



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Classes de Equações Elípticas Quasilineares do Tipo Neumann e Steklov-Neumann

Rafael Augusto Duarte Guimarães

Orientador: Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

Belém

Junho de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Rafael Augusto Duarte Guimarães

**Classes de Equações Elípticas Quasilineares do Tipo
Neumann e Steklov-Neumann**

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial, para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

Belém
Junho de 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)
autor(a)

G963c Guimarães, Rafael Augusto Duarte.
 Classes de equações elípticas quasilineares do tipo
 Neumann e Steklov-Neumann / Rafael Augusto Duarte
 Guimarães. — 2021.
 72 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,
Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-
Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Equações diferenciais elípticas quasilineares. 2.
Autovalor de Steklov-Neumann. 3. Expoente crítico. 4.
Problemas do tipo convexo e côncavo-convexo. 5.
Métodos variacionais. I. Título.

CDD 515.353

Rafael Augusto Duarte Guimarães

Classes de Equações Elípticas Quasilineares do Tipo Neumann e Steklov-Neumann

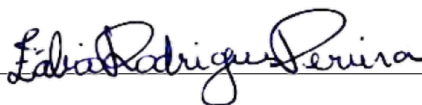
Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial, para a obtenção do título de mestre em Matemática, julgada pela seguinte banca examinadora:



Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa (Orientador)
PPGME/PDM - UFPA



Prof. Dr. Bráulio Brendo Vasconcelos Maia
Universidade Federal Rural da Amazônia - UFRA



Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF



Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos
PPGME/PDM - UFPA

Data da defesa: 22 de Junho de 2021

Conceito: APROVADO

*Ao meu Deus, Rei da minha vida,
à família e à futura companheira.*

“Deus é o nosso refúgio e fortaleza, socorro bem presente na angústia. Pelo que não temeremos, ainda que a terra se mude, e ainda que os montes se projetem para o meio dos mares; ainda que as águas rujam e espumem, ainda que os montes se abalem pela sua braveza. Há um rio cujas correntes alegram a cidade de Deus, o lugar santo das moradas do Altíssimo. Deus está no meio dela; não será abalada; Deus a ajudará desde o raiar da alva. Bramam nações, reinos se abalam; ele levanta a sua voz, e a terra se derrete. O Senhor dos exércitos está conosco; o Deus de Jacó é o nosso refúgio. Vinde contemplai as obras do Senhor, as desolações que tem feito na terra. Ele faz cessar as guerras até os confins da terra; quebra o arco e corta a lança; queima os carros no fogo. Aquietai-vos, e sabeis que eu sou Deus; sou exaltado entre as nações, sou exaltado na terra. O Senhor dos exércitos está conosco; o Deus de Jacó é o nosso refúgio”.

Salmo 46.1-11

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus no nome do Filho Jesus mediante o Espírito Santo pela sua rica misericórdia e graça, que diariamente me alcança para o fim de ser seu filho.

Aos meus pais Antônio Delci e Rosa Angélica pelo apoio incondicional prestado em toda a minha vida, por serem meu incentivo na busca de ser uma pessoa melhor e principalmente por constituírem meu exemplo de humildade e bondade para com todos, sem distinção.

Ao meu irmão de sangue Breno Felipe e família.

A minha amiga, namorada e futura esposa Joyce Guimarães, pelo companheirismo, incentivo, atenção, carinho e amor que me ofereceu desde quando a conheci.

Aos meus tios João e Lauriceia por tudo, foram e sempre serão a minha segunda família.

Ao meu tio Paulo Augusto pela confiança, ajuda e bondade em todos os instantes da caminhada.

Aos meus amigos que tive o privilégio de conhecer no mestrado, Pastana e Enielson, pelas trocas de experiências e momentos de descontração.

Ao meu orientador Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa pelas sugestões, colaborações, disponibilidade e suporte técnico que foram fundamentais. Obrigado por acreditar em mim.

Agradeço aos professores doutores Bráulio Brendo Vasconcelos Maia (UFRA), Fábio Rodrigues Pereira (UFJF) e Gelson Conceição Gonçalves dos Santos (UFPA) que aceitaram participar da banca examinadora.

À Universidade Federal do Pará em nome de todos os meus professores que foram coparticipantes da minha formação. Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME), e ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN).

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

Resumo

Neste trabalho, mostramos a existência de solução para o seguinte problema elíptico quasilinear

$$\begin{cases} -\Delta_p u + c(x)|u|^{p-2}u = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g(x, u) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ é o operador p -Laplaciano, $p \in (1, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, para $N \geq 2$, é um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^{0,1}$, e $\frac{\partial}{\partial \eta} \doteq \eta \cdot \nabla$ é a derivada normal exterior unitária sobre $\partial\Omega$. As funções $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $f, g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ assumirão certas condições que serão dadas posteriormente. Para obter o nosso resultado utilizaremos a teoria de autovalores de Steklov-Neumann.

Em seguida estudamos uma classe de problemas elípticos com dois expoentes críticos envolvendo não linearidades do tipo convexo e côncavo-convexo

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = u^{2_*-1} + g(x, u) & \text{sobre } \partial\Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, para $N \geq 3$, é um domínio suave limitado, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ é a derivada normal exterior unitária sobre $\partial\Omega$, f e g têm crescimento subcrítico no infinito, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}$ são os expoentes críticos de Sobolev para as imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ e $H^1(\mathbb{R}_+^N) \hookrightarrow L^{2_*}(\partial\mathbb{R}_+^N)$. Para obter a existência de solução, usaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha.

Usaremos os métodos variacionais para estudar os dois problemas.

Palavras-chave: Equações diferenciais elípticas quasilineares. Autovalor de Steklov-Neumann. Expoente crítico. Problemas do tipo convexo e côncavo-convexo. Métodos variacionais.

Abstract

In this work, we show the existence of solution to the following quasilinear elliptical problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u + c(x)|u|^{p-2}u = f(x, u) & \text{in } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g(x, u) & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ is the p -Laplacian operator, $p \in (1, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, for $N \geq 2$, is a bounded domain with $\partial\Omega \in C^{0,1}$, and $\frac{\partial}{\partial \eta} \doteq \eta \cdot \nabla$ is a normal derivative on $\partial\Omega$. The functions $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ and $f, g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, will assume certain conditions that will be given later. To obtain our result we will use Steklov-Neumann's eigenvalue theory.

Next, we study a class of elliptical problems with two critical exponents involving convex and concave-convex nonlinearities

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + f(x, u) & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = u^{2^*-1} + g(x, u) & \text{on } \partial\Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, for $N \geq 3$, is a bounded smooth domain, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ is the outer unit normal derivative, f and g have subcritical growth at infinity, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ and $2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}$ are the limiting Sobolev exponents for the embedding $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ and $H^1(\mathbb{R}_+^N) \hookrightarrow L^{2_*}(\partial\mathbb{R}_+^N)$. For to obtain the existence of solutions, we will use a version of the Mountain Pass Theorem.

We will use variational methods to study the two problems.

Key-words: Quasilinear elliptical differential equations. Steklov-Neumann eigenvalue. Double critical exponents. Convex and concave-convex type problems. Variational methods.

Índice de notações

- $\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω ;
- $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω ;
- $B_r(x) = B(x; r)$ é a bola de centro x e raio r ;
- $|A|$ é a medida de Lebesgue de um subconjunto A de $\mathbb{R}^N$;
- $|A|_\sigma$ é a medida de um subconjunto A de $\mathbb{R}^{N-1}$;
- $(PS)_c$ condição de Palais-Smale no nível c ;
- q.t.p. é uma abreviação para “quase todo ponto”;
- $\|u\|_\infty = \inf\{m \geq 0 : |\{x \in \Omega : |u(x)| > m\}| = 0\}$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável} : |u(x)| < C \text{ q.t.p. } x \in \Omega \text{ para algum } C > 0\}$;
- $L^\infty(\partial\Omega) = \{u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é } \sigma\text{-mensurável} : |u(x)| < C \text{ q.t.p. } x \in \partial\Omega \text{ para algum } C > 0\}$;
- $\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ e $\|u\|_{p,\partial} = \left(\int_{\partial\Omega} |u|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}$;
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } \|u\|_p < \infty\}$;
- $L^p(\partial\Omega) = \{u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é } \sigma\text{-mensurável e } \|u\|_{p,\partial} < \infty\}$;
- $[L^{p'}(\Omega)]^N = \{U = (u_1, \dots, u_N) : u_1, \dots, u_N \in [L^{p'}(\Omega)]^N\}$;
- $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq 1\}$, onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ é um multi-índice;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ é o gradiente da função u ;
- $|\nabla u|$ é o módulo do gradiente da função u ;
- $\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega [|\nabla u|^p + |u|^p] dx\right)^{\frac{1}{p}} = (\|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$;

- $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$;
- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é continuamente } k \text{ vezes diferenciável, com } k \in \mathbb{N}\}$;
- $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 1} C^k(\Omega)$ é o espaço infinitamente continuamente diferenciável;
- $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$, onde $C_c^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções $u \in C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto contido em Ω ;
- $C^{0,1}(\partial\Omega) = \{u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lipschitziana}\}$;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o operador Laplaciano;
- $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ é o operador p -Laplaciano;
- $\frac{\partial u}{\partial \eta} \doteq \eta \cdot \nabla u$ ou simplesmente $\frac{\partial}{\partial \eta}$ é a derivada normal exterior;
- X^* representa o espaço dual de $(X, \|\cdot\|)$, munido da norma $\|\cdot\|^*$;
- $\sigma(X, X^*)$ representa a topologia fraca de X ;
- $u_n \rightarrow u$ em $(X, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0 \Leftrightarrow u_n$ converge fortemente para u ;
- $u_n \rightharpoonup u$ em $(X, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |f(u_n) - f(u)| = 0, \forall f \in X^* \Leftrightarrow u_n$ converge fracamente para u .
- $f = o(g)$ quando $x \rightarrow x_0$, significa que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$;
- $f = O(g)$ quando $x \rightarrow x_0$, significa que existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ para todo x suficientemente próximo de x_0 .

Sumário

Introdução	1
1 Uma Classe de Equações Elípticas Quasilineares do Tipo Steklov-Neumann	7
1.1 O primeiro autovalor de Steklov e de Neumann para equações envolvendo o operador p -Laplaciano	8
1.1.1 Construção do primeiro autovalor de Steklov associado ao problema (1.2)	9
1.1.2 Construção do primeiro autovalor de Neumann associado ao problema (1.3)	12
1.2 Equações elípticas não lineares envolvendo o operador p -Laplaciano . .	15
1.2.1 Resultados preliminares	16
1.2.2 Prova do Teorema 1.2.1	25
2 Uma Classe de Problemas de Neumann Envolvendo dois Expoentes Críticos	29
2.1 Condições sobre f e g	29
2.2 Caso convexo	32
2.2.1 Demonstração do Teorema 2.1.1	40
2.3 Caso côncavo-convexo	43
2.3.1 Demonstração do Teorema 2.1.2	47
A Resultados Gerais do Capítulo 1	48
A.1 Resultados demonstrados	48
A.2 Algumas desigualdades	59
A.3 Resultados de Análise Funcional	60
A.4 Operadores traço	61
A.5 Resultados de Teoria do Ponto Crítico	62
A.6 Teorema dos Multiplicadores de Lagrange	62
A.7 Outros resultados	63

B Resultados Gerais do Capítulo 2	64
B.1 Resultados demonstrados	64
B.2 Teorema do Passo da Montanha	66
B.3 Princípio Variacional de Ekeland	67
B.4 Princípio do Máximo Forte	67
Bibliografia	69

Introdução

Neste trabalho estudaremos dois problemas, a saber: um problema do Tipo Steklov-Neumann, envolvendo o p -Laplaciano, e uma classe de problemas de Neumann envolvendo dois expoentes críticos.

No problema estudado em [25]

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \mu u & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

a condição de fronteira $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \mu u$ define um auto-problema de Steklov e é chamado de condição de contorno de Steklov, e aparece no estudo de muitos problemas de valor de contorno. Na literatura, se μ satisfaz o problema acima para alguma função não nula, dizemos que μ é um autovalor de Steklov. Ainda em [25], Lamberti diz que o problema (1) tem um significado físico importante e muitas propriedades dos autovalores de Steklov são conhecidas. Em certas condições, (1) descreve a vibração de uma membrana livre cuja massa total é uniformemente distribuída ao longo da fronteira. Em [29], os autores referem que, no estudo de deformações conformes em variedades Riemannianas com contorno, as condições de contorno não lineares aparecem.

Considerando o seguinte problema estudado em [27]

$$\begin{cases} \Delta u + \alpha u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

se λ satisfaz a equação (2) para alguma função u não nula, dizemos que λ é um autovalor para o problema de Neumann. Tais problemas estudam, por exemplo, a corda vibrante e a dinâmica populacional. O problema estudado em [16]

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u (m - |u|^q) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $q > 0$ é um número fixo e $\lambda > 0$ é um parâmetro real, biologicamente, modela uma espécie de densidade $u \geq 0$ em algum momento fixo t . O termo $-\Delta_p u$ representa a difusão

da população, enquanto que seu crescimento é dado por $\lambda|u|^{p-2}u(m - |u|^q)$. O peso m dá algumas informações sobre as regiões favoráveis e desfavoráveis para a sobrevivência da espécie; de fato, o crescimento é negativo quando $m \leq 0$ e é positivo quando $m \geq 0$, desde que a densidade u não seja muito alta.

Este trabalho está dividido em dois capítulos.

No Capítulo 1, baseado no artigo de Godoi, Miyagaki e Rodrigues [22], utilizaremos a teoria de autovalores para provar resultados de existência de soluções para o problema a seguir com condições de fronteira não lineares:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + c(x)|u|^{p-2}u = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g(x, u) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{I})$$

o qual é um problema do tipo Steklov-Neumann para uma classe de equações elípticas quasilineares, com $p \in (1, \infty)$ e Ω , f , g e $c(x)$ satisfazendo certas hipóteses que serão dadas posteriormente. Na verdade, o primeiro problema cuidadosamente examinado é o auto-problema de Steklov envolvendo o operador p -Laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta_p u + c(x)|u|^{p-2}u = 0 & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \mu|u|^{p-2}u & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{II})$$

com $p \in (1, \infty)$ e Ω , $c(x)$ satisfazendo certas condições. Aqui, a principal dificuldade que o problema apresenta é que não estamos trabalhando com um espaço de Hilbert, e sim um espaço de Banach. Citamos, como referência ao leitor, [7], [26], [31] e [36]. O segundo problema estudado é o auto-problema de Neumann ao operador p -Laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta_p u + c(x)|u|^{p-2}u = \lambda|u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{III})$$

com $p \in (1, \infty)$ e Ω , $c(x)$ satisfazendo certas condições. Novamente, a principal dificuldade é o fato de não estarmos trabalhando com um espaço de Hilbert. Citamos, como referência, [10], [26], [16] e [11]. Nos problemas (II) e (III) mostramos somente a existência do primeiro autovalor positivo.

Agora, como aplicação de (II) e (III), estabelecemos a existência da solução fraca para o problema (I). Em outras palavras, esse resultado será obtido quando houver uma certa interação entre as não linearidades e o espectro de Neumann, e uma interação entre as

não linearidades de fronteira e o espectro de Steklov, associados as equações. Para os problemas (I), (II) e (III), fazemos menção à tese de Godoi [21].

Para $p = 2$, Mavinga e Nkashama [30] estudaram o mesmo problema em que não linearidades interagem com autovalores de alta ordem. Nosso resultado estende esta pesquisa para $p \neq 2$. De outro modo, o resultado de existência de solução fraca que conseguimos estende o primeiro teorema do artigo [30] para o caso do operador p -Laplaciano.

O problema não linear (I), tem sido consideravelmente estudado no âmbito de métodos de sub e super-soluções. Citamos, por exemplo, [6]. Para o caso linear, citamos Auchmuty [8], donde provou para $p = 2$, que as autofunções de Steklov formam um sistema ortonormal completo para o espaço $[H_0^1(\Omega)]^\perp$ em $H^1(\Omega)$ no que diz respeito aos produtos internos específicos.

No Capítulo 2, estudamos o artigo de Abreu, Carrião e Miyagaki [2], o qual versa sobre o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + f(x, u) \text{ em } \Omega, & \text{(IV)} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = u^{2^*-1} + g(x, u) \text{ sobre } \partial\Omega, & \text{(V)} \\ u > 0 \text{ em } \Omega, & \text{(VI)} \end{cases}$$

que é uma classe de problemas elípticos com dois expoentes críticos, dos tipos convexo e côncavo-convexo, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ($N \geq 3$), é um domínio suave limitado, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ é a derivada normal unitária exterior, f e g têm crescimento subcrítico no infinito, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}$ são os expoentes críticos de Sobolev para as imersões $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ e $H^1(\mathbb{R}_+^N) \hookrightarrow L^{2_*}(\partial\mathbb{R}_+^N)$, respectivamente, onde $\mathbb{R}_+^N = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^{N-1}, t > 0\}$.

Um trabalho pioneiro sobre problemas envolvendo expoentes críticos de Sobolev é o famoso artigo de Brezis e Nirenberg [12]

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + f(x, u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \quad (3)$$

o qual possui solução para todo $\lambda \in (0, \lambda_1(\Omega))$, que é um parâmetro real, quando $N \geq 4$, e se $f(x, u) = \lambda u$, onde $\lambda_1(\Omega)$ denota o primeiro autovalor do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Se $\lambda \notin (0, \lambda_1)$ e Ω é um domínio estrelado, então (3) tem solução, com $f(x, u) = \lambda u$. Quando

$N = 3$, o problema torna-se delicado e seus resultados podem ser divididos em três casos, conforme [1]:

1. se $f(x, u) = \lambda u$, então existe um número $\lambda^* > 0$ tal que o problema (3) possui solução para todo $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_1(\Omega))$. Se $\Omega = B(0, R)$, $R > 0$, uma bola de centro na origem e raio R no $\mathbb{R}^N$, então $\lambda^* = \frac{\lambda_1(\Omega)}{4}$.
2. se $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u)}{u^3} = +\infty$, então (3) possui solução.
3. se $f(x, u) = a(x)u + \mu g(x, u)$, com $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ e $g(x, u) \geq 0$, mas não identicamente nula, que existe um número real $\mu_0 \geq 0$ tal que o problema (3) possui solução para todo $\mu \geq \mu_0$, desde que $g(x, u) = o(u)$ quando $u \rightarrow 0$.

Em [12], os autores obtiveram soluções positivas com energia menor do que $\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$, onde

$$S = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx : \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx = 1, 0 \neq u \in H_0^1(\Omega) \right\}, \quad (4)$$

é a melhor constante de Sobolev. Na verdade, em outras palavras, apesar da imersão $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ não ser compacta, eles foram capazes de obter algumas condições de compacidade, provando que o nível crítico do funcional de Euler-Lagrange associado a (IV) com a condição de contorno de Dirichlet está abaixo do número crítico $\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$. Pela falta de compacidade da imersão, problemas como (3) apresentam maior dificuldade para demonstrar a existência de solução do que aqueles que envolvem apenas crescimento sub-crítico. Vale ressaltar que a originalidade do trabalho de Brezis e Nirenberg veio do fato de usarem funções extremas da desigualdade de Sobolev para localizar o nível do Passo da Montanha associado ao problema.

Para solucionar o problema (IV)-(VI) iremos seguir a mesma metodologia usada em [12] descrita anteriormente. Ou seja, procuraremos pontos críticos do funcional associado a equação diferencial parcial do problema em estudo, que em nosso caso é dado por

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} a u^2 + F_1(x, u) + \frac{|u|^{2^*}}{2^*} \right) dx \\ & - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{2} b u^2 + G_1(y, u) + \frac{|u|^{2^*}}{2^*} \right) d\sigma, \end{aligned}$$

o qual é definido sobre $H^1(\Omega)$, onde $F_1(x, u) = \int_0^u f_1(x, t) dt$ e $G_1(y, u) = \int_0^u g_1(y, t) dt$. No entanto, este método é dificultado pelo fato do funcional Φ envolver o expoente crítico de

Sobolev, de tal forma que não temos a comodidade de usar resultados de compacidade imediatos, devido a imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$ não ser compacta (ver [20]).

Neste sentido, mostraremos a existência de soluções a partir de uma versão do Teorema do Passo da Montanha. Mostraremos um Lema que garante, através de algumas hipóteses, que o nível minimax esteja abaixo de uma constante, isto é, $c < \bar{S}$, onde

$$\bar{S} \doteq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*} \right) \max\{S_0^{\frac{2^*}{2^*-2}}, S_0^{\frac{2^*}{2_*-2}}\},$$

tal que

$$S_0 = \inf\{|\nabla u|_{2, \mathbb{R}_+^N}^2 : |u|_{2_*, \mathbb{R}_+^N}^2 + |u|_{2^*, \mathbb{R}_+^N}^2 = 1\},$$

e $|u|_{a, \Omega}$ denota a norma usual em $L^a(\Omega)$.

Para uma melhor compreensão dos tipos de problemas estudados no Capítulo 2, indicamos também [4] e Garcia Azorero, Peral Alonso e Rossi em [20], onde estes estudaram um problema côncavo-convexo envolvendo não linearidades subcríticas na fronteira.

O problema (IV)-(VI) com $f = g = 0$ foi estudado em [18], que foi generalizado em [15]. Em [35] propriedades simétricas de soluções foram obtidas, mas, basicamente, nestes trabalhos foi provado que toda solução positiva w_ϵ da equação diferencial parcial com condição de contorno não linear

$$\begin{cases} -\Delta u = N(N-2)u^{2^*-1} & \text{em } \mathbb{R}_+^N, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = cu^{2^*-1} & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^N, \end{cases}$$

verifica

$$w_\epsilon(x, t) = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + |(x, t) - (x_0, t_0)|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}$$

para algum $\epsilon > 0$ onde $(N-2)t_0\epsilon^{-1} = c$. Equivalentemente, o problema de minimização S_0 é atingido pela função acima $w_\epsilon(x, t)$. Em [32], o caso crítico é tratado e alguns resultados de existência para (IV)-(VI) com $f = 0$, $g(s) = \delta s$, $\delta > 0$ e $N \geq 4$ foram provados.

De acordo com Brezis e Nirenberg em [12], a motivação para investigar problemas que envolvem expoentes críticos de Sobolev vem do fato de que se assemelha a alguns problemas variacionais em geometria e física, onde também ocorre falta de compacidade. No caso de Chipot, Shafrir e Fila em [15], suas motivações vieram das equações parabólicas.

Nesta dissertação, como já foi visto, a abordagem será variacional. Métodos Variacionais são algumas das principais ferramentas utilizadas para atacar problemas na teoria

das equações diferenciais parciais não lineares. A ideia central é a formulação de um problema variacional equivalente, em certo sentido, ao problema de equação diferencial. Em grosso modo, o método variacional consiste em associar ao problema estudado um funcional energia, de tal forma que os pontos críticos do funcional sejam exatamente as soluções do problema.

Por fim, fizemos um Apêndice para apresentarmos os resultados que foram usados ao longo do trabalho. Demonstraremos somente as que forem convenientes.

Capítulo 1

Uma Classe de Equações Elípticas Quasilineares do Tipo Steklov-Neumann

Neste capítulo, estudaremos resultados de existência de solução para o seguinte problema do tipo Steklov-Neumann

$$\begin{cases} -\Delta_p u + c(x)|u|^{p-2}u = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g(x, u) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ é o operador p -Laplaciano, $p \in (1, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, para $N \geq 2$, é um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^{0,1}$, e $\frac{\partial}{\partial \eta} \doteq \eta \cdot \nabla$ é a derivada normal exterior unitária sobre $\partial\Omega$. Serão assumidas, as seguintes condições, para as funções $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $f, g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

(P1) $c \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \geq 0$, para quase todo $x \in \Omega$ e

$$\int_{\Omega} c(x) dx > 0.$$

(P2) $f, g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(P3) Existem constantes $a_1, a_2 > 0$ tais que

$$|g(x, u)| \leq a_1 + a_2 |u|^s, \quad \forall (x, u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

com $0 < s < p_*^1(N) - 1$, onde

$$p_*^1(N) = \begin{cases} \frac{(N-1)p}{N-p} & \text{se } p < N, \\ \infty & \text{se } p \geq N. \end{cases}$$

(P4) Existem constantes $b_1, b_2 > 0$ tais que

$$|f(x, u)| \leq b_1 + b_2 |u|^t, \quad \forall (x, u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

com $0 < t < p_*(N) - 1$, onde

$$p_*(N) = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{se } p < N, \\ \infty & \text{se } p \geq N. \end{cases}$$

Na seção a seguir, iremos construir dois primeiros autovalores; um associado ao auto-problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + c(x)|u|^{p-2}u = 0 & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \mu |u|^{p-2}u & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

e outro, ao auto-problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + c(x)|u|^{p-2}u = \lambda |u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteira, $\partial\Omega$, de classe $C^{0,1}$, $\Delta_p u$ é o operador p -Laplaciano de u , $p \in (1, \infty)$, $\frac{\partial}{\partial \eta} = \eta \cdot \nabla$ é derivada normal (unitária) exterior a $\partial\Omega$ e $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição (P1).

1.1 O primeiro autovalor de Steklov e de Neumann para equações envolvendo o operador p -Laplaciano

Iniciaremos essa seção apresentando alguns resultados preliminares. Recordemos que, para $p \in (1, \infty)$, $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ é um espaço de Banach, uniformemente convexo, logo reflexivo (ver Teorema A.3.4, Apêndice A), onde

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_{\Omega} [|\nabla u|^p + |u|^p] dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.4)$$

Ainda, como $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz (P1), vê-se que

$$\|u\|_c = \left(\int_{\Omega} [|\nabla u|^p + c(x)|u|^p] dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.5)$$

também define uma norma em $W^{1,p}(\Omega)$. A priori, nesta parte introdutória, afirmamos que tais normas são equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$ (ver Proposição A.1.3, Apêndice A). Além disso, apresentaremos alguns fatos importantes envolvendo o espaço $W^{1,p}(\Omega)$.

Observação 1.1.1. Como as normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ são equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, temos que o espaço $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é um espaço de Banach.

Proposição 1.1.1. *O espaço $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é uniformemente convexo.*

Demonstração. Ver [21]. ■

Proposição 1.1.2. *O espaço $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é reflexivo.*

Demonstração. Ver a Proposição A.1.4, Apêndice A. ■

Proposição 1.1.3. *Os funcionais $\Upsilon_c, \tilde{\delta}, \beta : (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c) \longrightarrow \mathbb{R}$, definidos por*

$$\Upsilon_c(u) = \|u\|_c^p, \quad \tilde{\delta}(u) = \|u\|_p^p - 1 \quad e \quad \beta(u) = \|u\|_{p,\partial}^p$$

são de classe $C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, onde

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad e \quad \|u\|_{p,\partial} = \left(\int_{\partial\Omega} |u|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}$$

são normas em $L^p(\Omega)$ e $L^p(\partial\Omega)$, respectivamente. Além disso, possuem como derivadas de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\Upsilon'_c(u)(v) = p \int_{\Omega} [|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + c(x)|u|^{p-2} uv] dx, \quad (1.6)$$

$$\tilde{\delta}'(u)(v) = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx \quad e \quad (1.7)$$

$$\beta'(u)(v) = p \int_{\partial\Omega} |u|^{p-2} uv d\sigma. \quad (1.8)$$

Por fim, β é um funcional fracamente sequencialmente contínuo sobre $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$.

Demonstração. Ver a Proposição A.1.7, Apêndice A. ■

1.1.1 Construção do primeiro autovalor de Steklov associado ao problema (1.2)

Começaremos com uma Proposição que garante uma compacidade fraca de um subconjunto de $W^{1,p}(\Omega)$ e, logo em seguida, uma definição clássica.

Proposição 1.1.4. *Seja $\mathbb{K} = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\|_c^p \leq 1\}$. Então, $\mathbb{K}$ é fechado, convexo, limitado e fracamente compacto em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.1.3, $\Upsilon_c \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$. Consequentemente, Υ_c é um funcional contínuo. Como $\Upsilon_c(u) = \|u\|_c^p$, temos $\mathbb{K} = \Upsilon_c^{-1}([0, 1]) \subset W^{1,p}(\Omega)$, o qual, devido a continuidade de Υ_c , é fechado em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. As provas da convexidade e limitação de $\mathbb{K}$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ são imediatas, pois $\|\cdot\|_c$ define uma norma em $W^{1,p}(\Omega)$. Finalmente, em razão da Proposição 1.1.2, $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é um espaço reflexivo, e como $\mathbb{K}$ é um subconjunto fechado, convexo e limitado em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$, podemos aplicar o Teorema A.3.2 (Apêndice A), o que nos garante $\mathbb{K}$ ser fracamente compacto em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$, provando a Proposição. ■

Definição 1.1.1. Uma solução fraca para o auto-problema (1.2) é um par (u, μ) em $W^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\int_{\Omega} [|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + c(x)|u|^{p-2} uv] dx = \mu \int_{\partial\Omega} |u|^{p-2} uv d\sigma, \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \quad (1.9)$$

Se o par $(u, \mu) \in W^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$ for uma solução fraca para o auto-problema (1.2) e, além disso, $u \neq 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, diremos que μ é um autovalor de Steklov do problema (1.2), sendo u uma autofunção de Steklov associada ao autovalor μ .

Utilizaremos técnicas variacionais, sobretudo o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema A.6.1, Apêndice A), para maximizar β sobre $\mathbb{K}$. Com este intuito, definimos

$$\alpha_1 = \sup\{\beta(u) : u \in \mathbb{K}\}. \quad (1.10)$$

Vamos mostrar que o maximizador u_1 do problema (1.10) é uma autofunção do problema (1.9) de Steklov, correspondente ao autovalor μ_1 e que $\mu_1 = \alpha_1^{-1}$. Para tal, precisamos da seguinte proposição técnica.

Proposição 1.1.5. *Existe $u_1 \in \mathbb{K}$, tal que $\alpha_1 = \beta(u_1)$ e $\|u_1\|_c = 1$.*

Demonstração. Da Proposição 1.1.4, vem que $\mathbb{K}$ é fracamente compacto em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Ainda, pela Proposição 1.1.3, β é fracamente sequencialmente contínuo sobre $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Deste modo, concluímos que existe $u_1 \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha_1 = \beta(u_1)$. Provemos que

$\|u_1\|_c = 1$. Como $u_1 \in \mathbb{K}$, $\|u_1\|_c^p = \Upsilon_c(u_1) \leq 1$. Suponhamos que $\|u_1\|_c < 1$. Então existe $r > 1$, tal que $ru_1 \in \mathbb{K}$, e assim, $\beta(ru_1) = \|ru_1\|_{p,\partial}^p = r^p \|u_1\|_{p,\partial}^p = r^p \beta(u_1) > \beta(u_1)$, o que é um absurdo, pois

$$\alpha_1 = \sup_{u \in \mathbb{K}} \beta(u) = \beta(u_1).$$

Portanto, temos $\|u_1\|_c = 1$. ■

Teorema 1.1.6. *Valem as seguintes propriedades para α_1 :*

- (i) $\alpha_1 > 0$;
- (ii) α_1^{-1} é um autovalor de Steklov do problema (1.2), com autofunção de Steklov, u_1 ;
- (iii) α_1^{-1} é o menor autovalor positivo de Steklov associado ao problema (1.2).

Demonstração. Seja $\mathbb{T} = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \Upsilon_c(u) = 1\} \subset \mathbb{K}$. Como $\alpha_1 = \beta(u_1)$ e $\|u_1\|_c = 1$, vem que u_1 é um extremo de β restrito a $\mathbb{T} = \Upsilon_c^{-1}(\{\Upsilon_c(u_1)\})$. Pela Proposição 1.1.3, os funcionais Υ_c e β pertencem à classe $C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$. Logo, podemos aplicar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema A.6.1, Apêndice A), isto é, uma das duas condições abaixo deve ocorrer:

(A) $\Upsilon'_c(u_1)(v) = 0, \forall v \in W^{1,p}(\Omega)$;

(B) Existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\beta'(u_1)(v) = \bar{\lambda} \Upsilon'_c(u_1)(v), \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \quad (1.11)$$

A condição (A) não ocorre, pois $\Upsilon'_c(u_1)(u_1) = p\|u_1\|_c^p = p \neq 0$. Portanto, a condição (B) ocorre. Substituindo as expressões de β' e Υ'_c (dadas em (1.8) e (1.6), respectivamente), em (1.11), obtemos

$$\int_{\partial\Omega} |u_1|^{p-2} u_1 v d\sigma = \bar{\lambda} \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla v + c(x) |u_1|^{p-2} u_1 v] dx, \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \quad (1.12)$$

Se tomarmos $v = u_1$ em (1.12), vem $\alpha_1 = \|u_1\|_{p,\partial}^p = \bar{\lambda} \|u_1\|_c^p = \bar{\lambda}$.

Uma vez feito essas considerações iniciais, vamos à prova dos itens do Teorema:

(i) $\bar{\lambda} = \alpha_1 > 0$. De fato, visto que $\alpha_1 = \|u_1\|_{p,\partial}^p$, $\alpha_1 \geq 0$. Suponhamos $\alpha_1 = 0$. Então, da definição de α_1 , vemos que $\beta(u) = 0$, para qualquer $u \in \mathbb{K}$. Agora, o funcional $\varphi_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $\varphi_1(x) = 1, \forall x \in \Omega$ é um elemento de $W^{1,p}(\Omega)$. Além do mais,

temos $\beta(\varphi_1) = |\partial\Omega|_\sigma > 0$. Assim, tem sentido definirmos $\phi_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|_c}$, de onde segue que

$\phi_1 \in \mathbb{K}$ e $\beta(\phi_1) = \frac{\beta(\varphi_1)}{\|\varphi_1\|_c^p} > 0$, o que é um absurdo, pois contraria nossa suposição.

(ii) Devido à igualdade (1.12), e à validade de (i), concluímos que o par (u_1, α_1^{-1}) , pertencente ao conjunto $(W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, é uma solução fraca para o auto-problema (1.2).

(iii) Suponhamos que $\mu_1 = \frac{1}{\alpha_1}$ não seja o menor autovalor positivo de Steklov do problema (1.2). Então existe um par $(\tilde{u}, \tilde{\lambda}) \in (W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, com $0 < \tilde{\lambda} < \mu_1$, que satisfaz (1.9). Por conseguinte, ao considerarmos $v = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_c^p}$ em (1.9), vem $\tilde{\lambda}\beta\left(\frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_c}\right) = 1$. Daí, $\beta\left(\frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_c}\right) = \frac{1}{\tilde{\lambda}} > \frac{1}{\mu_1} = \alpha_1$, o que gera um absurdo, pois $\frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_c} \in \mathbb{K}$. Com isso, finalizamos a prova do Teorema. ■

A seguir, daremos uma consequência imediata da caracterização de μ_1 .

Corolário 1.1.1. *Vale a seguinte desigualdade:*

$$\|u\|_c^p \geq \mu_1 \|u\|_{p,\partial}^p, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad (1.13)$$

em que $\mu_1 = \alpha_1^{-1}$.

Demonstração. Se $u = 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, então é imediato. Se $u \neq 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, então, ao considerarmos $v = \frac{u}{\|u\|_c}$, temos $\|v\|_c = 1$. Logo, $v \in \mathbb{K}$, e assim,

$$\|v\|_{p,\partial}^p = \frac{\|u\|_{p,\partial}^p}{\|u\|_c^p} = \beta(v) \leq \alpha_1.$$

De onde segue que $\|u\|_c^p \geq \frac{1}{\alpha_1} \|u\|_{p,\partial}^p = \mu_1 \|u\|_{p,\partial}^p$, como queríamos. ■

1.1.2 Construção do primeiro autovalor de Neumann associado ao problema (1.3)

Aqui, mostraremos a existência de um primeiro autovalor positivo de Neumann para o auto-problema (1.3), bem como, algumas de suas propriedades.

Definição 1.1.2. Uma solução fraca para o auto-problema (1.3) é um par (u, λ) em $W^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\int_{\Omega} [|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + c(x)|u|^{p-2} uv] dx = \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx, \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \quad (1.14)$$

Se o par $(u, \lambda) \in W^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$ for uma solução fraca para o auto-problema (1.3) e, além disso, $u \neq 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, diremos que λ é um autovalor de Neumann associado ao problema (1.3), sendo u uma autofunção de Neumann associada ao autovalor λ .

Utilizaremos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema A.6.1, Apêndice A) para encontrarmos uma solução fraca para o auto-problema (1.3). Com este intuito, consideremos $\rho_1 = \inf\{\Upsilon_c(u) : u \in \mathbb{L}\}$, onde $\mathbb{L} = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \tilde{\delta}(u) = 0\}$. Agora, vamos a um resultado técnico e, posteriormente, ao principal.

Proposição 1.1.7. *Existe $\bar{u} \in \mathbb{L}$, tal que $\rho_1 = \Upsilon_c(\bar{u})$ e $\|\bar{u}\|_p = 1$.*

Demonstração. Como $\rho_1 = \inf_{u \in \mathbb{L}} \Upsilon_c(u)$, conseguimos uma sequência (u_j) em $\mathbb{L}$, tal que

$$\Upsilon_c(u_j) \rightarrow \rho_1 \quad \text{em } (\mathbb{R}, |\cdot|) \quad \text{e} \quad \Upsilon_c(u_j) \leq \rho_1 + 1. \quad (1.15)$$

Ainda, visto que $\|u_j\|_c^p = \Upsilon_c(u_j)$, por (1.15), segue que a sequência (u_j) é limitada em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Como as normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ são equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, então a sequência (u_j) é também limitada em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$. Agora, devido à $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ ser reflexivo, existem $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ e uma subsequência (u_{j_k}) de (u_j) (Teorema A.3.5, Apêndice A), tais que

$$u_{j_k} \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{em } (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p}). \quad (1.16)$$

Por isso e pela imersão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ ser compacta (Teorema A.3.3, Apêndice A), $u_{j_k} \rightarrow \bar{u}$ em $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$. Assim, como $|\|u_{j_k}\|_p - \|\bar{u}\|_p| \leq \|u_{j_k} - \bar{u}\|_p$, temos $\|u_{j_k}\|_p \rightarrow \|\bar{u}\|_p$, quando $k \rightarrow +\infty$. Com isso e pelo fato de $u_{j_k} \in \mathbb{L}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, concluímos que $\|\bar{u}\|_p = 1$, ou seja, $\bar{u} \in \mathbb{L}$. Mostremos que $\Upsilon_c(\bar{u}) = \rho_1$. Para isso, basta provarmos que $\Upsilon_c(\bar{u}) \leq \rho_1$, pois a desigualdade contrária segue do fato de que $\bar{u} \in \mathbb{L}$. Ora, por (1.15), (1.16) e pela desigualdade (A.2) da Observação A.1.1 (Apêndice A), segue que $\Upsilon_c(\bar{u}) = \|\bar{u}\|_c^p \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_{j_k}\|_c^p = \rho_1$. Por conseguinte, $\Upsilon_c(\bar{u}) = \rho_1$, como queríamos mostrar. ■

Teorema 1.1.8. *Valem as seguintes propriedades para ρ_1 :*

(i) $\rho_1 > 0$;

(ii) ρ_1 é um autovalor de Neumann associado ao problema (1.3), tendo como autofunção de Neumann associada, $\bar{u}$;

(iii) ρ_1 é o menor autovalor positivo de Neumann associado ao problema (1.3).

Demonstração. Em razão de $\mathbb{L} = \tilde{\delta}^{-1}(\{\tilde{\delta}(\bar{u})\})$, de $\rho_1 = \inf_{u \in \mathbb{L}} \Upsilon_c(u) = \Upsilon_c(\bar{u})$ e de $\Upsilon_c, \tilde{\delta}$ pertecerem à classe $C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ (Proposição 1.1.3), as hipóteses do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema A.6.1, Apêndice A) são verificadas. Logo, uma das duas condições, a seguir, deve ocorrer:

(A) $\tilde{\delta}'(\bar{u})(v) = 0, \forall v \in W^{1,p}(\Omega)$.

(B) Existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Upsilon'_c(\bar{u})(v) = \bar{\lambda} \tilde{\delta}'(\bar{u})(v), \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \quad (1.17)$$

A condição (A) não é válida, pois $\tilde{\delta}'(\bar{u})(\bar{u}) = p \|\bar{u}\|_p^p = p \neq 0$. Portanto, (B) ocorre. Substituindo as expressões de Υ'_c e $\tilde{\delta}'$ (dadas em (1.6) e (1.7), respectivamente) em (1.17), temos

$$\int_{\Omega} [|\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u} \nabla v + c(x) |\bar{u}|^{p-2} \bar{u} v] dx = \bar{\lambda} \int_{\Omega} |\bar{u}|^{p-2} \bar{u} v dx, \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \quad (1.18)$$

Uma vez feito essas considerações iniciais, vamos à prova dos itens do Teorema:

(i) Tomando $v = \bar{u}$ em (1.18), obtemos $\rho_1 = \Upsilon_c(\bar{u}) = \|\bar{u}\|_c^p = \bar{\lambda} \|\bar{u}\|_p^p = \bar{\lambda}$, pois $\bar{u} \in \mathbb{L}$. Portanto, ver que $\rho_1 > 0$ é imediato, pois $\rho_1 = \Upsilon_c(\bar{u}) = \|\bar{u}\|_c^p$ e $\|\bar{u}\|_{1,p} = 1$.

(ii) Devido a igualdade (1.18), temos, na verdade, (1.14), com $\bar{u}$ em lugar de u e ρ_1 em lugar de λ . Deste modo, o par $(\bar{u}, \rho_1)$ é uma solução fraca para o auto-problema (1.3). Além disso, visto que $\|\bar{u}\|_{1,p} = 1$, temos $\bar{u} \neq 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, provando o item.

(iii) Suponhamos que ρ_1 não seja o menor autovalor positivo de Neumann para o auto-problema (1.3). Então existem $\tilde{u} \in W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, e $0 < \tilde{\lambda} < \rho_1$ que satisfazem (1.14). Entretanto, ao considerarmos $v = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_p^p}$ em (1.14), obtemos $\tilde{\lambda} = \Upsilon_c\left(\frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_p}\right) \geq \inf_{u \in \mathbb{L}} \Upsilon_c(u) = \rho_1$, o que é um absurdo, pois supomos $\tilde{\lambda} < \rho_1$. Finalizando o item e o Teorema. ■

Denotaremos por $\lambda_1 = \rho_1$ um menor autovalor positivo de Neumann associado ao auto-problema (1.3). Agora, vamos a uma consequência imediata da caracterização de λ_1 .

Corolário 1.1.2. *Vale a seguinte desigualdade:*

$$\|u\|_c^p \geq \lambda_1 \|u\|_p^p, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega). \quad (1.19)$$

Demonstração. Caso $u = 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, a igualdade em (1.19) é verificada. Se $u \neq 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, então, ao considerarmos $v = \frac{u}{\|u\|_p}$, temos $\|v\|_p = 1$. Logo, $v \in \mathbb{L}$ e assim,

$$\frac{\|u\|_c^p}{\|u\|_p^p} = \Upsilon_c(v) \geq \rho_1.$$

Seguindo, portanto, (1.19), como queríamos. ■

1.2 Equações elípticas não lineares envolvendo o operador p -Laplaciano

O resultado desta seção estende a pesquisa de Mavinga e Nkashama [30] para o caso p -Laplaciano. Apresentaremos resultados de existência para o seguinte problema do tipo Steklov-Neumann para uma classe de equações elípticas quasilineares

$$\begin{cases} -\Delta_p u + c(x)|u|^{p-2}u = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g(x, u) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.20)$$

onde $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ é o operador p -Laplaciano, $p \in (1, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, para $N \geq 2$, é um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^{0,1}$, e $\frac{\partial}{\partial \eta} \doteq \eta \cdot \nabla$ é a derivada normal exterior unitária sobre $\partial\Omega$. Serão assumidas as condições (P1), (P2), (P3) e (P4) para as funções $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $f, g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Observação 1.2.1. Notamos que ao validarmos as hipóteses (P1), (P2), (P3) e (P4), os resultados da seção anterior continuarão válidos, ou seja, existem autovalores μ_1 para o auto-problema (1.2) e λ_1 para o auto-problema (1.3). Nesta seção, obteremos resultados de existência de solução fraca para o problema (1.20), quando relacionarmos a não linearidade de fronteira g , com μ_1 , e a não linearidade de reação f , com λ_1 .

Definição 1.2.1. Dizemos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é solução fraca para o problema (1.20) se

$$\int_{\Omega} [|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + c(x)|u|^{p-2} uv] dx = \int_{\Omega} f(x, u) v dx + \int_{\partial\Omega} g(x, u) v d\sigma, \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \quad (1.21)$$

A seguir, enunciaremos o nosso principal resultado, o qual garante a existência de uma solução fraca para o problema (1.20).

Teorema 1.2.1. Além de (P1), (P2), (P3) e (P4), suponha que as funções $F, G : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $F(x, u) = \int_0^u f(x, s)ds$ e $G(x, u) = \int_0^u g(x, s)ds$, satisfaçam a seguinte condição:

(P5) Existem constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ de tal modo que

$$\limsup_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{pG(x, u)}{|u|^p} \leq \mu < \mu_1 \quad e \quad \limsup_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{pF(x, u)}{|u|^p} \leq \lambda < \lambda_1,$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$, com $\lambda_1\mu + \mu_1\lambda < \mu_1\lambda_1$.

Então, o problema (1.20) tem pelo menos uma solução fraca $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

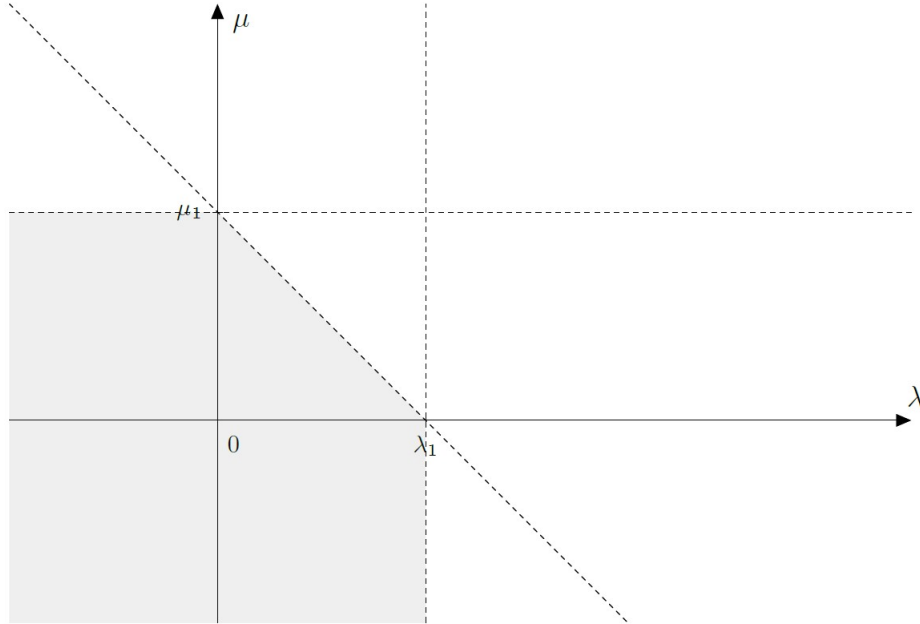


Figura 1.1: Mostra o plano cartesiano $\lambda\mu$ da região hachurada representada por $\lambda_1\mu + \mu_1\lambda < \mu_1\lambda_1$, $\mu < \mu_1$, e $\lambda < \lambda_1$.

A partir de agora, vamos apresentar alguns resultados auxiliares que nos darão base à demonstração do principal Teorema.

1.2.1 Resultados preliminares

Proposição 1.2.2. Seja $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e suponhamos que existem constantes $a, b \geq 1$, $a_1, a_2 \geq 0$, tais que, para quaisquer $x \in \overline{\Omega}$, $u \in \mathbb{R}$,

$$|g(x, u)| \leq a_1 + a_2|u|^{\frac{a}{b}}. \quad (1.22)$$

Então, o operador $N_g : L^a(\partial\Omega) \longrightarrow L^b(\partial\Omega)$, definido por $N_g(u) = g(x, u)$, é contínuo.

Demonstração. Primeiro, provemos que o operador N_g está bem definido. Se $u \in L^a(\partial\Omega)$, então u é σ -mensurável. Além disso, como $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, segue que $g(x, u(x))$ também é σ -mensurável. Já, pelo Teorema A.2.1 (Apêndice A), pelo fato de $b \geq 1$, $a_1, a_2 \geq 0$ e pela desigualdade (1.22), temos

$$|g(x, u)|^b \leq (a_1 + a_2|u|^{\frac{a}{b}})^b \leq 2^{b-1}(a_1^b + a_2^b|u|^a). \quad (1.23)$$

Como $u \in L^a(\partial\Omega)$ e $|\partial\Omega|_\sigma < \infty$, segue da desigualdade (1.23) que $g(x, u) \in L^b(\partial\Omega)$. Logo, N_g está bem definido. Provemos que o operador N_g é contínuo. Sejam (u_n) uma sequência em $L^a(\partial\Omega)$ e $u \in L^a(\partial\Omega)$, tais que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } (L^a(\partial\Omega), \|\cdot\|_{a,\partial}). \quad (1.24)$$

Assim, como $|\partial\Omega|_\sigma < \infty$ e em razão do Teorema A.4.2 (Apêndice A) existem subsequência (u_{n_k}) da sequência (u_n) e $h \in L^a(\partial\Omega)$, tais que

$$u_{n_k}(x) \rightarrow u(x) \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|) \text{ e } |u_{n_k}| \leq h(x), \text{ q.t.p. em } x \in \partial\Omega. \quad (1.25)$$

Mas também, por hipótese, $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Portanto,

$$g(x, u_{n_k}(x)) \rightarrow g(x, u(x)) \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|). \quad (1.26)$$

Agora, devido as desigualdades dadas em (1.22) e (1.25),

$$|g(x, u_{n_k}(x))| \leq a_1 + a_2|u_{n_k}|^{\frac{a}{b}} \leq a_1 + a_2[h(x)]^{\frac{a}{b}} \doteq M(x) \text{ q.t.p. em } x \in \partial\Omega.$$

Com isso, ao utilizarmos o Teorema A.2.1 (Apêndice A) e o fato de $h \in L^a(\partial\Omega)$, podemos mostrar que $M \in L^b(\partial\Omega)$. Por isso e por (1.26), concluímos, ao aplicarmos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.7.3, Apêndice A), que $g(x, u_{n_k}) \rightarrow g(x, u)$ em $(L^b(\partial\Omega), \|\cdot\|_{b,\partial})$, ou seja, $N_g(u_{n_k}) \rightarrow N_g(u)$ em $(L^b(\partial\Omega), \|\cdot\|_{b,\partial})$. Para finalizarmos, mostremos que $N_g(u_n) \rightarrow N_g(u)$ em $(L^b(\partial\Omega), \|\cdot\|_{b,\partial})$. Suponhamos que isso não ocorra. Então, existem $\epsilon > 0$ e uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) , tais que

$$\|N_g(u_{n_k}) - N_g(u)\|_{b,\partial} \geq \epsilon, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.27)$$

No entanto, por (1.24), $u_{n_k} \rightarrow u$ em $(L^a(\partial\Omega), \|\cdot\|_{a,\partial})$. Deste modo, ao repetirmos o argumento inicial para (u_{n_k}) ao invés de (u_n) , vemos que (u_{n_k}) admite uma subsequência $(u_{n_{k_l}})$, tal que $N_g(u_{n_{k_l}}) \rightarrow N_g(u)$ em $(L^b(\partial\Omega), \|\cdot\|_{b,\partial})$, o que gera uma contradição com (1.27). Logo, $N_g(u_n) \rightarrow N_g(u)$ em $(L^b(\partial\Omega), \|\cdot\|_{b,\partial})$, isto é, N_g é contínuo. ■

A seguinte proposição é semelhante à anterior.

Proposição 1.2.3. *Seja $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e suponhamos que existem constantes $d, e \geq 1$, $b_1, b_2 \geq 0$, tais que, para quaisquer $x \in \overline{\Omega}$, $u \in \mathbb{R}$,*

$$|f(x, u)| \leq b_1 + b_2|u|^{\frac{d}{e}}. \quad (1.28)$$

Então, o operador $N^f : L^d(\Omega) \longrightarrow L^e(\Omega)$, definido por $N^f(u) = f(x, u)$, é contínuo.

Demonstração. Primeiro, provemos que o operador N^f está bem definido. Sejam $\xi \in L^d(\Omega)$ e $x \in \overline{\Omega}$. Então,

$$\int_{\Omega} |f(x, \xi(x))|^e dx \leq \int_{\Omega} (b_1 + b_2|\xi(x)|^{\frac{d}{e}})^e dx.$$

Se $e \geq 1$, temos pelo Teorema A.2.1 (Apêndice A) que

$$|f(x, \xi(x))|^e \leq (b_1 + b_2|\xi(x)|^{\frac{d}{e}})^e \leq 2^{e-1}(b_1^e + b_2^e|\xi(x)|^d).$$

Tomando $b_3 = \max\{b_1, b_2\}$ e $c = 2^{e-1}b_3^e$, obtemos

$$|f(x, \xi(x))|^e \leq 2^{e-1}b_3^e(1 + |\xi(x)|^d) = c(1 + |\xi(x)|^d), \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \quad (1.29)$$

Daí, como $|\Omega| < \infty$, temos

$$\int_{\Omega} |f(x, \xi(x))|^e dx \leq c \int_{\Omega} (1 + |\xi(x)|^d) dx < +\infty.$$

Logo, $f(\cdot, \xi(\cdot)) \in L^e(\Omega)$, e assim, a aplicação N^f está bem definida. Provemos a continuidade do operador N^f .

Afirmção 1. Dados $z, \varphi \in L^d(\Omega)$ e $x \in \overline{\Omega}$, considere $F(z) = N^f(z + \varphi) - N^f(\varphi)$, com φ fixo. Então, N^f é contínua em φ se, e somente se, F é contínua em $z \doteq 0$.

De fato, F é contínua em $z \doteq 0$ se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\|h - 0\|_{L^d(\Omega)} < \delta \Rightarrow \|F(h) - F(0)\|_{L^e(\Omega)} < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\|h - 0\|_{L^d(\Omega)} < \delta \Rightarrow \|N^f(h + \varphi) - N^f(\varphi)\|_{L^e(\Omega)} < \varepsilon.$$

Escrevendo $\psi(x) = h(x) + \varphi(x)$, temos

$$\|\psi - \varphi\| < \delta \Rightarrow \|N^f(\psi) - N^f(\varphi)\| < \varepsilon,$$

que é a definição da continuidade de N^f em φ . Portanto, é suficiente mostrar que N^f é contínua em $\varphi \doteq 0$ e podemos supor, sem perda de generalidade, que $f(x, 0) = 0$ em Ω . Seja $\varepsilon > 0$. Uma vez que supomos $N^f(0) = f(\cdot, 0) = 0$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$, tal que

$$\|u\|_{L^d(\Omega)} \leq \delta \Rightarrow \|N^f(u)\|_{L^e(\Omega)} < \varepsilon.$$

Como $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, dado $\hat{\varepsilon}$, para cada $x \in \overline{\Omega}$, existe $\delta_x > 0$, tal que, usando a equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$,

$$\|z - x\| + \|u\| \leq \delta_x \Rightarrow |f(z, u) - f(x, 0)| < \hat{\varepsilon} \Rightarrow |f(z, u)| < \hat{\varepsilon}.$$

As bolas $B(x, \frac{\delta_x}{2})$ formam uma cobertura para $\overline{\Omega}$ que é compacto, logo esta admite uma subcobertura finita, ou seja, existem $x_1, \dots, x_k \in \overline{\Omega}$, tais que

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \frac{\delta_i}{2}),$$

com $\delta_i = \delta_{x_i}$. Seja $\delta_1 = \min_{1 \leq i \leq k} \delta_i$. Sejam $z \in \overline{\Omega}$ e $u \in \mathbb{R}$ com $|u| \leq \frac{\delta_1}{2}$. Como $z \in \overline{\Omega}$, existe i , tal que $z \in B(x_i, \frac{\delta_i}{2})$ e ainda $|u| \leq \frac{\delta_1}{2} \leq \frac{\delta_i}{2}$, então

$$\|z - x_i\| + \|u\| \leq \frac{\delta_i}{2} + \frac{\delta_i}{2} = \delta_i \Rightarrow \|f(z, u) - f(x_i, 0)\| < \hat{\varepsilon}.$$

Logo, dado qualquer $\hat{\varepsilon} > 0$, existe $\theta > 0$, tal que

$$|u| \leq \theta \Rightarrow |f(x, u)| \leq \hat{\varepsilon}, \forall x \in \overline{\Omega}. \quad (1.30)$$

Agora, para $\hat{\varepsilon} > 0$ e $\delta > 0$ a serem escolhidos, seja $u \in L^d(\Omega)$ com $\|u\|_{L^d(\Omega)} \leq \delta$ e considere o conjunto

$$\Omega_1 \doteq \{x \in \overline{\Omega} : |u(x)| \leq \theta\}.$$

Logo, $u(x) \in \mathbb{R}$ e por (1.29), temos $|f(x, u(x))| < \hat{\varepsilon}$, o que implica

$$\int_{\Omega_1} |f(x, u(x))|^e dx < \int_{\Omega_1} \hat{\varepsilon}^e dx \leq \hat{\varepsilon}^e |\Omega_1| \leq \hat{\varepsilon}^e |\Omega|, \quad (1.31)$$

pois $\Omega_1 \subset \overline{\Omega}$ e $|\Omega_1| \leq |\overline{\Omega}| = |\Omega|$. Escolhendo $\hat{\varepsilon}$ tal que $\hat{\varepsilon}^e |\Omega| \leq \frac{\varepsilon^e}{2}$. Então, por (1.31)

$$\int_{\Omega_1} |f(x, u(x))|^e dx \leq \frac{\varepsilon^e}{2}. \quad (1.32)$$

Seja $\Omega_2 = \overline{\Omega} \setminus \Omega_1$. Então, por (1.29), temos que

$$\int_{\Omega_2} |f(x, u(x))|^e dx \leq c \int_{\Omega_2} (1 + |u(x)|^d) dx \leq c(|\Omega_2| + \delta^d), \quad (1.33)$$

pois $\|u\|_{L^d(\Omega)} \leq \delta$. Além disso, $\Omega_2 = \overline{\Omega} \setminus \Omega_1 \doteq \{x \in \overline{\Omega} : |u(x)| > \theta\}$, daí

$$\int_{\Omega_2} |u(x)|^d dx \geq \int_{\Omega_2} \theta^d = \theta^d |\Omega_2|.$$

Logo, $\delta^d \geq \int_{\Omega_2} |u(x)|^d dx \geq \theta^d |\Omega_2|$, o que implica $|\Omega_2| \leq (\delta\theta^{-1})^d$. Assim, substituindo em (1.33), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} |f(x, u(x))|^e dx &\leq c(|\Omega_2| + \delta^d) \\ &\leq c[(\delta\theta^{-1})^d + \delta^d] \\ &= c((\theta^{-1})^d + 1)\delta^d. \end{aligned}$$

Escolhendo δ tal que $c((\theta^{-1})^d + 1)\delta^d \leq \frac{\varepsilon^e}{2}$, obtemos

$$\int_{\Omega_2} |f(x, u(x))|^e dx \leq \frac{\varepsilon^e}{2}. \quad (1.34)$$

Logo, por (1.32) e (1.34), temos

$$\int_{\Omega} |f(x, u(x))|^e dx \leq \frac{\varepsilon^e}{2} + \frac{\varepsilon^e}{2} = \varepsilon^e \Rightarrow \|f(\cdot, u)\|_{L^e(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^d(\Omega)} \leq \delta \Rightarrow \|f(\cdot, u)\|_{L^e(\Omega)} \leq \varepsilon,$$

isto é, N^f é contínuo, como queríamos mostrar. ■

Observação 1.2.2. Se validarmos as condições (P2), (P3) e (P4), segue, das Proposições (1.2.2) e (1.2.3), que $N_g : L^{s+1}(\partial\Omega) \longrightarrow L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega)$ e $N^f : L^{s+1}(\Omega) \longrightarrow L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega)$, são operadores contínuos.

Observação 1.2.3. Agora, se supormos válidas as condições (P1), (P2), (P3) e (P4), então, definimos o funcional energia $I_p : (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c) \longrightarrow \mathbb{R}$, associado à equação (1.20), por

$$I_p(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} [|\nabla u|^p + c(x)|u|^p] dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx - \int_{\partial\Omega} G(x, u) d\sigma, \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \quad (1.35)$$

onde $G(x, u) = \int_0^u g(x, s) ds$ e $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$.

Agora, é natural verificarmos se I_p está bem definido, isto é, $I_p(u) \in \mathbb{R}$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$. Com efeito, como $I_p(u) = \frac{1}{p}\|u\|_c^p - \int_{\Omega} F(x, u)dx - \int_{\partial\Omega} G(x, u)d\sigma$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, então a boa definição de I_p seguirá, se mostrarmos que

$$\left| \int_{\partial\Omega} G(x, u)d\sigma \right| < \infty \text{ e } \left| \int_{\Omega} F(x, u)dx \right| < \infty.$$

Provemos que $\left| \int_{\partial\Omega} G(x, u)d\sigma \right| < \infty$. De fato, note que existe uma constante $\tilde{K}_1 > 0$, tal que

$$|G(x, u)| = \left| \int_0^u g(x, s)ds \right| \leq \int_0^u [a_1 + a_2|\xi|^s]d\xi \leq \tilde{K}_1(|u| + |u|^{s+1}).$$

Consequentemente,

$$\int_{\partial\Omega} |G(x, u)|d\sigma \leq \tilde{K}_1 \int_{\partial\Omega} [|u| + |u|^{s+1}]d\sigma = \tilde{K}_1[\|u\|_{1,\partial} + \|u\|_{s+1,\partial}^{s+1}].$$

Ainda, pela condição (P3), $1 < s+1 < p_*^1(N)$. Assim, devido ao Teorema A.4.1 (Apêndice A), os operadores traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^1(\partial\Omega)$ e de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^{s+1}(\partial\Omega)$ são lineares e contínuos. Por conseguinte, existe uma constante $\tilde{K}_2 > 0$, tal que

$$\int_{\partial\Omega} |G(x, u)|d\sigma \leq \tilde{K}_2[\|u\|_{1,p} + \|u\|_{1,p}^{s+1}]. \quad (1.36)$$

Finalmente, como $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\|u\|_c < \infty$, e notando que $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ são normas equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, temos $\|u\|_{1,p} < \infty$. Por isso e pela desigualdade (1.36), concluímos que

$$0 \leq \left| \int_{\partial\Omega} G(x, u)d\sigma \right| \leq \int_{\partial\Omega} |G(x, u)|d\sigma < \infty.$$

Demonstrando o que queríamos. Para provar que $\left| \int_{\Omega} F(x, u)dx \right| < \infty$, segue-se de maneira análoga como anteriormente. Portanto, I_p está bem definido.

Proposição 1.2.4. *Suponhamos válidas as condições (P1)-(P4). Então $I_p \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$,*

$$I'_p(u)(v) = \int_{\Omega} [|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + c(x)|u|^{p-2} uv]dx - \int_{\Omega} f(x, u)vdx - \int_{\partial\Omega} g(x, u)v d\sigma,$$

para qualquer $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver Proposição A.1.8, Apêndice A. ■

Proposição 1.2.5. *Suponhamos válidas as hipóteses (P1)-(P4), e sejam os funcionais $L_i : (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c) \longrightarrow \mathbb{R}$ (com $i = 2, 3$), definidos por*

$$L_2(u) = \int_{\partial\Omega} G(x, u) d\sigma \quad e \quad L_3(u) = \int_{\Omega} F(x, u) dx.$$

Então, as derivadas L'_2 e L'_3 são operadores compactos.

Demonstração. Vamos mostrar que L'_2 é compacto. Com efeito, seja (u_m) uma sequência limitada em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Com isso e devido à $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ ser um espaço reflexivo, existem $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e uma subsequência (u_{m_k}) de (u_m) , tais que $u_{m_k} \rightharpoonup u$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ (Teorema A.3.5, Apêndice A). Diante disso, da compacidade e linearidade do operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^{s+1}(\partial\Omega)$ e de L_2 ser fracamente sequencialmente contínuo (Observação A.1.2, Apêndice A), temos

$$u_{m_k} \rightarrow u \text{ em } (L^{s+1}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{s+1,\partial}) \text{ e } L_2(u_{m_k}) \rightarrow L_2(u) \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|).$$

Ainda, pela validade das condições (P2) e (P3), segue, da Observação 1.2.2 que $N_g(u_{m_k}) \rightarrow N_g(u)$ em $(L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{(\frac{s+1}{s},\partial)})$. Consequentemente, ao utilizarmos a Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.4, Apêndice A) e a equivalência das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ em $W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \|L'_2(u_{m_k}) - L'_2(u)\|_c^* &= \sup_{\|v\|_c=1} |L'_2(u_{m_k})(v) - L'_2(u)(v)| \\ &\leq \sup_{\|v\|_c=1} \int_{\partial\Omega} |g(x, u_{m_k}) - g(x, u)| |v| d\sigma \\ &\leq \sup_{\|v\|_c=1} \|N_g(u_{m_k}) - N_g(u)\|_{(\frac{s+1}{s},\partial)} \|v\|_{s+1,\partial} \\ &\leq \tilde{K}_2 \sup_{\|v\|_c=1} \|N_g(u_{m_k}) - N_g(u)\|_{(\frac{s+1}{s},\partial)} \|v\|_c \\ &= \tilde{K}_2 \|N_g(u_{m_k}) - N_g(u)\|_{(\frac{s+1}{s},\partial)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow +\infty$, onde $\tilde{K}_2$ é uma constante positiva. Portanto, $L'_2(u_{m_k}) \rightarrow L'_2(u)$ em $(W^{1,p}(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*)$. Daí segue a compacidade do operador L'_2 .

A prova de que o operador L'_3 é compacto segue-se de forma análoga. ■

O próximo resultado nos auxiliará na demonstração da validade da condição de Palais-Smale (PS) para o funcional I_p .

Proposição 1.2.6. *Suponhamos válidas as condições (P1)-(P4). Se (u_m) for uma sequência limitada em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$, tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} I'_p(u_m) = 0$, então (u_m) admite uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja (u_m) uma sequência limitada em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ com $\lim_{m \rightarrow \infty} I'_p(u_m) = 0$. Como $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é um espaço reflexivo (Proposição 1.1.2), então pelo Teorema A.3.5 (Apêndice A) existem subsequência (u_{m_k}) de (u_m) e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tais que

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \text{ em } (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c). \quad (1.37)$$

Agora, pela Proposição 1.2.5, os operadores L'_2 e L'_3 são compactos. Logo, existe subsequência $(u_{m_{k_l}})$ de (u_{m_k}) , que, por simplicidade, denotaremos por (u_{m_k}) , tal que $L'_2(u_{m_k}) \rightarrow L'_2(u)$ e $L'_3(u_{m_k}) \rightarrow L'_3(u)$ em $(W^{1,p}(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*)$. Assim, as sequências $(\|L'_i(u_{m_k})\|_c^*)$, para $i = 2, 3$, são limitadas em $\mathbb{R}$. Note que $I_p = L_1 - L_2 - L_3$ e $L'_1 = I'_p + L'_2 + L'_3$, onde $L_1(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} [|\nabla u|^p + c(x)|u|^p] dx$.

Afirmção 1. $L'_1(u_{m_k})(u_{m_k} - u) \rightarrow 0$ em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

De fato, por hipótese, $\lim_{m \rightarrow \infty} I'_p(u_m) = 0$. Desta forma, ao fazermos $k \rightarrow +\infty$, temos

$$L'_1(u_{m_k}) = I'_p(u_{m_k}) + L'_2(u_{m_k}) + L'_3(u_{m_k}) \rightarrow L'_2(u) + L'_3(u) \quad (1.38)$$

em $(W^{1,p}(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*)$. Se denotarmos $E = L'_2(u) + L'_3(u)$, então, por (1.38) e (1.37),

$$L'_1(u_{m_k}) - E \rightarrow 0 \text{ em } (W^{1,p}(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*) \quad (1.39)$$

e

$$u_{m_k} - u \rightharpoonup 0 \text{ em } (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c). \quad (1.40)$$

Consequentemente,

$$(L'_1(u_{m_k}) - E)(u_{m_k} - u) \rightarrow 0 \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|). \quad (1.41)$$

Finalmente, devido a (1.41) e (1.40), e do fato de $E \in W^{1,p}(\Omega)^*$, obtemos

$$L'_1(u_{m_k})(u_{m_k} - u) = (L'_1(u_{m_k}) - E)(u_{m_k} - u) + E(u_{m_k} - u) \rightarrow 0 \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|).$$

Com isso, finalizamos a prova da Afirmção 1.

Ainda, visto que $L'_1(u)(v) = \int_{\Omega} [|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + c(x)|u|^{p-2} uv] dx$, para u, v em $W^{1,p}(\Omega)$,

$$L'_1(u)(u) = \|u\|_c^p. \quad (1.42)$$

Além disso, devido a Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.4, Apêndice A), ao Teorema A.2.3 (Apêndice A) e notando que $c(x) = c(x)^{\frac{p-1}{p}} c(x)^{\frac{1}{p}}$, para q.t.p. $x \in \Omega$, concluímos que

$$\begin{aligned}
|L'_1(u)(v)| &= \left| \int_{\Omega} [|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + c(x)|u|^{p-2} uv] dx \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| dx + \int_{\Omega} c(x)|u|^{p-1} |v| dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| dx + \int_{\Omega} (c(x)^{\frac{p-1}{p}} |u|^{p-1}) (c(x)^{\frac{1}{p}} |v|) dx \\
&\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} c(x)|u|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega} c(x)|v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega} [|\nabla u|^p + c(x)|u|^p] dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega} [|\nabla v|^p + c(x)|v|^p] dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_c^{p-1} \|v\|_c.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$|L'_1(u)(v)| \leq \|u\|_c^{p-1} \|v\|_c. \quad (1.43)$$

Da Afirmação 1 e de (1.37), temos, ao fazermos $k \rightarrow +\infty$, que

$$P_k \doteq L'_1(u_{m_k})(u_{m_k} - u) - L'_1(u)(u_{m_k} - u) \rightarrow 0. \quad (1.44)$$

Agora, combinando (1.44) à (1.43) e (1.42), e utilizando o Teorema A.2.2 (Apêndice A), obtemos

$$\begin{aligned}
P_k &= L'_1(u_{m_k})(u_{m_k}) - L'_1(u_{m_k})(u) - L'_1(u)(u_{m_k}) + L'_1(u)(u) \\
&= \|u_{m_k}\|_c^p + \|u\|_c^p - L'_1(u_{m_k})(u) - L'_1(u)(u_{m_k}) \\
&\geq \|u_{m_k}\|_c^p + \|u\|_c^p - \|u_{m_k}\|_c^{p-1} \|u\|_c - \|u\|_c^{p-1} \|u_{m_k}\|_c \\
&= (\|u_{m_k}\|_c^{p-1} - \|u\|_c^{p-1})(\|u_{m_k}\|_c - \|u\|_c) \\
&\geq 0.
\end{aligned} \quad (1.45)$$

De (1.44) e (1.45), temos $\|u_{m_k}\|_c \rightarrow \|u\|_c$, quando $k \rightarrow +\infty$. Por isso, por (1.37) e pela Proposição 1.1.1, vemos que as hipóteses do Teorema A.3.1 (Apêndice A) são satisfeitas. Logo, $u_{m_k} \rightarrow u$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Provando esta Proposição. ■

1.2.2 Prova do Teorema 1.2.1

Demonstração. A condição (P5) implica que para todo $\epsilon > 0$, existe $r = r(\epsilon) > 0$ tal que

$$\frac{pG(x, u)}{|u|^p} \leq \mu + \epsilon \quad \text{e} \quad \frac{pF(x, u)}{|u|^p} \leq \lambda + \epsilon \quad (1.46)$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $u \in \mathbb{R}$ com $|u| > r$.

Usando (1.46), (P3) e (P4), vem que dado $\epsilon > 0$ (fixado), existe uma constante M_ϵ , tal que $\forall u \in \mathbb{R}$

$$G(x, u) \leq \frac{1}{p}(\mu + \epsilon)|u|^p + M_\epsilon \quad \text{e} \quad F(x, u) \leq \frac{1}{p}(\lambda + \epsilon)|u|^p + M_\epsilon. \quad (1.47)$$

De fato, se $|u| > r$, por (1.46) temos imediatamente que

$$G(x, u) \leq \frac{1}{p}(\mu + \epsilon)|u|^p \quad \text{e} \quad F(x, u) \leq \frac{1}{p}(\lambda + \epsilon)|u|^p.$$

Se $|u| \leq r$, então

$$|g(x, u)| \leq a_1 + a_2|u|^s \leq a_1 + a_2r^s \doteq \eta_\epsilon \text{ (constante que depende de } \epsilon \text{)}.$$

Logo,

$$|G(x, u)| = \left| \int_0^u g(x, t) dt \right| \leq \int_0^u |g(x, t)| dt \leq \eta_\epsilon \int_0^u dt = \eta_\epsilon |u| \leq \eta_\epsilon r = M_\epsilon,$$

isto é,

$$|G(x, u)| \leq M_\epsilon, \quad \forall u \in [-r, r].$$

Portanto,

$$G(x, u) \leq \frac{1}{p}(\mu + \epsilon)|u|^p + M_\epsilon, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, mostra-se que

$$F(x, u) \leq \frac{1}{p}(\lambda + \epsilon)|u|^p + M_\epsilon, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Para mostrar que o problema (1.20) tem pelo menos uma solução fraca, conforme a Proposição A.5.1 (Apêndice A), é suficiente mostrar que o funcional é limitado inferiormente e que satisfaz à condição (PS).

Agora, usando (1.47), provaremos as seguintes afirmações:

Afirmção 1. O funcional I_p é coercivo sobre $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$, isto é,

$$I_p(u) \rightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad \|u\|_c \rightarrow +\infty. \quad (1.48)$$

Assuma que $\|u\|_c \rightarrow +\infty$. Então, utilizando a continuidade do operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^p(\partial\Omega)$ (Teorema A.4.1, Apêndice A) e o fato das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ serem equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, concluímos que, ou $\|u\|_{p,\partial} \rightarrow +\infty$ ou $\|u\|_{p,\partial} \leq \tilde{K}_1$, onde $\tilde{K}_1$ é uma constante positiva. Vamos provar que, em ambos os casos, $I_p(u) \rightarrow +\infty$.

Caso 1: Existe uma constante $\tilde{K}_1 > 0$ tal que $\|u\|_{p,\partial} \leq \tilde{K}_1$. Como

$$\begin{aligned} I_p(u) &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} [|\nabla u|^p + c(x)|u|^p] dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx - \int_{\partial\Omega} G(x, u) d\sigma \\ &= \frac{1}{p} \|u\|_c^p - \int_{\Omega} F(x, u) dx - \int_{\partial\Omega} G(x, u) d\sigma, \end{aligned}$$

então por (1.47) temos

$$\begin{aligned} I_p(u) &\geq \frac{1}{p} \|u\|_c^p - \frac{1}{p} (\lambda + \epsilon) \int_{\Omega} |u|^p - \int_{\Omega} M_{\epsilon} - \frac{1}{p} (\mu + \epsilon) \int_{\partial\Omega} |u|^p - \int_{\partial\Omega} M_{\epsilon} \\ &\geq \frac{1}{p} \|u\|_c^p - \frac{1}{p} (\lambda + \epsilon) \|u\|_p^p - \frac{1}{p} (\mu + \epsilon) \|u\|_{p,\partial}^p - M_{\epsilon} (|\Omega| + |\partial\Omega|_{\sigma}). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Se $\lambda < 0$, então, de (1.49), $I_p(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\|_c \rightarrow +\infty$ para ϵ suficientemente pequeno. Se $\lambda \geq 0$, pelas desigualdades (1.19) e (1.49), temos

$$\begin{aligned} I_p(u) &\geq \frac{1}{p} \|u\|_c^p - \frac{1}{p} (\lambda + \epsilon) \frac{1}{\lambda_1} \|u\|_c^p - \frac{1}{p} (\mu + \epsilon) \|u\|_{p,\partial}^p - M_{\epsilon} (|\Omega| + |\partial\Omega|_{\sigma}) \\ &\geq \frac{1}{p} \|u\|_c^p - \frac{1}{\lambda_1 p} \lambda \|u\|_c^p - \frac{1}{\lambda_1 p} \epsilon \|u\|_c^p - \frac{1}{p} (\mu + \epsilon) \|u\|_{p,\partial}^p - M_{\epsilon} (|\Omega| + |\partial\Omega|_{\sigma}) \\ &\geq \frac{1}{p} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)}_A \|u\|_c^p - \frac{1}{p} (\mu + \epsilon) \|u\|_{p,\partial}^p - M_{\epsilon} (|\Omega| + |\partial\Omega|_{\sigma}). \end{aligned}$$

Note que $A > 0$, pois $\lambda < \lambda_1$, assim $\frac{\lambda}{\lambda_1} < 1$, portanto, para ϵ suficientemente pequeno, temos que $\frac{\lambda}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} < 1$. Logo, $I_p(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\|_c \rightarrow +\infty$.

Caso 2: Agora suponha que $\|u\|_{p,\partial} \rightarrow +\infty$.

Temos que considerar quatro situações.

- $\lambda < 0$ e $\mu < 0$.

De (1.49), para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$I_p(u) \geq \frac{1}{p} \|u\|_c^p - M_{\epsilon} (|\Omega| + |\partial\Omega|_{\sigma}).$$

Portanto, se $\|u\|_c \rightarrow +\infty$, então $I_p(u) \rightarrow +\infty$.

- $\lambda < 0$ e $\mu \geq 0$.

De (1.13) e (1.49), para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned}
I_p(u) &\geq \frac{1}{p} \|u\|_c^p - \frac{1}{p} (\mu + \epsilon) \|u\|_c^p \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{p} (\lambda + \epsilon) \|u\|_p^p - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma) \\
&\geq \frac{1}{p} \|u\|_c^p - \frac{1}{\mu_1 p} \mu \|u\|_c^p - \frac{1}{\mu_1 p} \epsilon \|u\|_c^p - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma) \\
&= \frac{1}{p} \underbrace{\left(1 - \frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\mu_1}\right)}_B \|u\|_c^p - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma).
\end{aligned}$$

Note que $B > 0$, pois $\mu < \mu_1$, assim $\frac{\mu}{\mu_1} < 1$, portanto, escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\frac{\mu}{\mu_1} + \frac{\epsilon}{\mu_1} < 1$, temos $I_p(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\|_c \rightarrow +\infty$.

- $\lambda \geq 0$ e $\mu < 0$.

Pelas desigualdades (1.19) e (1.49), temos (basta proceder como anteriormente)

$$I_p(u) \geq \frac{1}{p} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)}_C \|u\|_c^p - M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma).$$

Novamente, note que $C > 0$, pois $\lambda < \lambda_1$, assim $\frac{\lambda}{\lambda_1} < 1$, portanto, escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\frac{\lambda}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} < 1$, temos $I_p(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\|_c \rightarrow +\infty$.

- $\lambda \geq 0$ e $\mu \geq 0$.

Usando (1.19) e (1.49) com $C(\epsilon) = M_\epsilon(|\Omega| + |\partial\Omega|_\sigma)$, temos

$$I_p(u) \geq \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \|u\|_c^p - \frac{1}{p} (\mu + \epsilon) \|u\|_{p,\partial}^p - C(\epsilon). \quad (1.50)$$

Agora, substituindo (1.13) em (1.50), para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} > 0$, temos

$$\begin{aligned}
I_p(u) &\geq \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \mu_1 \|u\|_{p,\partial}^p - \frac{1}{p} (\mu + \epsilon) \|u\|_{p,\partial}^p - C(\epsilon) \\
&= \frac{1}{p} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \mu_1 - \mu - \epsilon \right] \|u\|_{p,\partial}^p - C(\epsilon) \\
&= \frac{1}{p} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) - \frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\mu_1} \right] \mu_1 \|u\|_{p,\partial}^p - C(\epsilon) \\
&= \frac{1}{p} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\mu_1}\right) - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_1} \right] \mu_1 \|u\|_{p,\partial}^p - C(\epsilon) \\
&= \frac{1}{p} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\mu_1}\right) - \epsilon \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\mu_1} \right) \right] \mu_1 \|u\|_{p,\partial}^p - C(\epsilon).
\end{aligned}$$

Pelas hipóteses $\lambda < \lambda_1$ e $\lambda_1\mu + \mu_1\lambda < \mu_1\lambda_1$ e escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} > 0 \quad \text{e} \quad \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\mu_1}\right) - \epsilon \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\mu_1}\right) > 0,$$

temos $I_p(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\|_c \rightarrow +\infty$.

Portanto, o funcional I_p é coercivo.

Afirmção 2. O funcional I_p é limitado inferiormente.

Este fato é uma consequência imediata da Afirmção 1.

Afirmção 3. I_p satisfaz a condição (PS).

Seja (u_m) uma sequência em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$, onde

$$(I_p(u_m)) \quad \text{é limitado em } \mathbb{R}$$

e

$$I'_p(u_m) \rightarrow 0 \quad \text{em } (W^{1,p}(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*).$$

Com isso, afirmamos que (u_m) é limitado em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. De fato, se esse não for o caso, então existe uma subsequência (u_{m_k}) de (u_m) tal que

$$\|u_{m_k}\|_c \rightarrow +\infty, \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty.$$

Portanto, pela coercitividade de I_p , $I_p(u_{m_k}) \rightarrow +\infty$, quando $k \rightarrow +\infty$, o que é uma contradição, pois $(I_p(u_m))$ é limitado em $\mathbb{R}$. Ficando provada esta afirmação. Agora, como (u_m) é limitado em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ e $I'_p(u_m) \rightarrow 0$, então (u_m) admite uma subsequência convergente em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ pela aplicação da Proposição 1.2.6. Portanto, o funcional I_p satisfaz a condição (PS), ficando provada a Afirmção 3.

Desde que I_p é de classe $C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, é limitada inferiormente e satisfaz a condição (PS), podemos aplicar a Proposição A.5.1 (Apêndice A). Portanto, I_p tem pelo menos um ponto crítico $u \in W^{1,p}(\Omega)$, isto é, $I'_p(u) = 0$. Assim, u satisfaz a igualdade (1.21). Logo, u é uma solução fraca do problema (1.20).

■

Capítulo 2

Uma Classe de Problemas de Neumann Envolvendo dois Expoentes Críticos

Neste capítulo, estudaremos uma classe de problemas elípticos com dois expoentes críticos do tipo convexo e côncavo-convexo

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + f(x, u) \text{ em } \Omega, & (2.1) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = u^{2_*-1} + g(x, u) \text{ sobre } \partial\Omega, & (2.2) \\ u > 0 \text{ em } \Omega, & (2.3) \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ($N \geq 3$), é um domínio suave limitado, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ é a derivada normal unitária exterior, f e g têm crescimento subcrítico no infinito, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}$ são os expoentes críticos de Sobolev para as imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ e $H^1(\mathbb{R}_+^N) \hookrightarrow L^{2_*}(\partial\mathbb{R}_+^N)$, respectivamente, onde $\mathbb{R}_+^N = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^{N-1}, t > 0\}$.

Inicialmente apresentaremos as condições sobre f e g , bem como os principais teoremas, isto é, o caso convexo e o côncavo-convexo. Logo em seguida, faremos algumas observações preliminares e, depois, provaremos os teoremas.

2.1 Condições sobre f e g

As hipóteses sobre f são:

$$f(x, 0) = 0 \text{ e } \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s)}{s^{2^*-1}} = 0, \quad (f0)$$

existe alguma função $h(s)$, tal que

$$f(x, s) \geq h(s) \geq 0 \text{ q.t.p. } x \in \omega_1, \forall s \geq 0, \quad (f1)$$

onde ω_1 é algum conjunto aberto não-vazio em Ω e a primitiva $H(s) = \int_0^s h(t)dt$ satisfaz

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\epsilon^{-1}} \epsilon^2 H \left[\left(\frac{\epsilon^{-1}}{1+s^2} \right)^{\frac{N-2}{2}} \right] s^{N-1} ds = \infty, \quad (f2)$$

$f : \Omega \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável em $x \in \Omega$, contínua em $s \in [0, \infty)$, e

$$\sup_{x \in \Omega, s \in [0, M]} |f(x, s)| < \infty, \forall M > 0, \quad (f3)$$

$$f(x, s) = a(x)s + f_1(x, s) \text{ com } a \in L^\infty(\Omega),$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f_1(x, s)}{s} = 0 \text{ e } \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f_1(x, s)}{s^{2^*-1}} = 0, \text{ uniformemente em } x. \quad (f4)$$

Em [12], Brezis e Nirenberg provaram alguns resultados de existência para (2.1) e (2.3) com condição de contorno de Dirichlet e f satisfazendo (f0)-(f4). Visando enunciar o primeiro teorema, faremos as seguintes suposições:

existe $\varrho \geq 1$ com $a + \varrho > 0$ sobre um subconjunto de Ω com medida de Lebesgue positiva em $\mathbb{R}^N$ tal que

$$0 < \Theta_2 \leq \inf \left\{ \|u\|^2 - 2 \int_{\Omega} (\varrho + a)u^2 : \|u\| = 1 \right\}, \text{ para algum } \Theta_2 \in \mathbb{R}, \quad (f5)$$

onde $\|u\|^2 = |\nabla u|_{2,\Omega}^2 + |u|_{2,\Omega}^2$ denota a norma usual em $H^1(\Omega)$.

As três próximas hipóteses referem-se a g . A função $g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, pode ser escrita como

$$g(y, s) = b(y)s + g_1(y, s), \quad y \in \partial\Omega, s \in \mathbb{R} \text{ e } b \in L^\infty(\partial\Omega), \text{ com } g(y, s) \geq 0, \\ \forall y \in \partial\omega_2 \cap \partial\Omega \neq \emptyset, \quad (g1)$$

onde ω_2 é algum conjunto aberto não-vazio em Ω ,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_1(y, s)}{s} = 0 \text{ e } \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g_1(y, s)}{s^{2^*-1}} = 0, \text{ uniformemente em } y, \quad (g2)$$

$$0 < \Theta_1 \leq \inf \left\{ \|u\|^2 - 2 \int_{\partial\Omega} bu^2 : \|u\| = 1 \right\} \text{ para algum } \Theta_1 \in \mathbb{R}. \quad (g3)$$

Com isso, podemos apresentar nosso primeiro resultado deste capítulo:

Teorema 2.1.1. (Caso convexo) *Suponha válidas as hipóteses (g1)-(g3) e (f0)-(f5). Então, o problema (2.1)-(2.3) possui pelo menos uma solução positiva.*

Para o caso côncavo-convexo definimos:

$$f(x, s) = a(x)s + \lambda f_1(x, s), \quad g(y, s) = b(y)s + \mu g_1(y, s), \quad \lambda, \mu > 0,$$

com $a \in L^\infty(\Omega)$, $b \in L^\infty(\partial\Omega)$. E ainda, além das hipóteses $(g1)$, $(g3)$, $(f0)$, $(f1)$, $(f2)$, $(f3)$ e $(f5)$, consideraremos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f_1(x, s)}{s^q} = 0 \text{ e } \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f_1(x, s)}{s^{2^*-1}} = 0, \text{ uniformemente em } x, \quad (f6)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_1(y, s)}{s^\tau} = 0 \text{ e } \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g_1(y, s)}{s^{2^*-1}} = 0, \text{ uniformemente em } y, \quad (g4)$$

onde $1 < q, \tau < 2$.

Assim, enunciamos o nosso resultado neste caso:

Teorema 2.1.2. (Caso côncavo-convexo) *Suponha válidas as hipóteses $(g1)$, $(g3)$, $(g4)$, $(f0)$, $(f1)$, $(f2)$, $(f3)$, $(f5)$ e $(f6)$. Então, o problema (2.1)-(2.3) possui pelo menos uma solução positiva com $\lambda, \mu > 0$, suficientemente pequenos.*

Definição 2.1.1. Dizemos que $u \in H^1(\Omega)$ é solução fraca para o problema (2.1)-(2.3) se

$$\int_{\Omega} (auv + f_1(x, u)v + |u|^{2^*-2}uv)dx + \int_{\partial\Omega} (buv + g_1(y, u)v + |u|^{2^*-2}uv)d\sigma = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx, \quad (2.4)$$

$\forall v \in H^1(\Omega)$.

Como estamos interessados na existência de solução positiva, podemos assumir

$$f_1(x, s) = 0, \ x \in \Omega, \ s \leq 0 \text{ e } g_1(y, s) = 0, \ y \in \partial\Omega, \ s \leq 0.$$

Definamos o funcional Euler-Lagrange $\Phi : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, associado ao problema (2.1)-(2.3), dado por

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} au^2 + F_1(x, u) + \frac{|u|^{2^*}}{2^*} \right) dx \\ & - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{2} bu^2 + G_1(y, u) + \frac{|u|^{2^*}}{2^*} \right) d\sigma, \end{aligned}$$

onde $F_1(x, u) = \int_0^u f_1(x, t)dt$ e $G_1(y, u) = \int_0^u g_1(y, t)dt$. Soluções do problema (2.1)-(2.3) correspondem a pontos críticos do funcional Φ . Desta forma, procederemos da seguinte maneira: verificaremos que o funcional associado ao problema (2.1)-(2.3) satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, e usaremos funções extremas para localizar o nível do Passo da Montanha.

Proposição 2.1.3. $\Phi \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\Phi'(u)(v) = & \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} (auv + f_1(x, u)v + |u|^{2^*-2}uv) dx \\ & - \int_{\partial\Omega} (buv + g_1(y, u)v + |u|^{2^*-2}uv) d\sigma,\end{aligned}$$

para todo $u, v \in H^1(\Omega)$.

Demonstração. Ver Proposição B.1.1, Apêndice B. ■

2.2 Caso convexo

Nesta seção, vamos provar o Teorema 2.1.1. Para isso, apresentaremos algumas considerações e resultados que serão fundamentais.

Note que podemos fixar $\varrho \geq 1$ grande o suficiente, tal que

$$f(x, u) \leq \varrho u + u^{2^*-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \forall u \geq 0.$$

Com efeito, dado $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno ($\epsilon \leq 1$), temos por (f4) que existem $\delta > 0$ e $\overline{M} > 0$ tais que

$$|f_1(x, s)| \leq \epsilon |s|, \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \text{ para } 0 < |s| < \delta \quad (2.5)$$

e

$$|f_1(x, s)| \leq \epsilon |s|^{2^*-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \overline{M} < s. \quad (2.6)$$

Por (f3), seja $k_0 = \sup_{\delta \leq s \leq \overline{M}} |f_1(x, s)|$. Assim,

$$g(s) = \frac{k_0}{\delta} s \geq |f_1(x, s)|, \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \forall \delta \leq s \leq \overline{M}. \quad (2.7)$$

Logo, por (f4) e (2.5), (2.6) e (2.7), vem

$$\begin{aligned}|f(x, u)| &= |a(x)u + f_1(x, u)| \leq |a(x)u| + |f_1(x, u)| \\ &\leq |a(x)|u + \epsilon u + \frac{k_0}{\delta} u + \epsilon u^{2^*-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \forall u \geq 0.\end{aligned} \quad (2.8)$$

Note que, para $\epsilon = 1$,

$$\begin{aligned}|f(x, u)| &\leq |a(x)|u + u + \frac{k_0}{\delta} u + u^{2^*-1} \\ &= \left(|a(x)| + 1 + \frac{k_0}{\delta} \right) u + u^{2^*-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \forall u \geq 0.\end{aligned}$$

Tomando $\varrho \geq |a(x)|_\infty + 1 + \frac{k_0}{\delta}$, podemos escrever

$$|f(x, u)| \leq \varrho u + u^{2^*-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \forall u \geq 0.$$

Portanto,

$$f(x, u) \leq \varrho u + u^{2^*-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \forall u \geq 0.$$

Definamos o funcional em $H^1(\Omega)$ por

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*} u_+^{2^*} - F(x, u_+) \right) dx - \int_{\partial\Omega} \left(G(y, u_+) + \frac{1}{2_*} u_+^{2_*} \right) d\sigma, \quad (2.9)$$

onde $u_+ = \max\{u, 0\}$ é a parte positiva de u . Logo, $\Phi \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ (ver Proposição 2.1.3).

No Lema a seguir, provaremos que o funcional Φ satisfaz a geometria do Passo da Montanha (Teorema B.2.1, Apêndice B).

Lema 2.2.1. Φ verifica:

(i) existem constantes $\rho, \beta > 0$ tais que

$$\Phi(u) \geq \beta, \quad \|u\| = \rho,$$

(ii) existe uma constante positiva $R > \rho$, e $u_0 \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\Phi(u_0) < 0, \quad \|u_0\| > R.$$

Demonstração. (i) De (2.8), temos

$$f(x, s) \leq |a(x)|s + \left(\epsilon + \frac{k_0}{\delta} \right) s + \epsilon s^{2^*-1}, \quad \forall s \geq 0$$

ou ainda,

$$f(x, s) \leq |a(x)|s + C_\epsilon s + \epsilon s^{2^*-1}, \quad \forall s \geq 0,$$

onde $C_\epsilon > 0$ é uma constante dependente de ϵ . Portanto,

$$\begin{aligned} F(x, u) &= \int_0^u f(x, s) ds \leq \int_0^u (|a|s + C_\epsilon s + \epsilon s^{2^*-1}) ds \\ &= \frac{1}{2} |a| u^2 + \frac{C_\epsilon}{2} u^2 + \frac{1}{2^*} \epsilon u^{2^*}, \end{aligned}$$

isto é,

$$F(x, u) \leq \frac{1}{2} |a| u^2 + \frac{C_\epsilon}{2} u^2 + \frac{1}{2^*} \epsilon u^{2^*}, \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \forall u \geq 0. \quad (2.10)$$

Analogamente,

$$G(y, u) \leq \frac{1}{2}|b|u^2 + \frac{\overline{C}_\epsilon}{2}u^2 + \frac{1}{2_*}\epsilon u^{2_*}, \quad \text{q.t.p. } y \in \partial\Omega, \forall u \geq 0. \quad (2.11)$$

De (2.9), vem

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\varrho u^2 - \frac{1}{2}\varrho u^2 - \frac{1}{2_*}u_+^{2_*} - F(x, u_+) \right) - \int_{\partial\Omega} \left(G(y, u_+) + \frac{1}{2_*}u_+^{2_*} \right) \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\varrho u^2 - \frac{1}{2}\varrho u^2 - \frac{1}{2_*}u_+^{2_*} - F(x, u_+) \right) \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \left(G(y, u_+) + \frac{1}{2_*}u_+^{2_*} \right). \end{aligned}$$

Como $\|u\|^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} |u|^2$, então

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{2}\varrho u^2 + \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2}\varrho u^2 - \frac{1}{2_*}u_+^{2_*} - F(x, u_+) \right) \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \left(G(y, u_+) + \frac{1}{2_*}u_+^{2_*} \right). \end{aligned}$$

Substituindo (2.10) e (2.11) nesta última igualdade, e como $\varrho \geq 1$, vem

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{2}\varrho u^2 + \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2}\varrho u^2 - \frac{1}{2_*}u_+^{2_*} - \frac{1}{2}|a|u_+^2 - \frac{C_\epsilon}{2}u_+^2 - \frac{1}{2_*}\epsilon u_+^{2_*} \right) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \left(-\frac{1}{2}|b|u_+^2 - \frac{\overline{C}_\epsilon}{2}u_+^2 - \frac{1}{2_*}\epsilon u_+^{2_*} - \frac{1}{2_*}u_+^{2_*} \right) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2}\varrho u^2 - \frac{1}{2}|a|u_+^2 \right) + \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2_*}u_+^{2_*} - \frac{C_\epsilon}{2}u_+^2 - \frac{1}{2_*}\epsilon u_+^{2_*} \right) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \left(-\frac{1}{2}|b|u_+^2 - \frac{\overline{C}_\epsilon}{2}u_+^2 - \frac{1}{2_*}\epsilon u_+^{2_*} - \frac{1}{2_*}u_+^{2_*} \right) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2}\varrho u^2 - \frac{1}{2}|a|u^2 \right) + \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2_*}u_+^{2_*} - \frac{C_\epsilon}{2}u_+^2 - \frac{1}{2_*}\epsilon u_+^{2_*} \right) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \left(-\frac{1}{2}|b|u_+^2 - \frac{\overline{C}_\epsilon}{2}u_+^2 - \frac{1}{2_*}\epsilon u_+^{2_*} - \frac{1}{2_*}u_+^{2_*} \right) \\ &= \frac{1}{4}\|u\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varrho + |a|)u^2 + \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2_*}u_+^{2_*} - \frac{C_\epsilon}{2}u_+^2 - \frac{1}{2_*}\epsilon u_+^{2_*} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4}\|u\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |b|u_+^2 + \int_{\partial\Omega} \left(-\frac{\overline{C}_\epsilon}{2}u_+^2 - \frac{1}{2_*}\epsilon u_+^{2_*} - \frac{1}{2_*}u_+^{2_*} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

De (f5) e (g3) segue que

$$\frac{1}{4}\|u\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varrho + |a|)u^2 \geq \frac{\Theta_2}{4}\|u\|^2 \quad (2.13)$$

e

$$\frac{1}{4}\|u\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |b|u^2 \geq \frac{\Theta_1}{4}\|u\|^2. \quad (2.14)$$

Agora, substituindo (2.13) e (2.14) em (2.12), obtemos

$$\begin{aligned}\Phi(u) \geq & \frac{\Theta_2}{4} \|u\|^2 + \frac{\Theta_1}{4} \|u\|^2 + \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2^*} u_+^{2^*} - \frac{C_\epsilon}{2} u_+^2 - \frac{1}{2^*} \epsilon u_+^{2^*} \right) \\ & + \int_{\partial\Omega} \left(-\frac{\overline{C}_\epsilon}{2} u_+^2 - \frac{1}{2_*} \epsilon u_+^{2_*} - \frac{1}{2_*} u_+^{2_*} \right).\end{aligned}$$

Com isso, e pelas imersões de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2_*}(\partial\Omega)$ (Teorema A.3.3 e A.4.1, Apêndice A), temos

$$\Phi(u) \geq C_1 \|u\|^2 - C_2 \|u\|^{2^*} - C_3 \|u\|^{2_*},$$

onde $C_1, C_2, C_3 > 0$. Isto prova (i). De fato,

$$\begin{aligned}\Phi(u) & \geq C_1 \|u\|^2 - C_2 \|u\|^{2^*} - C_3 \|u\|^{2_*} \\ & = \|u\|^2 (C_1 - C_2 \|u\|^{2^*-2} - C_3 \|u\|^{2_*-2}),\end{aligned}$$

como $2^* > 2$ e $2_* > 2$, segue que para algum $\rho > 0$ pequeno, existe $\beta > 0$ tal que

$$\Phi(u) \geq \beta,$$

para todo u com $\|u\| = \rho$.

(ii) Fixado $0 \neq u \in H^1(\Omega)$ e $\forall t > 0$, temos

$$\begin{aligned}\Phi(tu) &= \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_{\Omega} u_+^{2^*} - \int_{\Omega} F(x, tu_+) - \int_{\partial\Omega} G(y, tu_+) - \frac{t^{2_*}}{2_*} \int_{\partial\Omega} u_+^{2_*} \\ &\leq \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_{\Omega} u_+^{2^*} + \int_{\Omega} F(x, tu_+) + \int_{\partial\Omega} G(y, tu_+) - \frac{t^{2_*}}{2_*} \int_{\partial\Omega} u_+^{2_*},\end{aligned}$$

logo $\Phi(tu) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, pois $2^* > 2$ e $2_* > 2$. Isto é, Φ não é limitado inferiormente. Portanto, existe $t_0 > 0$ tal que $\Phi(t_0 u) < 0$. ■

Do Lema 2.2.1, aplicando uma versão do Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti e Rabinowitz (Teorema B.2.1, Apêndice B) garantimos a existência de uma sequência Palais-Smale no nível c , isto é, existe uma sequência $\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$ tal que

$$\Phi(u_n) \rightarrow c, \quad \Phi'(u_n) \rightarrow 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega) \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (2.15)$$

onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) > 0,$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = u_0\}.$$

A estimativa do Lema 2.2.2 a seguir é uma etapa crucial, pois ela garante que o problema (2.1)-(2.3) possui solução, isto é, ela nos dá uma condição de compacidade local. Para isso, no entanto, é necessário fazermos algumas considerações. Denotemos

$$S_0 = \inf\{|\nabla u|_{2, \mathbb{R}_+^N}^2 : |u|_{2^*, \mathbb{R}_+^N}^2 + |u|_{2^*, \mathbb{R}_+^N}^2 = 1\}, \quad (2.16)$$

onde $|u|_{m, \Omega}$ denota a norma usual em $L^m(\Omega)$. Conforme [2], a constante S_0 é atingida pela função $w_\epsilon : \Omega \subset \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$w_\epsilon(x, t) = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + |(x, t) - (x_0, t_0)|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}},$$

para algum $\epsilon > 0$.

Além disso, considere a função cut-off $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, tal que $0 \leq \varphi(x, t) \leq 1$, $(x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ e $\varphi(x, t) = 1$ sobre uma vizinhança U de (x_0, t_0) , tal que $U \subset w \subset \Omega$. Definamos

$$u_\epsilon(x, t) = w_\epsilon(x, t)\varphi(x, t) \quad (2.17)$$

e

$$v_\epsilon(x, t) = \frac{u_\epsilon(x, t)}{(|u_\epsilon|_{2^*, \Omega}^2 + |u_\epsilon|_{2^*, \partial\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.18)$$

Lema 2.2.2. *O nível c do Passo da Montanha satisfaz*

$$c < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \max\{S_0^{\frac{2^*}{2^*-2}}, S_0^{\frac{2^*}{2^*-2}}\} \doteq \bar{S}.$$

Demonstração. Antes de tudo, é importante declararmos as seguintes estimativas que se encontram em [2]:

$$|\nabla v_\epsilon|_{2, \Omega}^2 = S_0 + O(\epsilon^{N-2}), \quad (2.19)$$

$$|u_\epsilon|_{2^*, \Omega}^2 = |u_1|_{2^*, \mathbb{R}_+^N}^2 + O(\epsilon^N), \quad (2.20)$$

$$|u_\epsilon|_{2^*, \partial\Omega}^2 = |u_1|_{2^*, \mathbb{R}^{N-1}}^2 + O(\epsilon^{N-1}), \quad (2.21)$$

$$|v_\epsilon|_{2, \Omega}^2 = \begin{cases} o(\epsilon) & \text{para } N \geq 4, \\ O(\epsilon) & \text{para } N = 3, \end{cases} \quad (2.22)$$

onde S_0 , u_ϵ e v_ϵ estão definidas como em (2.16), (2.17) e (2.18), respectivamente.

É suficiente provar que existe $v_0 \in H^1(\Omega)$, $v_0 \geq 0$ sobre $\bar{\Omega}$, $v_0 \neq 0$ sobre Ω , tal que

$$\sup_{t \geq 0} \Phi(tv_0) < \bar{S}.$$

Deste modo, mostraremos

$$\sup_{s \geq 0} \Phi(s\tilde{v}_\epsilon) < \bar{S},$$

onde $\tilde{v}_\epsilon(x, t) = \alpha v_\epsilon(x, t)$ com $\alpha > 0$ escolhido posteriormente e v_ϵ definido em (2.18).

Da definição de $\tilde{v}_\epsilon$, vem

$$|\nabla \tilde{v}_\epsilon|_{2,\Omega}^2 = \alpha^2 |\nabla v_\epsilon|_{2,\Omega}^2 \doteq X_\epsilon^2, \quad (2.23)$$

$$|\tilde{v}_\epsilon|_{2^*,\Omega}^{2^*} = \alpha^{2^*} |v_\epsilon|_{2^*,\Omega}^{2^*} \doteq A_\epsilon^{2^*}, \quad (2.24)$$

$$|\tilde{v}_\epsilon|_{2^*,\partial\Omega}^{2^*} = \alpha^{2^*} |v_\epsilon|_{2^*,\partial\Omega}^{2^*} \doteq B_\epsilon^{2^*}. \quad (2.25)$$

Agora, calculando a expressão $\Phi(s\tilde{v}_\epsilon)$ e substituindo as igualdades acima, temos

$$\Phi(s\tilde{v}_\epsilon) = \frac{s^2}{2} X_\epsilon^2 - \frac{s^{2^*}}{2^*} A_\epsilon^{2^*} - \frac{s^{2^*}}{2^*} B_\epsilon^{2^*} - \int_{\Omega} F(x, s\tilde{v}_\epsilon) - \int_{\partial\Omega} G(y, s\tilde{v}_\epsilon)$$

Desde que $\Phi(s\tilde{v}_\epsilon) \rightarrow -\infty$ quando $s \rightarrow \infty$, existe $s_\epsilon > 0$ tal que

$$\sup_{s \geq 0} \Phi(s\tilde{v}_\epsilon) = \Phi(s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) \quad (2.26)$$

Se $s_\epsilon = 0$, a prova está concluída. Caso contrário, de (2.26), temos

$$\begin{aligned} \Phi'(s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) \tilde{v}_\epsilon &= s_\epsilon X_\epsilon^2 - s_\epsilon^{2^*-1} A_\epsilon^{2^*} - s_\epsilon^{2^*-1} B_\epsilon^{2^*} - \int_{\Omega} f(x, s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) \tilde{v}_\epsilon - \int_{\partial\Omega} g(y, s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) \tilde{v}_\epsilon \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$s_\epsilon X_\epsilon^2 - s_\epsilon^{2^*-1} A_\epsilon^{2^*} - s_\epsilon^{2^*-1} B_\epsilon^{2^*} = \int_{\Omega} f(x, s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) \tilde{v}_\epsilon + \int_{\partial\Omega} g(y, s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) \tilde{v}_\epsilon. \quad (2.27)$$

Usando (f1) e (g1) em (2.27), temos

$$s_\epsilon X_\epsilon^2 - s_\epsilon^{2^*-1} A_\epsilon^{2^*} - s_\epsilon^{2^*-1} B_\epsilon^{2^*} \geq 0,$$

isto é,

$$X_\epsilon^2 \geq s_\epsilon^{2^*-2} A_\epsilon^{2^*} + s_\epsilon^{2^*-2} B_\epsilon^{2^*}.$$

Daí, vem

$$\frac{X_\epsilon^2}{A_\epsilon^{2^*} + B_\epsilon^{2^*}} \geq \frac{s_\epsilon^{2^*-2} A_\epsilon^{2^*} + s_\epsilon^{2^*-2} B_\epsilon^{2^*}}{A_\epsilon^{2^*} + B_\epsilon^{2^*}} \geq \min\{s_\epsilon^{2^*-2}, s_\epsilon^{2^*-2}\}.$$

Então, de (2.23)-(2.25) temos

$$\begin{aligned} \min\{s_\epsilon^{2^*-2}, s_\epsilon^{2^*-2}\} &\leq \frac{X_\epsilon^2}{A_\epsilon^{2^*} + B_\epsilon^{2^*}} \\ &= \frac{\alpha^2 |\nabla v_\epsilon|_{2,\Omega}^2}{\alpha^{2^*} |v_\epsilon|_{2^*,\Omega}^{2^*} + \alpha^{2^*} |v_\epsilon|_{2^*,\partial\Omega}^{2^*}} \\ &\leq \frac{\alpha^2}{\min\{\alpha^{2^*}, \alpha^{2^*}\}} \left(\frac{|\nabla v_\epsilon|_{2,\Omega}^2}{|v_\epsilon|_{2^*,\Omega}^{2^*} + |v_\epsilon|_{2^*,\partial\Omega}^{2^*}} \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

o que implica,

$$\frac{X_\epsilon^2}{A_\epsilon^{2^*} + B_\epsilon^{2^*}} \leq \frac{1}{\min\{\alpha^{2^*-2}, \alpha^{2^*-2}\}} \left(\frac{|\nabla v_\epsilon|_{2,\Omega}^2}{|v_\epsilon|_{2^*,\Omega}^{2^*} + |v_\epsilon|_{2^*,\partial\Omega}^{2^*}} \right). \quad (2.29)$$

Agora, passando o limite em (2.29) e substituindo (2.19)-(2.21) nele, obtemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{X_\epsilon^2}{A_\epsilon^{2^*} + B_\epsilon^{2^*}} \leq \frac{1}{\min\{\alpha^{2^*-2}, \alpha^{2^*-2}\}} \left(\frac{S_0}{|u_1|_{2^*,\mathbb{R}_+^N}^{2^*} + |u_1|_{2^*,\mathbb{R}^{N-1}}^{2^*}} \right).$$

Assim, escolhendo $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{1}{\min\{\alpha^{2^*-2}, \alpha^{2^*-2}\}} \left(\frac{1}{|u_1|_{2^*,\mathbb{R}_+^N}^{2^*} + |u_1|_{2^*,\mathbb{R}^{N-1}}^{2^*}} \right) \leq 1,$$

de (2.28) resulta

$$\min\{s_\epsilon^{2^*-2}, s_\epsilon^{2^*-2}\} \leq S_0,$$

isto é,

$$s_\epsilon \leq \max\{S_0^{(2^*-2)^{-1}}, S_0^{(2^*-2)^{-1}}\}. \quad (2.30)$$

Também,

$$X_\epsilon^2 \leq S_0 + O(\epsilon^{N-2}), \quad (2.31)$$

pois $X_\epsilon^2 \doteq \alpha^2 |\nabla v_\epsilon|_{2,\Omega}^2$.

Como o nível crítico $c > 0$, podemos assumir $s_\epsilon \geq c_0 > 0$, $\forall \epsilon > 0$. De fato, caso contrário, podemos obter uma sequência $\epsilon_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, tal que $s_{\epsilon_k} \rightarrow 0$, pois $s_{\epsilon_k} \geq 0$.

Logo, $s_{\epsilon_k} \tilde{v}_{\epsilon_k} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto,

$$0 < c \leq \sup_{s \geq 0} \Phi(s \tilde{v}_\epsilon) = \Phi(s_{\epsilon_k} \tilde{v}_{\epsilon_k}) \rightarrow \Phi(0) = 0,$$

o que é uma contradição.

Assim, de (2.27), temos

$$s_\epsilon^{2^*} A_\epsilon^{2^*} + s_\epsilon^{2_*} B_\epsilon^{2_*} \geq s_\epsilon^2 X_\epsilon^2 + O(\epsilon), \quad (2.32)$$

pois

$$\int_{\Omega} \frac{f(x, s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) \tilde{v}_\epsilon}{s_\epsilon} \rightarrow 0 \text{ e } \int_{\partial\Omega} \frac{g(y, s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) \tilde{v}_\epsilon}{s_\epsilon} \rightarrow 0, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Agora, inserindo (2.32) na expressão de $\Phi(s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon)$, e usando (2.22) vem

$$\begin{aligned} \Phi(s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) &= \frac{s_\epsilon^2}{2} X_\epsilon^2 - \frac{s_\epsilon^{2^*}}{2^*} A_\epsilon^{2^*} - \frac{s_\epsilon^{2_*}}{2_*} B_\epsilon^{2_*} - \int_{\Omega} F(x, s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) - \int_{\partial\Omega} G(y, s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) \\ &\leq \frac{s_\epsilon^2}{2} X_\epsilon^2 - \min \left\{ \frac{1}{2^*}, \frac{1}{2_*} \right\} s_\epsilon^2 X_\epsilon^2 - \int_{\Omega} F(x, s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) - \int_{\partial\Omega} G(y, s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) + O(\epsilon) \\ &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) s_\epsilon^2 X_\epsilon^2 - \int_{\Omega} F(x, s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) + O(\epsilon) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) s_\epsilon^2 X_\epsilon^2 + h(x, s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) + O(\epsilon) \end{aligned}$$

onde $h(x, s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) = - \int_{\Omega} F(x, s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon)$ e $N \geq 3$.

Argumentando como em [12] junto com (f2) podemos supor

$$\frac{h(x, s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon)}{\epsilon^{N-2}} \rightarrow -\infty, \text{ quando } \epsilon \rightarrow \infty. \quad (2.33)$$

Mas de (2.30)

$$s_\epsilon^2 \leq \max\{S_0^{2(2^*-2)^{-1}}, S_0^{2(2_*-2)^{-1}}\},$$

e desde que (2.31) ocorre e $2^* > 2$, $2_* > 2$, temos

$$s_\epsilon^2 X_\epsilon^2 \leq \max\{S_0^{2^*(2^*-2)^{-1}}, S_0^{2_*(2_*-2)^{-1}}\} + O(\epsilon^{N-2}), \text{ para } N \geq 3. \quad (2.34)$$

Portanto, de (2.33) e (2.34), concluimos que

$$\Phi(s_\epsilon \tilde{v}_\epsilon) < \bar{S}.$$

Isto prova o Lema 2.2.2. ■

2.2.1 Demonstração do Teorema 2.1.1

Aqui, adaptaremos alguns argumentos feitos na prova do *Teorema 2.1* em [12]. Antes, apresentaremos o seguinte Lema:

Lema 2.2.3. *Seja (u_n) a sequência satisfazendo (2.15). Então, (u_n) é limitada em $H^1(\Omega)$.*

Demonstração. De fato, desde que $\Phi(u_n) \rightarrow c$, temos que existe $\overline{C} > 0$, tal que $\Phi(u_n) < \overline{C}$. Além disso, $-\frac{1}{2}\Phi'(u_n)(u_n) \leq k\|u_n\|$, para algum $k > 0$. Assim,

$$\overline{C} + k\|u_n\| \geq \Phi(u_n) - \frac{1}{2}\Phi'(u_n)(u_n).$$

Note que da Proposição 2.1.3, temos

$$\Phi'(u)(v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - u_+^{2^*-1} v - f(x, u_+) v) - \int_{\partial\Omega} (g(y, u_+) v + u_+^{2^*-1} v).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \overline{C} + k\|u_n\| &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_{n+}^{2^*} - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} u_{n+}^{2^*} + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_{n+}^{2^*} - \frac{1}{2_*} \int_{\partial\Omega} u_{n+}^{2_*} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u_{n+}) u_{n+} - \int_{\Omega} F(x, u_{n+}) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} g(y, u_{n+}) u_{n+} - \int_{\partial\Omega} G(y, u_{n+}). \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} = \frac{1}{N}$ e $\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*} = \frac{1}{2(N-1)}$, vem

$$\begin{aligned} \overline{C} + k\|u_n\| &\geq \frac{1}{N} \int_{\Omega} u_{n+}^{2^*} + \frac{1}{2(N-1)} \int_{\partial\Omega} u_{n+}^{2_*} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, u_{n+}) u_{n+} - \int_{\Omega} F(x, u_{n+}) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} g(y, u_{n+}) u_{n+} - \int_{\partial\Omega} G(y, u_{n+}). \end{aligned}$$

De (f4) e (g2), para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\int_{\Omega} u_{n+}^{2^*} + \int_{\partial\Omega} u_{n+}^{2_*} \leq \overline{C}_1 + k\|u_n\|, \quad (2.35)$$

onde $\overline{C}_1 > 0$. Combinando (2.35) com $\Phi(u_n) = c + o(1)$, concluímos que $\|u_n\|$ é limitada. ■

A seguir, vamos à demonstração do Teorema 2.1.1.

Demonstração. (Teorema 2.1.1) Motivado pelo Lema anterior, agora, podemos, passando à subsequência, se necessário, assumir $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1(\Omega)$.

Passando ao limite em $\Phi'(u_n)v = o(1)$, $v \in H^1(\Omega)$, quando $n \rightarrow \infty$, temos

$$\Phi'(u)v = 0.$$

Pelo princípio do máximo (ver Seção B.4, Princípio do Máximo Forte, Apêndice B) segue que $u \geq 0$ sobre Ω . E ainda:

Afirmação. $u \neq 0$.

Suponha que $u = 0$. Então, desde que

$$\int_{\Omega} f(x, u_{n+}) u_{n+} \rightarrow 0 \text{ e } \int_{\partial\Omega} g(y, u_{n+}) u_{n+} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.36)$$

Lembre-se

$$|f(x, u)| \leq \varrho u + u^{2^*-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \forall u \geq 0,$$

e

$$|g(y, u)| \leq \bar{\varrho} u + u^{2^*-1}, \text{ q.t.p. } y \in \partial\Omega, \forall u \geq 0.$$

Assim, combinando (2.36) com $\Phi'(u_n)(u_n) = \langle \xi_n, u_n \rangle$ com $\xi_n \rightarrow 0$ em $H^{-1}(\Omega)$, obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 - \int_{\Omega} (u_{n+})^{2^*} - \int_{\partial\Omega} (u_{n+})^{2^*} = o(1),$$

e podemos assumir

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \rightarrow l, \int_{\Omega} (u_{n+})^{2^*} \rightarrow l_1 \text{ e } \int_{\partial\Omega} (u_{n+})^{2^*} \rightarrow l_2, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

com $l = l_1 + l_2$.

Novamente, desde que Ω é limitado, temos

$$\int_{\Omega} F(x, u_{n+}) \rightarrow 0 \text{ e } \int_{\partial\Omega} G(y, u_{n+}) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

E assim de $\Phi(u_n) = c + o(1)$, inferimos que

$$\frac{l}{2} - \frac{l_1}{2^*} - \frac{l_2}{2^*} = c. \quad (2.37)$$

Então, podemos assumir que $l > 0$ (caso contrário a prova está completa).

Pela definição de S_0 , obtemos

$$l \geq S_0(l_1^{\frac{2}{2^*}} + l_2^{\frac{2}{2^*}}).$$

Desde que $l = l_1 + l_2$, temos

$$\begin{aligned} 1 &\geq S_0 \left(\left(\frac{l_1}{l} \right)^{\frac{2}{2^*}} \frac{1}{l^{\frac{2^*-2}{2^*}}} + \left(\frac{l_2}{l} \right)^{\frac{2}{2^*}} \frac{1}{l^{\frac{2^*-2}{2^*}}} \right) \\ &\geq \min \left\{ \frac{1}{l^{\frac{2^*-2}{2^*}}}, \frac{1}{l^{\frac{2^*-2}{2^*}}} \right\} S_0 \left(\left(\frac{l_1}{l} \right)^{\frac{2}{2^*}} + \left(\frac{l_2}{l} \right)^{\frac{2}{2^*}} \right) \\ &\geq \min \left\{ \frac{1}{l^{\frac{2^*-2}{2^*}}}, \frac{1}{l^{\frac{2^*-2}{2^*}}} \right\} S_0 \left(\frac{l_1 + l_2}{l} \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &= \min \left\{ \frac{1}{l^{\frac{2^*-2}{2^*}}}, \frac{1}{l^{\frac{2^*-2}{2^*}}} \right\} S_0. \end{aligned}$$

A partir desta desigualdade conseguimos

$$\max\{l^{\frac{2^*-2}{2^*}}, l^{\frac{2_*-2}{2_*}}\} \geq S_0.$$

Isto é,

$$l \geq \max\{S_0^{\frac{2^*-2}{2^*}}, S_0^{\frac{2_*-2}{2_*}}\}. \quad (2.38)$$

Agora, como $2^* > 2_*$, note que

$$c = \frac{l}{2} - \frac{l_1}{2^*} - \frac{l_2}{2_*} \geq \frac{l}{2} - \frac{l}{2^*} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) l \geq \bar{S}$$

o que é uma contradição, conforme o Lema 2.2.2. Logo, $u \neq 0$, como queríamos demonstrar. Portanto, pelo princípio do máximo (ver Seção B.4, Princípio do Máximo Forte, Apêndice B), temos que $u > 0$ em Ω . Isto é, u satisfaz a igualdade (2.4). ■

Observação 2.2.1. A solução u do problema (2.1)-(2.3) obtida acima possui uma propriedade adicional; ou

$$\Phi(u) = c, \quad (2.39)$$

ou

$$\Phi(u) \leq c - \bar{S}. \quad (2.40)$$

De fato, para mostrar isso usaremos as mesmas técnicas como em [12]. Portanto, tomando uma sequência (u_n) como na demonstração acima, tal que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ fracamente em } H^1(\Omega), \\ u_n &\rightarrow u \text{ q.t.p. em } \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Então, definindo $v_n = u_n - u$, temos

$$\Phi(u) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} v_{n+}^{2^*} - \int_{\Omega} F(x, v_{n+}) - \int_{\Omega} G(y, v_{n+}) - \frac{1}{2_*} \int_{\partial\Omega} v_{n+}^{2_*} = c + o(1).$$

Pelo Lema de Brézis-Lieb (Teorema A.7.4, Apêndice A), vem

$$\Phi(u) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} v_{n+}^{2^*} - \frac{1}{2_*} \int_{\partial\Omega} v_{n+}^{2_*} = c + o(1) \quad (2.41)$$

e

$$\int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 - \int_{\Omega} v_{n+}^{2^*} - \int_{\partial\Omega} v_{n+}^{2^*} = o(1). \quad (2.42)$$

Então, passando a uma subsequência, se necessário, obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \rightarrow l, \int_{\Omega} v_{n+}^{2^*} \rightarrow l_1 \text{ e } \int_{\partial\Omega} v_{n+}^{2^*} \rightarrow l_2,$$

onde $l, l_1, l_2 > 0$ são constantes. Portanto, $l = l_1 + l_2$. De (2.41), vem

$$\Phi(u) = c - \frac{l}{2} + \frac{l_1}{2^*} + \frac{l_2}{2_*}. \quad (2.43)$$

Note que

$$\frac{l}{2_*} = \frac{l_1}{2_*} + \frac{l_2}{2_*} > \frac{l_1}{2^*} + \frac{l_2}{2_*},$$

pois $2^* > 2_*$. Com isso e por (2.43), (2.38) e pela estimativa do Lema 2.2.2, obtemos

$$\begin{aligned} \Phi(u) &< c - \frac{l}{2} + \frac{l}{2_*} = c - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) l \leq c - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) \max\{S_0^{\frac{2^*-2}{2^*}}, S_0^{\frac{2_*-2}{2^*}}\} \\ &= c - \bar{S}. \end{aligned}$$

Concluindo (2.40). Ou, por outro lado, de (2.41) e (2.42), temos (2.39).

2.3 Caso côncavo-convexo

Nesta seção, provaremos o Teorema 2.1.2, em que a existência de solução positiva será garantida pelo Princípio Variacional de Ekeland (Teorema B.3.1, Apêndice B). Antes de tudo, vamos apresentar algumas considerações essenciais.

Pela definição do funcional Φ , por (f5) e usando as imersões $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$ com $t = q, 2^*$, e $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\partial\Omega)$ com $r = \tau, 2_*$ (Teorema A.3.3 e A.4.1, Apêndice A), temos

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq \frac{1}{4} \left(\|u\|^2 - 2 \int_{\Omega} (\varrho + a) u^2 \right) + \frac{1}{4} \left(\|u\|^2 - 2 \int_{\partial\Omega} b u^2 \right) \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{\lambda}{q} |u|^q - \int_{\Omega} \frac{|u|^{2^*}}{2^*} - \int_{\partial\Omega} \frac{\mu}{\tau} |u|^\tau - \int_{\partial\Omega} \frac{|u|^{2_*}}{2_*} \\ &\geq C_1 \|u\|^2 - \lambda C_2 \|u\|^q - \mu C_3 \|u\|^\tau - C_4 \|u\|^{2_*} - C_5 \|u\|^{2^*}, \end{aligned}$$

para as constantes positivas C_i ($i = 1, 2, \dots, 5$).

Defina

$$h(t) \doteq h_{\lambda\mu}(t) = C_1 t^2 - \lambda C_2 t^q - \mu C_3 t^\tau - C_4 t^{2_*} - C_5 t^{2^*}.$$

Portanto,

$$\Phi(u) \geq h(\|u\|).$$

Tomemos a função cut-off $\xi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ não-crescente, suave, tal que

$$\xi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \leq R_0 \\ 0 & \text{se } t \geq R_1, \end{cases}$$

onde $0 < R_0 = R_0(\lambda, \mu)$ e $0 < R_1 = R_1(\lambda, \mu)$ são escolhidas tal que

$$h(s) \leq 0 \text{ para } s \in [0, R_0] \text{ e } s \in [R_1, \infty],$$

$$h(s) \geq 0 \text{ para } s \in [R_0, R_1],$$

isto é, R_0 e R_1 serão tomadas como raízes positivas de $h(t)$, de modo que R_0 seja a raiz mais próxima de zero, e R_1 a raiz mais longe de zero.

Agora, pondo $\varphi(u) = \xi(\|u\|)$, $u \in H^1(\Omega)$, defina o funcional truncado

$$\Phi_\varphi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega \left(F(x, \varphi(u)u) + \frac{u^{2^*}}{2^*} \varphi(u) \right) - \int_{\partial\Omega} \left(G(y, \varphi(u)u) + \frac{u^{2^*}}{2^*} \varphi(u) \right),$$

sendo que

$$F(x, \varphi(u)u) = \begin{cases} F(x, u), & \text{se } \|u\| \leq R_0, \\ 0, & \text{se } \|u\| \geq R_1, \end{cases}$$

e

$$G(y, \varphi(u)u) = \begin{cases} G(y, u), & \text{se } \|u\| \leq R_0, \\ 0, & \text{se } \|u\| \geq R_1. \end{cases}$$

Então $\Phi_\varphi \in C^1(B(0, R_0), \mathbb{R})$ (basta observar que $\Phi_\varphi(u) = \Phi(u)$), onde $(B(0, R_0) \subset H^1(\Omega))$ e

$$\Phi_\varphi(u) \geq h_{\lambda\mu\varphi}(\|u\|),$$

em que

$$h_{\lambda\mu\varphi}(t) = C_1 t^2 - \lambda C_2 t^q - \mu C_3 t^\tau - C_4 t^{2^*} \xi(t) - C_5 t^{2^*} \xi(t)$$

e

$$h_{\lambda\mu\varphi}(t) = h_{\lambda\mu}(t), \text{ se } t \leq R_0,$$

$$h_{\lambda\mu\varphi}(t) = C_1 t^2 - \lambda C_2 t^q - \mu C_3 t^\tau, \text{ se } t \geq R_1.$$

Se $\Phi_\varphi(u) \leq 0$, então $\|u\| \leq R_0$ para algum $R_0 > 0$, portanto $\Phi = \Phi_\varphi$. Com efeito, veja que $h_{\lambda\mu\varphi}(t) \leq 0$ somente se $t \leq R_0$

O próximo Lema nos dá as condições de compacidade para a prova do Teorema 2.1.2.

Lema 2.3.1. *Para $\lambda, \mu > 0$ suficientemente pequenos, Φ_φ satisfaz a condição $(PS)_c$, a saber, toda sequência $(u_k) \subset H^1(\Omega)$ satisfazendo $\Phi_\varphi(u_k) \rightarrow c$ e $\Phi'_\varphi(u_k) \rightarrow 0$ em $H^{-1}(\Omega)$ é relativamente compacta, para $c \in (-\bar{S}, 0)$ e $\lambda, \mu > 0$ pequenos o suficiente.*

Demonstração. De acordo com as observações acima, vamos provar o Lema para $\lambda, \mu > 0$ pequenos o suficiente tal que

$$\Phi_\varphi(u) \geq h_{\lambda\mu\varphi}(\|u\|) \geq -\bar{S}. \quad (2.44)$$

Seja $(u_k) \subset H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \Phi_\varphi(u_k) &= \Phi(u_k) \rightarrow c \text{ quando } k \rightarrow \infty, \\ \Phi'_\varphi(u_k) &= \Phi'(u_k) \rightarrow 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega) \text{ quando } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

com $\|u_k\| \leq R_0$. Então, podemos assumir que

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u \text{ fracamente em } L^{2^*}(\Omega) \text{ e } L^{2^*}(\partial\Omega), \\ u_k &\rightarrow u \text{ fortemente em } L^q(\Omega) \text{ e } L^\tau(\partial\Omega), \\ u_k &\rightarrow u \text{ q.t.p. em } \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Portanto, da definição Φ vem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 - \int_{\Omega} \left(\frac{a}{2} u_k^2 + F_1(x, u_k) + \frac{|u_k|^{2^*}}{2^*} \right) \\ - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{b}{2} u_k^2 + G_1(y, u_k) + \frac{|u_k|^{2^*}}{2^*} \right) = c + o(1), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_k|^2 + \varrho |u_k|^2) - \int_{\Omega} \left(\frac{a}{2} |u_k|^2 + F_1(x, u_k) + \frac{|u_k|^{2^*}}{2^*} \right) - \int_{\Omega} \varrho u_{k+}^2 \\ - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{b}{2} |u_k|^2 + G_1(y, u_k) + \frac{|u_k|^{2^*}}{2^*} \right) = c + o(1), \end{aligned} \quad (2.45)$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u_k + \varrho u_k - (a u_k + f_1(x, u_k) + |u_k|^{2^*-2} u_k) - \varrho u_{k+} = \eta_k, \\ \frac{\partial u_k}{\partial \nu} - (b u_k + g_1(y, u_k) + |u_k|^{2^*-2} u_k) = \nu_k, \end{cases}$$

onde $\eta_k, \nu_k \rightarrow 0$ em $H^{-1}(\Omega)$. Isto é, $\Phi'_\varphi(u)u = 0$.

Tomando $v_k = u_k - u$, vem

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 \right] + \frac{\varrho}{2} \left[\int_{\Omega} (|u|^2 + |v_k|^2) \right] - \frac{a}{2} \left[\int_{\Omega} (|u|^2 + |v_k|^2) \right] \\ & - \int_{\Omega} F_1(x, u + v_k) - \frac{1}{2^*} \left[\int_{\Omega} (|u|^{2^*} + |v_k|^{2^*}) \right] - \varrho \left[\int_{\Omega} (u_+^2 + (v_k)_+^2) \right] \\ & - \frac{b}{2} \left[\int_{\partial\Omega} (|u|^2 + |v_k|^2) \right] - \int_{\partial\Omega} G_1(y, u + v_k) - \frac{1}{2_*} \left[\int_{\partial\Omega} (|u|^{2_*} + |v_k|^{2_*}) \right] + o(1) = c + o(1), \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\varrho}{2} \int_{\Omega} |u|^2 + \frac{\varrho}{2} \int_{\Omega} |v_k|^2 - \frac{a}{2} \int_{\Omega} |u|^2 - \frac{a}{2} \int_{\Omega} |v_k|^2 - \int_{\Omega} F_1(x, u + v_k) \\ & - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |u|^{2^*} - \varrho \int_{\Omega} u_+^2 - \varrho \int_{\Omega} (v_k)_+^2 - \frac{b}{2} \int_{\partial\Omega} |u|^2 - \frac{b}{2} \int_{\partial\Omega} |v_k|^2 - \int_{\partial\Omega} G_1(y, u + v_k) \\ & - \frac{1}{2_*} \int_{\partial\Omega} |u|^{2_*} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |v_k|^{2^*} - \frac{1}{2_*} \int_{\partial\Omega} |v_k|^{2_*} + o(1) = c + o(1). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \Phi_\varphi(u) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\varrho}{2} \int_{\Omega} |u|^2 - \frac{a}{2} \int_{\Omega} |u|^2 - \int_{\Omega} F_1(x, u) - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |u|^{2^*} - \varrho \int_{\Omega} u_+^2 \\ & - \frac{b}{2} \int_{\partial\Omega} |u|^2 - \int_{\partial\Omega} G_1(y, u) - \frac{1}{2_*} \int_{\partial\Omega} |u|^{2_*}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} & \Phi_\varphi(u) + \frac{\varrho}{2} \int_{\Omega} |v_k|^2 - \frac{a}{2} \int_{\Omega} |v_k|^2 - \int_{\Omega} F_1(x, v_k) - \varrho \int_{\Omega} (v_k)_+^2 - \frac{b}{2} \int_{\partial\Omega} |v_k|^2 \\ & - \int_{\partial\Omega} G_1(y, v_k) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |v_k|^{2^*} - \frac{1}{2_*} \int_{\partial\Omega} |v_k|^{2_*} + o(1) = c + o(1). \end{aligned}$$

Portanto, do Lema de Brézis-Lieb (Teorema A.7.4), temos

$$\Phi_\varphi(u) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |v_k|^{2^*} - \frac{1}{2_*} \int_{\partial\Omega} |v_k|^{2_*} = c + o(1), \quad (2.46)$$

e (note que $\Phi'_\varphi(u_k) \rightarrow 0$ em $H^{-1}(\Omega)$)

$$\int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 - \int_{\Omega} |v_k|^{2^*} - \int_{\partial\Omega} |v_k|^{2_*} = o(1). \quad (2.47)$$

Agora, fazendo (2.46) $- \frac{1}{2^*}(2.47)$ e (2.46) $- \frac{1}{2_*}(2.47)$, obtemos

$$\frac{1}{N} \int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 = \left(\frac{1}{2_*} - \frac{1}{2^*} \right) \int_{\partial\Omega} |v_k|^{2_*} + c + o(1) - \Phi_\varphi(u), \quad (2.48)$$

$$\frac{1}{2(N-1)} \int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 = \left(\frac{1}{2_*} - \frac{1}{2^*} \right) \int_{\Omega} |v_k|^{2^*} + c + o(1) - \Phi_\varphi(u). \quad (2.49)$$

De (2.48) e (2.49), podemos supor (passando a uma subsequência se necessário) que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 &\rightarrow l \geq 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty, \\ \int_{\Omega} |v_k|^{2^*} &\rightarrow l_1 \geq 0, \int_{\partial\Omega} |v_k|^{2_*} \rightarrow l_2 \geq 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Além disso, de (2.47) temos $l = l_1 + l_2$.

De (2.46), vem

$$\Phi_{\varphi}(u) = c - \frac{l}{2} + \frac{l_1}{2^*} + \frac{l_2}{2_*} < c - \frac{l}{2} + \frac{l}{2_*},$$

pois $2^* > 2_*$. Conforme a estimativa do Lema 2.2.2 e de (2.38), temos

$$c \leq \bar{S} \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*} \right) l \Rightarrow \frac{l}{2_*} - \frac{l}{2} \leq -\bar{S},$$

logo

$$\Phi_{\varphi}(u) \leq c - \bar{S}.$$

Por outro lado, combinando esta última desigualdade com (2.44), concluímos que $c > 0$, o que é uma contradição, pois $c \in (-\bar{S}, 0)$. Isto completa a demonstração do Lema 2.3.1. ■

2.3.1 Demonstração do Teorema 2.1.2

Demonstração. Para $\lambda, \mu > 0$ suficientemente pequenos, aplicando o Princípio Variacional de Ekeland (Teorema B.3.1, Apêndice B) para o funcional Φ_{φ} , podemos encontrar um mínimo global $u \in H^1(\Omega)$ para Φ_{φ} , isto é,

$$\Phi_{\varphi}(u) = \inf_{H^1(\Omega)} \Phi_{\varphi} = \Phi_{\varphi}(|u|).$$

Portanto, pelo princípio do máximo (ver Seção B.4, Princípio do Máximo Forte, Apêndice B), temos que $u > 0$ em Ω . ■

Apêndice A

Resultados Gerais do Capítulo 1

Neste Apêndice apresentaremos os resultados usados ao longo do Capítulo 1. Quando necessário, faremos as demonstrações, caso contrário, apenas o referenciamos.

A.1 Resultados demonstrados

Lema A.1.1. *O funcional $\phi : (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p}) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $\phi(u) = \|u\|_c$, é contínuo e convexo.*

Demonstração. Provemos a continuidade de ϕ . Para isso, seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então, por $c \in L^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\phi(u)^p = \|u\|_c^p &= \int_{\Omega} [|\nabla u|^p + c(x)|u|^p] \\ &= \|\nabla u\|_p^p + \int_{\Omega} c(x)|u|^p \\ &\leq \max\{1, \|c(x)\|_{\infty}\} \|u\|_{1,p}^p.\end{aligned}$$

Portanto, ao denotarmos $A = \max\{1, \|c(x)\|_{\infty}\}^{\frac{1}{p}}$, que é uma constante positiva, temos

$$\|u\|_c \leq A \|u\|_{1,p}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad (\text{A.1})$$

daí segue a continuidade de ϕ . A prova da convexidade de ϕ é imediata, pois $\|\cdot\|_c$ define uma norma em $W^{1,p}(\Omega)$. ■

Observação A.1.1. Como o funcional ϕ é contínuo e convexo, segue que ele é fracamente sequencialmente contínuo (isto é: $u_m \rightharpoonup u \Rightarrow \phi(u_m) \rightarrow \phi(u)$) em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$. Logo, toda sequência (u_m) , tal que $u_m \rightharpoonup u$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ satisfaz (ver Teorema 1.4 em [19])

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \phi(u_n) \geq \phi(u). \quad (\text{A.2})$$

O Lema a seguir terá sua aplicação quando demonstrarmos a equivalência das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ em $W^{1,p}(\Omega)$ (Proposição A.1.3).

Lema A.1.2. *Existe $\delta > 0$, tal que*

$$\|u\|_c^p \geq \delta \|u\|_p^p, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega). \quad (\text{A.3})$$

Demonstração. Sejam $S = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\|_p = 1\}$ e $\delta = \inf_{u \in S} \|u\|_c^p$.

Afirmção 1. Existe $\hat{u} \in S$, tal que $\|\hat{u}\|_c^p = \delta$.

Com efeito, da definição de ínfimo, existe uma sequência (u_m) em S , tal que

$$\|u_m\|_c^p \rightarrow \delta, \quad \text{quando } m \rightarrow +\infty \text{ e } \|u\|_c^p < \delta + 1. \quad (\text{A.4})$$

Agora, visto que $\|u_m\|_{1,p}^p = \|\nabla u_m\|_p^p + \|u_m\|_p^p$ e $u_m \in S$, então $\|u_m\|_{1,p}^p = \|\nabla u_m\|_p^p + 1$. Assim, em virtude da validade de (P1), $\|u_m\|_c^p \geq \|u_m\|_{1,p}^p - 1$. De onde segue que $\|u_m\|_{1,p}^p \leq \delta + 2$, ou seja, a sequência (u_m) é limitada em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$. Com isso e pelo fato de $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ ser um espaço reflexivo, existem uma subsequência (u_{m_k}) de (u_m) e $\hat{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ (Teorema A.3.5), tais que

$$u_{m_k} \rightharpoonup \hat{u} \quad \text{em } (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p}). \quad (\text{A.5})$$

Por isso e por (A.4), segue da Observação A.1.1 que

$$\|\hat{u}\|_c \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_{m_k}\|_c = \delta^{\frac{1}{p}}.$$

Ainda, pela validade de (A.5), concluímos, devido ao Teorema A.3.3, que $u_{m_k} \rightarrow \hat{u}$ em $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$. Consequentemente, em razão de $u_{m_k} \in S$ e da continuidade da norma $\|\cdot\|_p$, vem $\hat{u} \in S$. Com isso e por $\|\hat{u}\|_c \leq \delta^{\frac{1}{p}}$, temos $\delta = \|\hat{u}\|_c^p$, ficando provada a Afirmção.

Afirmção 2. $\delta > 0$.

De fato, se $\delta = 0$, então, pela Afirmção anterior, $\|\hat{u}\|_c^p = 0$. Consequentemente, $\hat{u} = 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, o que é um absurdo, pois $\hat{u} \in S$. Provando a Afirmção.

Agora estamos prontos a demonstrar a desigualdade (A.3). Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ for tal que $u = 0$ em $W^{1,p}(\Omega)$, então a relação em (A.3) é verificada. Caso $u \in W^{1,p}(\Omega)$ seja não trivial, então consideremos $v = \frac{u}{\|u\|_p} \in W^{1,p}(\Omega)$. Assim, $\|v\|_p = 1$, isto é, $v \in S$. Logo, $\|v\|_c^p \geq \delta$. De onde segue que $\|u\|_c^p \geq \delta \|u\|_p^p$. Concluindo a demonstração. ■

Proposição A.1.3. *As normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ são equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então, como c satisfaz a condição (P1), $\|u\|_{1,p}^p \leq \|u\|_c^p + \|u\|_p^p$. Consequentemente, devido a desigualdade A.3, dada no Lema A.1.2, $\|u\|_{1,p}^p \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \|u\|_c^p$, de onde vem que

$$\|u\|_{1,p} \leq \sqrt[p]{\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)} \|u\|_c$$

Por isso e pela validade da desigualdade (A.1), segue a equivalência das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ em $W^{1,p}(\Omega)$. ■

Proposição A.1.4. *O espaço $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é reflexivo.*

Demonstração. Pela Proposição 1.1.1, o espaço $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é uniformemente convexo. Assim, pelo Teorema de Milman-Pettis (Teorema A.3.4), $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$ é um espaço reflexivo. ■

A seguir, vamos apresentar alguns resultados relevantes que não serão demonstrados, todavia terão suas aplicabilidades na demonstração da Proposição A.1.7.

Consideremos o operador $\varphi : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow [L^{p'}(\Omega)]^N$, definido por

$$\varphi(u) = |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \tag{A.6}$$

onde $W^{1,p}(\Omega)$ está munido da norma $\|\cdot\|_c$ e $[L^{p'}(\Omega)]^N$, da norma

$$\|U\|_{p'} = \|u_1\|_{p'} + \dots + \|u_N\|_{p'}, \quad \forall U = (u_1, \dots, u_N) \in [L^{p'}(\Omega)]^N.$$

Além disso, p' representa o expoente conjugado de p .

Lema A.1.5. *O operador φ é contínuo.*

Demonstração. Ver [21]. ■

Agora, consideremos os seguintes operadores $\Psi_c : (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c) \longrightarrow L^{p'}(\Omega)$ e $\Psi : (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c) \longrightarrow L^{p'}(\partial\Omega)$, definidos por

$$\Psi_c(u) = c(x)|u|^{p-2}u \quad \text{e} \quad \Psi(u) = |u|^{p-2}u. \tag{A.7}$$

Lema A.1.6. Os operadores Ψ_c e Ψ são contínuos.

Demonstração. Ver [21]. ■

Proposição A.1.7. Os funcionais $\Upsilon_c, \tilde{\delta}, \beta : (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c) \longrightarrow \mathbb{R}$, definidos por

$$\Upsilon_c(u) = \|u\|_c^p, \quad \tilde{\delta}(u) = \|u\|_p^p - 1 \quad e \quad \beta(u) = \|u\|_{p,\partial}^p$$

são de classe $C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, onde

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad e \quad \|u\|_{p,\partial} = \left(\int_{\partial\Omega} |u|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}$$

são normas em $L^p(\Omega)$ e $L^p(\partial\Omega)$, respectivamente. Além disso, possuem como derivadas de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\Upsilon'_c(u)(v) = p \int_{\Omega} [|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + c(x) |u|^{p-2} uv] dx, \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{\delta}'(u)(v) = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx \quad e \quad (\text{A.9})$$

$$\beta'(u)(v) = p \int_{\partial\Omega} |u|^{p-2} uv d\sigma. \quad (\text{A.10})$$

Por fim, β é um funcional fracamente sequencialmente contínuo sobre $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$.

Demonstração. Provaremos esta Proposição em quatro etapas.

Etapa 1: $\Upsilon_c \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a expressão (A.8).

De fato, temos, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\Upsilon_c(u) = A(u) + B(u)$, onde $A(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx$ e $B(u) = \int_{\Omega} c(x) |u|^p dx$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$. Vamos mostrar que $A, B \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, o que implicará em $\Upsilon_c \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmção 1. $A \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.

Com efeito, seja $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por $F(x, y) = p \int_0^{|y|} s^{p-1} ds$, $\forall (x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$. Assim, para $0 < h < 1$ e $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \frac{A(u + hv) - A(u)}{h} &= \int_{\Omega} \frac{|\nabla u(x) + h \nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{h} dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{F(x, \nabla u(x) + h \nabla v(x)) - F(x, \nabla u(x))}{h} dx. \end{aligned}$$

Ainda, dado $x \in \Omega$, pelo Teorema do Valor Médio (Teorema A.7.1), existe $\lambda \in (0, 1)$, tal que

$$\begin{aligned} \frac{F(x, \nabla u(x) + h \nabla v(x)) - F(x, \nabla u(x))}{h} &= \frac{|\nabla u(x) + h \nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{h} \\ &= p |\nabla u(x) + \lambda h \nabla v(x)|^{p-2} (\nabla u(x) + \lambda h \nabla v(x)) \nabla v(x) \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \left| \frac{|\nabla u(x) + h\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{h} \right| &= |p||\nabla u(x) + \lambda h\nabla v(x)|^{p-1}|\nabla v(x)| \\ &\leq p|\nabla u(x) + \nabla v(x)|^{p-1}|\nabla v(x)|, \end{aligned}$$

com $|\lambda h| < 1$. Desde que

$$(\nabla u(x) + \nabla v(x))^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \quad e \quad \nabla v(x) \in L^p(\Omega),$$

temos, pela Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.4), para os expoentes p e $\frac{p}{p-1}$ que

$$p(\nabla u(x) + \nabla v(x))^{p-1}\nabla v(x) \in L^1(\Omega).$$

Logo, em razão do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.7.3), vem

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(u + hv) - A(u)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\int_{\Omega} \frac{|\nabla u(x) + h\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{h} dx \right] \\ &= \int_{\Omega} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{F(x, \nabla u(x) + h\nabla v(x)) - F(x, \nabla u(x))}{h} \right] dx \\ &= p \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx. \end{aligned}$$

Argumentando de maneira semelhante, porém considerando $-1 < h < 0$, podemos mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{A(u + hv) - A(u)}{h} = p \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx.$$

Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(u + hv) - A(u)}{h} = p \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx.$$

Temos, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ fixado, que o funcional $T_u : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $T_u(v) = p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx$, $\forall v \in W^{1,p}(\Omega)$, é liner e limitado. Provemos a limitação de T_u . Segue, das Desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^N$ e de Hölder (Teorema A.2.4), que

$$\begin{aligned} |T_u(v)| &= \left| p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx \right| \leq p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} |\nabla u| |\nabla v| dx = p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| dx \\ &\leq p \| |\nabla u| \|_p^{p-1} \| |\nabla v| \|_p \\ &\leq p \|u\|_c^{p-1} \|v\|_c. \end{aligned}$$

Consequentemente, T_u é limitado. A linearidade de T_u é imediata. E assim, o funcional A é diferenciável a Gateaux em $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tendo como derivada de Gateaux em u , $A'(u) = T_u$. Finalmente, mostremos que $A' : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow [W^{1,p}(\Omega)]^*$, definido por $A'(u) = T_u$, é um operador contínuo. Para isso, seja (u_n) uma sequência em $W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tais que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c). \quad (\text{A.11})$$

Agora, para $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, como em (A.6), temos

$$\begin{aligned} |T_{u_n}(v) - T_u(v)| &= \left| p \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v dx - p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx \right| \\ &\leq p \int_{\Omega} ||\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u| |\nabla v| dx \\ &= p \int_{\Omega} |\varphi(u_n) - \varphi(u)| |\nabla v| dx. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Note que, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e, em razão das normas em $\mathbb{R}^N$ serem equivalentes, conseguimos constantes $K_1, K > 0$, tais que

$$\begin{aligned} |||\varphi(u_n) - \varphi(u)|||_{p'} &= \left[\int_{\Omega} |\varphi(u_n) - \varphi(u)|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^N |\varphi_i(u_n) - \varphi_i(u)| \right]^{p'} dx \right\}^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq K_1 \left[\sum_{i=1}^N \|\varphi_i(u_n) - \varphi_i(u)\|_{p'}^{p'} \right]^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq K \sum_{i=1}^N \|\varphi_i(u_n) - \varphi_i(u)\|_{p'} \\ &= K |||\varphi(u_n) - \varphi(u)|||_{p'}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$|||\varphi(u_n) - \varphi(u)|||_{p'} \leq K |||\varphi(u_n) - \varphi(u)|||_{p'}. \quad (\text{A.13})$$

Deste modo, $|\varphi(u_n) - \varphi(u)| \in L^{p'}(\Omega)$ e $|\nabla v| \in L^p(\Omega)$. Assim, ao aplicarmos a Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.4) em (A.12) e utilizarmos a desigualdade (A.13), obtemos

$$\begin{aligned} |T_{u_n}(v) - T_u(v)| &\leq p \int_{\Omega} |\varphi(u_n) - \varphi(u)| |\nabla v| dx \\ &\leq p |||\varphi(u_n) - \varphi(u)|||_{p'} \|\nabla v\|_p \\ &\leq pK |||\varphi(u_n) - \varphi(u)|||_{p'} \|\nabla v\|_p. \end{aligned}$$

E, como $\|\nabla v\|_p^p \leq \|v\|_c^p$, temos $|T_{u_n}(v) - T_u(v)| \leq pK\|\varphi(u_n) - \varphi(u)\|_{p'}\|v\|_c$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned}\|A'(u_n) - A'(u)\|_c^* &= \sup\{|A'(u_n)(v) - A'(u)(v)| : v \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e } \|v\|_c = 1\} \\ &= \sup\{|T_{u_n}(v) - T_u(v)| : v \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e } \|v\|_c = 1\} \\ &\leq pK\|\varphi(u_n) - \varphi(u)\|_{p'}.\end{aligned}$$

Isto é,

$$\|A'(u_n) - A'(u)\|_c^* \leq pK\|\varphi(u_n) - \varphi(u)\|_{p'}.$$

Finalmente, por φ ser contínuo (Lema A.1.5) e por (A.11), $\|\varphi(u_n) - \varphi(u)\|_{p'} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow +\infty$. Portanto, $A'(u_n) \rightarrow A'(u)$ em $(W^{1,p}(\Omega)^*, \|\cdot\|_c^*)$, ou seja, o operador A' é contínuo. Com isso e devido à Proposição A.5.2, $A \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmção 2. $B \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.

De fato, para $0 < h < 1$ e $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\frac{B(u + hv) - B(u)}{h} = \int_{\Omega} \frac{c(x)[|u(x) + hv(x)|^p - |u(x)|^p]}{h} dx.$$

Mas, dado $x \in \Omega$, pelo Teorema do Valor Médio (Teorema A.7.1), existe $\lambda \in (0, 1)$, tal que

$$\begin{aligned}\left| \frac{c(x)[|u(x) + hv(x)|^p - |u(x)|^p]}{h} \right| &= |pc(x)|u(x) + \lambda hv(x)|^{p-2}(u(x) + \lambda hv(x))v(x)| \\ &= p|c(x)||u(x) + \lambda hv(x)|^{p-1}|v(x)| \\ &\leq p\|c(x)\|_{\infty}|u(x) + v(x)|^{p-1}|v(x)|,\end{aligned}$$

com $|\lambda h| < 1$. Argumentando analogamente como na Afirmção anterior, temos

$$p\|c(x)\|_{\infty}|u(x) + v(x)|^{p-1}|v(x)| \in L^1(\Omega).$$

Deste modo, em razão ao Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.7.3), vem

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{B(u + hv) - B(u)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\int_{\Omega} \frac{c(x)[|u(x) + hv(x)|^p - |u(x)|^p]}{h} dx \right] \\ &= \int_{\Omega} c(x) \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{|u(x) + hv(x)|^p - |u(x)|^p}{h} \right] dx \\ &= p \int_{\Omega} c(x)|u(x)|^{p-2}u(x)v(x) dx.\end{aligned}$$

Por outro lado, considerando $-1 < h < 0$, podemos mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{B(u + hv) - B(u)}{h} = p \int_{\Omega} c(x) |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx.$$

Consequentemente,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{B(u + hv) - B(u)}{h} = p \int_{\Omega} c(x) |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx.$$

Ainda, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ fixado, o funcional $S_u : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $S_u(v) = p \int_{\Omega} c(x) |u|^{p-2} u v dx$, $\forall v \in W^{1,p}(\Omega)$, é linear e limitado. A limitação segue da Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.4), pois

$$\begin{aligned} |S_u(v)| &\leq p \|c(x)\|_{\infty} \int_{\Omega} |u(x)|^{p-1} |v(x)| dx \leq p \|c(x)\|_{\infty} \|u\|_p^{p-1} \|v\|_p \\ &\leq p \|c(x)\|_{\infty} \|u\|_c^{p-1} \|v\|_c. \end{aligned}$$

A linearidade de S_u é imediata. Logo, o funcional B é diferenciável a Gateaux em $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tendo como derivada de Gateaux em u , $B'(u) = S_u$. Provemos que o operador $B' : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow [W^{1,p}(\Omega)]^*$, definido por $B'(u) = S_u$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$ é contínuo. Para isso, sejam u_n uma sequência em $W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tais que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c). \quad (\text{A.14})$$

Também, para $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e Ψ_c como em (A.7), temos, devido a Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.4), ao Teorema A.3.3 e às normas $\|\cdot\|_{1,p}$, $\|\cdot\|_c$ serem equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, que existe uma constante $D_2 > 0$, tal que

$$|S_{u_n}(v) - S_u(v)| \leq p \|\Psi_c(u_n) - \Psi_c(u)\|_{p'} \|v\|_p \leq p D_2 \|\Psi_c(u_n) - \Psi_c(u)\|_{p'} \|v\|_c. \quad (\text{A.15})$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|B'(u_n) - B'(u)\|_c^* &= \sup\{|B'(u_n)(v) - B'(u)(v)| : v \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e } \|v\|_c = 1\} \\ &= \sup\{|S_{u_n}(v) - S_u(v)| : v \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e } \|v\|_c = 1\} \\ &\leq p D_2 \|\Psi_c(u_n) - \Psi_c(u)\|_{p'}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\|B'(u_n) - B'(u)\|_c^* \leq p D_2 \|\Psi_c(u_n) - \Psi_c(u)\|_{p'}.$$

Por conseguinte, pela continuidade de Ψ_c (Lema A.1.6) e por (A.14), $\|\Psi_c(u_n) - \Psi_c(u)\|_{p'} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow +\infty$. Portanto, $B'(u_n) \rightarrow B'(u)$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c^*)$. Daí segue a continuidade de B' . Com isso e pela Proposição A.5.2, concluímos que $B \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.

Etapa 2: $\beta \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a expressão (A.10).

Para provarmos que $\beta \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, repetimos a prova feita na Afirmação 2 da Etapa 1, considerando $c(x) = 1$ e $\partial\Omega$, $\|\cdot\|_{p,\partial}$, $\|\cdot\|_{p',\partial}$, β , Ψ e Teorema A.4.1 no lugar de Ω , $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_{p'}$, B , Ψ_c e Teorema A.3.3, respectivamente.

Etapa 3: $\tilde{\delta} \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a expressão (A.9).

Notemos que $\tilde{\delta}(u) = \|c(x)u\|_p^p - 1$, com $c(x) = 1$. Daí segue, analogamente, pela Afirmação 2 da Etapa 1 e pelos funcionais constantes serem de classe C^∞ , o resultado requerido.

Etapa 4: β é um funcional fracamente sequencialmente contínuo sobre $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. De fato, sejam (u_m) uma sequência em $W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tais que $u_m \rightharpoonup u$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Por isso e pela compacidade do operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^p(\partial\Omega)$ (Teorema A.4.1),

$$u_m \rightarrow u \text{ em } (L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{p,\partial}). \quad (\text{A.16})$$

Daí, $u_m(x) \rightarrow u(x)$, quando $m \rightarrow +\infty$ para quase todo ponto $x \in \partial\Omega$. Com isso e devido à sequência (u_m) ser limitada em $(L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{p,\partial})$ (por (A.16)), segue, pelo Lema de Brézis-Lieb (Teorema A.7.4), que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} [|u_m - u|^p + |u_m|^p - |u|^p] d\sigma = 0.$$

Por conseguinte, ainda por (A.16),

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |\beta(u_m) - \beta(u)| = \left| \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\int_{\partial\Omega} (|u_m - u|^p + |u_m|^p - |u|^p) d\sigma - \|u_m - u\|_{p,\partial}^p \right] \right| = 0.$$

Portanto, $\beta(u_m) \rightarrow \beta(u)$ em $\mathbb{R}$, quando $m \rightarrow +\infty$. Provando o que queríamos. ■

Proposição A.1.8. *Suponhamos válidas as condições (P1)-(P4). Então $I_p \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$,*

$$I'_p(u)(v) = \int_{\Omega} [|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + c(x)|u|^{p-2} uv] dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx - \int_{\partial\Omega} g(x, u) v d\sigma,$$

para qualquer $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Notemos que $I_p(u) = L_1(u) - L_2(u) - L_3(u)$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, onde $L_1(u) = \frac{1}{p} \Upsilon_c(u)$, $L_2(u) = \int_{\partial\Omega} G(x, u) d\sigma$ e $L_3(u) = \int_{\Omega} F(x, u) dx$. Pela Proposição A.1.7, segue-se

que $\Upsilon_c \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é dada por (A.8). Consequentemente, como $L_1(u) = \frac{1}{p}\Upsilon_c(u)$, vem $L_1 \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é dada por

$$L'_1(u)(v) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x) |u|^{p-2} u v dx, \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \quad (\text{A.17})$$

Afirmção 1. $L_2 \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $L'_2(u)(v) = \int_{\partial\Omega} g(x, u) v d\sigma$, $\forall v \in W^{1,p}(\Omega)$.

De fato, para $0 < h < 1$ e $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\frac{L_2(u + hv) - L_2(u)}{h} = \int_{\partial\Omega} \frac{G(x, u(x) + hv(x)) - G(x, u(x))}{h} d\sigma.$$

Ainda, dado $x \in \partial\Omega$, pelo Teorema do Valor Médio (Teorema A.7.1), existe $\lambda \in (0, 1)$, tal que

$$\begin{aligned} \frac{|G(x, u(x) + hv(x)) - G(x, u(x))|}{|h|} &= |g(x, u(x) + \lambda v(x))| |v(x)| \\ &\leq [a_1 + a_2 |u(x) + \lambda v(x)|^s] |v(x)| \\ &\leq K_1 [|v(x)| + |u(x)|^s |v(x)| + |v(x)|^{s+1}] \\ &\doteq P(u, v), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

onde $K_1 > 0$ é uma constante. Agora, como $1 < p < p_*^1(N)$, o operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^p(\partial\Omega)$ é contínuo (Teorema A.4.1). Por conseguinte, existe uma constante $\widehat{K} > 0$, tal que

$$\int_{\partial\Omega} |v| d\sigma \leq |\Omega|_{\sigma}^{p'} \|v\|_{p, \partial} \leq \widehat{K} |\Omega|_{\sigma}^{p'} \|v\|_{1, p}.$$

Com isso e pela equivalência das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1, p}$ em $W^{1,p}(\Omega)$, existe uma constante $\widehat{K}_1 > 0$, tal que

$$\int_{\partial\Omega} |v| d\sigma \leq \widehat{K}_1 |\Omega|_{\sigma}^{p'} \|v\|_c < \infty. \quad (\text{A.19})$$

Já, pela hipótese (P3), $1 < s + 1 < p_*^1(N)$. Logo, o operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^{s+1}(\partial\Omega)$ é contínuo (Teorema A.4.1). Assim, pela Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.4) e pelo fato das normas $\|\cdot\|_c$, $\|\cdot\|_{1, p}$ serem equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, existem constantes positivas $\widehat{K}_2, \widehat{K}_3, \widehat{K}_4, \widehat{K}_5$, tais que

$$\int_{\partial\Omega} |u|^s |v| d\sigma \leq \|u\|_{s+1, \partial}^{\frac{s}{s+1}} \|v\|_{s+1, \partial} \leq \widehat{K}_2 \|u\|_{1, p}^{\frac{s}{s+1}} \|v\|_{1, p} \leq \widehat{K}_3 \|u\|_c^{\frac{s+1}{s}} \|v\|_c < \infty. \quad (\text{A.20})$$

e

$$\int_{\partial\Omega} |v|^{s+1} d\sigma = \|v\|_{s+1, \partial\Omega}^{s+1} \leq \widehat{K}_4 \|v\|_{1,p}^{s+1} \leq \widehat{K}_5 \|v\|_c^{s+1} < \infty. \quad (\text{A.21})$$

Devido à validade de (A.19), (A.20) e (A.21), concluímos que $P(u, v) \in L^1(\partial\Omega)$. Segue, por (A.18), ao aplicarmos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.7.3), que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{L_2(u + hv) - L_2(u)}{h} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{G(x, u(x) + hv(x)) - G(x, u(x))}{h} d\sigma \right] \\ &= \int_{\partial\Omega} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{G(x, u(x) + hv(x)) - G(x, u(x))}{h} \right] d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} g(x, u(x))v(x) d\sigma. \end{aligned}$$

Analogamente, porém considerando $-1 < h < 0$, mostra-se que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \left[\frac{L_2(u + hv) - L_2(u)}{h} \right] = \int_{\partial\Omega} g(x, u(x))v(x) d\sigma.$$

Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{L_2(u + hv) - L_2(u)}{h} \right] = \int_{\partial\Omega} g(x, u(x))v(x) d\sigma.$$

No que segue, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ fixado, definimos o funcional $S_u : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, por $S_u(v) = \int_{\partial\Omega} g(x, u)v d\sigma$, $\forall v \in W^{1,p}(\Omega)$. Este funcional é linear e limitado. Com efeito, a linearidade de S_u é imediata. Provemos a limitação de S_u . Ora, devido à Desigualdade de Hölder (Teorema A.2.4), à continuidade do operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^{s+1}(\partial\Omega)$ (Teorema A.4.1), à boa definição do operador N_g (Observação 1.2.2) e ao fato das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ serem equivalentes em $W^{1,p}(\Omega)$, existe uma constante $\tilde{K} > 0$, tal que

$$\begin{aligned} |S_u(v)| &= \left| \int_{\partial\Omega} g(x, u(x))v(x) d\sigma \right| \leq \int_{\partial\Omega} |g(x, u(x))||v(x)| d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} |N_g(u)||v(x)| d\sigma \leq \|N_g(u)\|_{(\frac{s+1}{s}, \partial)} \|v\|_{s+1, \partial} \\ &\leq \tilde{K} \|N_g(u)\|_{(\frac{s+1}{s}, \partial)} \|v\|_c. \end{aligned}$$

Logo, S_u é limitado. Deste modo, o funcional L_2 é diferenciável a Gateaux em $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tendo como derivada de Gateaux em u , $L'_2(u) = S_u$. Provaremos, agora, a continuidade do operador $L'_2 : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow [W^{1,p}(\Omega)]^*$, o qual é definido por $L'_2(u) = S_u$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$. Para isso, consideremos (u_n) uma sequência em $W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tais que $u_n \rightarrow u$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_c)$. Daí, pelo fato das normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ serem equivalentes em

$W^{1,p}(\Omega)$, vem $u_n \rightarrow u$ em $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$. Por isso e pela continuidade do operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^{s+1}(\partial\Omega)$ (Teorema A.4.1), vem $u_n \rightarrow u$ em $(L^{s+1}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{s+1,\partial})$. Assim, por causa da continuidade do operador $N_g : L^{s+1}(\partial\Omega) \rightarrow L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega)$, temos $N_g(u_n) \rightarrow N_g(u)$ em $(L^{\frac{s+1}{s}}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{(\frac{s+1}{s}),\partial})$. Deste modo, existe uma constante $\tilde{K}_1 > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\|L'_2(u_n) - L'_2(u)\|_c^* &= \sup_{\|v\|_c=1} |L'_2(u_n) - L'_2(u)| \\
&\leq \sup_{\|v\|_c=1} \int_{\partial\Omega} |g(x, u_n) - g(x, u)| |v| d\sigma \\
&\leq \sup_{\|v\|_c=1} \|N_g(u_n) - N_g(u)\|_{(\frac{s+1}{s}),\partial} \|v\|_{s+1,\partial} \\
&\leq \tilde{K}_1 \sup_{\|v\|_c=1} \|N_g(u_n) - N_g(u)\|_{(\frac{s+1}{s}),\partial} \|v\|_c \\
&= \tilde{K}_1 \|N_g(u_n) - N_g(u)\|_{(\frac{s+1}{s}),\partial} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, L'_2 é um operador contínuo. Pela Proposição A.5.2, segue que $L_2 \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$, S_u , como queríamos.

Afirmção 2. $L_3 \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é dado por $L'_3(u)(v) = \int_{\Omega} f(x, u) v dx$, $\forall v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Segue de forma análoga como na afirmação anterior.

Agora, devido a validade das duas afirmações anteriores, e a validade de (A.17), a Proposição fica provada. ■

Observação A.1.2. Pela Afirmção 1 e 2 da demonstração da Proposição A.1.8, concluímos pela Proposição A.7.2 que L_2 e L_3 são fracamente sequencialmente contínuos em $W^{1,p}(\Omega)$.

A.2 Algumas desigualdades

Teorema A.2.1. Se $0 \leq p < \infty$, $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então existe uma constante positiva $K(p)$ ($K(p) = 1$, se $0 \leq p < 1$ e $K(p) = 2^{p-1}$, se $1 \leq p < \infty$), tal que $(a + b)^p \leq K(p)(a^p + b^p)$.

Demonstração. Veja [3]. ■

Teorema A.2.2. Sejam $A \geq 0$ e $B \geq 0$. Então, se $\alpha > 0$, $(A^\alpha - B^\alpha)(A - B) \geq 0$.

Demonstração. Veja [21].

■

Teorema A.2.3. *Sejam A, B, C, D números reais positivos, e $\alpha, \beta \geq 0$ tais que $\alpha + \beta = 1$, então $A^\alpha B^\beta + C^\alpha D^\beta \leq (A + C)^\alpha (B + D)^\beta$.*

Demonstração. Veja [23].

■

Teorema A.2.4. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$, tais que, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e $\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.*

Demonstração. Veja [13].

■

A.3 Resultados de Análise Funcional

Teorema A.3.1. *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach uniformemente convexo, e (x_n) uma sequência em E , tal que $x_n \rightharpoonup x$ em $(E, \|\cdot\|)$, que satisfaz $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$, então $x_n \rightarrow x$ em $(E, \|\cdot\|)$.*

Demonstração. Veja [13].

■

Teorema A.3.2. *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach reflexivo e seja $\mathbb{K} \subset E$ um subconjunto limitado, fechado e convexo. Então, $\mathbb{K}$ é fracamente compacto em E , isto é, $\mathbb{K}$ é compacto na topologia fraca de $E(\sigma(E, E^*))$.*

Demonstração. Veja [13].

■

Teorema A.3.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio de classe $C^{0,1}$, $N \geq 2$. Se $p \in [1, \infty)$, então a imersão*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

é contínuo, desde que:

(1) $p < N$ e $1 \leq q \leq \frac{nq}{n-kp}$

(2) $p \geq N$ e $q \in [1, \infty)$.

E mais, caso $p < N$ e $1 \leq q < \frac{nq}{n-kp}$ ou $p \geq N$ e $q \in [1, \infty)$, então a imersão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacto.

Demonstração. Veja [24].

■

Teorema A.3.4. (Milman-Pettis) *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Demonstração. Veja [13].

■

Teorema A.3.5. *Se E é um espaço reflexivo, então toda sequência limitada em E possui uma subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Ver [9].

■

A.4 Operadores traço

Teorema A.4.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, com fronteira de classe $C^{0,1}$, $N \geq 2$ e $p \in [0, \infty)$. Então, existe um único operador, denominado operador traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^q(\partial\Omega)$,*

$$\Gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^q(\partial\Omega),$$

contínuo, desde que:

$$(1) \ p < N \text{ e } 1 \leq q \leq \frac{(N-1)p}{N-p}$$

$$(2) \ p \geq N \text{ e } q \in [1, \infty).$$

E mais, caso $p < N$ e $1 \leq q < \frac{(N-1)p}{N-p}$ ou $p \geq N$ e $q \in [1, \infty)$, então o operador Γ é compacto.

Demonstração. Veja [3].

■

Teorema A.4.2. *Sejam Ω um domínio limitado de Lipschitz (fronteira de classe $C^{0,1}$) em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, (u_n) uma sequência em $L^p(\partial\Omega)$ e $u \in L^p(\partial\Omega)$, tais que $u_n \rightarrow u$ em $(L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{p,\partial})$. Então, existem uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e $h \in L^p(\partial\Omega)$, tais que*

$$u_{n_k}(x) \rightarrow u(x) \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|) \text{ e } |u_{n_k}| \leq h, \text{ q.t.p. em } x \in \partial\Omega.$$

Demonstração. Ver [14].

■

A.5 Resultados de Teoria do Ponto Crítico

Definição A.5.1. Sejam E um espaço de Banach e $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 . Se existem $c \in \mathbb{R}$ e $(u_m) \subset E$ tais que

$$J(u_m) \rightarrow c$$

e

$$J'(u_m) \rightarrow 0,$$

dizemos que (u_m) é uma sequência Palais-Smale no nível c para J , ou de forma resumida, (u_m) é uma sequência $(PS)_c$ para J . Se tal sequência possui uma subsequência convergente, diz-se que J satisfaz a condição Palais-Smale no nível c ou que J satisfaz a condição $(PS)_c$.

Proposição A.5.1. *Seja E um espaço de Banach. Se $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional de classe C^1 limitado inferiormente e que satisfaz a condição $(PS)_c$, então*

$$c = \inf_E J$$

é valor crítico de J .

Demonstração. Ver [38] ou [33].

■

Proposição A.5.2. *Sejam E um espaço de Banach e U um subconjunto aberto de E . Se o funcional $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ possui derivada de Gateaux contínua em U , então $\phi \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Ver [38].

■

A.6 Teorema dos Multiplicadores de Lagrange

Teorema A.6.1. *Suponha $F, G : E \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e E um espaço de Banach. Se para $x_0 \in E$ tivermos $G(x_0) = 0$ e x_0 extremo local da F quando restrita a $C = \{x \in E : G(x) = 0\}$, então uma das afirmativas a seguir acontece:*

- (i) $G'(x_0) = 0$ ou
- (ii) $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tal que $F'(x_0)(v) = \mu G'(x_0)v, \forall v \in E$.

Demonstração. Ver [37].

■

A.7 Outros resultados

Teorema A.7.1. (*Teorema do Valor Médio*) Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^N$, diferenciável em todos os pontos do segmento de reta aberto $(a, a+v)$ e seja contínua sua restrição ao segmento fechado $[a, a+v] \subset U$. Então, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$f(a+v) - f(a) = df(a + \lambda v) \cdot v.$$

Demonstração. Ver [28]. ■

Proposição A.7.2. Seja E um espaço de Banach real e reflexivo e seja $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Se a aplicação $\Phi'(u)$ existe e é contínua, ou, mais geralmente, compacta, então Φ é fracamente sequencialmente contínuo em E .

Demonstração. Ver [39]. ■

Teorema A.7.3. (*Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue*) Seja Ω um conjunto mensurável do $\mathbb{R}^N$ e seja (f_j) uma sequência de funções mensuráveis tal que

$$f_j(x) \rightarrow f(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

onde f é uma função mensurável. Se existir uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|f_j(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

então

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_j(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Demonstração. Ver [3]. ■

Teorema A.7.4. (*Lema de Brézis-Lieb*) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Se

(i) $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^p(\Omega)$;

(ii) $u_n(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p. em Ω ,

então $u \in L^p(\Omega)$ e

$$|u_n|_{L^p(\Omega)}^p - |u_n - u|_{L^p(\Omega)}^p = |u|_{L^p(\Omega)}^p + o_n(1).$$

Demonstração. Ver [38]. ■

Apêndice B

Resultados Gerais do Capítulo 2

Neste Apêndice apresentaremos os resultados usados ao longo do Capítulo 2. Quando necessário, faremos as demonstrações, caso contrário, apenas o referenciamos.

B.1 Resultados demonstrados

Proposição B.1.1. $\Phi \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\Phi'(u)(v) = & \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} (auv + f_1(x, u)v + |u|^{2^*-2}uv) dx \\ & - \int_{\partial\Omega} (buv + g_1(y, u)v + |u|^{2^*-2}uv) d\sigma,\end{aligned}$$

para todo $u, v \in H^1(\Omega)$.

Demonstração. Vamos dividir a prova em três etapas. Para isso, escrevamos $\Phi(u) = J_1(u) - J_2(u) - J_3(u)$, onde $J_1(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2$, $J_2(u) = \int_{\Omega} (\frac{1}{2}au^2 + F_1(x, u) + \frac{|u|^{2^*}}{2^*})$ e $J_3(u) = \int_{\partial\Omega} (\frac{1}{2}bu^2 + G_1(y, u) + \frac{|u|^{2^*}}{2^*})$.

Etapa 1: $J_1 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$ a expressão

$$J_1'(u)(v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v. \quad (\text{B.1})$$

Basta considerarmos $p = 2$ na Afirmação 1 da Etapa 1 da Proposição A.1.7. Isto é, prova-se de forma análoga.

Etapa 2: $J_2 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$ a expressão

$$J_2'(u)(v) = \int_{\Omega} (auv + f_1(x, u)v + |u|^{2^*-2}uv). \quad (\text{B.2})$$

Tomando $J_2(u) = M_1(u) + M_2(u) + M_3(u)$, onde $M_1(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} au^2$, $M_2(u) = \int_{\Omega} F_1(x, u)$ e $M_3(u) = \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |u|^{2^*}$.

Afirmação 1. $M_1 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$ a expressão

$$M_1'(u)(v) = \int_{\Omega} auv. \quad (\text{B.3})$$

Mostremos que M_1 é Fréchet diferenciável. De fato, para $0 < t < 1$ e $u, v \in H^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{M_1(u + tv) - M_1(u)}{t} &= \frac{\frac{1}{2} \int_{\Omega} a(u + tv)^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} au^2}{t} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (2autv + at^2v^2)}{t} \\ &= \frac{1}{2t} \int_{\Omega} atv(2u + tv). \end{aligned}$$

Portanto,

$$M'_1(u)(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{M_1(u + tv) - M_1(u)}{t} = \int_{\Omega} auv.$$

Mostraremos agora que o operador M'_1 é contínuo. Seja (u_n) uma sequência em $H^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\Omega)$. Assim, para cada $\|v\| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |[M'_1(u_n) - M'_1(u)]v| &= \left| \int_{\Omega} au_nv - \int_{\Omega} auv \right| = \left| \int_{\Omega} av(u_n - u) \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |a||v(u_n - u)| \\ &\leq \|a\|_{\infty} \int_{\Omega} |v(u_n - u)|. \end{aligned}$$

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |[M'_1(u_n) - M'_1(u)]v| &\leq \|a\|_{\infty} \int_{\Omega} |v||u_n - u| \\ &\leq \|a\|_{\infty} \left(\int_{\Omega} |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u_n - u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|a\|_{\infty} \|v\|_2 \|u_n - u\|_2. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Devido a imersão contínua $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (Teorema A.3.3), existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\|v\|_2 \leq C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} \text{ e } \|u_n - u\|_2 \leq C_2 \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Portanto, de (B.4) vem

$$\begin{aligned} |[M'_1(u_n) - M'_1(u)]v| &\leq \|a\|_{\infty} C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} C_2 \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} \\ &= \|a\|_{\infty} C_3 \|v\|_{H^1(\Omega)} \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||[M'_1(u_n) - M'_1(u)]||_{H^1(\Omega)} &= \sup\{|[M'_1(u_n) - M'_1(u)]v| : v \in H^1(\Omega) \text{ e } ||v||_{H^1(\Omega)} \leq 1\} \\ &\leq ||a||_\infty C_3 ||u_n - u||_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Provando que M'_1 é contínuo. Pela Proposição A.5.2, segue que $M_1 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$, a expressão (B.3).

Afirmção 2. $M_2 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$ a expressão

$$M'_2(u)(v) = \int_{\Omega} f_1(x, u)v. \quad (\text{B.5})$$

Esta demonstração é análoga a Afirmção 1 da Proposição A.1.8.

Afirmção 3. $M_3 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$ a expressão

$$M'_3(u)(v) = \int_{\Omega} |u|^{2^*-2}uv. \quad (\text{B.6})$$

Basta considerarmos $c(x) = 1, \forall x \in \Omega$ e $p = 2^*$ na Afirmção 2 da Etapa 1 da Proposição A.1.7. Isto é, prova-se de forma análoga.

Etapa 3: $J_3 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, tendo como derivada de Fréchet em $u \in H^1(\Omega)$ a expressão

$$J'_3(u)(v) = \int_{\partial\Omega} (buv + g_1(y, u)v + |u|^{2^*-2}uv). \quad (\text{B.7})$$

Argumenta-se de forma semelhante como feito na Etapa 2 anterior.

Como $\Phi'(u)(v) = J'_1(u)(v) - J'_2(u)(v) - J'_3(u)(v)$, então pelas Etapas anteriores e as expressões (B.1), (B.2) e (B.7), concluímos que $\Phi \in C^1$ e

$$\Phi'(u)(v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\Omega} (auv + f_1(x, u)v + |u|^{2^*-2}uv) - \int_{\partial\Omega} (buv + g_1(y, u)v + |u|^{2^*-2}uv).$$

■

B.2 Teorema do Passo da Montanha

Teorema B.2.1. *(Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz) Sejam X um espaço de Banach real e $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que $\Phi(0) = 0$ e que*

(i) existem constantes $\rho, \beta > 0$ tais $\Phi(u) \geq \beta$, se $||u||_X = \rho$,

(ii) existe $u_0 \in X$, com $\|u_0\|_X > \rho$ tal que $\Phi(u_0) \leq 0$.

Então, existe uma sequência $(u_n) \in X$, tal que

$$\Phi(u_n) \rightarrow c, \quad \Phi'(u_n) \rightarrow 0, \quad \text{em } X^* \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) > 0,$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = u_0\}.$$

Demonstração. Ver [12] ou [5]. ■

B.3 Princípio Variacional de Ekeland

Teorema B.3.1. (*Princípio Variacional de Ekeland*) Seja X um espaço de Banach, $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ limitado inferiormente, $v \in X$ e $\varepsilon, \delta > 0$. Se

$$\Phi(v) \leq \inf_X \Phi + \varepsilon$$

então existe $u \in X$ tal que

$$(i) \quad \Phi(u) \leq \inf_X \Phi + 2\varepsilon,$$

$$(ii) \quad \|\Phi'(u)\| < \frac{8\varepsilon}{\delta},$$

$$(iii) \quad \|u - v\| < 2\delta.$$

Demonstração. Ver [17]. ■

B.4 Princípio do Máximo Forte

Definição B.4.1. Um operador diferencial parcial de segunda ordem L em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, definido por

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \sum_{i=1}^N b_i u_{x_i} + c \cdot u,$$

onde u_{x_i} representa a derivada em relação à i -ésima variável, é chamado uniformemente elíptico se existir uma constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2,$$

q.t.p. $x \in \Omega$, qualquer que seja $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Proposição B.4.1. *Suponha que L seja um operador estritamente elíptico e que $c \leq 0$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $Lu \geq 0$ em Ω , então ou $u = \sup_{\Omega} u$ ou u não atinge um máximo não negativo em Ω .*

Demonstração. Ver [34].

■

Corolário B.4.1. *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ e suponha que L seja um operador estritamente elíptico, com $c \leq 0$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz*

$$-Lu \geq 0 \text{ em } \Omega,$$

$$u \geq 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

então ou $u(x) > 0$ ou $u = 0$.

Demonstração. Ver [34].

■

Referências Bibliográficas

- [1] Abreu, E. A. M. *Soluções positivas para uma classe de problemas elípticos quasilineares envolvendo expoentes críticos*. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP, (2001).
- [2] Abreu, E.A.M, Carrião, P.C, and Miyagaki, O.H., *Remarks on a class of Neumann problems involving critical exponents*, Nonlinear differential equations : A tribute to D. G. de Figueiredo progress in nonlinear differential equations and their applications, Vol.150, Birkhäuser, (2005).
- [3] Adams, R.A., and Fournier, J.J.F., *Sobolev Spaces*; second ed., Academic Press, New York, (2003).
- [4] Ambrosetti, A., Brezis, H. and Cerami, G., *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122, 519–543, (1994).
- [5] Ambrosetti, A. and Rabinowitz P. H., *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14, 349–381 (1973).
- [6] Amann, H., *Nonlinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions*. in: Proceedings of the Second Scheveningen Conference on Differential Equations, in: North-Holland Math. Stud., 21, 43–64 (1976).
- [7] Anane, A., Chakrone, O., Karim, B., and Zerouali, A., *An asymmetric Steklov problem with weights the singular case*; Bol. Soc. Paran. de Mat., v.27, n.2, p.35–42, (2009).
- [8] Auchmuty, G., *Steklov eigenproblems and the representation of solutions of elliptic boundary value problems*, Numer. Funct. Anal. Optim. 25, 321–348, (2004).
- [9] Biezuner, R.J., *Notas de Aula Análise Funcional*, ICEx, UFMG, (2009).
- [10] Binding, P., Drábek, P., and Huang, Y.X., *On Neumann boundary value problems for some quasilinear elliptic equations*, Electron. J. Differential Equations 1942 (5), 1–11, (1997).

- [11] Bonano, G., and Candito, P., *Three solutions to a Neumann problem for elliptic equations involving the p -Laplacian*, Arch. Math. 80 424–429, (2003).
- [12] Brezis, H. and Nirenberg, L., *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36, 437–477, (1983).
- [13] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer; 1st Edition, (2011).
- [14] Brezis, H., *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson Ed., Paris, (1983).
- [15] Chipot, M., Shafrir, I., and Fila, M., *On the solutions to some elliptic equations with nonlinear Neumann boundary conditions*, Adv. Diff. Eqns. 1, 91–110, (1996).
- [16] Derlet, A., Gossez, J.P., and Takák, P., *Minimization of eigenvalues for a quasilinear elliptic Neumann with indefinite weight*, J. Math. Anal. Appl. 371, 69–79, (2010).
- [17] Ekeland, I., *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. 47, pg. 324–453, (1974).
- [18] Escobar, J. F., *Uniqueness theorems on conformal deformation of metrics, Sobolev inequalities, and an eigenvalue estimate*, Comm. Pure Appl. Math. 43, 857–883, (1990).
- [19] de Figueiredo, D. G., *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Berlin: by Springer-Verlag, Berlin, (1989).
- [20] Garcia Azorero, J., Peral Alonso, I., and Rossi, J. D., *A convex-concave problem with a nonlinear boundary condition*, J. Diff. Eqns. 198, 91–128, (2004).
- [21] Godoi, J. D. B., *Problemas de autovalores de Steklov-Neumann e aplicações*. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, (2012).
- [22] Godoi, J. D., Miyagaki, O. H., and Rodrigues, R. S., *On Steklov-Neumann boundary value problems for some quasilinear elliptic equations*, Applied Mathematics Letters, 47–51, (2015).

- [23] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., and Pólya, G., *Inequalities*; Cambridge The University Press, London, (1934).
- [24] Kufner, A., John, O., and Fucik, S., *Function Spaces*; Academia, Praha e Noordhoff International Publishing, Layden, (1977).
- [25] Lamberti, P.D., *Steklov-type eigenvalues associated with best Sobolev trace constants: domain perturbation and overdetermined systems*, Complex Var. Elliptic Equ. 59, 309–323, (2014).
- [26] Lê, A., *Eigenvalue problems for the p -Laplacian*, Nonlinear Anal. 64, 1057–1099, (2006).
- [27] Li, C., and Li, S., *Multiple solutions and sign-changing solutions of a class of nonlinear elliptic equations with Neumann boundary condition*, J. Math. Anal. Appl. 298, 14–32, (2004).
- [28] Lima, E. L., *Curso de Análise Volume 2*. IMPA, Rio de Janeiro, 11 ed., (2018).
- [29] Martínéz, S., and Rossi, J.D., *Isolation and simplicity for the first eigenvalue of the p -Laplacian with a nonlinear boundary condition*, Abstr. Appl. Anal. 7, 287–293, (2002).
- [30] Mavinga, N., and Nkashama, M.N., *Steklov–Neumann eigenproblems and nonlinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions*, J. Differential Equations 248, 1212–1229, (2010).
- [31] Motreanu, D., and Winkert P., *On the Fucik spectrum for the p -Laplacian with Robin boundary condition*, Nonlinear Anal. 74, 4671–4681, (2011).
- [32] Pierotti, D. and Terracini, S., *On a Neumann problem with critical exponents and critical nonlinearity on boundary*, Comm. P.D.E. 20, 1155–1187, (1995).
- [33] Rabínowitz, P.H., *Minimax methodes in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS /65-AMS, (1986).
- [34] Sweers, G., *Maximum principles, a start.*, (2000).

- [35] Terracini, S., *Symmetry properties of positive solutions to some elliptic equations with nonlinear boundary conditions*, Diff. Int. Eqns., 1911–1922, (1995).
- [36] Torné, O., *Steklov problem with an indefinite weight for the p -Laplacian*, Electron. J. Differential Equations 87, 1–8, (2005).
- [37] Troutman J.L., *Variational Calculus and Optimal Control*; Springer, New York, (1995).
- [38] Willem, M., *Minimax Theorems, Progress in nonlinear differential equations and their applications*; v. 24 Birkhäuser, (1996).
- [39] Zeidler, E., *Nonlinear functional analysis and its applications*, Vol. III. Springer-Verlag, (1994).