UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

O Método da Variedade de Nehari Generalizada e Aplicações.

José Pastana de Oliveira Neto

Belém

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

José Pastana de Oliveira Neto

O Método da Variedade de Nehari Generalizada e Aplicações.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior

Belém

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O48m Oliveira Neto, José Pastana de.
O método da variedade de Nehari generalizada e aplicações / José Pastana de Oliveira Neto. — 2021.
48 f.

Orientador(a): Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Variedade de Nehari Generalizada. 2. Solução Ground State. 3. Condição Palais-Smale. I. Título.

CDD 510

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

José Pastana de Oliveira Neto

O Método da Variedade de Nehari Generalizada e Aplicações.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 30 de Agosto de 2021 Conceito: APROVADO

Banca Examinadora

João Rodrigues Dos Santos Junior

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior (Orientador)
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística-PPGME -UFPA

FCorrea

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Andrelino Vasconcelos Santos

Prof. Dr. Andrelino Vasconcelos Santos
Secretaria de Estado de Educação - SEDUC

Dedicatória

Primeiramente a Deus,

a minha família e em especial

a minha mãe Odinea Furtado Correa,

meu pai Francisco Souza de Oliveira

e a minha Companheira Gabriela Coutinho da Cunha.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por guiar-me nos caminhos que levaram-me a conclusão deste trabalho mesmo em momentos árduos da vida, quando não sabemos mais de onde tiramos tanta força para continuar.

Agradeço imensamente a minha família em especial à minha mãe, Odinea Furtado Correa por sempre querer ver-me mestre em matemática, por sempre me motivar a continuar e ir até o fim, e por me ajudar de todas as formas possíveis. Agraço ao meu pai Francisco Souza de Oliveira por sempre me dar a oportunidade de estudar. Assim agradeço imensamente aos meus pais por mesmo sem condições financeiras de financiar um estudo privado, sempre me deram o mais importante, que foi a oportunidade de estudar, que eles não tiveram, assim mergulhei com todas as minhas forças.

Agradeço aos meus irmãos e irmãs: Lidiane Corrêa de Oliveira por me sacudir e fazer eu repensar na vida, e fazer eu retornar ao meu mestrado, a Liliam Corrêa de Oliveira, Júlia Corrêa de Oliveira, Frank Corrêa de Oliveira, Juliane Corrêa de Oliveira e Rodrigo Corrêa de Oliveira, à todos agradeço por toda ajuda direta ou indireta que fizeram para eu chegar onde cheguei.

Agradeço a minha companheira Gabriela Coutinho da Cunha por sempre me ajudar em tudo que precisei para concluir meu mestrado, por ela sempre me motivar a estudar forte e nunca desistir e por toda ajuda que ela me deu durante o mestrado e por sempre estar ao meu lado em todos os momentos.

Agradeço ao meus amigos Enielson Ewerton Gama e Rafael Augusto Duarte Guimaraes pois sem eles talvez eu não estivesse chegado até aqui, agradeço pela amizade verdadeira deles, por me darem forças para continuar mesmo quando estava longe de minha família, pelos simples cafés que tomávamos juntos, por toda ajuda nas disciplinas, por sempre esterem juntos comigo em todos os momentos difíceis que passei, sou imensamente grato a vocês meus amigos. Sou grato também ao meu amigo Clayton Wallace Fonseca Ribeiro do doutorado, onde tive a oportunidade de estudarmos juntos uma disciplina e por sempre compartilhar seus conhecimentos.

Ao meu amigo Felipe Mendes Maranhão por sua grande amizade por ter cedido sua casa para que eu pudesse fazer o curso de verão durante a seleção de mestrado, pois estava sem dinheiro e não tinha onde ficar, por sempre me motivar a terminar meu mestrado, por sempre acreditar em mim e por dividir o que há de mais importante hoje em dia, que é uma bela amizade.

Sou grato demais ao meu orientador João Rodrigues dos Santos Júnior, primeiramente por aceitar me orientar, mesmo depois de tantas falhas minha, por sua pontualidade e rigorosidade durante toda orientação. E por tudo que já fez por mim para que eu retornasse ao mestrado, sou grato demais.

Agradeço ao meu amigo João Felipe Fonseca da Silva por suas grandes amizades e por sempre me ajudar sempre que precisei, pela força que me deu para eu nunca desistir. Pelos belos papos de amigo nos projetos futuros e pelos belos estudos durante todo o Mestrado.

Agradeço aos professores do PPGME, a todos que fizeram parte diretamente na minha formação, e em especial aos professores: Augusto César dos Reis Costa, Gelson Conceição Gonçalves dos Santos, Rúbia Gonçalves Nascimento.

Ao meu ex-orientador de graduação Kelmem da Cruz Barroso, por sempre me motivar nessa caminhada de grande estudo, por me ensinar as primeiras equações diferenciais em minha vida, que abriu portas para entender a matemática de uma outra forma. Agradeço também ao professor, Gilberlandio Jesus Dias por tudo que aprendi com ele de matemática e a ser um matemático, não o melhor matemático mas o melhor que eu posso ser.

A todos, sou imensamente grato.

Notações e Terminologias

- $\mathcal{N}$ variedade de Nehari;
- $\mathcal{M}$ variedade de Nehari generalizada;
- $\sigma(T)$ o espectro do operador T;
- $\to$ convergência forte;
- $\rightharpoonup$ convergência fraca;
- $\hookrightarrow$ imersão de espaços;
- $f(x,u) = o(u)$ denotará uma função f que é muito pequena comparada à u;
- $I'(u) = o(\|u\|)$ denota a derivada de um funcional que é muito pequena comparada à $\|u\|$;
- $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ espaço das funções $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ que são localmente p-integráveis sobre cada subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^N$.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos o método da variedade de Nehari generalizada introduzido por Zsulkin e Weth em [10]. Aqui dissertaremos o método de forma didática e clara, onde estaremos interessados em fazer uso do método para resolvermos os três problemas abaixo:

(1) *Existência de solução ground state e Multiplicidade de solução :* Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e considere o problema de autovalor,

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Com $\lambda < \lambda_1$, onde λ_1 denota o primeiro autovalor de Dirichlet de $-\Delta$ em Ω e $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de crescimento

$$|f(x,u)| \leq a\left(1 + |u|^{q-1}\right) \tag{2}$$

para alguns $a > 0$ e $2 < q < 2^*$, com $2^* := 2N/(N-2)$ se $N \geq 3$ e $2^* := \infty$ caso contrário.

(2) *Existencia de Solução ground state:*

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u), & x \in \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0, & |x| \to \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Se V é limitada, e f é contínua e satisfaz a condição de crescimento (2), e com funcional

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx. \tag{4}$$

(3) Por fim concluímos o trabalho estudando a multiplicidade de solução e a existência de solução ground state para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = h(x, u_2), & x \in \Omega \\ -\Delta u_2 = g(x, u_1), & x \in \Omega \\ u_1 = u_2 = 0. & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

Com o funcional associado dado por

$$\Phi(u) := \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx - \int_\Omega ((G(x, u_1)) + H(x, u_2))dx \quad \text{para } u = (u_1, u_2) \in E,$$

onde,

$$G(x, u_1) := \int_0^{u_1} g(x, s)ds \quad \text{e} \quad H(x, u_2) := \int_0^{u_2} h(x, s)ds.$$

e ambos satisfazendo a condição de crescimento (2). Encerrando assim as aplicações do trabalho.

Palavras-chave: Variedade de Nehari Generalizada, Solução Ground State, Condição Palais-Smale.

Abstract

In this work we present the generalized Nehari manifold method introduced by Zsulkin and Weth in [10]. Here we will talk about the method in a didactic and clear way, where we will be interested in making use of the method to solve the three problems below:

(1) *Multiplicity of ground state solution:* Be $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a limited domain and consider the eigenvalue problem

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

with $\lambda < \lambda_1$, where λ_1 denotes the first eigenvalue of Dirichlet of $-\Delta$ in Ω e $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfies the growth condition

$$|f(x,u)| \leq a\left(1 + |u|^{q-1}\right) \tag{7}$$

for some $a > 0$ and $2 < q < 2^*$, with $2^* := 2N/(N-2)$ if $N \geq 3$ and $2^* := \infty$ otherwise

(2) *Existence of ground state solution:*

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u), & x \in \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0, & |x| \to \infty. \end{cases} \tag{8}$$

If V is limited, and f is continuous and satisfies the (2), growth condition, and with functional

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx. \tag{9}$$

(3) Finally, we concluded the work by studying the multiplicity of solutions for the system

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = h(x, u_2), & x \in \Omega \\ -\Delta u_2 = g(x, u_1), & x \in \Omega \\ u_1 = u_2 = 0. & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{10}$$

With the associated functional given by

$$\Phi(u) := \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx - \int_\Omega ((G(x, u_1)) + H(x, u_2))dx \quad \text{para } u = (u_1, u_2) \in E,$$

Where,

$$G(x, u_1) := \int_0^{u_1} g(x, s)ds \quad \text{e} \quad H(x, u_2) := \int_0^{u_2} h(x, s)ds.$$

and both satisfying the (2) growth condition. Thus ending the job applications.

Key Words: Generalized Nehari manifold, Solution Ground State , Palais-Smale condition.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho estudaremos o método da variedade de Nehari generalizada por Szulkin e Weth em [10] e faremos algumas aplicações. Para a melhor compreensão vamos introduzir brevemente um pouco sobre o método desenvolvido por Szulkin e Weth, para isso seja E um espaço de Banach real uniformemente convexo, $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $\Phi(0) = 0$. Suponhamos as seguintes condições

(I1) Existe uma função normalização φ;

$$u \mapsto \psi(u) = \int_0^{\|u\|} \varphi(t)dt \in C^1(E \setminus \{0\}, \mathbb{R}),$$

sendo que $J := \psi'$ é limitado em conjuntos limitados e $J(w)w = 1$ para todo $w \in S = \{w \in E : \|w\| = 1\}$;

(I2) Para cada $w \in E \setminus \{0\}$ existe s_w tal que se $\alpha_w(s) := \Phi(sw)$, então $\alpha_w'(s) > 0$ para $0 < s < s_w$ e $\alpha_w'(s) < 0$ para $s > s_w$;

(I3) Existe $\delta > 0$ tal que se $s_w \geq \delta$ para todo $w \in S$ e para cada subconjunto compacto $\mathcal{K} \subset S$, existe uma constante $C_{\mathcal{K}}$ tal que $s_w \leq C_{\mathcal{K}}$.

Define-se como a variedade de Nehari o conjunto $\mathcal{N}$ dado por

$$\mathcal{N} := \{u \in E, u \neq 0 : \Phi'(u)u = 0\},$$

As condições acima são essenciais para a existência de um homeomorfismo entre S e $\mathcal{N}$, para obter sobre certas condições uma infinidade de pares de pontos críticos para $\Phi|_S$ e por consequência do homeomorfismo, também garantirá uma infinidade de pares de pontos críticos para $\Phi|_{\mathcal{N}}$. Aqui, neste momento, não nos estenderemos para que possamos conversar melhor mais à frente.

Continuando neste momento introdutório, vamos falar um pouco sobre o método de *Nehari aplicado* pelo matemático israelense Zeev Nehari. Considere E um espaço de Banach reflexivo e $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$, e se u é um ponto crítico de Φ então $\Phi'(u)u = 0$ para todo $u \in E$. Portanto $u \in \mathcal{N}$. É importante ressaltar que a existência do conjunto $\mathcal{N}$ quando mencionado de modo geral não necessita que tenhamos as condições $(I1) - (I3)$ neste caso estamos olhando simplesmente para o método de Nehari, por Zeev Nehari.

O método de Nehari se resume em minimizar o funcional Φ sobre $\mathcal{N}$, isto é, obter $u \in \mathcal{N}$;

$$\Phi(u) = c := \inf_{u \in \mathcal{N}} \Phi(u)$$

O matemático israelense Zeev Nehari $(1915 - 1978)$, desenvolveu esse método através de dois artigos [6] e [7]. Nesses artigos Nehari considerou uma EDO de segunda ordem em um intervalo I e mostrou a existência de solução não trivial minimizando o funcional sobre $\mathcal{N}$, com Φ de classe C^2 associado ao problema e usou o Teorema da Função Implícita para mostrar que o ponto de mínimo de Φ em $\mathcal{N}$ era ponto crítico em todo o espaço. Em [7] mostrou a existência de solução com um determinado número de nós em I. Desde então o método vem sendo estudado e outros matemáticos foram criando outros métodos como o de fibração por Pohozaev [2].

Pankov em [8] apresenta uma generalização da variedade de Nehari, que denotaremos por $\mathcal{M}$. Ainda supondo o funcional Φ sendo C^2 e a seguinte decomposição ortogonal $E = E^+ \oplus E^0 \oplus E^-$ com E um espaço de Hilbert. vamos esboçar brevemente o método de Pankov. Ele primeiro mostra que $\mathcal{M}$ é uma variedade C^1 e é uma restrição natural no sentindo de que u é ponto crítico não trivial de Φ se, e somente se, $u \in \mathcal{M}$ e é um ponto crítico de $\Phi|_{\mathcal{M}}$. Uma vez que

$$c := \inf_{u \in \mathcal{M}} \Phi|_{\mathcal{M}} > -\infty,$$

o princípio variacional de Ekeland produz uma sequência Palais-Smale para $\Phi|_{\mathcal{M}}$ no nível c. Pankov então usava o fato de $f \in C^1$ juntamente com

$$|f'_u(x,u)| \leq a(1 + |u|^{p-2}) \quad e \quad 0 < \frac{f(x,u)}{u} < \theta f'_u(x,u),$$

com $\theta \in (0,1)$ e para todo $u \neq 0$, para mostrar que essa sequencia Paleis-Smale é limitada e encontra um minimizador com os argumentos de concentração e compacidade. Uma vez que não estamos assumindo que f é diferenciável e nem a equação acima, logo $\mathcal{M}$ não precisa ser uma $C^1 - variedade$, e com isso o método de Pankov não se aplica. Como contornar então tal dificuldade?

Szulkin e Weth em [10] apresentaram um resultado abstrato, o qual exigia apenas que o funcional fosse C^1 e tinham mínimo local em 0, e $\Phi = I_0 - I$ com I_0 homogêneo e o I completamente contínuo onde apresentaram varias aplicações. Onde não exigiam mais que o funcional fosse C^2 mas apenas C^1, no mesmo trabalho apresentaram a versão generalizada da variedade de Nahari, agora com Φ sendo C^1, este foi o material base para o desenvolvimento da dissertação. Faremos resultados importantes sobre a variedade $\mathcal{M}$, que nos garantiram multiplicidade de pares de pontos críticos na mesma, que será nossas soluções dos problemas $(1), (3)$ e (5) apresentados no resumo.

Vamos agora conversar um pouco sobre o método utilizado. Uma vez que Φ é C^1 não garantimos que $\mathcal{M}$ é uma variedade C^1, no entanto ainda continua sendo uma variedade topológica. Contornamos essa dificuldade em não poder aplicar o método de Pankov quando garantimos a existência de uma correspondência bijetiva entre pontos críticos de $\Phi|_{S^+}$ com à variedade $\mathcal{M}$ através de um homeomorfismo, com

$$S^+ := S \cap E^+ = \{u \in E^+ : \|u\| = 1\}.$$

E S^+ é uma subvariedade C^1, vemos este fato em Szulkin [11]. Uma vez que $\Phi|_{S^+}$ é limitado inferiormente e satisfaz a condição Paleis-Smale-(PS), assim garantimos uma infinidade de pares de pontos críticos para $\Phi|_{S^+}$, pelo homeomorfismo também garantimos sobre $\mathcal{M}$, no momento em que provamos que o funcional Φ satisfaz a condição Paleis-Smale sobre $\mathcal{M}$. A apresentação deste homeomorfismo será feita na Proposição 1.1 do trabalho.

Supondo $\Phi \in C^1(E,\mathbb{R})$ e a decomposição $E = E^+ \oplus E^0 \oplus E^-$, onde $\dim E^0 < \infty$, e Φ satisfazendo:

(A1) $\Phi(u) = \frac{1}{2}||u^+||^2 - \frac{1}{2}||u^-||^2 - I(u)$, onde $I(0) = 0$, $\frac{1}{2}I'(u)u > I(u) > 0$ para todo $u \neq 0$ e I é fracamente semicontínuo inferiormente;

(A2) Para cada $w \in E \setminus F$, existe um único ponto crítico não trivial $\widehat{m}(w)$ de $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$. Além disso, $\widehat{m}(w)$ é o único máximo global de $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$

(A3) Existe $\delta > 0$ tal que $||\widehat{m}(w)^+|| \geq \delta$, para todo $w \in E \setminus F$, e para cada subconjunto compacto $\mathcal{W} \subset E \setminus F$, existe uma constante $C_{\mathcal{W}}$ tal que $||\widehat{m}(w)|| \leq C_{\mathcal{W}}$ para todo $w \in \mathcal{W}$.

Para assim definirmos a variedade de Nehari generalizada como

$$\mathcal{M} = \{u \in E \setminus (E^0 \oplus E^-) : \Phi'(u)u = 0 \quad \text{e} \quad \Phi'(u)v = 0 \text{ para todo } v \in (E^0 \oplus E^-)\}.$$

que será o nosso conjunto onde queremos soluções.

O resultado principal do capitulo 1 o seguente Teorema:

Teorema 0.1 *Supondo que Φ satisfaz (A1), (A2) e*

(i) $I'(u) = o(\|u\|)$ quando $u \to 0$;

(ii) $I(su)/s^2 \to \infty$ uniformemente para u em um subconjunto fracamente compacto de $E \setminus \{0\}$ quando $s \to \infty$;

(iii) I' é completamente contínua.

Então a equação $\Phi'(u) = 0$ tem tem uma solução **ground state**. Além disso, se I for par, então está equação tem infinitos pares de soluções.

Nossa primeira aplicação do método é o problema: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e considere o problema de autovalor,

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{11}$$

Com $\lambda < \lambda_1$, onde λ_1 denota o primeiro autovalor de Dirichlet de $-\Delta$ em Ω e $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de crescimento

$$|f(x,u)| \leq a\left(1 + |u|^{q-1}\right) \tag{12}$$

para alguns $a > 0$ e $2 < q < 2^*$, com $2^* := 2N/(N-2)$ se $N \geq 3$ e $2^* := \infty$ caso contrário. Tendo assim o seguinte funcional associado

$$\Phi(u) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)dx - \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Neste problema garantiremos uma infinidade de pares de soluções ground state fazendo uso do Teorema acima, para aplicarmos o método precisamos que Φ satisfaça $(A1), (A2)$ e $(A3)$. Este fato começa em escrevermos o funcional associado ao problema como em $(A1)$, isto é

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - I(u).$$

A próxima aplicação que será exposta no capitulo 3 é a equação não linear de Schrödinger com um Potencial V no $\mathbb{R}^N$.

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u), & x \in \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0, & |x| \to \infty. \end{cases} \tag{13}$$

Se V é limitada, e f é contínua e satisfaz a condição de crescimento dada, e com o funcional associado

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx. \tag{14}$$

Em [12] Szulkin e Weth mostram que se f é impar em u, e adicionando a condição de Ambrosseti-Rabinovitz então o problema não linear de Schrödinger tem uma infinidade de soluções geometricamente distintas, no entanto aqui vamos apenas provar a existência de uma solução de estado fundamental via minimização em $\mathcal{M}$, fazendo uso de resultado de concentração e compacidade, e claro sem esquecermos de mostrar que o funcional em (14) satisfaz $(A1), (A2)$ e $(A3)$. Em outra palavras se resumirá em demonstrar o seguente Teorema:

Teorema 0.2 *Supondo* $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfazendo* (2.6)

(i) V, f *são 1-periódicas em* $x_1, ..., x_N$, $0 \in \sigma(-\Delta + V)$ *e* $\sigma(-\Delta+V) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$,

(ii) $f(x,u) = o(u)$ *uniformemente em* x *quando* $u \to 0$,

(iii) $u \to f(x,u)/|u|$ *está crescendo estritamente em* $(-\infty, 0)$ *e* $(0, \infty)$

(iv) $F(x,u)/u^2 \to \infty$ *uniformemente em* x *quando* $|x| \to \infty$

Então o problema (13) *possui uma solução ground state.*

Em suma, no capitulo 4 vamos apresentar nossa ultima aplicação do método que será o seguinte sistema não linear

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = h(x, u_2), & x \in \Omega \\ -\Delta u_2 = g(x, u_1), & x \in \Omega \\ u_1 = u_2 = 0. & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{15}$$

Com o funcional associado dado por

$$\Phi(u) := \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx - \int_{\Omega} ((G(x, u_1)) + H(x, u_2))dx \quad \text{para } u = (u_1, u_2) \in E,$$

onde,

$$G(x, u_1) := \int_0^{u_1} g(x, s)ds \quad \text{e} \quad H(x, u_2) := \int_0^{u_2} h(x, s)ds.$$

Nesta aplicação vamos garantir a multiplicidade de soluções ground state, fazendo uso fortemente do Teorema 0.1 acima, de maneira semelhante à primeira aplicação dada em (11). Concluindo assim as nossas aplicações do método.

Capítulo 1

A Variedade de Nehari Generalizada

Neste capitulo, vamos começar apresentando a variedade de Nehari generalizada segundo Szulkin e Weth em [10]. Neste momento vamos supor três condições de suma importância para o desenvolvimento do método, que são $(A1) - (A3)$, onde serão definidas em breve. De modo geral este método se resume em fazer uso de um homeomorfismo entre a esfera unitária em um espaço de Banach reflexivo com a variedade de Nehari. Agora, com este método suponhamos que o funcional Φ seja apenas C^1, e uma vez que não estamos supondo o funcional C^2 a variedade de Nehari não será uma variedade de classe C^1 ou C^1-variedade, mas ainda sim será uma variedade topológica, neste caso uma variedade simples, ou C^0-variedade. E para contornar esta dificuldade usasse fortemente o fato da esfera unitária em um espaço de Banach de dimensão infinita ser uma C^1-subvariedade, onde pode ser visto em [11].

Ao longo deste trabalho, supomos que E é um espaço de Hilbert e com a seguinte decomposição ortogonal

$$E = E^+ \oplus E^0 \oplus E^- \equiv E^+ \oplus F, \quad F = E^0 \oplus E^- \qquad (dim E^0 < +\infty), \qquad (1.1)$$

assim, se $u \in E$, podemos escrever

$$u = u^+ + u^0 + u^- = u^+ + v$$

onde $u^{+,0,-} \in E^{+,0,-}$ respectivamente, em que $u^{+,0,-}$ não denotará a parte positiva, nula ou negativa de u e $v \in F$.

Seja agora a esfera unitária definida por

$$S^+ \equiv S \cap E^+ = \{u \in E^+ : ||u|| = 1\},$$

da decomposição de E podemos definir os seguintes espaços

$$E(u) = \mathbb{R}u \oplus F \equiv \mathbb{R}u^+ \oplus F \quad \text{e} \quad \widehat{E}(u) = \mathbb{R}^+u \oplus F \equiv \mathbb{R}^+u^+ \oplus F, \tag{1.2}$$

com, $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$.

Seja $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$. Vamos fazer algumas suposições sobre Φ:

(A1) $\Phi(u) = \frac{1}{2}||u^+||^2 - \frac{1}{2}||u^-||^2 - I(u)$, onde $I(0) = 0$, $\frac{1}{2}I'(u)u > I(u) > 0$ para todo $u \neq 0$ e I é fracamente semicontínuo inferiormente;

(A2) Para cada $w \in E \setminus F$, existe um único ponto crítico não trivial $\widehat{m}(w)$ de $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$. Além disso, $\widehat{m}(w)$ é o único máximo global de $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$

(A3) Existe $\delta > 0$ tal que $||\widehat{m}(w)^+|| \geq \delta$, para todo $w \in E \setminus F$, e para cada subconjunto compacto $\mathcal{W} \subset E \setminus F$, existe uma constante $C_{\mathcal{W}}$ tal que $||\widehat{m}(w)|| \leq C_{\mathcal{W}}$ para todo $w \in \mathcal{W}$.

Definamos como a variedade de Nehari generalizada o seguinte conjunto $\mathcal{M}$, dado por:

$$\mathcal{M} = \{u \in E \setminus (E^0 \oplus E^-) : \Phi'(u)u = 0 \quad \text{e} \quad \Phi'(u)v = 0 \text{ para todo } v \in (E^0 \oplus E^-)\}.$$

Para esse momento de definições vamos recordar as definições de sequência (PS) e condição (PS). Para isso, seja X um espaço de Banach e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1.

Definição 1.1 *Dizemos que* $(u_n) \subset X$, *é uma sequência* ***Palais-Smale-(PS)****, no nível c, denotada por* $(PS)_c$ *quando*

$$\Phi(u_n) \to c \quad e \quad \Phi'(u_n) \to 0.$$

Definição 1.2 *Dizemos que* Φ *verifica a condição de (PS), quando toda sequência* $(PS)_c$ *para* $c \in \mathbb{R}$, *admite uma subsequência que converge forte em* X, *isto é,*

$$\Phi(u_n) \to c \quad e \quad \Phi'(u_n) \to 0,$$

existem $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ *e* $u_0 \in X$ *tal que*

$$u_{n_k} \to u_0 \quad em \quad X.$$

Mais à frente no Lema 1.1 item (iii) mostraremos quando a variedade de Nehari generalizada $\mathcal{M}$, coincide com a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ apresentada por Szulkin e Weth em [1].

Observemos que se Φ é C^1 não garantimos que $\mathcal{M}$ é uma C^1-variedade, pois de modo geral, a variedade de Nehari é uma variedade simples ou seja, apenas C^0-variedade. Mas contornaremos essa dificuldade quando provarmos a existência de um homeomorfismo m entre S^+ e $\mathcal{M}$. Teremos aí uma correspondência bijetiva entre os pontos críticos de Φ restrito a S^+ com a $\mathcal{M}$, e uma vez que $\Phi|_{S^+}$ é C^1, limitado inferiormente e satisfaz a condição (PS), então $\Phi|_{S^+}$ possui uma infinidade de pares de pontos críticos sobre S^+, e relacionamos tais pontos críticos de Φ sobre a esfera S^+, com os que pertencem a variedade quando provarmos que o funcional satisfaz a condição (PS) também na variedade de Nehari generalizada $\mathcal{M}$.

Apresentaremos neste momento o primeiro Lema desde trabalho o qual será muito usado no decorrer do desenvolvimento do método. É importante frisar que o item (iii) do Lema abaixo diz quando a variedade de Nehari generalizada $\mathcal{M}$ coincide com a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ apresentada na introdução. Pois quando $F = \{0\}$, então $(A2)$, $(A3)$ serão equivalentes a $(I2)$, $(I3)$ e $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

Lema 1.1 *Suponha* $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ *e as hipóteses* $(A1) - (A3)$*. Então,*

(i) Se $u \neq 0$ *e* $\Phi'(u) = 0$ *então* $\Phi(u) > 0$*;*

(ii) Por (A2) segue $\widehat{E}(w) \cap \mathcal{M} = \{\widehat{m}(w)\}$*;*

(iii) Dado $t > 0$ *temos* $\widehat{m}(w) = \widehat{m}(tw)$ *e por consequência imediata* $F = \{0\}$*.*

Demonstração: *i) Se* $u \neq 0$ *e* $\Phi'(u) = 0$ *então*

$$\Phi(u) = \Phi(u) - \frac{1}{2}\Phi'(u)u = \frac{1}{2}||u^+||^2 - \frac{1}{2}||u^-||^2 - I(u) - \frac{1}{2}\left[||u^+||^2 - ||u^-||^2 - I'(u)u\right]$$
$$= \frac{1}{2}I'(u)u - I(u) > 0,$$

onde a ultima desigualdade acima segue da hipótese $(A1)$*.*

ii) Seja $z \in \mathcal{M} \cap \widehat{E}(w)$*, daí* $z = tw^+ + v$ *e ainda por* $\mathcal{M}$

$$\Phi'(tw^+ + v)(tw^+ + v) = 0,$$

pela linearidade

$$t\Phi'(tw^+ + v)w^+ + \Phi'(tw^+ + v)v = 0,$$

logo,

$$\Phi'(tw^+ + v)w^+ = 0.$$

Dessa forma, z *é um ponto crítico não trivial de* Φ *restrito a* $\widehat{E}(w)$*, Resta estender para todo* $\widehat{E}(w)$*. Para isso, seja* $t > 0$ *e* $m(w) = sw^+ + n \in \widehat{E}(w)$ *com* $n \in F$ *ainda teremos,*

$$\Phi'(tw^+ + v)(sw^+ + n) = s\Phi'(tw^+ + v)w^+ + \Phi'(tw^+ + v)n = 0.$$

Agora sim, pela unicidade em (A2) para Φ *restrito à* $\widehat{E}(w)$ *concluímos* $m(w) = z = \widehat{m}(w)$*. Mostrando ii).*

iii) Este item é direto da definição de $\widehat{E}(w)$*. Basta notarmos*

$$\widehat{E}(w) = \mathbb{R}^+ w \oplus F \equiv \mathbb{R}^+ w^+ \oplus F = t\mathbb{R}^+ w^+ \oplus tF = \widehat{E}(tw),$$

em particular,

$$\widehat{m}(w) = \widehat{m}(tw),$$

concluindo a demonstração.

$\blacksquare$

Lema 1.2 *Seja* $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ *e* E *um espaço de Hilbert com a decomposição* (1.1)*, então:*

(i) $d(\mathcal{M}, F) > 0$*;*

(ii) A variedade de Nehari generalizada $\mathcal{M}$ *é fechada.*

Demonstração: *(i) Primeiramente vamos mostrar que* $\mathcal{M}$ *está afastada de* F*. Seja então* $\widehat{m}(w) = \widehat{m}(w)^+ + z \in \mathcal{M}$ *com* $z \in F$*, daí segue,*

$$\|\widehat{m}(w) - v\| = \|\widehat{m}(w)^+ + z - v\| = \|\widehat{m}(w)^+\|_{E^+} + \|z - v\|_F,$$

passando o ínfimo sobre F *na igualdade anterior, temos* $d(\mathcal{M}, F) > 0$*, pois*

$$\inf_{v \in F} \|z - v\|_F = d(z, F) = 0 \text{ e por (A3) } \|\widehat{m}(w)^+\| \geq \delta.$$

(ii) Vamos agora mostrar que $\mathcal{M}$ *é fechada. Com efeito, é suficiente notar que a variedade pode ser escrita* $\mathcal{M} = A \cap B$ *com* A *e* B *fechados. Para isso, consideremos*

$$A = \left\{\varphi^{-1}(0)\right\} \quad \text{com} \quad \varphi(u) = \Phi'(u)u.$$

A *é claramente fechado. Por outro lado precisamos estender para toda* $\mathcal{M}$ *vamos então definir* B *olhando para* F *que será a segunda parte da definição de* $\mathcal{M}$*, com*

$$B = \bigcap_{v \in F} B_v \quad \text{onde} \quad B_v = \left\{\varphi_v^{-1}(0)\right\}, \text{ com } \varphi_v(u) = \Phi'(u).v \ \forall \ v \in F.$$

Uma vez que cada B_v *é fachado,* B *é fechado. Portando* $\mathcal{M}$ *é fechada.*

Lema 1.3 *Seja* $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ *e* E *um espaço de Hilbert com a decomposição* (1.1)*, e suponhamos as hipóteses* $(A1) - (A3)$ *então:*

(i) $t_{\frac{w}{\|w\|}} = \|w\|tw$ *para todo* $t > 0$*;*

(ii) Se $w \in \mathcal{M}$ *então* $t_w = 1$ *e* $v_w = 0$*, isto é,* $w = \widehat{m}(w)$*;*

(iii) $t_{w^+} = t_w$ *e* $v_{w^+} = v_w$*, para todo* $w \in E \setminus F$*, ou seja,* $\widehat{m}(w) = \widehat{m}(w^+)$.

Demonstração: *(i) Desde que* $\widehat{m}(tw) = \widehat{m}(w)$*, para todo* $t > 0$ *e para todo* $w \in E \setminus F$*, concluímos que, para* $t = \frac{1}{\|w\|} > 0$*, obtemos*

$$t_{\frac{w}{\|w\|}} \left(\frac{w}{\|w\|}\right)^+ + v_{\frac{w}{\|w\|}} = t_w w^+ + v_w.$$

donde

$$t_{\frac{w}{\|w\|}} \frac{w^+}{\|w\|} = t_w w^+.$$

Passando a norma em ambos os membros acima, segue

$$t_{\frac{w}{\|w\|}} = \|w\|.t_w.$$

Mostrando (i).

(ii) É suficiente mostrar que se $w \in \mathcal{M}$ *então* w *é ponto crítico de* $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$. *Com efeito, notemos que*

$$w \in \widehat{E}(w),$$

pois

$$w = 1w + 0.$$

Por outro lado, da definição de $\mathcal{M}$*,*

$$\Phi'(w)(tw + v) = t\Phi'(w)w + \Phi'(w)v = 0,$$

para quaisquer $t > 0$ *e* $v \in F$*. Mostrando que* w *é ponto crítico de* $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$*, e pelo Lema 1.2 item (ii) sabemos que* $\widehat{m}(w)$ *é o único ponto critico de* $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$*, assim concluímos* $w = \widehat{m}(w)$*, provando (ii).*

(iii) Agora é suficiente mostrarmos que

$$\widehat{E}(w) = \widehat{E}(w^+) \tag{1.3}$$

Esta última igualdade é uma consequência imediata da definição de $\widehat{E}(w)$. Uma vez que $\widehat{m}(w)$ é o único ponto crítico de $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$, concluímos de (1.3) que $\widehat{m}(w) = \widehat{m}(w^+)$. ■

É importante notarmos também que

$$\widehat{E}(\mathbb{R}^+ w) = \widehat{E}(\mathbb{R}^+ w^+) = \widehat{E}(w) = \widehat{E}(w^+).$$

Seja as aplicações, $\widehat{m} : E \setminus F \to \mathcal{M}$ e $m : S^+ \to \mathcal{M}$, com

$$m = \widehat{m}|_{s^+} \quad e \quad \widehat{m}(w) = t_w w^+ + v_w$$

Agora já estamos em condições de apresentarmos a Proposição 1.1*, talvez não a mais importante deste trabalho, mas a que representa o método. Onde consiste na construção do homeomorfismo entre a esfera unitária S^+ e a variedade de Nehari generalizada $\mathcal{M}$.*

Proposição 1.1 *Suponha que Φ satisfaz (A1)-(A3), então:*

(a) *a aplicação $\widehat{m}$ é contínua*

(b) *a aplicação m é um homeomorfismo sobre a S^+ e $\mathcal{M}$*

Demonstração: *(a) Supondo $(w_n) \subset E \setminus F$, $w_n \to w \notin F$. Desde que*

$$\widehat{m}(w) = \widehat{m}\left(\frac{w^+}{\|w^+\|}\right),$$

assumimos sem perda de generalidade que $w_n \in S^+$. É suficiente mostrar que

$$\widehat{m}(w_n) \longrightarrow \widehat{m}(w)$$

a menos de subsequência. Escrevendo,

$$\widehat{m}(w_n) = s_n w_n + v_n = s_n w_n + v_n^0 + v_n^-. \tag{1.4}$$

Por (A3), $(\widehat{m}(w_n))$ é limitada, assim passando uma subsequência $s_n \to \overline{s}$ acima vem

$$s_n w_n + v_n^0 + v_n^- \rightharpoonup \overline{s}w + v_*^0 + v_*^-, \qquad v_* = v_*^0 + v_*^-$$

considerando $\widehat{m}(w) = sw + v$, decorre de (A2) que

$$\Phi(\widehat{m}(w_n)) \geq \Phi(sw_n + v) \to \Phi(sw + v) = \Phi(\widehat{m}(w)); \tag{1.5}$$

e pela semi-continuidade inferior fraca da norma e de I, e usando o fato de $\|w_n\| = 1$, segue

$$\begin{aligned}
\Phi(\widehat{m}(w)) \leq \lim_{n\to\infty} \Phi(\widehat{m}(w_n)) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}s_n^2 - \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2 - I(\widehat{m}(w_n))\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\overline{s}^2 - \frac{1}{2}\|v_*^-\|^2 - I(\overline{s}w + v_*) \qquad (1.6) \\
&\leq \Phi(\widehat{m}(w)) \\
&= \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}\|v^-\|^2 - I(sw + v).
\end{aligned}$$

Combinando (1.5) com (1.6) temos

$$\Phi(\widehat{m}(w)) \leq \lim_{n\to\infty} \Phi(\widehat{m}(w_n)) \leq \Phi(\widehat{m}(w)),$$

no que segue,

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\widehat{m}(w_n)) = \Phi(\widehat{m}(w)). \tag{1.7}$$

Com isso já temos a continuidade de $\widehat{m}$ pois, devido (A2), $\widehat{m}(w)$ é único, daí $\overline{s} = s$ e $v_* = v$, então $s_n \to s$, e $v_n^- \to v^-$ e desde que $dim E^0 < \infty$ temos $v_n^0 \to v^0$. Observe que se fosse $v_n \rightharpoonup v^-$ consequentemente $\Phi(\widehat{m}(w_n) \rightharpoonup \Phi(\widehat{m}(w))$, contradizendo (1.7).

(b) Esta parte é uma consequência direta do lema anterior. Queremos mostrar que $m = \widehat{m}|_{S^+}$ e $m^{-1} : \mathcal{M} \to S^+$ definida por

$$u \longmapsto \frac{u^+}{\|u^+\|}$$

são inversas uma da outra. É claro que

$$m^{-1}(m(u)) = \frac{m(u)^+}{\|m(u)^+\|} = \frac{t_u u}{\|t_u u\|} = \frac{u}{\|u\|} = u,$$

pois $u \in S^+$*, logo* $\|u\| = 1$ *e* $u = u^+$*. Vamos agora mostrar que* $m(m^{-1}(w)) = w$ *para todo* $w \in \mathcal{M}$*. Aqui vamos fazer uso do lema anterior itens (ii) e (iii) e o fato de que* $\widehat{m}(w) = \widehat{m}(tw)$ *para* $t > 0$*. Com efeito,*

$$m(m^{-1}(w)) = \widehat{m}\left(\frac{w^+}{\|w^+\|}\right) = \widehat{m}(w^+) = \widehat{m}(w) = w$$

Concluindo a demonstração.

$\blacksquare$

Seja agora as seguintes aplicações, $\widehat{\Psi} : E^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *e* $\Psi : S \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$\Psi = \widehat{\Psi}|_{S^+} \quad e \quad \widehat{\Psi}(w) := \Phi(\widehat{m}(w))$$

Proposição 1.2 *Suponha que* Φ *satisfaz (A1)-(A3). Então,* $\widehat{\Psi} \in C^1(E^+ \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ *com*

$$\widehat{\Psi}'(w)z = \frac{\|\widehat{m}(w)^+\|}{\|w\|}\Phi'(\widehat{m}(w))z \quad \textit{para todo } w, z \in E^+,\ w \neq 0.$$

Demonstração: *Seja* w $E^+ \setminus \{0\}$*,* $z \in E^+$ *e considerando* $\widehat{m}(w) = s_w w + v_w$*, e* $v_w \in F$*. Agora temos*

$$\begin{aligned}
\widehat{\Psi}(w+tz) - \widehat{\Psi}(w) &= \Phi(s_{w+tz}(w+tz) + v_{w+tz}) - \Phi(s_w w + v_w) \\
&\le \Phi(s_{w+tz}(w+tz) + v_{w+tz}) - \Phi(s_{w+tz} w + v_{w+tz}) \\
&= \Phi'(s_{w+tz}(w + \tau_t tz) + v_{w+tz}) s_{w+tz} tz
\end{aligned}$$

para todo $|t|$ *suficientemente pequeno e* $\tau_t \in (0,1)$*. Note agora,*

$$\begin{aligned}
\widehat{\Psi}(w+tz) - \widehat{\Psi}(w) &\ge \Phi(s_w(w+tz) + v_{w+tz}) - \Phi(s_w w + v_w) \\
&= \Phi'(s_w(w + \eta_t tz) + v_{w+tz}) s_w tz
\end{aligned}$$

com $\eta_t \in (0,1)$, *daí*

$$\Phi'(s_w(w+\eta_t tz)+v_{w+tz})s_w tz \leq \widehat{\Psi}(w+tz)-\widehat{\Psi}(w) \leq \Phi'(s_{w+tz}(w+\tau_t tz)+v_{w+tz})s_{w+tz}tz;$$

pela continuidade de s_w *e por* Φ *ser* C^1, *temos*

$$\lim_{t\to 0}\frac{\widehat{\Psi}(w+tz)-\widehat{\Psi}(w)}{t} = s_w\Phi'(s_w w+v_w)z = \frac{\|\widehat{m}(w)^+\|}{\|w\|}\Phi'(\widehat{m}(w))z.$$

■

Como consequência disto temos o seguinte corolário no qual já começamos a preparar os conceitos necessários para a conclusão do nosso método estudado quando provarmos a Proposição 1.3 *mais à frente, garantindo que o funcional* Φ *sobe algumas hipóteses necessárias satisfaz a condição Palais-Smale-(PS) sobre a variedade de Nehari generalizada* $\mathcal{M}$.

Corolário 1.1 *Supondo* $\Phi \in C^1(E,\mathbb{R})$ *e satisfazendo (A1)-(A3). Então:*

(a) $\Psi \in C^1(S^+,\mathbb{R})$ *e*

$$\Psi'(w)z = \|\widehat{m}(w)^+\|\Phi(m(w))z \text{ para todo } z \in T_w(S^+).$$

(b) *Se* (w_n) *é uma sequencia Palais-Smale-(PS) para* Ψ, *então* $m((w_n))$ *é uma sequência (PS) para* Φ. *Se* $(u_n) \in \mathcal{M}$ *é uma sequência (PS) limitada para* Φ, *então* $m^{-1}(u_n)$ *é (PS) para* Ψ.

(c) *Se* w *é um ponto crítico para de* Ψ *se, e somente se,* $m(w)$ *é um ponto crítico não-trivial de* Φ. *Consequentemente os valores de* Ψ *e* Φ *coincidem e* $\inf_{S^+}\Psi = \inf_{\mathcal{M}}\Phi$.

(d) *Se* Φ *é par, então* Ψ *também.*

Demonstração: *(a) Se* $w \in S^+$, *então* $\|w\| = 1$ *e usando a Proposição 1.2, (a) é verificado.*

(b) Primeiramente notemos que pela definição de Ψ *segue que* $\Psi(w_n)$ *é limitada se, e somente se,* $\Phi(m(w))$ *for limitada. Agora fazendo a decomposição* $E = T_w(S^+) \oplus E(w)$ *para todo* $w \in S^+$ *e escrevendo* $u = m(w)$ *segue,*

$$\|\Psi'(w)\| = \sup_{\substack{z \in T_w(S^+) \\ \|z\|=1}} \Psi'(w)z = \|u^+\| \sup_{\substack{z \in T_w(S^+) \\ \|z\|=1}} \Phi'(u)z = \|u^+\| \|\Phi'(u)\|_*, \tag{1.8}$$

a conclusão de (b) é direto da igualdade (1.8) *acima, onde a ultima igualdade na mesma segue do fato de*

$$\|\Phi'(u)\|_* = \sup_{\substack{z \in T_w(S^+) \\ \|z\|=1}} \Phi'(u)z + \sup_{\substack{v \in E(w) \\ \|v\|=1}} \Phi'(u)v,$$

pois $\Phi'(u)v = 0$ *para todo* $v \in E(w)$ *e por* $E(w)$*. Com efeito, dado* $v \in \widehat{E}(w)$ *segue,*

$$v = sw + v' \quad com \;\; w \in S^+,\; s \in \mathbb{R} \;\; e \; v' \in F,$$

com isso,

$$\begin{aligned} \Phi'(u)v = \Phi'(u)(sw + v') &= s\Phi'(u)w + \Phi'(u)v' \\ &= s\Phi'(u)m^{-1}(m(w)) \\ &= \frac{s}{\|m(w)^+\|}\Phi'(u).\widehat{m}(w) = 0. \end{aligned}$$

Desde que $\|u^+\| \geq \delta > 0$ *para todo* $u \in \mathcal{M}$ *concluímos a prova.*

(c) é direto da igualdade (1.8)*.*

(d) Se Φ *é par, então* Ψ *será, pois*

$$\Psi(w) := \Phi(sw) = \Phi(-sw) := \Psi(-w).$$

Concluindo a demonstração. ■

Consequência imediata deste corolário é o próximo lema que garante que o ínfimo de Φ *sobre* $\mathcal{M}$ *tem a seguinte caracterização:*

Lema 1.4 *Seja $\Phi \in C^1(E,\mathbb{R})$ e satisfazendo $(A1)-(A3)$ então:*

$$c := \inf_{u\in\mathcal{M}} \Phi(u) = \inf_{w\in E\setminus F} \max_{u\in\widehat{E}(w)} \Phi(u) = \inf_{w\in S^+} \max_{u\in\widehat{E}(w)} \Phi(u).$$

Demonstração: *Desde que $\widehat{m}(w) = \widehat{m}\left(\frac{w}{\|w\|}\right)$ para todo $w \in E\setminus F$ temos,*

$$\inf_{w\in E\setminus F} \max_{u\in\widehat{E}(w)} \Phi(u) = \inf_{w\in S^+} \max_{u\in\widehat{E}(w)} \Phi(u). \tag{1.9}$$

Da definição de Ψ, segue

$$\inf_{w\in S^+} \Psi(u) = \inf_{w\in S^+} \max_{u\in\widehat{E}(w)} \Phi(u), \tag{1.10}$$

combinando (1.9) e (1.10) e pelo corolário anterior item c), temos

$$\inf_{u\in\mathcal{M}} \Phi(u) = \inf_{w\in E\setminus F} \max_{u\in\widehat{E}(w)} \Phi(u) = \inf_{w\in S^+} \max_{u\in\widehat{E}(w)} \Phi(u)$$

∎

Proposição 1.3 *Supondo que Φ satisfaz (A1), (A2) e também*

(i) *$I'(u) = o(\|u\|)$ quando $u \to 0$;*

(ii) *$I(su)/s^2 \to \infty$ uniformemente para u em um subconjunto fracamente compacto de $E\setminus\{0\}$ quando $s\to\infty$;*

(iii) *I' é completamente contínua.*

Então Φ satisfaz a condição (PS) na $\mathcal{M}$.

Demonstração: *Seja $(u_n) \subset \mathcal{M}$ uma sequência (PS). Dessa forma*

$$\Phi(u_n) \leq d,$$

para algum $d > 0$ e

$$\Phi'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Se (u_n) *é ilimitada, definamos*

$$v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Passando para uma subsequência, podemos assumir

$$\|u_n\| \longrightarrow \infty \quad e \quad v_n \rightharpoonup v,$$

pois S *é fracamente compacta. Segue-se de (ii) que se* $v \neq 0$*, temos*

$$0 \leq \frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2}\|v_n^+\|^2 - \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2 - \frac{I(\|u_n\|v_n)}{\|u_n\|^2} \tag{1.11}$$

com a parte direita acima indo para $-\infty$*. Consequentemente* $v = 0$*. Por* (1.11)*,*

$$\frac{1}{2}\|v_n^+\|^2 \geq \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2 + \frac{I(\|u_n\|v_n)}{\|u_n\|^2}$$

e como $I > 0$*, vem*

$$\|v_n^+\| \geq \|v_n^-\|.$$

Assim, se $v_n^+ \to 0$ *então* $v_n^- \to 0$*, e portanto,*

$$\|v_n^0\|^2 = 1 - \|v_n^+\|^2 - \|v_n^-\|^2 \longrightarrow 1.$$

Como $dim E^0 < \infty$ *então* $v_n^0 \to v^0 \neq 0$ *então* $v \neq 0$ *contradição. Portanto*

$$v_n^+ \nrightarrow 0$$

e assim,

$$\|v_n^+\| \geq \alpha \quad \forall\ n \ e \ algum \ \alpha > 0,$$

a menos de subsequência. Completamos a prova da limitação de u_n*, observando que*

$$d \geq \Phi(u_n) = \Phi(s_{v_n^+}v_n^+) \geq \Phi(sv_n^+) \geq \frac{1}{2}\alpha^2 s^2 - I(sv_n^+) \to \frac{1}{2}\alpha^2 s^2, \tag{1.12}$$

para todo $s > 0$*, contradição pois para* $s > (2d)^{\frac{1}{2}}/\alpha$ (1.12) *não é valida. Portanto* (u_n) *é limitada e*

$$\Phi'(u_n) = u_n^+ - u_n^- - I'(u_n) \to 0.$$

Uma vez que I' é completamente contínuo e dim $E^0 < \infty$, a convergência acima está bem definida e (u_n) possui uma subsequencia convergente.

$\blacksquare$

Faremos aqui o Teorema principal da teoria do método estudado, no qual garantirá sobe certas hipérteses uma infinidades de pares de soluções para algumas aplicações abordas nos próximos capítulos. Para isso vamos apresentar a seguinte definição

Definição 1.3 ***Solução Ground State***. *Defina,*

$$c := \inf_{u \in \mathcal{M}} \Phi(u).$$

Seja $\Phi \in C^1(E, R)$. Um ponto crítico $u \neq 0$ de Φ; $\Phi(u) = c$ é chamado de ponto crítico de menor energia, ou também de Solução ***Ground State****.*

Teorema 1.1 *Supondo que Φ satisfaz (A1), (A2) e*

(i) $I'(u) = o(\|u\|)$ *quando* $u \to 0$;

(ii) $I(su)/s^2 \to \infty$ *uniformemente para u em um subconjunto fracamente compacto de $E \setminus \{0\}$ quando $s \to \infty$;*

(iii) *I' é completamente contínua.*

Então a equação $\Phi'(u) = 0$ tem tem uma solução ***ground state****. Além disso, se I for par, então está equação tem infinitos pares de soluções.*

Demonstração: *Vamos mostrar que (A3) é satisfeita. Se não acontecesse, existiria uma sequência $\delta_n = 1/n$ e $w_n \in S_\rho(0) \cap E^+$ tais que $s_n < 1/n$, com $\widehat{m}(w) = sw$ daí*

$$0 = \Phi'(s_n(w_n)) = (s_n)\|(w_n)^+\|^2 - I'(s_n(w_n)^+)w_n = s_n\rho^2 - I'(s_n(w_n)^+)w_n.$$

Assim,

$$\rho^2 = \frac{I'(s_n(w_n)^+)w_n}{s_n},$$

dessa forma, como $\rho = \|w_n\|$, *seque*

$$\rho = \frac{I'(s_n(w_n)^+)w_n}{s_n\|w_n\|} \leq \frac{\|I'(s_n(w_n)^+)w_n\|}{s_n\|w_n\|} = 1 \tag{1.13}$$

contradizendo (i). Com isso deve existir $\delta > 0$ *tal que* $\|\widehat{m}(w)^+\| \geq \delta$ *para todo* $w \in E \setminus F$. *Como* E *é Hilbert, logo reflexivo,* S^+ *é fracamente compacta. Por outro lado se existisse uma* $w_n \in \mathcal{W} \subset S^+$ *tal que* $\|\widehat{m}(w_n)\| > n$ *para todo* n *natural e por sua vez* (r_n) *ilimitada. Teríamos novamente (1.12), temos ainda por (A1)*

$$\frac{I(r_n w_n)}{r_n^2} \leq \frac{I'(r_n(w_n)^+)w_n}{r_n^2} \leq \frac{I'(r_n(w_n)^+)w_n}{r_n} = \rho^2.$$

O que contradiz (ii). Portanto (A3) é satisfeita.

Desde que $\widehat{m}(w) = \widehat{m}(w^+/\|w^+\|)$ *para todo* $E \setminus F$, *isto também é verdade para o compacto* $\mathcal{W}$. *Também notemos* $c := \inf_{\mathcal{M}} \Phi \geq \eta > 0$, *para algum* $\eta > 0$, *pois de forma natural* $\Phi(w) \geq \eta$, *com* $w \in S_\rho(0) \cap E^+$.

Pela Proposição 1.3, e seja (w_n) *uma sequência (PS), com* $u_n = m(w_n) \in \mathcal{M}$ *então pelo Corolário 1.1* (u_n) *é (PS) para* Φ, *como* Φ *satisfaz a condição (PS) em* $\mathcal{M}$ *temos* $u_n \to u$ *na variedade a menos de subsequência, com isso,* $w_n \to m^{-1}(u)$, *então* Ψ *satisfaz a condição (PS), daí* $\Psi'(w_n) \to 0$ *e pela condição (PS)* $w_n \to w$, *depois de passar uma subsequência, logo* w *é minimizador de* Ψ *ou seja,*

$$\Psi(w) = \Phi(m(w)) = \Phi(u) = \inf_{w \in S^+} \Psi(w) = \inf_{u \in \mathcal{M}} \Phi(u) \ e \ \Psi'(w) = 0,$$

Dessa forma, u *é solução ground state da equação* $\Phi'(u) = 0$, *e pelo Corolário 1.1* $m(w) = u$ *é crítico não-trivial de* Φ.

Agora, se I *é Par por (A1),* Φ *também é, pelo Corolário 1.1 novamente,* Ψ *também será.*

Novamente pelo Corolário 1.1, $0 < \inf_{S^+} \Psi = \inf_{\mathcal{M}} \Phi$, *consequentemente* Ψ *é limitada inferiormente. Em suma, pela limitação inferior sobre* S^+ *e pela condição (PS)* Ψ *tem infinitos pares de pontos críticos, ver Teorema* A.1 *e novamente pelo Corolário 1.1 temos infinitos pares de soluções não triviais.*

■

Concluímos aqui o método da variedade de Nehari Generalizada, e as ferramentas fundamentais para iniciarmos nossas aplicações.

Capítulo 2

Problema de autovalor

Neste capitulo estamos interessados em investigar o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado, e* $\lambda \geq \lambda_1$, λ_1 *denota o primeiro autovalor do operador Laplaciano com condição de fronteira Dirichlet e* $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfazendo:*

(f_1) *Com* $a > 0$ *e* $2 < q < 2^*$, *com* $2^* := 2N/(N-2)$ *se* $N \geq 3$ *e* $2^* := \infty$ *caso contrário, tais que*

$$|f(x,u)| \leq a\left(1 + |u|^{q-1}\right),$$

(f_2) $f(x,u) = o(u)$ *uniformemente em* x *quando* $u \to 0$,

(f_3) $u \to f(x,u)/|u|$ *é estritamente crescente,*

(f_4) $F(x,u)/u^2 \to \infty$ *uniformemente em* x *quando* $|u| \to \infty$.

Para aplicarmos o método da variedade de Nehari generalizada, vamos definir primeiramente algumas notações, $E = H_0^1(\Omega)$ *com*

$$E = E^+ \oplus E^0 \oplus E^-$$

a decomposição ortogonal correspondente ao espectro de $\Delta - \lambda$ em E. Mais precisamente, denotamos os autovalores de $-\Delta$ por $\lambda_1, \lambda_2, ...$ e um conjunto ortogonal em E correspondente por cada autofunção e_i do autovalor λ_i que gera o subespaço ortogonal E^-, e de maneira análoga para o subespaço E^0. Para isso, supondo $\lambda_k < \lambda = \lambda_{k+1} = ... = \lambda_m < \lambda_{m_{m+1}}$, onde $1 \leq k < m$. Então

$$E^- = span\{e_1, ..., e_k\} \quad e \quad E^0 = span\{e_{k+1}, ..., e_m\}.$$

Também admitimos o caso $k = 0$ e $k = m \geq 1$ que correspondem respectivamente a $E^- = \{0\}$ e $E^0 = \{0\}$. Tendo em vista esta decomposição cada elemento $u \in E$, pode ser escrito como $u = u^+ + u^0 + u^- \in E^+ \oplus E^0 \oplus E^-$. Desta forma a norma de u no espaço E será

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2\right) dx = \|u^+\|^2 - \|u^-\|^2.$$

Então o funcional associado a (2.1) é

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u^+\| - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - I(u), \tag{2.2}$$

com,

$$I(u) = \int_\Omega F(x,u)dx \quad e \quad F(x,u) := \int_0^u f(x,s)ds$$

Para uso nessa aplicação vamos precisar de alguns resultados entre eles, o seguinte lema:

Lema 2.1 *Se f satisfaz (f_2) e (f_3) e Ω um conjunto qualquer, então $F(x,u) > 0$ e $\frac{1}{2}f(x,u)u > F(x,u)$ para todo $u \neq 0$.*

Demonstração: *Para ver que $F \geq 0$ notemos que (f_3) garante que $f(x,u)/|u|$ é sempre crescente para $u \neq 0$. Por (f_2) temos*

$$g(x,u) = \lim_{u \to 0} \frac{f(x,u)}{|u|} = 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

o que implica que podemos definir $g(x,0) = 0$. Assim (f_3) implica que $f(x,u)$ deve ser negativa para $u < 0$ e positiva para $u > 0$. Portanto o integrando da *definição de F é positivo quando $u > 0$, e negativo se $u < 0$, mostrando que $F \geq 0$. Por outro lado, temos*

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds = \int_0^u \frac{f(x,s)}{s} sds$$

e pela hipótese (f_3), onde garante que $f(x,u)/|u|$ é crescente em $[0,u]$, temos

$$\max_{s \in [0,u]} \frac{f(x,s)}{s} = \frac{f(x,u)}{u},$$

daí

$$\int_0^u \frac{f(x,s)}{s} sds < \int_0^u \frac{f(x,u)}{u} sds = \frac{f(x,u)}{u} \int_0^u sds = \frac{1}{2} f(x,u)u.$$

Mostrando o resultado.

Lema 2.2 *Supondo que $\lambda \geq \lambda_1$, Ω um domínio qualquer e f satisfazendo $(f_1)-(f_4)$ e seja u, s, v números reais, tais que $s \geq -1$ e seja, $w := su + v \neq 0$. Então*

$$f(x,u)\left[s(\frac{1}{2}+1)u + (1+s)v\right] + F(x,u) - F(x,u+w) < 0$$

para todo $x \in \Omega$.

Demonstração: *Fixemos $x \in \Omega$ e $u, v \in \mathbb{R}$. Para $s \geq -1$, consideramos $z = z(s) := (1+s)u + v$. Sendo assim $z = u + w$. Além disso definiremos*

$$g(s) = f(x,u)\left[s(\frac{1}{2}+1)u + (1+s)v\right] + F(x,u) - F(x,z).$$

Devemos mostrar que $g(s) < 0$ sempre que $u \neq z$. Para isso devemos considerar alguns casos

i) Supondo $u = 0$. Então $z \neq 0$ e portanto Pelo Lema 2.1, temos

$$g(s) = -F(x,z) < 0.$$

ii) Assumindo $u \neq 0$. Se $uz \leq 0$, segue, de $v = z - (1-s)u$, e substituindo em v na definição de g acima que

$$g(s) = f(x,u)\left[(\frac{s^2}{2}+s)u+(s+1)(z-(s+1)u)\right]+F(x,u)-F(x,z),$$

pelo Lema 2.1, *uma vez que* $\frac{1}{2}f(x,u)u > F(x,u)$, *segue*

$$g(s) < f(x,u)\left[(\frac{s^2}{2}+s)u+(s+1)(z-(s+1)u)\right]+\frac{1}{2}f(x,u)u-F(x,z)$$

e por consequência do Lema 2.1 *que* $f(x,u)z \leq 0$ *quando* $uz \leq 0$, *pois* $\frac{1}{2}f(x,u)u > F(x,u) > 0$ *temos*

$$g(s) = \frac{1}{2}(s^2+s+1)f(x,u)u+(s+1)f(x,u)z-F(x,z) \leq 0.$$

Portanto $g(s) < 0$ *também para este caso.*

iii) Por fim, suponha agora, $uz > 0$. *Observe que*

$$g(-1) = -\frac{1}{2}f(x,u)u+F(x,u)-F(x,v),$$

e por consequência do Lema 2.1, *vem*

$$-\frac{1}{2}f(x,u)u+F(x,u) < 0,$$

e com isso,

$$g(-1) = -\frac{1}{2}f(x,u)u+F(x,u)-F(x,v) < -F(x,v) \leq 0 \text{ e } \lim_{s\to\infty} g(s) = -\infty.$$

Além disso, calculando a derivada da função real g, *temos*

$$g'(s) = \lim_{h\to 0}\frac{g(s+h)-g(s)}{h} = uz\left(\frac{f(x,u)}{u}-\frac{f(x,z)}{z}\right). \tag{2.3}$$

Suponha que g *atinja o máximo em* $[-1,\infty)$ *em algum* s *com* $g(s) \geq 0$. *Então* $g'(s) = 0$ *e* $u = z$ *por* (2.3), *e por* (f_3)

$$g(s) = -\frac{1}{2}s^2 f(x,u)u \leq 0.$$

Segue que $g(s)$ *pode ser* 0 *se* $u = z$ *ou seja,* $w = 0$, *mas deve ser negativo caso contrário. Concluindo a demonstração.* ■

A proposição que apresentaremos a seguir garantirá que o funcional em (3) *satisfaz a condição* $(A2)$. *A prova desse fato utilizará o Lema* 2.2.

Proposição 2.1 *Supondo que f satisfaz $(f_1)-(f_4)$. Então*

(i) $\widehat{E}(w)\cap\mathcal{M}\neq\emptyset$ *para cada* $w\in E\setminus(E^0\oplus E^-)\equiv E\setminus F$.

(ii) Se $u\in\mathcal{M}$, *então*

$$\Phi(u+w)<\Phi(u)\quad \textit{sempre que } u+w\in\widehat{E}(u), w\neq 0.$$

Consequentemente u é o único máximo global de $\Phi|_{\widehat{E}(u)}$

Demonstração: *(i) Seja, $w\in E\setminus F$. Desde que pelo Lema 1.1 item iii), que $\widehat{E}(w)=\widehat{E}(w^+/\|w^+\|)$, sendo assim podemos supor sem perda de generalidade que $w\in S^+$. Afirmamos que $\Phi\leq 0$ em $\widehat{E}(w)\setminus B_R(0)$, desde que R seja suficientemente grande. Se não fosse assim, encontraríamos uma sequência (u_n) tal que*

$$\|u_n\|\to\infty \quad e \quad \Phi(u_n)\geq 0.$$

Considerando $v_n:=u_n/\|u_n\|$ e como a esfera é fracamente compacta, temos $v_n\rightharpoonup v$ em $E\setminus F$ e usando o mesmo argumento por contradição como em (1.11), agora para o funcional em (3), segue $v=0$. Uma vez que $v_n^+\in E^+$, podemos escrever $v_n^+=s_nw$ com $w\in S^+$, assim

$$\|v_n^+\|=\|s_nw\|=s_n,$$

limitada, e longe de 0. No entanto,

$$v_n^+\to sw,\ s>0.$$

Contradição. Por (i) do Lema 2.1 e por

$$\Phi(sw)=\frac{1}{2}s^2+o(s^2)\quad \textit{quando}\quad s\to 0,$$

segue que,

$$0<\sup_{w\in\widehat{E}(w)}\Phi<\infty.$$

Uma vez que Φ é fracamente semicontínuo superiormente em $\widehat{E}(w)$ e $\Phi \leq 0$ em $\widehat{E}(w) \cap F$, o supremo é atingido em algum ponto u_0 tal que $u_0^+ \neq 0$. Então u_0 é um ponto crítico de $\Phi|_{\widehat{E}(w)}$, consequentemente $u_0 \in \mathcal{M}$.

(ii) Seja a forma bilinear,

$$B(v_1, v_2) := \int_\Omega (\nabla v_1 \nabla v_2 - \lambda v_1 v_2) dx \quad v_1, v_2 \in E.$$

Para $u \in \mathcal{M}$, seja $u + w \in \widehat{E}(u)$. Então $u + w = (1+s)u + v$ onde $s \geq -1$ e $v = v^0 + v^- \in F$. Notemos pela definição do funcional (2.3) que

$$\Phi(u+w) - \Phi(u) = \frac{1}{2}[B(u+w, u+w) - B(u,u)] + \int_\Omega (F(x,u) - F(x, u+w)) dx$$

$$= \frac{1}{2}[B((1+s)u + v, (1+s)u + v) - B(u,u)] + \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u+w)) dx$$

e por propriedade da bilinear, segue

$$\Phi(u+w) - \Phi(u) = \frac{1}{2}\left([(1+s)^2 - 1]B(u,u) + 2(1+s)B(u,v) + B(v,v)\right)$$

$$+ \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u+w)) dx$$

$$= -\frac{\|v^-\|^2}{2} + B(u, s(\frac{s}{2}+1)u + (1+s)v) + \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u+w)) dx$$

$$= -\frac{\|v^-\|^2}{2} + \int_\Omega (f(x,u))\,[s(\frac{s}{2}+1)u + (1+s)v] + \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u+w)) dx$$

onde usamos o fato de que $z := s(\frac{s}{2}+1)u + (1+s)v \in E(u)$ e ainda,

$$0 = \Phi'(u)z = B(u,z) - \int_\Omega f(x,u) z dx.$$

Uma vez que w é diferente de zero em um conjunto de medida positiva a ultima integral é negativa de acordo com o Lema 2.2. Assim,

$$\Phi(u+w) < \Phi(u).$$

■

Estamos prontos para apresentar o principal resultado deste capítulo, o qual vamos aplicar o método da variedade de Nehari generalizada, para isso precisamos mostrar que o funcional associado ao problema em (2.1)*, verifica as condições* $(A1) - (A3)$ *dadas no capitulo* 1*, da variedade de Nehari generalizada, e mostrar também as hipóteses do Teorema* 1.1*, apresentado no capítulo* 1*, em que é o resultado fundamental do método.*

Teorema 2.1 *Supondo que* $\lambda \geq \lambda_1$*, e* f *satisfazendo* $(f_1) - (f_4)$*. Então o problema em* (2.1) *possui uma solução ground state. Além disso, se* f *for impar, então o problema dado em* (2.1) *tem uma infinidade de pares de soluções.*

Demonstração: *Vamos primeiramente mostrar que a hipótese* $(A1)$ *é satisfeita, uma vez que o funcional* Φ *pode ser escrito como em* (3)*, resta mostrar que* I *é fracamente contínuo para a conclusão da verificação de* $(A1)$*. Para isso, suponhamos que* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $H_0^1(\Omega)$*, os teoremas de imersão de Sobolev garantem que* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *continuamente, assim* $u_n \to u$ *em* $L^q(\Omega)$*. Dessa forma, fazendo uso de* (f_1) *e quando* $n \to \infty$*, temos*

$$|F(x,u) - F(x,u_n)| \leq \left| \int_{u_n}^{u} f(x,s)ds \right| \leq \left| \int_{u_n}^{u} a(1 + |s|^{q-1})ds \right|$$

isto é,

$$|F(x,u) - F(x,u_n)| \leq a \left(|u| - |u_n| + \frac{|u|^q}{q} - \frac{|u_n|^q}{q} \right) \to 0.$$

O que implica

$$I(u) - I(u_n) = \int_\Omega (F(x,u) - F(x,u_n))dx \to 0 \quad quando \quad n \to \infty.$$

Fazendo uso do Lema 2.1*, garantimos que a condição* $(A1)$ *é valida. Vamos mostrar que o item (i) do Teorema* (1.1) *é valido. Decorre diretamente das desigualdades de Hölder e Poincaré, basta notar que,*

$$|I'(u)v| = \left| \int_\Omega f(x,u)vdx \right| \int_\Omega |f(x,u)||v|dx \leq c_p \|u\| \|v\|,$$

isto é

$$\|I'(u)\| \leq c\|u\|.$$

Mostrando o item (i) do Teorema (1.1). *Para verificarmos o item (ii) do do Teorema* (1.1), *basta notarmos que*

$$\frac{I(s_n u_n)}{s_n^2} = \int_\Omega \frac{F(x, s_n u_n)u_n^2}{(s_n u_n)^2} dx \to \infty,$$

para um subconjunto fracamente compacto $\mathcal{W} \ni (u_n)$. *Para isso, podemos supor a menos de subsequencia,* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $E \setminus \{0\}$ *e* $u_n(x) \to u(x)$ *q.t.p, definindo* h_j *para os pontos em que* $u(x) \neq 0$ *como*

$$h_j(x) := \frac{F(x, s_n u_j)u_j^2}{(s_n u_j)^2} = \frac{F(x, s_n u_j)}{s_n^2},$$

em que é contínua, logo mensurável e positiva, devido $F \geq 0$ *pelo Lema* 2.1. *Do lema de Fatou, temos*

$$\int_\Omega \liminf h_j dx \leq \int_\Omega h_j dx \quad \forall\ j$$

e em particular,

$$\int_\Omega \frac{F(x, s_n u)u^2}{(s_n u)^2} dx \leq \int_\Omega \frac{F(x, s_n u_n)u_n^2}{(s_n u_n)^2},$$

e por (f_4), *a integral da parte esquerda acima tende para o* ∞ *quando* $n \to \infty$. *Mostrando que é satisfeito o item (ii) do Teorema* (1.1). *Vamos então verificar que também é satisfeito o item (iii) do Teorema* (1.1). *Novamente pelas desigualdades de Hölder e Paincaré, vem*

$$\begin{aligned} |[I'(u_n) - I(u)]v| &= \left| \int_\Omega (f(x, u_n)v - f(x, u)v) dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |f(x, u_n) - f(x, u)||v| \\ &\leq c_p \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \|v\| \end{aligned}$$

como $\|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \to 0$, *o item (iii) está verificado.*

Por fim, a condição (*A*2) *é valida pela Proposição* (2.1), *e* (*A*3) *na demonstração do Teorema* 1.1. *Em suma, fazendo uso do Teorema* 1.1, *juntamente com o Teorema A.*2, *e o resultado está provado.* ■

Capítulo 3

Um problema do tipo Schrödinger

Vamos começar considerando o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u), & x \in \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0, & |x| \to \infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

Conhecido como problema de Schrödinger. Supondo $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfazendo*

(f_1) *Com* $a > 0$ *e* $2 < q < 2^*$, *com* $2^* := 2N/(N-2)$ *se* $N \geq 3$ *e* $2^* := \infty$ *caso contrário, tais que*

$$|f(x,u)| \leq a\left(1 + |u|^{q-1}\right),$$

(f_2) V, f *são 1-periódicas em* $x_1, ..., x_N$, $0 \in \sigma(-\Delta + V)$ *e* $\sigma(-\Delta+V) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$,

(f_3) $f(x,u) = o(u)$ *uniformemente em* x *quando* $u \to 0$,

(f_4) $u \to f(x,u)/|u|$ *é estritamente crescente,*

(f_5) $F(x,u)/u^2 \to \infty$ *uniformemente em* x *quando* $|x| \to \infty$, *Com o funcional associado dado por*

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx. \tag{3.2}$$

Estamos com um problema no $\mathbb{R}^N$*, em vez do* Ω *limitado como foi visto no problema em* (2.1)*. Para o funcional em* (3.2)*, a proposição* (2.1) *ainda é valida basta fazer as alterações seguintes. A diferença aqui é que a integração é no* $\mathbb{R}^N$ *em vez de* Ω*, e na forma bilinear* $B(v_1, v_2)$ *substituir* $-\lambda v_1 v_2$ *por* $V(x)v_1v_2$*. Notemos ainda que apesar de que uma das hipóteses do Teorema* 2.1 *ser* $dim E^- < \infty$*, este fato não foi usado na demonstração da Proposição* 2.1*, assim podemos fazer uso da mesma. Feito isso, resta colocar o funcional em* (3.2) *como em (A*1*), que será feito através do Lema* (3.1) *para assim resolvermos o Teorema* 3.1 *via minimização juntamente com Lema A.*1 *de P.L Lions'. Em* [12] *foi mostrado que se* f *é impar em* u *e temos a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, então o problema não linear de Schrödinger tem uma infinidade de soluções geometricamente distintas, no entanto aqui vamos apenas provar a existência de uma solução de estado fundamental via minimização em* $\mathcal{M}$*.*

Lema 3.1 *Supondo* $(f_1) - (f_5)$ *e definindo a norma em* E *como*

$$\|u\|^2 := \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx.$$

Então

$$\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx.$$

Demonstração: *Considerando* $u^+ = \frac{u+v}{2}$ *e* $u^- = \frac{u-v}{2}$ *tal que* $v \in E$*. Notemos* $u = u^+ + u^- \in E$*. Vamos calcular a norma de* u^+ *e* u^-*. Segue*

$$\begin{aligned}\|u^+\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\frac{u+v}{2}\right)\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|\nabla u|^2}{4} + \frac{\nabla u \nabla v}{2} + \frac{|\nabla v|^2}{4}\right)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\left(\frac{u^2}{4} + \frac{uv}{2} + \frac{v^2}{4}\right)\end{aligned}$$

de forma análoga

$$\|u^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|\nabla u|^2}{4} - \frac{\nabla u \nabla v}{2} + \frac{|\nabla v|^2}{4} \right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left(\frac{u^2}{4} - \frac{uv}{2} + \frac{v^2}{4} \right).$$

Por fim, calculando $\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2$*, segue,*

$$\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) uv dx.$$

em particular se $u = v$*, temos*

$$\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx$$

■

Apresentaremos aqui o resultado principal deste capitulo, que é o Teorema 3.1*. Em que vamos garantir a existência de solução ground state para o problema em* (3.1)*. Para isso vamos mostrar inicialmente que são satisfeitas* $(A1)-(A3)$*, para por fim combinar os argumentos da Proposição* 1.3

Teorema 3.1 *Supondo* $(f_1)-(f_5)$*. Então o problema* (3.1) *possui uma solução ground state.*

Demonstração: *Seja* $E = H^1(\mathbb{R}^N)$*, desde que* (f_2) *acontece e* $E^0 = \{0\}$*,* $dim E^{\mp} = \infty$ *e pelo Lema* 3.1 *podemos escrever*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx = \|u^+\|^2 - \|u^-\|^2.$$

Portanto Φ *pode ser escrito como em* $(A1)$*, e notando que* $F \geq 0$*,* I *é fracamente semi-continuo inferiormente onde vemos isso diretamente pelo Lema de Fatou (apêndice), e fazendo uso da imersão contínua* $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *garante a menos de subsequência* $u_n \rightharpoonup u$ *em* E *então* $u_n \to u$ *em* $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$*, agora sim, pelo Lema de Fatou*

$$\liminf_{u_n \to u} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{u_n \to u} F(x, u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx.$$

Portanto I é fracamente semicontínuo inferiormente. O Lema 2.1 *implica que* (*A*1) *é válido e* (*A*2) *pela Proposição* 2.1*. E ainda* (*A*3) *e* $c = inf_{\mathcal{M}} > 0$ *pela demonstração do Teorema* 1.1*.*

Notemos agora que por (f_3) *para cada,* $\epsilon > 0$ *existe* C_ϵ *tal que*

$$|u| < C_\epsilon \Rightarrow |f(x,u)| \leq \epsilon|u|$$

e por (f_1)

$$|f(x,u)| \leq \epsilon|u| + C_\epsilon|u|^{q-1}. \tag{3.3}$$

Resta então combinar os argumentos da Proposição 1.3*. Considerando uma sequência (PS)* (w_n) *para* Ψ*. Então* (u_n) *com* $u_n := m(w_n)$ *é (PS) para* Φ *pelo Corolário* 1.1*. Assumindo*

$$\|u_n\| \to \infty \quad com \quad v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|} \rightharpoonup v$$

Vemos como em (1.11)*, seguindo em* $v_n \rightharpoonup 0$ *em* $E \setminus F$ *depois de passar para uma subsequência, e ainda*

$$\|v_n^+\| \geq \|v_n^-\| \quad e \quad \|v_n^+\|^2 + \|v_n^-\|^2 = 1,$$

combinando,

$$\frac{\|v_n^+\|^2}{2} \geq \frac{\|v_n^-\|^2}{2} \quad e \quad \frac{\|v_n^-\|^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\|v_n^+\|^2}{2}.$$

então $\|v_n^+\| \geq 1/\sqrt{2}$*.*

Se $v = 0$ *e* $v_n^+ \to 0$ *em* $L^q(\mathbb{R}^N)$ *e usando* (3.3)*, então para cada* $s > 0$*, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, sv_n^+)dx \to 0$$

e portanto

$$d \geq \Phi(u_n) = \Phi(s_{v_n^+}v_n^+) \geq \Phi(sv_n^+) \geq \frac{s^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, sv_n^+)dx \to \frac{s^2}{2} \tag{3.4}$$

que é uma contradição para $s > \sqrt{2d}$*. Dessa forma* $v_n^+ \nrightarrow 0$*. Por P.L. Lions Lema A.*1 *só nos resta que*

$$\int_{B_1(y_n)} (v_n^+)^2 dx \geq \delta \tag{3.5}$$

para algum $\delta > 0$, $y_n \in \mathbb{R}^N$ *e quase todo* n. *Desde que* Φ *e* $\mathcal{M}$ *são invariantes por translação da forma* $v = v(\cdot - y)$, $y \in \mathbb{Z}^N$, *podemos assumir a translação* $v_n = v_n(\cdot - y_n)$ *para algum* $y_n \in \mathbb{Z}^N$, *que* y_n *é limitada. Desde que* $v_n^+ \to v^+$ *em* $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, *(pois se* $u_n \rightharpoonup u$ *em* E *implica* $u_n \to u$ $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *e portanto* $u_n(x) \to u(x)$ *quase sempre, a menos de subsequência), assim,* (3.5) *implica que* $v^+ \neq 0$ *e consequentemente* $v \neq 0$, *uma contradição uma vez que o Lema de Fatou garante*

$$0 \leq \frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|}^2 = \frac{1}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x,u_n)}{u_n^2} v_n^+ dx \to -\infty \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{3.6}$$

Mostrando que (u_n) *é limitada. Com isso podemos assumir* $u_n \rightharpoonup u$ *q.s. Consequentemente* u *é uma solução de* (3.1) *possivelmente trivial* $(u = 0)$. *Se* $u_n \to 0$ *em* $L^q(\mathbb{R}^N)$, *então por* (3.3) *e Holder e desigualdades de Sobolev vem*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n dx = o\left(\|u_n\|\right).$$

Então

$$o(\|u_n^+\|) = \Phi'(u_n)u_n^+ = \|u_n^+\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n^+ dx = \|u_n^+\|^2 + o(\|u_n^+\|).$$

Consequentemente $u_n^+ \to 0$ *em* E *e*

$$\liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u_n^-\|^2 - I(u_n)\right) \leq \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \|u_n^+\|^2 = 0,$$

contradizendo o fato de que $\inf_{\mathcal{M}} \Phi > 0$. *Então* $u_n \nrightarrow 0$ *em* $L^q(\mathbb{R}^N)$ *aplicando novamente o Lema P.L Lions como em* (3.5) *neste momento sobre* u_n *e como antes, podemos assumir a translação* u_n, *se necessário,* $u_n \rightharpoonup u \neq 0$. *Consequentemente* u *é uma solução não trivial de* (3.1), *e em particular,* $u \in \mathcal{M}$.

Ainda resta mostrar que $\Phi(u) = c := \inf_{\mathcal{M}} \Phi$. *Uma vez que a menos de subsequência que* $u_n \to u$ *q.s., resta agora combinar o Lema de Fatou com a definição do funcional, no que segue*

$$c + o(1) = \Phi(u_n) - \frac{1}{2}\Phi'(u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right) dx \quad \forall n$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(x,u)u - F(x,u) \right) dx + o(1)$$

$$= \Phi(u) - \frac{1}{2}\Phi'(u)u + o(1) = \Phi(u) + o(1).$$

Portanto, $\Phi(u) \leq c$. *Concluindo a demonstração.*

$\blacksquare$

Capítulo 4

Um Sistema não Linear

Neste capitulo faremos agora uma aplicação para um sistema não linear, onde a resolução se dará de forma análoga com a aplicação feita no capitulo 2, com algumas alterações que serão apresentadas.

Consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = h(x, u_2), & x \in \Omega \\ -\Delta u_2 = g(x, u_1), & x \in \Omega \\ u_1 = u_2 = 0. & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Supondo que g, h *satisfazem* $(f_1)-(f_4)$ *do problema dado em* (2.1)*, definamos*

$$G(x, u_1) := \int_0^{u_1} g(x, s)ds \quad e \quad H(x, u_2) := \int_0^{u_2} h(x, s)ds.$$

e seja $E := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ *e*

$$\Phi(u) := \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx - \int_\Omega ((G(x, u_1)) + H(x, u_2))dx \quad para \ u = (u_1, u_2) \in E.$$

Então Φ *é* $C^1(E, \mathbb{R})$ *e pontos críticos de* Φ *são soluções de* (4.1).

Novamente como de costume já feito nas aplicações anteriores, já adianto que a prova do Teorema abaixo, vai se resumir em escrever o funcional Φ *da forma* *em* $(A1)$, *onde* I *vamos escrever da seguinte forma:*

$$I(u) := \int_\Omega ((G(x,u_1)) + H(x,u_2))dx. \tag{4.2}$$

O resto é análogo aos passos do problema dado em (2.1), *com uma pequena alteração na demonstração da Proposição* 2.1.

Vamos então começar fazendo a caracterização do funcional Φ *com o seguinte Lema abaixo*

Lema 4.1 *Supondo* $(f_1)-(f_4)$ *do problema dado em* (2.1) *com a norma* $\|\cdot\|$ *em* E *definida por*

$$\|u\|^2 = \int_\Omega (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2) \quad \textit{para } u = (u_1,u_2) \in E.$$

Então

$$\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 = \int_\Omega (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2),$$

Demonstração: *De forma análoga ao Lema* 3.1, *notando que podemos escrever cada* $u \in E$ *como*

$$u = u^+ + u^- = \frac{1}{2}(u_1+u_2, u_1+u_2) + \frac{1}{2}(u_1-u_2, u_2-u_1) \quad \textit{onde } u^\mp \in E^\mp.$$

Calculando as normas $\|u^+\|^2$ *e* $\|u^-\|^2$ *temos,*

$$\|u^+\|^2 = \int_\Omega \left|\frac{\nabla u_1 + \nabla u_2}{2}\right|^2 + \int_\Omega \left|\frac{\nabla u_1 + \nabla u_2}{2}\right|^2$$

daí,

$$\|u^+\|^2 = \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u_1|^2}{4} + \frac{|\nabla u_1 \nabla u_2|}{2} + \frac{|\nabla u_2|^2}{4}\right) + \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u_1|^2}{4} + \frac{|\nabla u_1 \nabla u_2|}{2} + \frac{|\nabla u_2|^2}{4}\right),$$

e de maneira análoga

$$\|u^-\|^2 = \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u_1|^2}{4} - \frac{|\nabla u_1 \nabla u_2|}{2} + \frac{|\nabla u_2|^2}{4}\right) + \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u_2|^2}{4} - \frac{|\nabla u_2 \nabla u_1|}{2} + \frac{|\nabla u_1|^2}{4}\right).$$

Por fim

$$\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 = \int_\Omega (|\nabla u_1 \nabla u_2| + |\nabla u_2 \nabla u_1|)$$

e por (4.3) *abaixo, segue*

$$\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 = \int_\Omega (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2)$$

■

Finalmente, vamos apresentar o ultimo Teorema deste trabalho, que é o Teorema 4.1*, onde vamos garantir a existência de uma solução ground state e uma infinidade de pares de soluções para o sistema dado em* (4.1)*. A prova desde resultado se dará de forma igual, a prova do Teorema* 2.1*. No entanto, precisamos ajustar algumas passagens na demonstração da Proposição* 2.1*, para assim termos a condição* ($A2$) *satisfeita, para podermos fazer uso do Teorema* 1.1*. E assim concluir, nossa ultima aplicação do método.*

Teorema 4.1 *Supondo g, h satisfazendo* $(f_1) - (f_4)$ *do problema dado em* (2.1)*. Então o sistema* (4.1) *possui uma solução ground state. Além disso, se g é impar em u_1 e h é impar em u_2, então o problema em* (4.1) *possui infinitos pares de soluções.*

Demonstração: *A forma quadrática*

$$u \mapsto \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx$$

é definida e $E = E^+ \oplus E^-$, onde

$$E^\mp = \{u \in E : u_2 = \mp u_1\}. \tag{4.3}$$

Então $dim E^\mp = \infty$. Vamos então escrever o funcional como em ($A1$)*, isto é, pelo Lema* 4.1*, assim temos*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - I(u).$$

Notemos que I em (4.2) *é fracamente semicontínuo inferiormente. Aqui o restante da prova é exatamente igual a do Teorema* 2.1*. Assim a demonstração* *já estaria encerrada se não fosse os seguintes ajustes na Proposição* 2.1 *item (ii) para este funcional. Tais ajustes seguem: Uma vez que o Lema* 2.2 *é valido para* g *e* h*, seguimos então na Proposição* 2.1*. Se* $u \in \mathcal{M}$*, então*

$$\Phi(u+w) < \Phi(u) \quad \textit{sempre que } u+w \in \widehat{E}(u), w \neq 0.$$

ou melhor, podemos escrever

$$u + w = (1+s)u + v \quad \textit{com } s \geq -1 \textit{ e } v \in E^{-}.$$

Assim, de forma análoga da prova da Proposição 2.1 *item (ii), temos*

$$\Phi(u+w) - \Phi(u) = -\frac{\|v\|^2}{2}$$

$$+\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla[s(\frac{s}{2}+1)u_2 + (1+s)v_2]dx$$

$$+\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla[s(\frac{s}{2}+1)u_1 + (1+s)v_1]dx$$

$$+\int_\Omega \left(G(x,u_1) - G(x,u_1+w_1) + H(x,u_2) - H(x,u_2+w_2)\right)dx,$$

assim

$$\Phi(u+w) - \Phi(u) = -\frac{\|v\|^2}{2} + \int_\Omega (g(x,u_1)z_1 + G(x,u_1) - G(x,u_1+w_1))dx$$

$$+\int_\Omega (h(x,u_2)z_2 + H(x,u_2) - H(x,u_2+w_2))dx$$

pois como

$$z_1 = s(\frac{s}{2}+1)u_1 + (1+s)v_1, z_2 = s(\frac{s}{2}+1)u_2 + (1+s)v_2 \in E(u),$$

segue

$$0 = \Phi'(u)z_{(1,2)} = B(u, z_{(1,2)}) - \int_\Omega [g(x,u_1)z_1 + h(x,u_2)z_2].$$

Desde que $w = (w_1, w_2) \neq 0$*, no mínimo uma das integrais acima é negativa, portanto* $\Phi(u+w) < \Phi(u)$*.*

Portanto, pelo Teorema 1.1*, o resultado está provado.*

■

Assim concluímos nossa ultima aplicação do método da variedade de Nehari generalizada.

Apêndice A

Resultados Importantes

Definição A.1 *(Função Normalização). Uma função* $\eta \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *é dita função normalização se,* η *é estritamente crescente,* $\eta(0) = 0$ *e*

$$\eta(s) \to +\infty \quad \textit{quando} \quad s \to +\infty.$$

Teorema A.1 *Ver em* [11]. *Se* E *tem dimensão infinita, e* $\Phi \in C^1(S, \mathbb{R})$ *é limitado inferiormente e satisfaz a condição de Palais-Smale-(PS), então* Φ *tem infinitos pares de pontos críticos.*

Lema A.1 *Se* (u_n) *é uma sequencia (PS) para um funcional* Φ *e limitada, então somente uma das alternativas ocorrem:*

(i) $u_n \to 0$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$

(ii) *existem* $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ *e* $R, \beta > 0$ *tais que*

$$\int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 \geq \beta > 0.$$

Lema A.2 *(Lema de Fatou) Se* $(f_n) \in M^+(X, X)$*, então*

$$\int (\liminf f_n d\mu) \leq \liminf \int f_n d\mu$$

Teorema A.2 *(Teorema 3 de* [10]*). Supondo que f é contínua e satisfaz a condição* (2.2)*. Então*

(i) $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega))$ *e* $\Phi'(u) = 0$ *se e somente se* $u \in H_0^1(\Omega)$ *é uma solução do problema* (2.1)*.*

Teorema A.3 *(Teorema 6 de* [10]*). Supondo que V, f são contínuas V é limitada e f satisfaz* (3)*. Então*

(i) $\Phi \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ *e* $\Phi'(u) = 0$ *se, e somente se,* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *é solução de* (3.1)

Teorema A.4 *(Desigualdade de Hölder): Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $p \geq 1$. Então,*

$$f.g \in L^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |f.g|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema A.5 *(Desigualdade de Poincaré) Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Então, existe uma constante $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \right)^{1/p}, \quad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p \leq +\infty.$$

Bibliografia

[1] *A. Ambrosetti, G. Prodi, A Primer of Nonlinear Analysis, Department of Mathematics, University of Pisa. 1993.*

[2] *P. Drabek and S.I. Pohozaev, Positive solutions for the p-Laplacian: application of the Fibering method, Proc. Royal Soc. Edinb. A 127 (1997), 703-726*

[3] *P. Kuchment, Floquet Theory for Partial Diferential Equations, Birkh¨auser, Basel, 1993.*

[4] *P.L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, Ann. IHP Analyse Non Lin´eaire 1 (1984), 109-145 and 223-283.*

[5] *Y.Q. Li, Z.Q. Wang and J. Zeng, Ground states of nonlinear Schr¨odinger equations with potentials, Ann. IHP Analyse Non Lin´eaire 23 (2006), 829-837.*

[6] *Z. Nehari, On a class of nonlinear second-order diferential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 101-123.*

[7] *Z. Nehari, Characteristic values associated with a class of non-linear secondorder diferential equations, Acta Math. 105 (1961), 141-175.*

[8] *A. Pankov, Periodic nonlinear Schrodinger equation with application to photonic crystals, Milan J. Math. 73 (2005), 259-287.*

[9] *M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. IV, Academic Press, New York, 1978.*

[10] *A. Szulkin and T.weth , The method of Nehari manifold, Handbook of Nonconvex Analysis and Applications. D.Y. Gao and D. Montreanu eds., International Press, Boston, (2010)597-632.*

[11] *A. Szulkin, Ljusternik-Schnirelmann theory on C^1 -manifolds, Ann. IHP Analyse Non Lin´eaire 5 (1988), 119-139.*

[12] *A. Szulkin and T. Weth, Ground state solutions for some indefinite variational problems, J. Func. Anal. 257 (2009), 3802-3822.*