0.$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^2 dx &= \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^2 dx - 0 \\
&= \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^2 dx - \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^2 dx \\
&= \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} \left[a(x)(|u_n|^2 - |u|^2) \right] dx \\
&\leq \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n - u|^2 dx \\
&\leq \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n - u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_n a(x) + 1)|u_n - u|^2 dx \\
&\leq \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u_n(x) - u(x)) - (u_n(y) - u(y))|^2}{|x - y|^{N+2s}} dxdy \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_n a(x) + 1)|u_n - u|^2 dx \\
&= ||u_n - u||_{\lambda_n}^2,
\end{aligned}$$

e da convergência de (2.41), concluímos o resultado.

(iv) Observamos que

$$\begin{aligned}
||u_n||_{\lambda_n}^2 &= [u_n]_s^2 + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_n a(x) + 1)|u_n|^2 dx \\
&= [u_n]_s^2 + \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx \\
&= [u_n]_s^2 + |u_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^2 dx \\
&= ||u_n||_{H^s(\mathbb{R}^N)}^2 + \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^2 dx.
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \to +\infty$, temos por (i) e (iii) que

$$||u_n||^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} + \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^2 dx \to ||u||^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

Pelo fato de $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$, obtemos

$$||u_n||^2_{\lambda_n} \to ||u||^2_{H^s(\Omega_\Upsilon)} = [u]^2_{\Omega_\Upsilon} + |u|^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)},$$

de onde segue que

$$\frac{1}{2}\widehat{M}\left(||u_n||^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}\right) \to \frac{1}{2}\widehat{M}\left([u]^2_{\Omega_\Upsilon} + |u|^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)}\right) \tag{2.42}$$

quando $n \to \infty$. Agora veja que,

$$\frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n dx = \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_n dx + \frac{\bar{c}}{2}\int_{\Omega_\Upsilon} u_n^2 dx.$$

Usando a imersão contínua $H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ com $p \in [2, 2_s^*]$, o item (i) e o fato de $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$ mostra-se que

$$\frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_n^2 dx \to 0$$

quando $n \to +\infty$. Usando novamente a imersão contínua, o teorema de Vainberg e o teorema da convergência dominada, prova-se que

$$\int_{\Omega_\Upsilon} u_n^2 dx \to \int_{\Omega_\Upsilon} u^2 dx.$$

Das duas convergências acima, temos

$$\frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx \to \frac{\bar{c}}{2}\int_{\Omega_\Upsilon} u^2 dx. \tag{2.43}$$

Utilizando os mesmos argumentos da Proposição 2.3, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(u_n)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(u)dx. \tag{2.44}$$

Como $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$ e

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(u)dx &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} \tilde{F}(u)dx + \int_{\Omega_\Upsilon} \tilde{F}(u)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} \left[\int_0^u \tilde{f}(t)dt\right] dx + \int_{\Omega_\Upsilon} \left[\int_0^u f(t)dt\right] dx \\
&= 0 + \int_{\Omega_\Upsilon} F(u)dx \\
&= \int_{\Omega_\Upsilon} F(u)dx,
\end{aligned}$$

então, em 2.44, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(u_n)dx \longrightarrow \int_{\Omega_\Upsilon} F(u)dx \tag{2.45}$$

Portando de (2.42), (2.43) e (2.45) conclui-se que

$$J_{\lambda_n}(u_n) \longrightarrow \frac{1}{2}\hat{M}\left([u]^2_{\Omega_\Upsilon} + |u|^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)}\right) - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\Omega_\Upsilon} u^2 dx - \int_{\Omega_\Upsilon} F(u)dx.$$

Proposição 2.4. *Existe $\lambda^* > 0$, tal que para todo $\lambda \geq \lambda^*$ o problema (P_λ) possui solução de energia mínima.*

Demonstração: Seja u_λ um ponto critico do funcional $\tilde{J}_\lambda$ e consequentemente solução fraca do problema

$$\begin{cases} M(||u||^2_\lambda)(-(\Delta)^s u + V(x)u) = \bar{c}u + \tilde{h}(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Sendo M estreitamente positiva, podemos reescrever o problema acima como

$$\begin{cases} (\Delta)^s u + V(x)u = \dfrac{\bar{c}u + \tilde{h}(u)}{M(||u||^2_\lambda)} \quad em \quad \mathbb{R}^N, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Fazendo modificações na Proposição 5.1.1 em [22] (ver também Proposição 2.2 em [10]) mostramos no Apêndice C que

$$||u_\lambda||_{L^\infty(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)} \leq C_0 A_1$$

onde

$$A_1 \leq C|u_\lambda|_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)},$$

e usando a imersão contínua $H^s(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon) \hookrightarrow L^{2^*_s}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)$, obtemos

$$||u_\lambda||_{L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)} \leq K_1 ||u_\lambda||_{H^s(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)},$$

onde K_1 é positivo. De (i) e do fato de, $u_\lambda = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$ inferimos que

$$||u_\lambda||_{H^s(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)} \to 0$$

quando $\lambda \to +\infty$. Então, dado $\varepsilon = \dfrac{\xi}{K_1} > 0$ existe $\lambda^* > 0$ tal que

$$||u_\lambda||_{H^s(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)} \leq \frac{\xi}{K_1} \;\; \forall \;\; \lambda \geq \lambda^*.$$

Daí, temos

$$||u_\lambda||_{L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)} \leq \xi \;\; \forall \;\; \lambda \geq \lambda^*.$$

Como

$$u_\lambda(x) \leq |u_\lambda(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon} |u_\lambda(x)| = ||u_\lambda||_{L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)},$$

segue que $u_\lambda(x) \leq \xi$ para todo $\lambda > \lambda^*$ com $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$. Provando assim o desejado.

Para provarmos o resultado de concentração de soluções do Teorema 2.1 precisamos mostrar que as soluções u_λ de (P_λ) convergem para uma solução de $(P)_{\infty,\Upsilon}$, quando $\lambda \to +\infty$. Para tanto, vamos enunciar o seguinte lema;

Lema 2.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto do $\mathbb{R}^N$, considere $u \in H^s(\Omega)$ com $s \in (0,1)$. Se existir um conjunto compacto $\mathcal{K} \subset \Omega$ tal que $u \equiv 0 \in \Omega \setminus \mathcal{K}$, então a função extensão*

$$\mathcal{E}u(x) = \begin{cases} u & se \;\; x \in \Omega, \\ 0 & se \;\; x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

pertence a $H^s(\mathbb{R}^N)$ e

$$||\mathcal{E}u||_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq \overline{k} ||\mathcal{E}u||_{H^s(\Omega)}$$

onde $\bar{k}$ depende de n, s, p, K e Ω.

Demonstração: Ver Lema 5.1 em [20].

Considere o funcional energia $J_\Upsilon : X(\Omega_\Upsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J_\Upsilon(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left([u]^2_{\Omega_\Upsilon} + |u|^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)}\right) - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\Omega_\Upsilon} u^2 dx - \int_{\Omega_\Upsilon} F(u)dx$$

associado ao problema $(P)_{\Upsilon,\infty}$. Seja

$$c_\Upsilon = \inf_{u \in X(\Omega_\Upsilon)} J_\Upsilon(u).$$

Usando os mesmos argumentos da Proposição 2.3 para este funcional é possível mostrar que existe $u_0 \in X(\Omega_\Upsilon)$ tal que

$$J_\Upsilon(u_0) = c_\Upsilon.$$

Neste sentido mostraremos a relação existente entre os níveis críticos c_λ de J_λ e c_Υ de J_Υ.

Proposição 2.5. *Os seguintes itens são verdadeiro*

(i) $c_\lambda \leq c_\Upsilon$ para todo $\lambda \geq 0$;

(ii) $c_\lambda \to c_\Upsilon$ quando $\lambda \to \infty$.

Demonstração: (i) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, tal que $\Omega_\Upsilon \subset \Omega$. Devido a condição de Dirichlet em $(P)_{\infty,\Upsilon}$, temos que $u_0 \equiv 0$ fora de $\overline{\Omega}$. Como $\Omega_\Upsilon \subset \Omega$, então $\overline{\Omega}_\Upsilon \subset \Omega$ e portanto, $u_0 \equiv 0$ em $\Omega \setminus \overline{\Omega}_\Upsilon$ usando o lema anterior existe uma extensão $\mathcal{E}u_0 \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Uma vez que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\mathcal{E}u_0|^2 dx < +\infty$$

temos $\mathcal{E}u_0 \in E_\lambda$ e como $X(\Omega_\Upsilon) \subset E_\lambda$, segue que

$$c_\lambda = \inf_{u \in E_\lambda} \tilde{J}_\lambda(u) \leq \inf_{X(\Omega_\Upsilon)} J_\Upsilon(u) = c_\Upsilon,$$

para todo $\lambda > 0$.

Para ver (ii), considere (c_{λ_n}) uma sequência do item (i) e observe que (c_{λ_n}) é limitada para todo $n \in \mathbb{N}$ logo, (c_{λ_n}) admite uma subsequência, que continuaremos a denotar por

(c_{λ_n}), tal que $c_{\lambda_n} \to c$ quando $n \to +\infty$ e claro $c \leq c_\Upsilon$. Por tanto, existe $u_{\lambda_n} \in H^s(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$c_{\lambda_n} = \tilde{J}_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \to c \ \ e \ \ ||\tilde{J}'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})||_{E'_\lambda} \to 0$$

com $\lambda_n \to +\infty$, quando $n \to +\infty$. Pelo item (i) do Lema 2.3 existe $\tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$u_{\lambda_n} \to \tilde{u} \ \ em \ \ H^s(\mathbb{R}^N)$$

como $\tilde{u} = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$, temos que $\tilde{u} \in X(\Omega_\Upsilon)$. Pelo item (iv) do mesmo lema, segue que

$$\tilde{J}_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \to J_\Upsilon(\tilde{u}).$$

Pela unicidade do limite, tem-se

$$c = J_\Upsilon(\tilde{u}).$$

Observando que

$$J_\Upsilon(\tilde{u}) \geq \inf_{u \in X(\Omega_\Upsilon)} J_\Upsilon(u) = c_\Upsilon$$

então

$$c \geq c_\Upsilon.$$

Logo, $c = c_\Upsilon$. Da convergência $c_{\lambda_n} \to c$ conclui-se o item (ii).

Prova do Teorema 2.1: A Proposição 2.4, nós diz que existe $\lambda^* > 0$ tal que u_n é solução de (P_λ), para todo $\lambda_n \geq \lambda^*$. Por isso e do item (ii) da Proposição 2.5 a menos de subsequência,

$$J_{\lambda_n}(u_n) \to c_\Upsilon \ \ e \ \ ||J'_{\lambda_n}(u_n)||_{E'_\lambda} \to 0,$$

onde $\lambda_n \geq \lambda^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, usando o Lema 2.3 obtemos do item (i) e (ii) que u_n converge para u em $H^s(\mathbb{R}^N)$, onde u é solução do problema $(P)_{\Upsilon,\infty}$ e pelo item (iv) do mesmo Lema, segue que

$$J_{\lambda_n}(u_n) \to J_\Upsilon(u),$$

quando $n \to +\infty$. Da unicidade do limite, conclui-se que $J_\Upsilon(u) = c_\Upsilon$.

Capítulo 3

Existência e Concentração de Solução para o caso Crítico

3.1 Problema proposto

Neste capitulo estamos interessados em obter resultados de existência e concentração de soluções para o seguinte problema com crescimento crítico.

$$(P_*)\begin{cases} M\left([u]_s^2+\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2\right)((-\Delta)^s u+V(x)u)=h(x)u+u^{2_s^*-1} & em\ \ \mathbb{R}^N\\ u>0, \quad em\ \ \mathbb{R}^N, \quad u\in H^s(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $2_s^*=\dfrac{2N}{N-2s}$ é o expoente crítico fracionário de Sobolev.

Para estudar esse caso, exigiremos que a função M tenha a seguinte forma;

(M_2) $M(t)=m_0+b_0t^{\alpha_1}$, $m_0>0$, $b_0>0$ e $2\alpha_1+2>2_s^*$ e satisfaz

(M_3) Existe um $\theta\in(2,2_s^*)$ tal que

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(t)-\frac{1}{\theta}M(t)\geq -Kb_0t^{2\alpha_1},$$

onde $\hat{M}(t)=\displaystyle\int_0^t M(\tau)d\tau$ e K é uma constante positiva.

Observe que, se $N=3$ e $s<\dfrac{3}{4}$, temos que $2_s^*<4$, então a função modelo de Kirchhoff

$M(t) = m_0 + b_0 t$ satisfaz a condição (M_3) para $\theta \in (2, 2_s^*)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\widehat{M}(t) - \frac{1}{\theta}M(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t M(\tau)d\tau - \frac{1}{\theta}(m_0 + b_0 t)t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t (m_0 + b_0\tau)d\tau - \frac{m_0 t}{\theta} - \frac{b_0 t^2}{\theta} \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^t m_0 d\tau - b_0\int_0^t \tau d\tau\right) - \frac{m_0 t}{\theta} - \frac{b_0 t^2}{\theta} \\
&= \frac{m_0 t}{2} + \frac{b_0 t^2}{4} - \frac{m_0 t}{\theta} - \frac{b_0 t^2}{\theta} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) m_0 t + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right) b_0 t^2 \\
&\geq -\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}\right) b_0 t^2
\end{aligned}
$$

pois $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) m_0 t > 0$, além disso, a constante $\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}\right)$ é positiva.

Vamos assumir que a função $h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaça as seguintes condições

(h_1) $h \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}(\mathbb{R}^N)$

(h_2) $|h|_{L^2(\Theta)} > 2m_0\rho(\Theta)$ para um aberto e limitado $\Theta \subset \Omega_\Upsilon$

Estabelecidas essas condições, enunciaremos o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.1. *Suponha que as condições $(a_1) - (a_2)$ e $(h_1) - (h_2)$ sejam verdadeiras; além disso o termo não local M tem a forma (M_2) e verifica (M_3). Se $|h|_{2_s^*/(2_s^* - 2)} < c^* m_0^{\frac{N}{2s}}$, onde c^* depende da constante de Sobolev S e*

$$
c^* = \left(2C(N,s)^{-1}S\right)^{\frac{N}{2s}} \left(\frac{2_s^* - 2}{2}\right)^{-1} \left[\frac{2}{2_s^*\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2_s^*}\right)}\right]^{-\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}
$$

então, existe constantes λ^*, ε_0 e K_0 positivas tal que (P_*) tem solução com energia mínima para todo $\lambda > \lambda^*$, $b_0 \in (0, \varepsilon_0)$ e $m_0 \in (K_0, +\infty)$. Além disso, para toda sequência (λ_n) com $\lambda_n \to +\infty$, podemos extrair uma subsequência (λ_{n_i}) tal que $(u_{\lambda_{n_i}})$ converge fortemente em $H^s(\mathbb{R}^N)$ para u, de modo que $u = 0$ fora de Ω_Υ e u restrito a Ω_Υ é solução para o problema

$$
(P_*)_{\Upsilon,\infty} \begin{cases} M\left(||u||^2_{X(\Omega_\Upsilon)}|u|^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)}\right)((-\Delta)^s u + u) = h(x)u + u^{2_s^*-1} \ \ em \ \ \Omega_\Upsilon \\ u > 0, \ \ em \ \ \Omega_\Upsilon, \ \ u \in X(\Omega_\Upsilon) \end{cases}
$$

onde $||u||^2_{X(\Omega_\Upsilon)} = \displaystyle\iint_{\Omega_\Upsilon\times\Omega_\Upsilon} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy$ e $X(\Omega_\Upsilon)$ é o espaço definido no capítulo 1.

Para estudarmos o problema (P_*), vamos utilizar um truncamento análogo ao que foi feito no caso subcrítico para contornar a falta de compacidade no $\mathbb{R}^N$. Observe que, uma solução fraca do problema proposto é uma função $u \in E_\lambda$ tal que

$$M(||u||^2_\lambda) < u, v >_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)uvdx + \int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*_s-1}vdx$$

para toda $v \in E_\lambda$. Dessa forma, definimos o funcional energia $I_\lambda : E_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (P_*) dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(||u||^2_\lambda) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u^2dx - \frac{1}{2^*_s}\int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*_s}dx$$

onde os pontos críticos de I_λ são soluções de (P_*). Esse funcional está bem definido e é de classe $C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$.

Sendo $t \to t^{2^*_s-1}$ crescente, definimos a função truncada $\tilde{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} t^{2^*_s-1} & se \quad t \leq \xi' \\ \sigma' t, & se \quad t \geq \xi', \end{cases}$$

onde $(\xi')^{2^*_s-1} = \sigma'\xi'$ para algum $\sigma' > 0$ fixo. Dessa forma, temos a seguinte condição de crescimento para $\tilde{g}$

$$\tilde{g}(t) \leq \sigma' t. \tag{3.1}$$

Agora, definamos a aplicação $\bar{h} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\bar{h}(x,t) = \chi_\Upsilon(x)t^{2^*_s-1} + (1-\chi_\Upsilon(x))\tilde{g}(t)$$

para todo $(x,t) \in \Omega_\Upsilon \times \mathbb{R}$, onde χ_Υ é a função característica em $\Omega_\Upsilon \subset \mathbb{R}^N$. Dessa maneira, temos o seguinte funcional auxiliar $\tilde{I_\lambda} : E_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\tilde{I_\lambda}(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(||u||^2_\lambda) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u^2dx - \int_{\mathbb{R}^N} \bar{H}(x,u)dx$$

onde $\bar{H}(x,t) = \displaystyle\int_0^t \bar{h}(x,s)ds.$

De modo análogo ao capítulo anterior, é possível mostrar que se u_0 é ponto crítico de $\tilde{I}_\lambda$ com $u_0(x) < \xi'$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$, então u_0 é ponto crítico de I_λ e consequentemente solução do problema (P_*). Apesar do roteiro deste capítulo seguir a mesma estrutura do anterior (no caso subcrítico), teremos aqui uma maior dificuldade, pois a função $\bar{H}(x,u)$ pode ter crescimento crítico em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, onde Ω é um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^N$ e neste caso o funcional $\tilde{I}_\lambda$ não satisfaz a condição (PS) em todos os níveis devido a falta de compacidade do funcional, causada pela presença do expoente crítico fracionário de Sobolev na imersão de E_λ em $L^{2_s^*}$. Esse problema, será resolvido analisando o comportamento do funcional em Ω, e portanto investigaremos o comportamento sequências (PS) restrito a $H^s(\Omega)$, e fora dele e juntamente com uma versão do lema de concentração mostraremos que a compacidade ocorre abaixo de um certo nível. Faremos essas análises nas próximas seções.

3.2 Sequências Palais-Smale em $E_\lambda(\Omega)$

Nessa seção, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denota um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ que contém Ω_Υ Definamos o funcional $I : E_\lambda(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(||u||_\lambda^2) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \bar{H} dx$$

onde $E_\lambda(\Omega) = \left\{ u \in H^s(\Omega); \displaystyle\int_\Omega V(x)u^2 dx < \infty \right\}.$

Com a finalidade de provar a condição $(PS)_c$ para o funcional I, vamos exibir a seguinte versão do Lema da Concentração e Compacidade de Lions, para o operador Laplaciano fracionário, que pode ser encontrada em [36].

Lema 3.1. *Se (u_n) é uma sequência limitada em $H^s(\Omega)$, então existem medidas positivas μ e ν tais que*

$$\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n(x)\right|^2 dx \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \quad e \quad |u_n(x)|^{2_s^*} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu \quad em \quad \mathcal{M}(\mathbb{R}^N). \tag{3.2}$$

Além disso, se u é limite fraco de (u_n) em $H^s(\Omega)$, podemos obter um conjunto enumerável de pontos distintos $\{x_i\}_{i\in J}$, números não negativos $\{\mu_i\}_{i\in J}$ e $\{\nu_i\}_{i\in J}$ e uma medida positiva

$\tilde{\mu}$ com suporte contido em $\bar{\Omega}$ tais que

$$\nu = |u(x)|^{2_s^*}dx + \sum_{i \in J} \nu_i \delta_{x_i}, \quad \mu = |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(x)^2 dx + \tilde{\mu} + \sum_{i \in J} \mu_i \delta_{x_i} \tag{3.3}$$

e

$$\nu_i \leq S^{\frac{-2_s^*}{2}} \mu_i^{\frac{2_s^*}{2}} \tag{3.4}$$

onde S é a melhor constante de Sobolev, definida por

$$S = \inf_{v \in H^s(\Omega), v \neq 0} \frac{||v||^2_{H^s(\Omega)}}{|v|^{2_s^*}_{2_s^*}}. \tag{3.5}$$

Demonstração: Veja o Teorema 5 em [36] e o Teorema 8.6.2 em [13]

A proposição a seguir nós dará informações sobre o nível para o qual o funcional satisfaz a condição (PS). A prova desta proposição é baseada em [25].

Proposição 3.1. *Suponha que sejam verdadeiras as condições do Teorema 3.1. Seja $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E_\lambda$ uma sequência tal que $||u_n|| < C$ e*

$$I(u_n) \to c \quad ||I'(u_n)|| \to 0 \tag{3.6}$$

com

$$c < k_3 - k_4 \tag{3.7}$$

onde

$$k_1 = \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2_s^*} \right), \quad k_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) |h|_{L^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}(\Omega)},$$

$$k_3 = k_1 \left(2m_0 C(N,s)^{-1} S \right)^{\frac{N}{2s}} - b_0 C - \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2} \right) \sigma' C$$

e

$$k_4 = k_1 \left(\frac{2k_2}{2_s^* k_1} \right)^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}} \left(\frac{2_s^* - 2}{2} \right).$$

Então, existe uma subsequência de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge forte em E_λ.

Demonstração: Sendo (u_n) uma sequência limitada em E_λ e este Banach reflexivo, então existe $u \in E_\lambda$ tal que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \ \ em \ \ E_\lambda(\Omega) \\ u_n \to u \ \ em \ \ L^p(\Omega) \ \ com \ \ 1 \leq p < 2_s^* \\ u_n \to u \ \ q.t.p \ \ em \ \ \Omega \\ |u_n(x)| \leq g \ \ q.t.p \ \ em \ \ \Omega \ \ com \ \ g \in L^p(\Omega). \end{cases} \tag{3.8}$$

Então, pelo lema anterior, existem medidas positivas μ e ν que verificam (3.2), (3.3) e (3.4). Seja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$, tal que $\psi(0) = 1$, $0 \leq \psi(x) \leq 1$ e o suporte de ψ esteja contido em $B_1(0) \subset \Omega$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Definindo para cada $\delta > 0$, a função

$$\psi_{\delta,i_0}(x) = \psi\left(\frac{x - x_{i_o}}{\delta}\right),$$

com $i_o \in J$, fixo.

Observe que

$$||\psi_{\delta,i_0} u_n|| = ||\psi_{\delta,i_0}||||u_n|| \leq ||\psi_{\delta,i_0}||C \leq C.$$

Logo, $\{\psi_{\delta,i_0} u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^s(\Omega)$ e de (3.6), temos

$$\langle I'(u_n), \psi_{\delta,i_0} u_n\rangle = ||I'(u_n)||||\psi_{\delta,i_0}|| \longrightarrow 0$$

quando $n \to +\infty$ e como

$$I'(u_n)(\psi_{\delta,i_0} u_n) = M(||u_n||^2)\, \langle u_n, \psi_{\delta,i_0} u_n\rangle_\lambda - \int_\Omega h(x) u_n \psi_{\delta,i_0} u_n dx - \int_\Omega \bar{h}(x) \psi_{\delta,i_0} u_n dx$$

temos,

$$M(||u_n||^2)\, \langle u_n, \psi_{\delta,i_0} u_n\rangle = \int_\Omega h(x) u_n^2 \psi_{\delta,i_0} dx + \int_\Omega \bar{h}(x) u_n \psi_{\delta,i_0} dx + o_n(1). \tag{3.9}$$

Pela Proposição 1.10 para qualquer $w \in C_0^\infty(\Omega)$, tem-se

$$[w]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = 2C(N,s)^{-1} ||(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w||_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Assim
$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|w(x)-w(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} = 2C(N,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w(x)|^2 dx,$$

onde $C(N,s)$ é a constante de normalização (1.7) definida no capítulo (1). Tomando a derivada da igualdade acima, para qualquer v e w em $C_0^\infty(\Omega)$, obtemos

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(v(x)-v(y))(w(x)-w(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = 2C(N,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} v(x)(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w(x)dx, \tag{3.10}$$

e além disso, para qualquer que seja v, $w \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(vw) = v(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w + w(-\Delta)^{\frac{s}{2}} v - 2\mathcal{L}_{\frac{s}{2}}(v,w), \tag{3.11}$$

onde $\mathcal{L}$ é definido no sentido do valor principal da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{\frac{s}{2}}(v,w)(x) = P.V \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(v(x)-v(y))(w(x)-w(y))}{|x-y|^{N+2s}} dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. De (3.10) e (3.11), temos

$$\begin{aligned} \langle u_n, \psi_{\delta,i_0} u_n\rangle &= \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(v(x)-v(y))(\psi_{\delta,i_0}(x)u_n(x)-\psi_{\delta,i_0}(y)u_n(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &= 2C(N,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} u_n(x)(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n(x)(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\psi_{\delta,i_0}(x)dx + 2C(N,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n(x)|^2 \psi_{\delta,i_0}(x)dx \\ &- 4C(N,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n(x)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(v(x)-v(y))(\psi_{\delta,i_0}(x)u_n(x)-\psi_{\delta,i_0}(y)u_n(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \end{aligned} \tag{3.12}$$

Pelos Lemas (A.1) e (A.2), temos

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N} u_n(x)(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n(x)(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\psi_{\delta,i_0}(x)dx\right| = 0 \tag{3.13}$$

e

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n(x)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(v(x)-v(y))(\psi_{\delta,i_0}(x)u_n(x)-\psi_{\delta,i_0}(y)u_n(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy\right| = 0. \tag{3.14}$$

Pela convergência em (3.2), temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_n(x)|^2\psi_{\delta,i_0}(x)dx=\int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(x)|^2\psi_{\delta,i_0}(x)dx+\tilde{\mu}\psi_{\delta,i_0}(x)+\sum_{i\in J}\mu_i\delta_{x_i}(\psi_{\delta,i_0}).$$

Uma vez que, $supp(\psi)\subset B_1(0)$ da definição de ψ_{δ,i_0}, teremos que $supp(\psi_{\delta,i_0})\subset B_\delta(x_{i_0})$, então

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_n(x)|^2\psi_{\delta,i_0}(x)dx &= \int_{B_\delta(x_{i_0})}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(x)|^2\psi_{\delta,i_0}(x)dx+\tilde{\mu}\psi_{\delta,i_0}(x)\\ &\quad+\sum_{i\in J}\mu_i\delta_{x_i}(\psi_{\delta,i_0})\\ &= \int_{B_\delta(x_{i_0})}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(x)|^2\psi_{\delta,i_0}(x)dx+\tilde{\mu}\psi_{\delta,i_0}(x)\\ &\quad+\sum_{i\in J}\mu_i\psi_{\delta,i_0}(x_i)\\ &= \int_{B_\delta(x_{i_0})}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(x)|^2\psi_{\delta,i_0}(x)dx+\tilde{\mu}\psi_{\delta,i_0}(x)\\ &\quad+\int_{B_\delta(x_{i_0})}\psi_{\delta,i_0}d\mu\\ &\geq \int_{B_\delta(x_{i_0})}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(x)|^2\psi_{\delta,i_0}(x)dx+\int_{B_\delta(x_{i_0})}\psi_{\delta,i_0}(x)d\mu\end{aligned}\tag{3.15}$$

pois, $\tilde{\mu}\psi_{\delta,i_0}(x)\geq 0$. Como

$$\int_{B_\delta(x_{i_0})}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(x)|^2\psi_{\delta,i_0}(x)dx=\int_\Omega|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(x)|^2\psi_{\delta,i_0}(x)\chi_{B_\delta(x_{i_0})}(x)dx$$

e observando que

$$|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(x)|^2\psi_{\delta,i_0}(x)\chi_{B_\delta(x_{i_0})}(x)\longrightarrow 0$$

$q.t.p$ em Ω, quando $\delta\to 0$ e sendo $0\leq\psi_{\delta,i_0}\leq 1$, obtemos

$$|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(x)|^2\psi_{\delta,i_0}(x)\chi_{B_\delta(x_{i_0})}(x)\leq|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(x)|^2$$

$q.t.p$ em Ω. Pelo teorema da convergência dominada

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{B_\delta(x_{i_0})}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(x)|^2\psi_{\delta,i_0}(x)dx = 0. \tag{3.16}$$

De maneira semelhante, temos

$$\int_{B_\delta(x_{i_0})}\psi_{\delta,i_0}(x)d\mu = \int_\Omega \psi_{\delta,i_0}(x)\chi_{B_\delta(x_{i_0})}(x)d\mu$$

observando que

$$\psi_{\delta,i_0}(x)\chi_{B_\delta(x_{i_0})} \to \chi_{\{x_{i_0}\}}(x)$$

$q.t.p$ em Ω quando $\delta \to 0$ e

$$|\psi_{\delta,i_0}(x)\chi_{B_\delta(x_{i_0})}| \leq 1$$

$q.t.p$ em Ω, com $1 \in L^1(\Omega)$, segue do teorema da convergência

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0}\int_{B_\delta(x_{i_0})}\psi_{\delta,i_0}(x)d\mu &= \lim_{\delta\to 0}\int_\Omega \psi_{\delta,i_0}(x)\chi_{B_\delta(x_{i_0})}(x)d\mu \\
&= \int_\Omega \chi_{\{x_{i_0}\}}d\mu \\
&= \int_{\{x_{i_0}\}} d\mu \\
&= \mu(\{x_{i_0}\}) \\
&= \sum_{i\in J}\mu_i\delta_{x_i}(\{x_{i_0}\}) \\
&= \mu_{i_0}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Aplicando o limite em (3.15) quando $\delta \to 0$, temos de (3.16) e (3.17) que

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_n(x)|^2\psi_{\delta,i_0}(x)dx \geq \mu_{i_0}. \tag{3.18}$$

Note que, de (3.13), (3.14) e de (3.18) em (3.12) segue que

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\langle u_n, \psi_{\delta,i_0}u_n\rangle \geq 2C(N,s)^{-1}\mu_{i_0}. \tag{3.19}$$

Por (3.8), temos

$$h(x)u_n^2\psi_{\delta,i_0} \to h(x)u^2\psi_{\delta,i_0} \quad q.t.p \quad em \quad \Omega$$

e

$$\begin{aligned} h(x)u_n^2\psi_{\delta,i_0} &\leq h(x)|u_n^2(x)|\psi_{\delta,i_0}(x) \\ &\leq h(x)g^2(x)\psi_{\delta,i_0}(x) \\ &\leq h^2(x)g^2(x) \quad \in \quad L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Logo, do teorema da convergência dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega h(x)u_n^2(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx = \int_\Omega h(x)u^2(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx. \tag{3.20}$$

Como $supp(\psi_{\delta,i_0})$ é compacto e está contido em $B_\delta(x_{i_0})$, então

$$\begin{aligned} \int_\Omega h(x)u^2(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx &= \int_{B_\delta(x_{i_0})} h(x)u^2(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx \\ &= \int_\Omega h(x)u^2(x)\psi_{\delta,i_0}(x)\chi_{B_\delta(x_{i_0})}(x)dx. \end{aligned}$$

Observando que

$$h(x)u^2(x)\psi_{\delta,i_0}(x)\chi_{B_\delta(x_{i_0})}(x) \to 0 \quad q.t.p \quad em \quad \Omega$$

e

$$|h(x)u^2(x)\psi_{\delta,i_0}(x)\chi_{B_\delta(x_{i_0})}(x)| \leq |h(x)||u(x)|^2 \quad q.t.p \quad em \quad \Omega$$

segue do teorema da convergência dominada

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega h(x)u^2(x)\psi_{\delta,i_0}(x)\chi_{B_\delta(x_{i_0})}(x)dx = 0.$$

Logo, de (3.20),temos

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega h(x)u_n^2(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx = 0. \tag{3.21}$$

Como $\Omega_\Upsilon \subset \Omega$, então

$$\begin{aligned}\int_\Omega \bar{h}(x,u_n)u_n(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx &= \int_{\Omega\setminus\Omega_\Upsilon} \bar{h}(x,u_n)u_n(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx + \int_{\Omega_\Upsilon} \bar{h}(x,u_n)u_n(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx \\ &= \int_{\Omega\setminus\Omega_\Upsilon} \tilde{g}(u_n)u_n(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx + \int_{\Omega_\Upsilon} u_n^{2_s^*}(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx.\end{aligned}$$

Usando o fato de, $\tilde{g} = 0$ em Ω_Υ e $u_n^{2_s^*} = 0$ em $\Omega \setminus \Omega_\Upsilon$, então podemos escrever

$$\int_\Omega \bar{h}(x,u_n)u_n(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx = \int_\Omega \tilde{g}(u_n)u_n(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx + \int_\Omega u_n^{2_s^*}(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx.$$

Uma vez que, $supp(\psi_{\delta,i_0}) \subset B_\delta(x_{i_0})$ e $B_\delta(x_{i_0}) \subset \Omega$, então

$$\int_\Omega \bar{h}(x,u_n)u_n(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx = \int_{B_\delta(x_{i_0})} \tilde{g}(u_n)u_n(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx + \int_{B_\delta(x_{i_0})} u_n^{2_s^*}(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx. \tag{3.22}$$

Da condição (3.1) e da condição sobre ψ_{δ,i_0}, temos

$$\tilde{g}(u_n)u_n\psi_{\delta,i_0} \le \sigma'|u_n|^2 \le \sigma' g^2 \quad \in \quad L^1(B_\delta(x_{i_0})),$$

e pelo teorema da convergência dominada, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_\delta(x_{i_0})} \tilde{g}(u_n)u_n(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx = \int_{B_\delta(x_{i_0})} \tilde{g}(u)u(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx.$$

Da convergência em (3.2), temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_\delta(x_{i_0})} |u_n(x)|^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}(x)dx = \int_{B_\delta(x_{i_0})} |u(x)|^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}(x)dx + \sum_{i\in J} \nu_i\delta_{x_i}(\psi_{\delta,i_0}),$$

e procedendo de modo análogo ao anterior, prova-se que

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty} \int_{B_\delta(x_{i_0})} \tilde{g}(u_n)u_n(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx = 0 \tag{3.23}$$

e

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{B_\delta(x_{i_0})}|u_n(x)|^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}(x)dx = \nu_{i_0}. \tag{3.24}$$

De (3.22), (3.23) e (3.24), segue que

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\bar{h}(x)u_n(x)\psi_{\delta,i_0}(x)dx = \nu_{i_0}. \tag{3.25}$$

Finalmente, de (3.19), (3.21) e (3.25) em (3.9), obtemos

$$\left(\lim_{n\to\infty} M(||u_n||_\lambda^2)\right) 2C(N,s)^{-1}\mu_{i_0} \le \nu_{i_0}$$

sendo M contínua

$$\nu_{i_0} \ge M\left(\lim_{n\to\infty}||u_n||_\lambda^2)\right) 2C(N,s)^{-1}\mu_{i_0}$$

chamando $\beta = \lim\limits_{n\to\infty}||u_n||_\lambda$, segue que

$$\nu_{i_0} \ge M\left(\beta^2\right) 2C(N,s)^{-1}\mu_{i_0} \tag{3.26}$$

onde $\beta > 0$.

Agora provaremos que não existe nenhum índice $i \in J$, tal que a desigualdade (3.26) aconteça. Assim, estaremos provando que os números positivos μ_i e ν_i são todos nulos. Lembrando que $i_0 \in J$ é um índice fixo arbitrário. Suponha por contradição que (3.26) ocorra, como $\beta > 0$, temos que $M(\beta) > 0$ então, segue da condição (M_2) que

$$\nu_{i_0} \ge 2m_0C(N,s)^{-1}\mu_{i_0}$$

e de (3.4), temos para $i_0 \in J$ que

$$\mu_{i_0}^{\frac{2_s^*}{2}} \ge \nu_{i_0}S^{\frac{2_s^*}{2}}$$

$$\mu_{i_0} \ge \nu_{i_0}^{\frac{2}{2_s^*}}S.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\nu_{i_0} &\geq 2m_0 C(N,s)^{-1} \nu_{i_0}^{\frac{2}{2_s^*}} S\\
\nu_{i_0}^{1-\frac{2}{2_s^*}} &\geq 2m_0 C(N,s)^{-1} S\\
\nu_{i_0}^{\frac{2s}{N}} &\geq 2m_0 C(N,s)^{-1} S\\
\nu_{i_0} &\geq \left(2m_0 C(N,s)^{-1} S\right)^{\frac{N}{2s}}.
\end{aligned}
$$

Sendo u_n uma sequência $(PS)_c$, vale que

$$
c = \lim_{n\to\infty} \left(I_n(u_n) - \frac{1}{\theta} I'(u_n)u_n \right)
$$

onde θ é a constante definida em (M_2). Note que

$$
\begin{aligned}
I(u_n) - \frac{1}{\theta} I'(u_n)u_n = &\ \frac{1}{2}\widehat{M}(||u_n||^2) - \frac{1}{2}\int_\Omega h(x)u_n^2 - \int_\Omega \bar{H}(x,u_n) - \frac{1}{\theta} M(||u_n||^2)||u_n||^2\\
&+ \frac{1}{\theta}\int_\Omega h(x)u_n^2 + \frac{1}{\theta}\int_\Omega \bar{h}(x,u_n)u_n\\
= &\ \frac{1}{2}\widehat{M}(||u_n||^2) - \frac{1}{\theta} M(||u_n||^2)||u_n||^2 + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\right)\int_\Omega h(x)u_n^2 - \int_\Omega \bar{H}(x,u_n)\\
&+ \frac{1}{\theta}\int_\Omega \bar{h}(x,u_n)u_n.
\end{aligned}
$$

Pela condição (M_2)

$$
\begin{aligned}
I(u_n) - \frac{1}{\theta} I'(u_n)u_n \geq -kb_0||u_n||^{4\alpha_1} + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\right)\int_\Omega h(x)u_n^2 dx - \int_\Omega \bar{H}(x,u_n)dx\\
+ \frac{1}{\theta}\int_\Omega \bar{h}(x,u_n)u_n dx
\end{aligned}
$$

e usando a desigualdade (3.1), temos

$$
\begin{aligned}
I(u_n) - \frac{1}{\theta} I'(u_n)u_n \geq -kb_0||u_n||^{4\alpha_1} + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\right)\int_\Omega h(x)u_n^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma' u_n^2 dx - \frac{1}{2_n^*}\int_\Omega u_n^{2_s^*} dx\\
- \frac{1}{\theta}\int_\Omega \sigma' u_n^2 dx + \frac{1}{\theta}\int_\Omega u_n^{2_s^*} dx.
\end{aligned}
$$

Sendo u_n limitada em E_λ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \psi_{\delta,i_0} \leq 1$, temos

$$
\begin{aligned}
I(u_n) - \frac{1}{\theta}I'(u_n)u_n \geq & - b_0C + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\right)\int_\Omega h(x)u_n^2dx - \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\right)\int_\Omega \sigma' C dx \\
& + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2_s^*}\right)\int_\Omega u_n^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}dx \\
\geq & - b_0C - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega h(x)u_n^2dx - \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\right)\sigma' C|\Omega| \\
& + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2_s^*}\right)\int_\Omega u_n^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}dx \\
\geq & - b_0C - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega h(x)u_n^2dx - \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\right)\sigma' C \\
& + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2_s^*}\right)\int_\Omega u_n^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}dx
\end{aligned}
$$

e tomando o limite quando $n \to \infty$ e usando a desigualdade de Hölder com expoentes 2_s^* e $\frac{2_s^*}{2_s^*-2}$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
c \geq -b_0C - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)|u|^2_{L^{2_s^*}(\Omega)}|h|_{L^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}(\Omega)} - \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\right)\sigma' C \\
+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2_s^*}\right)\left(\int_\Omega |u|^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}dx + \sum_{i\in J}\nu_i\delta_{x_i}(\psi_{\delta,i_0})\right).
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}(x)dx + \sum_{i\in J}\nu_i\delta_{x_i}(\psi_{\delta,i_0}) &= \int_\Omega |u|^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}(x)dx + \sum_{i\in J}\nu_i\psi_{\delta,i_0}(x_i) \\
&\geq \int_\Omega |u|^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}(x)dx + \nu_{i_0}\psi_{\delta,i_0}(x_{i_0}) \\
&= \int_\Omega |u|^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}(x)dx + \nu_{i_0} \\
&= \int_{B_{2\delta}(x_{i_0})} |u|^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}(x)dx + \nu_{i_0} \\
&= \int_\Omega |u|^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}(x)\chi_{B_\delta(x_{i_0})}dx + \nu_{i_0}
\end{aligned}
$$

Como

$$
|u|^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}(x)\chi_{B_\delta(x_{i_0})} \longrightarrow |u|^{2_s^*} \quad q.t.p \quad em \quad \Omega,
$$

quando $\delta \to 0$ e

$$|u|^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}(x)\chi_{B_\delta(x_{i_0})} \leq |u|^{2_s^*} \quad q.t.p \quad em \quad \Omega,$$

segue do teorema da convergência dominada que

$$\int_\Omega |u|^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}(x)dx + \sum_{i\in J}\nu_i\delta_{x_i}(\psi_{\delta,i_0}) = \int_\Omega |u|^{2_s^*}dx + \nu_{i_0}.$$

Daí e de (3.27) segue que

$$\begin{aligned}
c \geq & -b_0C - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)|u|^2_{L^{2_s^*}(\Omega)}|h|_{L^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}(\Omega)} - \left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2}\right)\sigma' C + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2_s^*}\right)\left(\int_\Omega |u|^{2_s^*}dx + \nu_{i_0}\right) \\
& \geq -b_0C - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)|h|_{L^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}(\Omega)}|u|^2_{L^{2_s^*}(\Omega)} - \left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2}\right)\sigma' C \\
& + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2_s^*}\right)\left(|u|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega)} + \left(2m_0C(N,s)^{-1}S\right)^{\frac{N}{2s}}\right) \\
\geq & -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)|h|_{L^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}(\Omega)}|u|^2_{L^{2_s^*}(\Omega)} + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2_s^*}\right)|u|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega)} \\
& + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2_s^*}\right)\left(2m_0C(N,s)^{-1}S\right)^{\frac{N}{2s}} - b_0C - \left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2}\right)\sigma' C,
\end{aligned}$$

onde na segunda desigualdade usamos (3.26). Assim,

$$c \geq -k_2|u|^2_{L^{2_s^*}(\Omega)} + k_1|u|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega)} + k_3 \tag{3.28}$$

Considere a aplicação diferenciável $l(t) = k_1t^{2_s^*} - k_2t^2$ e vejamos em qual ponto o mínimo é atingido. Com efeito, temos

$$l'(t) = 2_s^*k_1t^{2_s^*} - 2k_2t = 0$$

$$2_s^*k_1t^{2_s^*-1} = 2k_2t$$

$$t = \left(\frac{2k_2}{2_s^*k_1}\right)^{\frac{1}{2_s^*-2}}.$$

Portanto,

$$t_0 = \left(\frac{2k_2}{2_s^*k_1}\right)^{\frac{1}{2_s^*-2}} > 0$$

é o ponto de mínimo da função l. Assim,

$$\begin{aligned}
l(t_0) &= k_1\left(\frac{2k_2}{2_s^*k_1}\right)^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}} - k_2\left(\frac{2k_2}{2_s^*k_1}\right)^{\frac{2}{2_s^*-2}}\\
&= k_1\left(\frac{2k_2}{2_s^*k_1}\right)^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}} - k_2\left(\frac{2k_2}{2_s^*k_1}\right)^{-1}\left(\frac{2k_2}{2_s^*k_1}\right)^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}\\
&= \left(\frac{2k_2}{2_s^*k_1}\right)^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}\left(k_1 - k_2\frac{2_s^*k_1}{2k_2}\right)\\
&= -k_1\left(\frac{2k_2}{2_s^*k_1}\right)^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}\left(\frac{2_s^*-2}{2}\right)\\
&= -k_4
\end{aligned}$$

logo de (3.28),

$$c \geq k_3 - k_4.$$

Mas isso contradiz (3.7). Logo, a desigualdade em (3.26) não ocorre para $i_0 \in J$. Como i_0 é arbitrário, segue que a (3.26) não ocorre para nenhum índice $i \in J$ o que implica que $J = \emptyset$. Assim, $\nu_i = 0$ $\forall i \in J$. Como consequência disso, segue de (3.2) e de (3.3) que, a menos de subsequência,

$$u_n \to u \text{ em } L^{2_s^*}(\Omega)$$

quando $n \to \infty$. Uma vez que, (u_n) é limitada em E_λ, tem-se

$$\langle I'(u_n), u_n - u\rangle \to 0.$$

Logo,

$$M(||u_n||^2)\langle u_n, u_n - u\rangle = \int_\Omega h(x)(u_n^2 - u_n u)dx - \int_\Omega \bar{h}(x, u_n)(u_n - u)dx + o_n(1). \quad (3.29)$$

De (3.8) e do teorema da convergência dominada, obtemos

$$\int_\Omega h(x)(u_n^2 - u_n u)dx \to 0 \quad (3.30)$$

quando $n \to \infty$. Observando que

$$\int_\Omega \bar{h}(x,u_n)(u_n-u)dx = \int_{\Omega\backslash\Omega_\Upsilon} \tilde{g}(u_n)(u_n-u)dx + \int_{\Omega_\Upsilon} \left(u_n^{2_s^*} - u_n^{2_s^*-1}u\right) dx. \tag{3.31}$$

Pela condição (3.1), temos

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_\Upsilon} \tilde{g}(u_n)(u_n-u)dx \leq \sigma' \int_{\Omega\backslash\Omega_\Upsilon} \left(u_n^2 - u_n u\right) dx,$$

e usando os mesmos argumentos anteriores, prova-se que

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_\Upsilon} \tilde{g}(u_n)(u_n-u)dx \to 0$$

quando $n \to \infty$. Da convergência de u_n para u em $L^{2_s^*}(\Omega)$, tem-se por Vainberg que

$$u_n \to u \text{ q.t.p em } \Omega$$

e

$$|u_n(x)| \leq g_1 \text{ q.t.p em } \Omega \text{ e } g_1 \in L^{2_s^*}(\Omega).$$

Assim,

$$u_n^{2_s^*} - u_n^{2_s^*-1}u \to 0 \text{ q.t.p em } \Omega$$

e

$$u_n^{2_s^*} - u_n^{2_s^*-1}u \leq |u_n^{2_s^*} - u_n^{2_s^*-1}u| \leq |u_n|^{2_s^*} + |u_n^{2_s^*}u| \leq g^{2_s^*} + |g^{2_s^*-1}u|.$$

Como $g^{2_s^*} \in L^{2_s^*}(\Omega)$ então, $g^{2_s^*} \in L^1(\Omega)$ e usando a desigualdade de Hölder com expoentes 2_s^* e $\dfrac{2_s^*}{2_s^*-1}$ tem-se que $|g^{2_s^*-1}u| \in L^1(\Omega)$ o que implica $g^{2_s^*} + |g^{2_s^*-1}u| \in L^1(\Omega)$. Por tanto, pelo teorema da convergência dominada,

$$\int_{\Omega_\Upsilon} \left(u_n^{2_s^*} - u_n^{2_s^*-1}u\right) dx \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$. De (3.31) e das duas ultimas convergências, segue que

$$\int_\Omega \bar{h}(x,u_n)(u_n-u)dx \to 0. \tag{3.32}$$

Portanto, de (3.29), (3.30) e de (3.32) segue que

$$M(||u_n||^2)\,\langle u_n, u_n - u\rangle_\lambda \to 0$$

quando $n \to \infty$. Assim, por continuidade da M

$$\lim_{n\to\infty} M\left(||u_n||^2\right) \lim_{n\to\infty}\left(||u_n||^2 - \langle u_n, u\rangle_\lambda\right) = 0$$

$$M\left(\lim_{n\to\infty} ||u_n||^2\right) \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(||u_n||^2 - \langle u_n, u\rangle_\lambda\right) = 0$$

$$M(\beta^2) \lim_{n\to\infty}\left(||u_n||^2 - \langle u_n, u\rangle_\lambda\right) = 0,$$

e como $M(\beta^2) > 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n||_\lambda^2 = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, u\rangle_\lambda\,.$$

Uma vez que, $u_n \rightharpoonup u$ em $E_\lambda(\Omega)$, então

$$\langle \varphi, u_n\rangle \to \langle \varphi, u\rangle \;\forall\; \varphi \in E'_\lambda(\Omega),$$

e pelo teorema da representação de Riesz, existe único $w \in E_\lambda(\Omega)$ tal que

$$\langle \varphi, v\rangle = \langle w, v\rangle_\lambda\,,$$

para todo $v \in E_\lambda(\Omega)$. Logo, podemos tomar $w = u$. Assim

$$\langle u, u_n\rangle_\lambda \to \langle u, u\rangle_\lambda\,,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \langle u, u_n\rangle_\lambda = ||u||_\lambda^2,$$

e da igualdade anterior, segue que

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n||_\lambda^2 = ||u||_\lambda^2.$$

Logo,

$$||u_n||_\lambda \to ||u||_\lambda$$

de onde, concluímos que $u_n \to u$ em $E_\lambda(\Omega)$.

3.2.1 A condição (PS) para o problema crítico

Assim como no caso crítico precisamos entender o comportamento das sequências (PS) para o funcional $\tilde{I}_\lambda$ fora de uma bola. A seguinte proposição nós dará essa informação.

Lema 3.2. *Seja (u_n) uma sequência (PS) para $\tilde{I}_\lambda$, então para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe um $R > 0$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))^2}\frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)}(\lambda a(x)+1)u_n^2dx\right) < \varepsilon$$

Demonstração: De modo idêntico a demonstração do Lema 2.2

Proposição 3.2. *Nas mesmas condições do Teorema 3.1, considere $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_c$ para $\tilde{I}_\lambda$, onde $c < 0$, então $\{u_n\}$ possui uma subsequência convergente em E_λ.*

Demonstração: Considere $B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$. Inicialmente, vamos mostrar que $\tilde{I}_\lambda(u_n) \to 0$ e $\tilde{I}'_\lambda(u_n)(u_n) \to 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)$. Com efeito, sendo

$$M\left(||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))}\right)||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} = m_0||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} + b_0||u_n||^{2(\alpha_1+1)}_{E_\lambda(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))}$$

e aplicando o Lema 3.2, temos que

$$M\left(||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))}\right)||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))} \to 0, \tag{3.33}$$

quando $n \to +\infty$ e para $R > 0$ suficientemente grande. Da condição (3.1) e da imersão contínua $E_\lambda \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ com $p \in [2, 2_s^*]$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)}\bar{h}(u_n)u_ndx &= \int_{(R\setminus B_R(0)}\bar{g}(x,u_n)u_ndx\\ &\leq \sigma'\int_{(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))}u_n^2(x)dx\\ &\leq C||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))}.\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \to +\infty$, segue do Lema 3.2

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \bar{h}(u_n) u_n dx \to 0, \tag{3.34}$$

para $R > 0$ suficientemente grande. Por ultimo, utilizando a desigualdade de Hölder com expoentes r e $r' = \dfrac{r}{r-1}$, onde $2 \leq r \leq \dfrac{2_s^*}{2_s^* - 2}$ e $2 \leq r' \leq \dfrac{2_s^*}{2}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} h(x) u_n^2 dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |h(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u|_n^{2r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} \\
&= C |h|_{L^r(\mathbb{R}^N \setminus B_r(0))} |u_n|^2_{L^{2r'}(\mathbb{R}^N \setminus B_r(0))}.
\end{aligned}$$

Observe que, $4 \leq 2r' \leq 2_s^*$. Logo, podemos usar a imersão contínua e obter

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} h(x) u_n^2 dx \leq C |h|_{L^r(\mathbb{R}^N \setminus B_r(0))} |u_n|^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N \setminus B_r(0))}.$$

Como $C|h|_{L^r(\mathbb{R}^N \setminus B_r(0))}$ é uma constante positiva, obtemos do Lema (3.2)

$$\int_{(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} h(u_n) u_n^2 dx \to 0. \tag{3.35}$$

Assim, de (3.33), (3.34) e (3.35), temos, para $n \to +\infty$ e $R > 0$ grande que

$$\begin{aligned}
\tilde{I}'_\lambda(u_n) u_n = M \left(||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \right) ||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \\
- \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \left[h(x) u_n^2 + \bar{h}(u_n) u_n \right] dx \to 0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Agora, observe que por definição

$$\widehat{M} \left(||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \right) = m_0 ||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} + \frac{b_0}{\alpha_1 + 1} ||u_n||^{2(\alpha_1+1)}_{E_\lambda(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}.$$

Assim, aplicando o Lema 3.2, temos

$$\widehat{M} \left(||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \right) \to 0 \tag{3.37}$$

com $n \to +\infty$ e $R > 0$ grande. Usando o mesmo argumento anterior, prova-se que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} h(x)u_n^2 dx \to 0. \tag{3.38}$$

Finalmente, usando a definição de $\tilde{g}$ e a condição (3.1), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \bar{H}(x,u_n)dx \leq \frac{\sigma'}{2}||u_n||^2_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}.$$

Usando, novamente, a imersão contínua e o Lema 3.2 obtemos, para $R > 0$ suficientemente grande e $n \to +\infty$

$$\frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \bar{H}(x,u_n)dx \to 0. \tag{3.39}$$

Logo, segue de (3.36), (3.37) (3.38) e de (3.39) que

$$\tilde{I}_\lambda(u_n) = \widehat{M}\left(||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}\right) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} h(x)u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \bar{H}(x,u_n)dx \to 0 \tag{3.40}$$

para $n \to +\infty$ e $R > 0$ grande.

Por hipótese (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para $\tilde{I}_\lambda$ em E_λ. Logo, temos $\tilde{I}_\lambda(u_n) \to c$ e $\tilde{I}'_\lambda(u_n)u_n \to 0$. Como

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N \setminus B_R(0) \cup B_R(0),$$

então

$$||u_n||^2_\lambda = ||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} + ||u_n||^2_{E_\lambda(B_R(0))}.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\tilde{I}'_\lambda(u_n) &= M\left(||u_n||^2_{E_\lambda \mathbb{R}^N}\right)||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N)} - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \left[h(x)u_n^2 + \bar{h}(u_n)u_n\right]dx \\
&= M\left(||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))}\right)||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \left[h(x)u_n^2 + \bar{h}(u_n)u_n\right]dx \\
&+ M\left(||u_n||^2_{E_\lambda(B_R(0))}\right)||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} - \int_{B_R(0)} \left[h(x)u_n^2 + \bar{h}(u_n)u_n\right]dx \to 0.
\end{aligned}$$

De (3.36), segue que

$$\tilde{I}'_\lambda(u_n) = M\left(||u_n||^2_{E_\lambda B_R(0)}\right)||u_n||^2_{E_\lambda \mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} - \int_{B_R(0)}\left[h(x)u_n^2 + \bar{h}(u_n)u_n\right]dx \to 0.$$

Da mesma forma, temos

$$\begin{aligned}\tilde{I}_\lambda(u_n) &= \widehat{M}\left(||u_n||^2_\lambda\right) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N}\bar{H}(x,u_n)dx \\ &= \widehat{M}\left(||u_n||^2_{E_\lambda \mathbb{R}^N\setminus B_R(0)}\right) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} h(x)u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)}\bar{H}(x,u_n)dx \\ &+ \widehat{M}\left(||u_n||^2_{E_\lambda B_R(0)}\right) - \frac{1}{2}\int_{B_R(0)} h(x)u_n^2 dx - \int_{B_R(0)}\bar{H}(x,u_n)dx \to c.\end{aligned}$$

De (3.40), segue que

$$\tilde{I}_\lambda(u_n) = \widehat{M}\left(||u_n||^2_{E_\lambda B_R(0)}\right) - \frac{1}{2}\int_{B_R(0)} h(x)u_n^2 dx - \int_{B_R(0)}\bar{H}(x,u_n)dx \to c,$$

em $E_\lambda(B_R(0))$. Portanto, temos que (u_n) é uma sequencia $(PS)_c$ para $\tilde{I}_\lambda$ em $E_\lambda(B_R(0))$. Desde que $\sigma' > 0$ é arbitrário, podemos escolher σ' pequeno, para que juntamente com as hipóteses do Teorema 3.1, termos m_0, b_0 e $|h|_{2_s^*/2_s^* - 2}$, de modo que, $k_3 - k_4 > 0$ em (3.7) e do fato de, $c < 0$ podemos usar a Proposição 3.1 para concluir que

$$||u_n||_\lambda \to ||u||_\lambda.$$

3.2.2 Prova do Teorema 3.1

De modo análogo a Proposição 2.1 mostramos que o funcional $\tilde{I}_\lambda$ é coercivo. Considerando $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com suporte em $\Theta \subset$, podemos repetir os mesmos argumentos da Proposição 2.3 e garantir que o nível de energia mínima c de $\tilde{I}_\lambda$ é negativo. Além disso, das Proposições 3.1 e 3.2 tem-se que o funcional $\tilde{I}_\lambda$ satisfaz a condição $(PS)_{c_\lambda}$ assim, uma vez que, $\tilde{I}_\lambda$ é coercivo utilizamos o princípio variacional de Ekeland, para garantir que o mínimo é atingindo e portanto é ponto crítico do funcional $\tilde{I}_\lambda$ e finalmente utilizando a mesma técnica da Proposição 2.4, mostramos que existe $\lambda^* > 0$, tal que $u_\lambda < \xi'$ para $\lambda \geq \lambda^*$, o que garante a existência de solução para (P_*). Argumentando como no caso subcrítico, mostramos o resultado de concentração.

Apêndice A

Resultados Utilizados

Teorema A.1 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p < +\infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |fg| \leq |f|_{L^p(\Omega)} |g|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [15].

Teorema A.2 (Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *tal que*

$$f_n(x) \to f(x) \;\; q.t.p \;\; em \;\; \Omega$$

e existe $g \in L^1(\Omega)$ *com* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Então,* $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Demonstração: Ver [15].

Teorema A.3 (Vainberg)**.** *Seja (f_n) uma sequência de funções em $l^p(\Omega)$ tal que $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$. Então existem uma subsequência $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ e $g \in L^p(\Omega)$ tal que*

$$(f_{n_j}) \to f \ \ q.t.pem \ \ \Omega$$

e

$$|f_{n_j}| \leq g(x) \ \ q.t.pem \ \ \Omega.$$

Demonstração: Ver [15].

Proposição A.1. *Seja E_λ o espaço definido no capitulo 2, então valem as seguintes afirmações:*

(i) E_λ está imerso continuamente em $H^s(\mathbb{R}^N)$.

(ii) E_λ está imerso compactamente em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para $p \in [1, 2^*_s)$.

(iii) E_λ é um espaço de Hilbert.

Demonstração: (i) É simples ver que pela própria definição de E_λ, tem-se a inclusão $E_\lambda \subset H^s(\mathbb{R}^N)$ e ja mostramos no capítulo 2 que $||u||_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq ||u||_\lambda$. O que demonstra a imersão.

(ii) Já sabemos que $H^s(\mathbb{R}^N) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, pois $H^s(\mathbb{R}^N)$ está compactamente imerso em $L^p_{loc(\mathbb{R}^N)}$ para $p \in [1, 2^*_s)$, logo pelo item anterior $E_\lambda \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Para mostrar que a aplicação $i : (E_\lambda, || \cdot ||_\lambda) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ é compacta para $p \in [1, 2^*_s)$ é suficiente mostrar que dado um conjunto $U \subset E_\lambda$ limitado, o conjunto $i(U)$ é pré-compacto em $L^p_{loc(\mathbb{R}^N)}$ para $p \in [1, 2^*_s)$. Seja então $U \subset E_\lambda$ limitado na norma $|| \cdot ||_\lambda$, do item (i) U é limitado em $H^s(\mathbb{R}^N)$. Da imersão compacta $H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p_{loc(\mathbb{R}^N)}$ para $p \in [1, 2^*_s)$, temos que $i(U)$ é pre-compacto em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $p \in [1, 2^*_s)$.

(iii) Como todo subespaço fechado de um espaço de Hilbert é um espaço de Hilbert, então é suficiente provar que E_λ é fechado. Com efeito, seja uma sequência $(u_n) \in E_\lambda$ tal que $u_n \to u$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^2 dx < \infty$$

daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n - u|^2 dx < \infty$$

pela desigualdade triangular

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^2 dx < \infty$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^2 dx < \infty$$

e portanto $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, ou seja, E_λ é um subespaço fechado de $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Teorema A.4 (Minimização Global)**.** *Seja E um espaço de Hilbert e $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional, tal que:*

(i) J é coercivo;

(ii) J é fracamente semicontínuo inferior.

Então, existe um $u_0 \in E$ tal que $J(u_0) = \inf_{u \in E} J(u)$.

Demonstração: Ver [40]

Teorema A.5 (Princípio Variacional de Ekeland)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico completo $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ um funcional semicontínuo inferiormente. Seja $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ e $u \in X$ tal que $\Phi \leq \inf_X \Phi + \varepsilon$. Então, existe $v \in X$ tal que;*

(i) $\Phi(v) \leq \Phi(u)$,

(ii) $d(u, v) \leq \lambda$,

(iii) $\Phi(w) \geq \Phi(v) - \dfrac{\varepsilon}{\lambda} d(v, w)\ \forall\ w \neq v$.

Demonstração: Ver [28]

Lema A.1. *Seja (z_m) uma sequência limitada inferiormente em $X_0^s(\Omega)$ e ϕ_ε uma função tal que*

$$\phi_\varepsilon \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)$$

onde $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é não crescente e radial. Então, vale

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\lim_{m\longrightarrow\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N} z_m(x)(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\phi_\varepsilon(x)(-\Delta)^{\frac{s}{2}}z_m(x)\right| = 0$$

Demonstração: Ver Lema 2.8 em [10]

Lema A.2. *Nas mesmas hipóteses do Lema A.1, temos*

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\lim_{m\longrightarrow\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}z_m(x)B()z_m,\phi_\varepsilon(x)\right| = 0$$

onde, B é uma forma bilinear definida por

$$B(f,g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))}{|x-y|^{N+2s}}dy.$$

Demonstração: Ver Lema 2.9 em [10]

Apêndice B

Diferenciabilidade de Funcionais

Neste apêndice vamos mostrar que o funcional definido no capítulo 1 e diferenciável. Para tanto, vamos considerar algumas definições

Definição B.1. *Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dizemos que I possui derivada de Fréchet no ponto $u \in X$ quando existe um fuincional linear $T \in X'$ tal que*

$$\lim_{||v|| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - (T, v)}{||v||} = 0.$$

A derivada de Fréchet no ponto u, quando existe, é única e denotamos por $I'(u)$.

Definição B.2. *Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dizemos que I possui derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T_u \in X'$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - (T_u, v)}{t} = 0 \ \forall \ v \in X.$$

A derivada de gateaux no ponto u, quando existe, é única e denotamos por $DI(u)$.

Definição B.3. *Se A é um conjunto aberto em X, dizemos que $I \in C^1(A, \mathbb{R})$ quando a Derivada de Frechét de I existir em todo ponto $u \in A$ e a aplicação $I' : A \longrightarrow X'$ é contínua.*

Proposição B.1. *Se I tem derivada de Gateaux contínua sobre X, então I é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$.*

Demonstração:

Proposição B.2. *O funcional $J_\lambda \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$ e para todo $v \in E_\lambda$, temos*

$$J'_\lambda(u)v = M(||u||_\lambda^2)\left\langle u, v\right\rangle_\lambda - \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N} uvdx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx.$$

Demonstração: Considere

$$J_\lambda(u) = J_1(u) - J_2(u) - J_3(u),$$

onde

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\hat{M}(||u||_\lambda^2), \;\; J_2(u) = \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \;\; e \;\; J_3(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

Vamos mostrar que J_1, J_2 e J_3 pertencem a $C^1(E_\lambda, \mathbb{R}^N)$

1. $J_1 \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R}^N)$

   Primeiro vamos calcular a derivada de Gateaux . Sendo $J_1(u) = \dfrac{1}{2}\hat{M}(||u||_\lambda^2)$ com $\hat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(s)ds$, temos que a derivada de $\dfrac{1}{2}\hat{M}(t)$ é $\dfrac{1}{2}M(t)$ chame $H_1(u) = ||u||_\lambda^2$, assim

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\hat{M}(H_1(u))$$

   e

$$DJ_1(u)v = D\left[\frac{1}{2}\hat{M}(H_1(u))\right]v = \frac{1}{2}M(||u||_\lambda^2)DH_1(u).v$$

   assim, só precisamos calcular a derivada de Gateaux de H_1. Por definição

$$\begin{aligned}
DH_1(u).v &= \lim_{t\to 0}\frac{H_1(u+tv) - H_1(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{||u+tv||_\lambda^2 - ||u||_\lambda^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{||u||_\lambda^2 + 2t_\lambda + t^2||v||_\lambda^2 - ||u||_\lambda^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} 2\left\langle u, v\right\rangle_\lambda + t||v||_\lambda^2 \\
&= 2\left\langle u, v\right\rangle_\lambda
\end{aligned}$$

assim,

$$
\begin{aligned}
DJ_1(u)v &= \frac{1}{2}M(||u||_\lambda^2)2\langle u,v\rangle_\lambda \\
&= M(||u||_\lambda^2)\langle u,v\rangle_\lambda .
\end{aligned}
$$

Agora vamos mostrar que DJ_1 é continuo. Sendo M uma função contínua basta mostrar que DH_1 é continuo em E_λ. De fato, seja (u_n) uma sequência em E_λ tal que $u_n \to u$ neste espaço, então, temos para cada $v \in E_\lambda$ com $||v||_\lambda \leq 1$, que

$$
\begin{aligned}
|DH_1(u_n)v - DH_1(u)v| &= |2\langle u_n,v\rangle_\lambda - 2\langle u,v\rangle_\lambda \\
&= 2|\langle u_n,v\rangle_\lambda - \langle u,v\rangle_\lambda| \\
&= 2|\langle u_n - u,v\rangle_\lambda| \\
&\leq 2||u_n-u||_\lambda||v||_\lambda \\
&\leq 2||u_n-u||_\lambda
\end{aligned}
$$

para todo $u_n \in E_\lambda$, onde na terceira expressão aplicamos a desigualdade de Schwartz. Como

$$||DH_1(u_n)v - DH_1(u)v||_\lambda = \sup_{||v||_\lambda \leq 1}|DH_1(u_n)v - DH_1(u)v| \leq 2||u_n-u||_\lambda$$

da convergência $u_n \to u$, temos que

$$||DH_1(u_n)v - DH_1(u)v||_\lambda = 0$$

logo

$$DH_1(u_n)v \to DH_1(u)v$$

portanto, DH_1 é contínua em E_λ, de onde conclui-se que $J_1 \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R}^N)$.

2. Para $J_2 \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R}^N)$

   Seja $v \in E_\lambda$, por definição

$$
\begin{aligned}
DJ_2(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{J_2(u+tv)-J_2(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\left[\frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(u+tv)^2dx-\frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2dx\right]}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[(u+tv)^2-u^2\right]dx}{t}\\
&= \bar{c}\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u+tv)^2-u^2}{2t}dx. \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}
$$

Seja $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma aplicação dada por $f(s)=(u+stv)^2$ com $t\in\mathbb{R}$ e $s\in(0,1)$. Observe que f é continua no intervalo $[0,1]$ e derivável em $(0,1)$, além disso,

- $f(0)=u^2$
- $f(1)=(u+tv)^2$
- $f'(s)=2(u+stv)tv$

aplicando o teorema do valor médio, existe $\beta\in(0,1)$, tal que

$$
\begin{aligned}
f(1)-f(0) &= f'(\beta)\\
\frac{(u+tv)^2-u^2}{2t} &= (u+\beta tv)v.
\end{aligned}
$$

substituindo em (B.1), temos

$$DJ_2(u)v=\bar{c}\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}(u+\beta tv)vdx.$$

Veja que, para uma sequência de pontos $(t_n)\in\mathbb{R}$, com $t_n\to 0$ quando $n\to\infty$, tem-se

$$(u+\beta t_nv)v\to uv \ \ em \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

além disso,

$$(u+\beta t_nv)v\leq|u+\beta t_nv||v|\leq|u+v||v|,$$

por Hölder, tem-se que $|u+v||v|\in L^1(\mathbb{R}^N)$. Aplicando o teorema da convergência dominada, temos que

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}(u+\beta tv)vdx=\int_{\mathbb{R}^N}uvdx$$

de onde vem que

$$DJ_2(u)v=\bar{c}\int_{\mathbb{R}^N}uvdx.$$

Vamos provar que DJ_2 é contínua. Seja (u_n) e v em E_λ tal que $u_n\to u$ em E_λ e $||v||_\lambda\leq 1$. Da imersão contínua $E_\lambda\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ com $2\leq p<2_s^*$ temos que $u_n\to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Assim, pelo teorema de Vainberg, existe $h\in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $(u_{n_j})\subset(u_n)$ tais que

$$u_{n_j}\to u\ em\ q.t.p\ em\ \mathbb{R}^N$$

$$|u_{n_j}|\leq h(x)\ em\ q.t.p\ em\ \mathbb{R}^N$$

usando a desigualdade de Hölder com os expoentes p e $\dfrac{p}{p-1}$, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(u_{n_j}-u)vdx\right| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_{n_j}-u|^{\frac{p-1}{p}}dx\right)^{\frac{1}{\frac{p-1}{p}}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|v|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq ||u_{n_j}-u||_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)}||v||_{L^p(\mathbb{R}^N)}\end{aligned}$$

novamente da imersão continua, obtemos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}(u_{n_j}-u)vdx\right|\leq C||u_{n_j}-u||_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)}||v||_\lambda\leq C||u_{n_j}-u||_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)}.$$

Agora, veja que

$$\begin{aligned}|DJ_2(u_{n_j})v-DJ_2(u)v| &= \left|\bar{c}\int_{\mathbb{R}^N}u_{n_j}vdx-\bar{c}\int_{\mathbb{R}^N}uvdx\right|\\ &= |\bar{c}|\left|\int_{\mathbb{R}^N}(u_{n_j}-u)vdx\right|\\ &\leq C'||u_{n_j}-u||_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)},\end{aligned}$$

onde nesta ultima expressão, usamos e desigualdade anterior. Observe que

$$\begin{aligned} |u_{n_j}-u|^{\frac{p}{p-1}} \leq |u_{n_j}+u|^{\frac{p}{p-1}} &\leq \left(|u_{n_j}|+|u|\right)^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq c_1\left(|u_{n_j}|^{\frac{p}{p-1}}+|u|^{\frac{p}{p-1}}\right) \\ &\leq c_1\left(|h(x)|^{\frac{p}{p-1}}+|u|^{\frac{p}{p-1}}\right), \end{aligned}$$

onde c_1 é uma constante positiva. Como $h^{\frac{p}{p-1}}$ e $u^{\frac{p}{p-1}}$ pertencem a $L^1(\mathbb{R}^N)$ então $c_1\left(|h(x)|^{\frac{p}{p-1}}+|u|^{\frac{p}{p-1}}\right) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ desta forma, aplicando o teorema da convergência dominada, vem que

$$||u_{n_j}-u||_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)} \to 0$$

quando $j \to \infty$. Por tanto, tomando o limite da expressão

$$||DJ_2(u_{n_j})v - DJ_2(u)v|| \leq \sup|DJ_2(u_{n_j})v - DJ_2(u)v| \leq c_1||u_{n_j}-u||_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)},$$

quando $j \to \infty$, segue que

$$DJ_2(u_{n_j}) \to DJ_2(u)$$

ou seja, DJ_2 é contínuo, logo, $J_2 \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R}^N)$.

Para $J_3 \in C^1(\lambda, \mathbb{R}^N)$

Para $v \in E_\lambda$ e da derivada de Gateaux, temos

$$\begin{aligned} DJ_3(u)v = \lim_{t\to 0}\frac{J_3(u+tv)-J_3(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}F(u+tv)dx - \int_{\mathbb{R}^N}F(u)dx}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(u+tv)-F(u)}{t}dx \end{aligned}$$

Seja a função $g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^N$ dada por $g(s)=F(u+tv)$ com $s\in(0,1)$. Observe que

- $g(0) = F(u)$
- $g(1) = F(u+tv)$
- $g'(s) = f(u+tv)tv$

além disso, g é contínua em $[0,1]$ e derivável em $(0,1)$, assim pelo teorema do valor médio existe $\rho \in (0,1)$ tal que

$$\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = f(u+\rho tv)v$$

desta forma,

$$DJ_3(u)v = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} f(u+\rho tv)vdx.$$

Da condição de crescimento sobre a f, temos

$$\begin{aligned} f(u+\rho tv)v \leq |f(u+\rho tv)||v| &\leq \frac{\varepsilon}{2}|u+\rho tv||v| + C_1|u+\rho tv|^{\gamma-1}|v| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}|u||v| + |\rho tv||v| + C_1 c\left(|u|^{\gamma-1} + |\rho tv|^{\gamma-1}\right)|v| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}|u||v| + |v|^2 + C_3|u|^{\gamma-1}|v| + C_3|v|^{\gamma}. \end{aligned}$$

Como $v \in L^{\gamma}(\mathbb{R}^N)$ temos que $|u||v|$, $|v|^2$ e $|v|^{\gamma}$ pertencem $L^1(\mathbb{R}^N)$ e usando a desigualdade de Holder com expoentes γ e $\dfrac{\gamma}{\gamma-1}$, tem-se $|u|^{\gamma-1}|v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e como ε e C_3 são positivos, então $\dfrac{\varepsilon}{2}|u||v| + |v|^2 + C_3|u|^{\gamma-1}|v| + C_3|v|^{\gamma} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, para uma sequência $(t_n) \in \mathbb{R}$ com $t_n \to 0$ quando $n \to \infty$, temos

$$f(u+\rho t_n v)v \to f(u)v$$

nestas condições, do teorema da convergência dominada, segue que

$$DJ_3(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx.$$

Agora vamos mostrar que DJ_3 é continuo. De fato, seja $(u_n) \in E_\lambda$ tal que $u_n \to u$ em E_λ e $v \in E_\lambda$ com $||v|| \leq 1$. Da imersão de E_λ em $L^{\gamma}(\mathbb{R}^N)$ tem-se a convergência $u_n \to u$ em $L^{\gamma}(\mathbb{R}^N)$ onde $2 \leq \gamma < min\{2^* s, 2\alpha_1 + 2\}$. Pelo teorema de Vainberg existe uma subsequência de (u_n) que continuaremos a denotar por (u_n) e $g_2 \in L^{\gamma}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to u \ \ em \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

$$|u_n| \leq g_2(x) \ \ em \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N.$$

Desde que f seja continua, ocorre $|f(u_n) - f(u)|^{\frac{p}{p-1}} \to 0$ em $q.t.p$ em $\mathbb{R}^N$. Usando a condição de crescimento sobre a f, chegamos a seguinte desigualdade

$$|f(u_n) - f(u)|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \leq k_1 g_2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - k_2 g_2^{\gamma} + k_3|u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + k_4|u|^{\gamma}$$

onde k_1, k_2, k_3 e k_4 são todos positivos. Como u e g_2 pertencem a $L^{\gamma}(\mathbb{R}^N)$ então $|u|^{\gamma}$ e g_2^{γ} pertencem a $L^1(\mathbb{R}^N)$ daí, temos

$$k_1 g_2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - k_2 g_2^{\gamma} + k_3|u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + k_4|u|^{\gamma} \quad \in \quad L^1(\mathbb{R}^N)$$

e do teorema da convergência dominada, obtemos

$$||f(u_n) - f(u)||_{L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\mathbb{R}^N)} \to 0. \tag{B.2}$$

Sendo

$$||DJ_3(u_n)v - DJ_3(u)v||_{\lambda} = \sup_{||v|| \leq 1} |DJ_3(u_n)v - DJ_3(u)v| \tag{B.3}$$

e

$$\begin{aligned} |DJ_3(u_n)v - DJ_3(u)v| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n) - f(u))v dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n) - f(u)||v| dx, \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Hölder com expoentes γ e $\dfrac{\gamma}{\gamma-1}$, vem que

$$|DJ_3(u_n)v - DJ_3(u)v| \leq ||f(u_n) - f(u)||_{L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\mathbb{R}^N)} ||v||_{L^{\gamma}(\mathbb{R}^N)}.$$

Usando novamente a imersão contínua, temos $||v||_{L^{\gamma}(\mathbb{R}^N)} \leq C||v||_{\lambda}$ e como $||v||_{\lambda} \leq 1$ segue que

$$|DJ_3(u_n)v - DJ_3(u)v| \leq C||f(u_n) - f(u)||_{L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\mathbb{R}^N)}$$

de (B.2) e (B.3), segue que $DJ_3(u_n) \to DJ_3(u)$ e portanto $DJ_3 \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R}^N)$.

Apêndice C

Limitação em L^∞

Vamos mostrar em detalhes que $||u_\lambda||_{L^\infty(\Omega_\Upsilon)} \to 0$ quando $\lambda \to +\infty$ onde u_λ é ponto crítico do funcional auxiliar $\tilde{I}_\lambda$ da Seção 3.1. Os argumentos utilizados para esta demonstração servem também para o caso subcrítico.

Seja $\beta \geq 1$ e $T > 0$, definamos a seguinte função convexa e Lipschtziana

$$\varphi_\lambda(t) = \begin{cases} 0 \quad se \quad 0 \leq t \leq T_\lambda \\ t^\beta \quad se \quad T_\lambda < t \leq T \\ \beta T^{\beta-1}(t-T) + T^\beta \quad se \quad t \geq T, \end{cases}$$

onde $T_\lambda = \max\limits_{x \in \Omega_\Upsilon} u_\lambda$. Observe que se $x \in \Omega_\Upsilon$, então $\varphi_\lambda \equiv 0$. Assim,

$$\varphi_\lambda \in H^s(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon) \tag{C.1}$$

e

$$(-\Delta)^s \varphi_\lambda(u) \leq \varphi'_\lambda(u)(-\Delta)^s u \leq \varphi'_\lambda(u)\left(M(||u||_\lambda)^2(-\Delta)^s u + V(x)u\right). \tag{C.2}$$

Pelo Teorema 6.5 em [20], existe uma constante positiva $S = S(N,p,s)$, tal que, para qualquer $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$

$$|u|_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^N)} \leq S^{-1}[u]_{H^s(\mathbb{R}^N)}$$

e pela Proposição 3.6 em [20]

$$|u|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Por (C.1), obtemos

$$|\varphi_\lambda(u)|_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Upsilon)} \leq S^{-2}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi_\lambda(u)|_{L^2(\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Upsilon)}$$

daí e da integração por partes em (C.2), temos

$$\begin{aligned}
|\varphi_\lambda(u)|_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Upsilon)} &\leq S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Upsilon} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi_\lambda(u)|^2 dx \\
&\leq S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Upsilon} |\varphi_\lambda(u)\varphi_\lambda'(u)(-\Delta)^s\varphi_\lambda(u)dx \\
&\leq S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Upsilon} \varphi_\lambda(u)\varphi_\lambda'(u)\left(M(||u||_\lambda)^2(-\Delta)^s u + V(x)u\right)dx.
\end{aligned}$$

Uma vez que, u_λ é solução do problema auxiliar, temos

$$\begin{aligned}
|\varphi_\lambda(u_\lambda)|^2_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Upsilon)} &\leq S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Upsilon} \varphi_\lambda(u_\lambda)\varphi_\lambda'(u_\lambda)(\bar{h}(x,u_\lambda) + h(x)u_\lambda)dx \\
&= S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Upsilon} \varphi_\lambda(u_\lambda)\varphi_\lambda'(u_\lambda)(\tilde{g}(u_\lambda) + h(x)u_\lambda)dx \\
&\leq S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Upsilon} \varphi_\lambda(u_\lambda)\varphi_\lambda'(u_\lambda)(\sigma' u_\lambda + h(x)u_\lambda)dx \\
&\leq S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Upsilon} \varphi_\lambda(u_\lambda)\varphi_\lambda'(u_\lambda)(\sigma' u_\lambda^{2^*_s-1} + h(x)u_\lambda)dx.
\end{aligned}$$

Não é difícil ver, que as seguintes desigualdades são válidas

$$\varphi_\lambda(u)\varphi_\lambda'(u) \leq \beta u^{2\beta-1} \ \ e \ \ u\varphi_\lambda'(u) \leq \beta\varphi_\lambda(u)$$

daí, temos

$$|\varphi_\lambda(u_\lambda)|^2_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Upsilon)} \leq C\beta\left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Upsilon} h(x)u_\lambda^{2\beta}dx + \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Upsilon} (\varphi_\lambda(u_\lambda))^2 u_\lambda^{2^*_s-2}dx\right), \tag{C.3}$$

onde C é uma constante positiva que não depende de β. Note que a ultima integral está bem definida para todo T na definição de φ_λ. Com efeito, pelo fato de $\beta > 1$ e φ_λ ser linear quando $u_\lambda \geq T$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}(\varphi_\lambda(u_\lambda))^2 u_\lambda^{2_s^*-2}dx &= \int_{\{u_\lambda\leq T\}\setminus\Omega_\Upsilon}(\varphi_\lambda(u_\lambda))^2 u_\lambda^{2_s^*-2}dx + \int_{\{u_\lambda> T\}\setminus\Omega_\Upsilon}(\varphi_\lambda(u_\lambda))^2 u_\lambda^{2_s^*-2}dx \\ &\leq T^{2\beta-2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*}dx + C\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*}dx < \infty,\end{aligned}$$

escolhendo β específico em (C.3) e chamaremos de β_1, tal que

$$\beta_1 = \frac{2_s^*}{2}. \tag{C.4}$$

Seja $R > 0$ fixado a ser escolhido posteriormente, retomando a ultima integral em (C.3) e usando a desigualdade de Hölder com expoentes ${2_s^*}/{2}$ e ${2_s^*}/{(2_s^*-2)}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}(\varphi_\lambda(u_\lambda))^2 u_\lambda^{2_s^*-2}dx = &\int_{\{u_\lambda\leq R\}\setminus\Omega_\Upsilon}(\varphi_\lambda(u_\lambda))^2 u_\lambda^{2_s^*-2}dx + \int_{\{u_\lambda> R\}\setminus\Omega_\Upsilon}(\varphi_\lambda(u_\lambda))^2 u_\lambda^{2_s^*-2}dx \\ &\leq R^{2_s^*-1}\int_{\{u_\lambda\leq R\}\setminus\Omega_\Upsilon}\frac{(\varphi_\lambda(u_\lambda))^2}{u_\lambda}dx \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}(\varphi_\lambda(u_\lambda))^{2_s^*}dx\right)^{\frac{2}{2_s^*}}\left(\int_{\{u_\lambda> R\}\setminus\Omega_\Upsilon}u_\lambda^{2}dx\right)^{\frac{2_s^*-2}{2_s^*}}.\end{aligned} \tag{C.5}$$

Pelo teorema da convergência monótona, podemos escolher R grande o suficiente de modo que

$$\left(\int_{\{u_\lambda> R\}\setminus\Omega_\Upsilon}u_\lambda^{2_s^*}dx\right)^{\frac{2_s^*-2}{2_s^*}} \leq \frac{1}{2C\beta_1},$$

onde C é a constante em (C.3). Assim, substituindo o ultimo termo de (C.3) pelo lado esquerdo de $C.5$, obtemos juntamente com (C.4)

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}(\varphi_\lambda(u_\lambda))^{2_s^*}dx\right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq 2C\beta_1\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}u_\lambda^{2_s^*}dx + R^{2_s^*-1}\int_{\{u_\lambda\leq R\}\setminus\Omega_\Upsilon}\frac{(\varphi_\lambda(u_\lambda))^2}{u_\lambda}dx\right). \tag{C.6}$$

Como $\varphi_\lambda(t) \leq t^{\beta_1}$, usado (C.4) e tomando $T \to \infty$, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}u_\lambda^{2_s^*\beta_1}dx\right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq 2C\beta_1\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}u_\lambda^{2_s^*}dx + R^{2_s^*-1}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}u_\lambda^{2_s^*}dx\right) < +\infty$$

portanto,

$$u_\lambda \in L^{2_s^*\beta_1}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon). \tag{C.7}$$

Supondo agora, $\beta \geq \beta_1$, usando o fato de que $\varphi_\lambda(u) \leq u^\beta$ e fazendo $T \to \infty$, obtemos de (C.3) que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*\beta}dx\right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq C\beta\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2\beta}dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2\beta+2_s^*-2}dx\right) < +\infty. \tag{C.8}$$

Agora, podemos escrever $u_\lambda^{2\beta} = u_\lambda^a u_\lambda^b$, com

$$a = \frac{2_s^*(2_s^*-1)}{2(\beta-1)} \text{ e } b = 2\beta - a.$$

Assim, aplicando a desigualdade de Young com expoentes

$$r = \frac{2_s^*}{a} \text{ e } r' = \frac{2_s^*}{2_s^*-a},$$

temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2\beta}dx &\leq \frac{a}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*}dx + \frac{2_s^*-a}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{\frac{2_s^*b}{2_s^*-a}}dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*}dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2\beta+2_s^*-2}dx.\end{aligned}$$

Daí e de (C.8), segue que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*\beta}dx\right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq C\beta\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*}dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2\beta+2_s^*-2}dx\right) < +\infty$$

onde $C > 0$ independe de β. Assim,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*\beta}dx\right)^{\frac{1}{2_s^*}} \leq (C\beta)^{\frac{1}{2(\beta-1)}}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*}dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2\beta+2_s^*-2}dx\right)^{\frac{1}{2(\beta-1)}}. \tag{C.9}$$

Agora, vamos utilizar um argumento interativo para obter o resultado desejado. Para tanto, defina β_{m+1}, $m \geq 1$, então

$$2\beta_{m+1} + 2_s^* - 2 = 2_s^*\beta_m$$

logo,

$$\beta_{m+1} - 1 = \left(\frac{2_s^*}{2}\right)^m (\beta_1 - 1).$$

Substituindo em (C.9)

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*\beta_{m+1}} dx\right)^{\frac{1}{2_s^*}} \leq (C\beta_{m+1})^{\frac{1}{2(\beta_{m+1}-1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*\beta_m} dx\right)^{\frac{1}{2_s^*(\beta_m-1)}}.$$

Definindo $C_{m+1} = C\beta_{m+1}$ e

$$A_m = \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*\beta_m} dx\right)^{\frac{1}{2_s^*(\beta_m-1)}}$$

podemos afirmar que existe uma constante $C_0 > 0$ independente de m, tal que

$$A_{m+1} = \prod_{k=2}^{m+1} C_k^{\frac{1}{2(\beta_k-1)}} A_1 \leq C_0 A_1,$$

ou seja,

$$||u_\lambda||_{L^\infty(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)} \leq C_0 A_1.$$

Sendo

$$A_1 = \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*\beta_1} dx\right)^{\frac{1}{2_s^*(\beta_1-1)}}$$

e $\beta_1 - 1 > 0$, obtemos

$$A_1 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*\beta_1} dx\right)^{\frac{1}{2_s^*}}$$

de (C.7), existe uma constante $k > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
A_1 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*} dx + k\right)^{\frac{1}{2_s^*}} \\
&\leq C\left[k^{\frac{1}{2_s^*}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*} dx\right)^{\frac{1}{2_s^*}}\right] \\
&= Ck^{\frac{1}{2_s^*}} + C\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon} u_\lambda^{2_s^*} dx\right)^{\frac{1}{2_s^*}} \\
&= C + C|u_\lambda|_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)} \\
&\leq C|u_\lambda|_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)}.
\end{aligned}$$

Se consideramos $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^N)$ teremos, pelo Corolário 5.1.3 em [22], que $u_\lambda \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $\alpha \in \{0, min\{2s, 1\}\}$. O que mostra a regularidade das soluções.

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A. *Sobolev Spaces, Academic Press*, New York-London, 1975.

[2] Alves, C. O.; Corrêa, F. J. S. A. & Ma, T. F. *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*. Computers Mathematics with Applications, volume 49,no 1, 2005, 85–93.

[3] Alves, C.O. & Figueiredo, G.M. *Multi-bump solutions for a Kirchhoff-type problem*, Adv. Nonlinear Anal. 5 2016, no. 1, 1-26.

[4] Alves, C.O. & Miyagaki, O.H. *Existence and concentration of solutions for a class of fractional elliptic equation in $\mathbb{R}^N$ via penalization method*, Calc. Var. Partial Differential Equations 55 2016, no. 3, 47-19 pp.

[5] Ambrosio, V. *Multiplicity of positive solutions for a class of fractional Schrödinger equations via penalization method*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 196 2017, no. 6, 2043-2062.

[6] Ambrosio, V. *Fractional $p\&q$ laplacian problems in $\mathbb{R}^N$ with critical growth*, Z. Anal. Anwend. 2019, 1081-10449.

[7] Ambrosio. & Isernia. V *Concentration phenomena for a fractional Schrodinger–Kirchhoff type equation*, Math. Methods Appl. Sci. 41 2018, no. 2, 615–645.

[8] Ambrosio. V & Figueiredo, G. M. *Ground state solutions for a fractional Schrödinger equation with critical growth*, Asymptotic Analysis 105 2017, no. 3–4, 159–191.

[9] Applebaum, D *Lévy processes and stochastic calculus*, Cambridge University Press, Cambridge 2009.

[10] Barrios, B.; Colorado, E.; Servadei, R. & Soria, F. *A critical fractional equation with concave-convex nonlinearities*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 32 2015, 875-900.

[11] Berton, J *Lévy processes*, Cambridge Tracts in Mathematics, 121. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[12] Bisci, G.M.; Radulescu, V.D. & Servadei, R. *Variational Methods for Non-local Fractional Problems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press 2016.

[13] Bogachev, V. I. *Measure Theory*, vol. II, Springer Verlag, Berlin 2007.

[14] Brézis, H. *How to recognize constant functions. Connections with Sobolev spaces*, Usppekhi Mat. Nauk 57 (4), 59-74, 2002; translation in Russian Math. Surveys 57 (4), 693-708, 2002.

[15] Brézis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York: Springer, 2010.

[16] Brézis, H. & Nirenberg, L. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36 1983, 437-477.

[17] Cont, R & P. Tankov. *Fractional modelling with jump processes*, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Boca Raton, FI, 2004.

[18] Costa, A.C.R., Maia, B.B.V. & Miyagaki, O.H. *Existence and Concentration of Solutions for a Class of Elliptic Kirchhoff–Schrödinger Equations with Subcritical and Critical Growth.* Milan J. Math. 88, 385–407, 2020.

[19] Del Pino, M. & Felmer, P.L. *Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. PDE, 1996, 121-137

[20] Di Nezza, E.; Palatucci, G. & Valdinoci, E. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, B.Sci. Math., 136 2012, 521-573.

[21] Ding, Y. H. & Tanaka, K. *Multiplicity of positive solutions of a nonlinear Schrödinger equation*, Manuscripta Math. 112 2003, no. 1, 109 105.

[22] Dipierro, S.; Medina, M. & Valdinoci, E. *Fractional elliptic problems with critical growth in the whole of* $\mathbb{R}^N$, Lecture Notes. Scuola Normale Superiore di Pisa (New Series). Pisa: Edizioni della Normale, Vol. 15, 2017.

[23] Felmer P.; Quaas, A. & Tan J.*Positive solutions of the nonlinear Schrödinger equation with the fractional Laplacian*, Proccedings of the Royal Society of Edinburgh, 142A, 1237-1262, 2012.

[24] Figueiredo, G. M. *Existence of a positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument*, J. Math. Anal. Appl. 401, 2013, 706 703.

[25] Fiscella, A. *Infinitely many solutions for a critical Kirchhoff type problem involving a fractional operator*, Differential and Integral Equations, 29(5/6) 513-530 May/June 2016.

[26] Fiscella, A. & Valdinoci, E. *A critical Kirchhoff type problem involving a nonlocal operator*. Nonlinear Anal. 94, 2014, 156-170.

[27] He, X. & Zou, W. *Ground states for nonlinear Kirchhoff equations with critical growth*, Annali di Matematica, 193 2014, 473 500.

[28] Ekeland, I. *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. 47, 324–353, 1974.

[29] Kirchhoff. G. *Mechanik, Teubner*, Leipzig, (1883).

[30] Laskin, N *Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals*, Phy. Lett. A 268 2000, 298-305.

[31] Laskin. N *Fractional Schrödinger equation*, Phys. Rev. E 66, 056108 2002.

[32] Ma, T. F. & Rivera, J. E. M., Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem. Applied Mathematics Letters, volume 16, no. 2, 2003, 243–248.

[33] Mingqi, X.; Pucci, P.; Squassina, M. & Zhang, B.L. *Nonlocal Schrödinger Kirchhoff equations with external magnetic field*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 37 2017, 503-521.

[34] Mingqi, X., Zhang, B., Repovs, D. *Existência e multiplicidade de soluções para equações fracionárias de Schrödinger-Kirchhoff com não linearidade de Trudinger-Moser*. Anal não linear. 186, 74-98 2019.

[35] Miyagaki, O.H. *On a class of semilinear elliptic problem in R^N with critical growth*, Nonlinear Anal. 29 1997, 773-781.

[36] Palatucci, G. & Pisante, A. *Improved Sobolev embeddings, profile decomposition, and concentration-compactness for fractional Sobolev spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations 50 2014, 799–829. 9.

[37] Secchi, S. *Ground state solutions for nonlinear fractional Schrödinger equations in RN*, J. Math. Phys. 54, 2013 031501.

[38] Servadei, R. & Valdinoci, E. *The Brezis–Nirenberg result for the fractional Laplacian*, Trans. Amer. Math. Soc. 367(1) 2015, 67–102.

[39] Vasconcelos, C. F. *On a nonlinear stationary problem in unbounded domains*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 5, 309-318, 1992.

[40] Willem, M. *Minimax Theorems*, Progressin Nonlinear Diferential Equations 1996.