UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de mestrado

Problemas de Dirichlet em espaços de Sobolev com expoente variável

Jorge Felipe Gonçalves da Silva

Belém

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Jorge Felipe Gonçalves da Silva

Problemas de Dirichlet em espaços de Sobolev com expoente variável

Neste trabalho, apresentamos problemas de Dirichlet em espaços de Sobolev com expoente variável.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática, como requisito parcial, para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

Belém

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586p Silva, Jorge Felipe Gonçalves da.
Problemas de Dirichlet em espaços de Sobolev com expoente variável / Jorge Felipe Gonçalves da Silva. — 2021.
92 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Expoente variável. 2. Métodos variacionais. 3. p(x)-Laplaciano. 4. Sub-supersolução. I. Título.

CDD 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Jorge Felipe Gonçalves da Silva

Problemas de Dirichlet em espaços de Sobolev com expoente variável

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática, como requisito parcial, para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Data da defesa: 30 de novembro de 2021.
Resultado: Aprovado

Banca Examinadora

Augusto César dos R. Costa

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa (orientador)
PPGME/PDM - UFPA

F Corrêa

Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

João Pablo Pinheiro da Silva

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva
PPGME/PDM - UFPA

Leandro da Silva Tavares

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Dedicatória

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço a Deus o dom que me foi dado e a força psicológica nos momentos de dificuldade. Por vezes, o cansaço e o desânimo nos fazem pensar que somos incapazes, mas conforme o tempo passa, conseguimos desenvolver as ideias.

Meus sinceros agradecimentos a meus pais, Marta e Jorge, que sempre me deram apoio e me incentivaram a prosseguir com os estudos após o Ensino Médio.

Obrigado à UFPA e aos seus professores, em especial aos docentes do PPGME. Os elogios após cada atividade são prazerosos, mas as críticas são mais importantes, uma vez que elas nos apontam erros e nos dão a chance de corrigi-los.

Também sou grato ao professor Dr. Augusto César, meu orientador, por ter acreditado no meu potencial e aceitado o meu convite para a produção deste trabalho. Ele esteve em boa parte da minha trajetória ao longo do curso e sua participação foi importante nela.

Agradeço aos professores Dr. Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa, Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki, Dr. João Pablo Pinheiro da Silva e Dr. Leandro da Silva Tavares por aceitarem participar da banca examinadora e contribuírem com sugestões visando ao aprimoramento do trabalho.

Estendo minha gratidão a todos aqueles que estiveram ao meu lado no curso e contribuíram de alguma forma, além do amigo Marcos Raylan, atual doutorando da UFPA, que me auxiliou com algumas dicas e foi um dos grandes incentivadores para que eu cursasse a pós-graduação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES), Código de Financiamento 001. Tal assistência por intermédio de bolsa de estudos foi indispensável para a produção deste trabalho e a consequente conclusão do curso.

Resumo

Neste trabalho, estudamos problemas elípticos do tipo $p(x)$-Kirchhoff em espaços de Sobolev com expoente variável. Primeiro, estudamos o problema elíptico com dois termos não-locais

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\right)\Delta_{p(x)}u = \lambda|u|^{q(x)-2}u\left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}\right]^r & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua, $\lambda, r > 0$ são parâmetros reais, $p, q \in C(\overline{\Omega})$ são funções cujas propriedades serão dadas posteriormente e $\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ é o $p(x)$-Laplaciano. Este problema foi abordado no trabalho de Corrêa e Costa [8].

O outro problema no qual estamos interessados é

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = a(x)u^{\alpha(x)-1} + f(x,u), & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$ com fronteira suave, $p \in C^1(\overline{\Omega})$ com $1 < p^- \leq p^+ < N$, $\alpha \in C(\overline{\Omega})$ é uma função não-negativa com $1 \leq \alpha^-$, $f : \Omega \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $a \in L^\infty(\Omega)$ com $a(x) > 0$ quase sempre em Ω. Este problema foi estudado por Sousa e Tavares [33].

Em ambos os problemas, aplicamos o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio Variacional de Ekeland. No segundo, também utilizamos sub-supersolução.

Palavras-chave: Expoente variável; Métodos variacionais; $p(x)$-Laplaciano; Sub-supersolução.

Abstract

In this work, we study elliptic problems of $p(x)$-Kirchhoff type in Sobolev spaces with variable exponent. First we study the elliptic problem with two non-local terms

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\right)\Delta_{p(x)}u = \lambda|u|^{q(x)-2}u\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}\right]^r & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded smooth domain, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ is a continuous function, $\lambda, r > 0$ are real parameters, $p, q \in C(\overline{\Omega})$ are functions whose properties will be given later and $\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ is the $p(x)$-Laplacian. This problem was approached in the work of Corrêa and Costa [8].

The other problem in which we are interested is

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = a(x)u^{\alpha(x)-1} + f(x,u), & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$ with smooth boundary, $p \in C^1(\overline{\Omega})$ with $1 < p^- \leq p^+ < N$, $\alpha \in C(\overline{\Omega})$ is a nonnegative function with $1 \leq \alpha^-$, $f : \Omega \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ is a continuous function and $a \in L^\infty(\Omega)$ with $a(x) > 0$ almost everywhere in Ω. This problem was studied by Sousa and Tavares [33].

In both problems we apply the Mountain Pass Theorem and the Ekeland Variational Principle. In the second, we also use sub-supersolution.

Keywords: Variable exponent; Variational methods; $p(x)$-Laplacian; Sub-supersolution.

Notações

$\blacksquare$: fim de uma demonstração,

$\rightarrow$: convergência forte,

$\rightharpoonup$: convergência fraca,

$|\Omega|$: medida de Lebesgue de Ω,

u^+ : parte positiva de u, isto é, $u^+ = \max\{u, 0\}$,

$B_\rho(0)$: bola aberta de centro na origem e raio ρ,

$\partial B_\rho(0)$: esfera de centro na origem e raio ρ,

$\langle \cdot\,, \cdot \rangle$: produto interno usual.

Conteúdo

Introdução **1**

1 Problema elíptico com dois termos não-locais envolvendo $p(x)$-Laplaciano **6**

1.1 Preliminares 6

1.2 O problema elíptico com dois termos não-locais 8

1.3 Resultados sobre o problema elíptico com dois termos não-locais . 14

2 Soluções para uma classe de problemas envolvendo $p(x)$-Laplaciano via sub-supersolução **36**

2.1 Resultados preliminares 36

2.2 O problema principal 37

2.3 Resultados auxiliares 38

A Definições e resultados auxiliares **75**

Introdução

Neste trabalho, estudaremos problemas elípticos do tipo $p(x)$-Kirchhoff em espaços de Sobolev com expoente variável. Problemas que envolvem o operador $p(x)$-Laplaciano são amplamente utilizados na modelagem de problemas em teoria da elasticidade, fluxos viscosos de fluidos não-newtonianos e mecânica dos fluidos, mais precisamente, fluidos do tipo eletrorreológicos (chamados fluidos inteligentes). Outra aplicação está relacionada com processamento de imagem. Para mais detalhes, veja Mihailescu e Radulescu [26], R$\mathring{u}$ž$\check{\imath}$čka [32] e suas referências.

Ressaltamos que a primeira grande descoberta sobre fluidos eletrorreológicos é atribuída a Willis Winslow, em 1949. Tais fluidos têm a importante propriedade de que sua viscosidade depende do campo elétrico no fluido. Ele descobriu que a viscosidade de tais fluidos (por exemplo, polimetacrilato de lítio) em um campo elétrico é inversamente proporcional à força do campo. O campo induz formação de linhas de correntes no fluido, as quais são paralelas ao campo. Elas podem aumentar a viscosidade tanto quanto 5 ordens de magnitude. Este fenômeno é conhecido como o efeito Winslow.

Os espaços de Lebesgue com expoente variável apareceram na literatura pela primeira vez em 1931, por meio de um artigo de Orlicz [29], que demonstrou vários resultados, incluindo a desigualdade de Hölder, em uma discreta apresentação na qual ele considerou os espaços $L^{p(x)}$ sobre a reta real. O primeiro estudo sistemático de espaços com expoente variável (denominados espaços modulares) é atribuído a Nakano [28], que mencionou explicitamente no apêndice de seu livro os espaços de Lebesgue com expoente variável, como um exemplo de um espaço mais geral que ele considera [28, p. 284]. Apesar de seu amplo interesse, esses espaços não alcançaram a posição de destaque de estudos na área, como o trabalho de Orlicz.

Uma das equações diferenciais mais conhecidas é a equação estacionária de Kirchhoff, dada por

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ são funções contínuas que cumprem certas condições e $\Delta_{p(x)}$ é o operador $p(x)$-Laplaciano. O problema é estudado no espaço de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$, no qual $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma.

A equação original de Kirchhoff, apresentada pela primeira vez no trabalho de Kirchhoff [21], é dada por

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{2}$$

e estende a equação clássica da onda de D'Alembert, considerando os efeitos da alteração no comprimento da corda durante as vibrações. Os parâmetros de (2) são os seguintes: L é o comprimento da corda, h é a área de sua seção transversal, E é o módulo de Young do material do qual a corda é feita, ρ é a densidade da massa e P_0 é a tensão inicial. Um importante diferencial em (2) é a presença do coeficiente não-local $\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx$, o qual depende da média $\frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx$ e da energia cinética $\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2$ em $[0, L]$. Diversas equações do tipo Kirchhoff foram e ainda são estudadas, especialmente após o trabalho de Lions [23], onde foi proposta uma abordagem de Análise Funcional para a resolução do problema citado.

Um outro problema que merece destaque é o seguinte:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x,u)\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ e f é uma dada função regular.

A equação (3) foi estudada por Gomes e Sanchez [18] utilizando técnica variacional considerando f com um determinado crescimento exponencial e Ω uma bola do $\mathbb{R}^N$. Eles melhoraram em seu trabalho os resultados presentes em Bebernes e Lacey [4].

Bebernes e Talaga [5] estudam o caso particular de (3), dado por

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta \dfrac{e^u}{\int_\Omega e^u} & \text{em} \quad \Omega \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

com $f(t) = F(t) = e^t$, que é o caso estacionário do problema parabólico

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \dfrac{e^u}{\int_\Omega e^u} & \text{em} \quad \Omega \times [0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \times [0,T), \end{cases}$$

que resulta da investigação analítica dos fenômenos associados com a ocorrência de bandas de cisalhamento em metais que estão sendo deformados sob altas taxas de deformação.

Outras motivações físicas para (3) podem ser encontradas em Carrillo [6], Gogny e Lions [17], Dolbeault [11] e suas referências. Os trabalhos deles estão relacionados com o problema (3) em que p é constante e seus estudos são desenvolvidos no espaço de Sobolev usual. Estudos sobre existência e multiplicidade de soluções para equações diferenciais parciais elípticas não-lineares também modelam problemas que interessam a outras áreas das ciências básicas, como Biologia (dinâmica de população) e Química (fenômenos glaciais).

Com respeito à equação de Kirchhoff, a maioria dos trabalhos trata de problemas como

$$\begin{cases} -M(\|u\|_{1,p}^p)\, \Delta_p u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde M é o termo original de Kirchhoff da forma $M(t) = a + bt$, $t \geq 0$, $a, b > 0$ e $1 \leq p < +\infty$ são constantes reais. Em Alves et al. [1] e Corrêa e Figueiredo [9], outros termos M são considerados.

Observe que em (3) somente o termo $\left[\int_\Omega F(x,u)\right]^r$ é não-local, enquanto em (4) o único termo não-local é $M(\|u\|_{1,p}^p)$.

A equação (1) também é estudada por Alves et al. [1], que mostra, ainda, que existem soluções positivas para outros dois problemas, a saber

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$ é a norma usual em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \geq 0$ e

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = u^p & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $1 < p < (N+2)/(N-2)$ se $N \geq 3$ e $1 < p < +\infty$ se $N = 1, 2$.

Outros trabalhos relevantes no estudo de equações diferenciais parciais são os de Perera e Zhang [30] e [31], nos quais os autores estudam

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\|u\|^2 \Delta u = \mu u^3 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Em seu trabalho, Lima [22] utiliza as definições de sub e supersolução para encontrar solução para o problema do tipo semipositone

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

em que λ é um parâmetro positivo e $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Este tipo de problema surge na flambagem de sistemas mecânicos, no design de pontes suspensas, na combustão, nas reações químicas, na astrofísica e na gestão dos recursos naturais. De acordo com Lions [24], os problemas semipositone são matematicamente muito desafiadores, visto que há muitas aplicações deles.

Um dos objetivos deste trabalho é mostrar a existência de soluções para uma classe de problemas elípticos do tipo $p(x)$-Kirchhoff utilizando dois métodos variacionais: o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha.

No capítulo 1, estudamos um problema elíptico com dois termos não-locais, a saber

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\right)\Delta_{p(x)}u = \lambda|u|^{q(x)-2}u\left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}\right]^r & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua, $\lambda, r > 0$ são parâmetros reais, $p, q \in C(\overline{\Omega})$ são funções cujas propriedades serão dadas posteriormente e $\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ é o operador $p(x)$-Laplaciano. Esse problema foi abordado no trabalho de Corrêa e Costa [8]. A equação é estudada para 3 classes diferentes de termos M.

No capítulo 2, estudamos a multiplicidade de soluções para um problema local, envolvendo o operador $p(x)$-Laplaciano, a saber

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = a(x)u^{\alpha(x)-1} + f(x,u), & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$ com fronteira suave, $p \in C^1(\overline{\Omega})$ com $1 < p^- \leq p^+ < N$, $\alpha \in C(\overline{\Omega})$ é uma função não-negativa com $1 \leq \alpha^-$, $f : \Omega \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $a \in L^\infty(\Omega)$ com $a(x) > 0$ quase sempre em Ω. Esse problema foi estudado por Sousa e Tavares [33] e nele é utilizado um método de sub-supersolução, além dos métodos variacionais já citados.

Capítulo 1

Problema elíptico com dois termos não-locais envolvendo $p(x)$-Laplaciano

Neste capítulo, vamos estudar uma classe de equações do tipo $p(x)$-Kirchhoff, onde são apresentados dois termos não-locais. Utilizaremos o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha a fim de mostrar a existência de soluções positivas.

1.1 Preliminares

Definimos o conjunto

$$C_+\left(\overline{\Omega}\right) = \{h : h \in C\left(\overline{\Omega}\right), h(x) > 1, \forall\, x \in \overline{\Omega}\},$$

e para cada $h \in C_+\left(\overline{\Omega}\right)$ nós temos

$$h^+ = \max_{x\in\overline{\Omega}} h(x) \;\text{ e }\; h^- = \min_{x\in\overline{\Omega}} h(x).$$

Denotamos por $\mathcal{M}$ o conjunto das funções reais mensuráveis sobre Ω.

Para cada $p \in C_+\left(\overline{\Omega}\right)$, definimos o espaço generalizado de Lebesgue por

$$L^{p(x)}\left(\Omega\right) = \{u \in \mathcal{M}\left(\overline{\Omega}\right) : \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty\}.$$

Vamos considerar o espaço $L^{p(x)}\left(\Omega\right)$ com a norma de Luxemburgo, dada por

$$|u|_{p(x)} = \inf \{\mu > 0 : \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\mu}\right|^{p(x)} dx \leq 1\}.$$

O espaço generalizado de Lebesgue-Sobolev $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é definido por

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\}$$

com a norma abaixo

$$\|u\|_{1,p(x)} = |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}.$$

Podemos definir $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ como o fecho de C_c^∞ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$ com respeito à norma $\|u\|_{1,p(x)}$. Os espaços $L^{p(x)}(\Omega)$, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ e $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ são reflexivos e de Banach, veja Fan e Zhao [14]. Se a medida de Lebesgue de Ω é finita, $p_1, p_2 \in C(\overline{\Omega})$ e $p_1(x) \leq p_2(x)$, para todo $x \in \Omega$, então temos a imersão contínua $L^{p_2(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1(x)}(\Omega)$.

As demonstrações das próximas duas proposições podem ser encontradas em [12], [13] e [14].

Proposição 1.1.1 *Suponha que Ω é um domínio suave limitado em $\mathbb{R}^N$ e $p \in C(\overline{\Omega})$ com $p(x) < N$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Se $p_1 \in C(\overline{\Omega})$ e $1 \leq p_1(x) \leq p^*(x)$ $(1 \leq p_1(x) < p^*(x))$ para $x \in \overline{\Omega}$, então há uma imersão contínua (compacta) $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1(x)}(\Omega)$, onde $p^* = \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}$.*

Proposição 1.1.2 *Seja $\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx$. Para todo $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, nós temos*

1. *Para $u \neq 0$, $|u|_{p(x)} = \lambda \Leftrightarrow \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 1$.*
2. *$|u|_{p(x)} < 1 (= 1; > 1) \Leftrightarrow \rho(u) < 1 (= 1; > 1)$.*
3. *Se $|u|_{p(x)} > 1$, então $|u|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq |u|_{p(x)}^{p^+}$.*
4. *Se $|u|_{p(x)} < 1$, então $|u|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq |u|_{p(x)}^{p^-}$.*
5. *$\lim\limits_{k\to+\infty} |u_k|_{p(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} \rho(u_k) = 0$.*
6. *$\lim\limits_{k\to+\infty} |u_k|_{p(x)} = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} \rho(u_k) = +\infty$.*

1.2 O problema elíptico com dois termos não-locais

A seguir, tal como fizeram Corrêa e Costa [8], estudaremos a existência de soluções positivas para o problema elíptico com dois termos não-locais

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\right)\Delta_{p(x)}u = \lambda|u|^{q(x)-2}u\left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}\right]^r & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua, λ e r são parâmetros reais positivos, $p, q \in C(\overline{\Omega})$ são funções cujas propriedades serão dadas posteriormente e $\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ é o $p(x)$-Laplaciano. Observe que o problema (1.1) é uma versão generalizada do problema não-local (3).

Problemas da forma apresentada em (1.1) estão associados com o funcional energia

$$J_\lambda(u) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) - \lambda\frac{1}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx\right]^{r+1}$$

para todo $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(s)\,ds$.

Dependendo das funções p e q, o funcional J_λ é diferenciável e sua derivada de Fréchet é dada por

$$J'_\lambda(u)\,v = M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v\,dx$$

$$-\lambda\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|\nabla u|^{q(x)}dx\right]^r\int_\Omega |u|^{q(x)-2}uv\,dx,$$

para todos $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Consideremos também o problema

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\right)\Delta_{p(x)}u = \lambda(u^+)^{q(x)-1}\left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u^+)^{q(x)}\right]^r & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

Note que as possíveis soluções de (1.2) são soluções positivas de (1.1). Veja Fan et al. [15] e Zhang [34].

Proposição 1.2.1 *O funcional* $J_1(u) = \widehat{M}\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)$ *é de classe* $C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração: J_1 é Gâteaux-diferenciável. Considere a função $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G(s) = |\nabla u + st\nabla v|^{p(x)}$, onde $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Dados $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, temos pelo Teorema do Valor Médio que existe $\xi(x,t) = \xi \in (0,1)$ tal que

$$\frac{G(1) - G(0)}{1} = G'(\xi)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{|\nabla u + t\nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{t\nabla v} = p(x)|\nabla u + \xi t\nabla v|^{p(x)-1}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{|\nabla u + t\nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t} = |\nabla u + \xi t\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \xi t\nabla v)\nabla v.$$

Note que

$$\phi = |\nabla u + \xi t\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \xi t\nabla v)\nabla v \to |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v \ \text{ q.s. em } \Omega \tag{1.3}$$

quando $t \to 0$.

Temos ainda que

$$|\phi| \leq |\nabla u + \xi t\nabla v|^{p(x)-1}|\nabla v| \leq (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v|. \tag{1.4}$$

Do fato de

$$|\nabla u|, |\nabla v| \in L^{p(x)}(\Omega),$$

decorre que

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega).$$

Pela desigualdade de Hölder, podemos concluir que

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v| \in L^{1}(\Omega). \tag{1.5}$$

Por (1.3)-(1.5) e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t\to 0}\int_{\Omega}\frac{|\nabla(u+tv)|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t}dx = \int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx.$$

Usando a Regra da Cadeia, temos

$$J_1'(u)\,v = \left[\widehat{M}\left(\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\right]'\lim_{t\to 0}\int_{\Omega}\frac{|\nabla(u+tv)|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t}dx,$$

que equivale a

$$J_1'(u)\,v = M\left(\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v\,dx,$$

e daí J_1 é Gâteaux-diferenciável.

Vamos mostrar que $J_1'(u)$ é contínuo em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Seja $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $u_j \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e $\psi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\|\psi\| \leq 1$. Assim,

$$\nabla u_j \to \nabla u \ \text{ em } \quad \left(L^{p(x)}(\Omega)\right)^N.$$

Portanto, pelo Teorema de Vainberg, a menos de subsequência,

$$\nabla u_j(x) \to \nabla u(x), \ \text{ q. s. em } \quad \Omega \tag{1.6}$$

e

$$|\nabla u_j(x)| \leq g(x), \ \text{ q. s. em } \quad \Omega, \tag{1.7}$$

onde $g(x) \in L^{p(x)}(\Omega)$.

Por (1.6), temos que

$$|\nabla u_j(x)| \to |\nabla u(x)|, \ \text{ q. s. em } \quad \Omega. \tag{1.8}$$

Tome $\Gamma(u) = \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx$. Daí,

$$\begin{aligned} |\langle \Gamma'(u_j) - \Gamma'(u), \psi \rangle| &= \left| \int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) \nabla \psi \, dx \right| \\ &\leq \int_\Omega ||\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u| |\nabla \psi| \, dx. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Fazendo

$$f_j = ||\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u|, \ j \in \mathbb{N},$$

obtemos

$$f_j \leq |\nabla u_j|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \Omega, \tag{1.10}$$

de onde concluímos que $f_j \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega)$.

Usando a desigualdade de Hölder em (1.9),

$$|\langle \Gamma'(u_j) - \Gamma'(u), \psi \rangle| \leq C |f_j|_{p(x)/p(x)-1} |\nabla \psi|_{p(x)} \leq C |f_j|_{p(x)/p(x)-1} \|\psi\|$$

e portanto,

$$\|\Gamma'(u_j) - \Gamma'(u)\| \leq C |f_j|_{p(x)/p(x)-1}.$$

Por (1.6) e (1.8),

$$f_j \to 0 \text{ q. s. em } \quad \Omega \tag{1.11}$$

Por (1.7) e (1.10), segue que

$$f_j(x) \leq g(x)^{p(x)-1} + |\nabla u(x)|^{p(x)-1} \text{q. s. em } \quad \Omega$$

e daí

$$f_j(x)^{q(x)} \leq 2^{q^+}(g(x)^{p(x)} + |\nabla u(x)|^{p(x)}) \in L^1(\Omega) \text{ q. s. em } \quad (\Omega), \tag{1.12}$$

onde $q(x) = \dfrac{p(x)}{p(x)-1}$.

De (1.11) e (1.12) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_\Omega {f_j}^q(x)dx \to 0 \text{ quando } j \to \infty,$$

de onde se tem pela Proposição 1.1.2 que $|f_j|_{q(x)} \to 0$ quando $j \to \infty$.

Logo,

$$\|\Gamma'(u_j) - \Gamma'(u)\| \to 0 \text{ quando } j \to \infty,$$

e assim podemos afirmar que a derivada de Gâteaux Γ' é contínua, o que implica que J_1 é de classe $C^1\,(W_0^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$. ■

Proposição 1.2.2 *O funcional* $J_2(u) = \dfrac{\lambda}{r+1}\left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx\right]^{r+1}$ *é de classe* $C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração: Por regras de derivação, temos que

$$J_2'(u)\,v = \lambda\frac{r+1}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx\right]^r \cdot \left(\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx\right)'.$$

Por um processo similar ao adotado para J_1, temos que

$$\left(\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx\right)' = \int_\Omega |u|^{q(x)-2}uv\,dx.$$

E daí segue que

$$J_2'(u)v = \lambda\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx\right]^r \int_\Omega |u|^{q(x)-2}uv\,dx.$$

Mostraremos a seguir que J_2' é contínuo. Seja $(u_n) \to u$ em $W_0^{1,q(x)}(\Omega)$, isto é, $(u_n - u) \to 0$ em $W_0^{1,q(x)}(\Omega)$. Note que, para todo $\psi \in W_0^{1,q(x)}(\Omega)$ com $\|\psi\| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
|J_2'(u_n - u)\psi| &= \left| \lambda \left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)} |(u_n - u)|^{q(x)} dx \right]^r \int_\Omega |u_n - u|^{q(x)-2}(u_n - u)\psi \, dx \right| \\
&\leq \frac{\lambda}{(q^-)^r} \left[\int_\Omega |u_n - u|^{q(x)} dx \right]^r \int_\Omega |u_n - u|^{q(x)-1} \psi \, dx.
\end{aligned}$$

Sendo $|u_n - u| \in L^{q(x)}$, temos que $|u_n - u|^{q(x)-1} \in L^{\frac{q(x)}{q(x)-1}}$. Pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{(q^-)^r} \left[\int_\Omega |u_n - u|^{q(x)} dx \right]^r \int_\Omega |u_n - u|^{q(x)-1} dx \, \psi \\
&\leq \frac{\lambda}{(q^-)^r} \left[\rho(u_n - u) \right]^r |u_n - u|_{p(x)} |\psi|_{q(x)},
\end{aligned}$$

onde $p(x) = \dfrac{q(x)}{q(x) - 1}$. Pelas imersões contínuas de Sobolev, existe $C > 0$ tal que

$$\frac{\lambda}{(q^-)^r} \left[\rho(u_n - u) \right]^r |u_n - u|_{p(x)} |\psi|_{q(x)} \leq \frac{\lambda}{(q^-)^r} \left[\rho(u_n - u) \right]^r C\|u_n - u\| |\psi|_{q(x)}.$$

Considerando que $(u_n - u) \to 0$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, temos que $\|u_n - u\| \to 0$, o que equivale a $|\nabla u_n - \nabla u|_{p(x)} \to 0$. Pela desigualdade de Poincaré, existe $C' > 0$ tal que

$$|u_n - u|_{p(x)} \leq C' |\nabla u_n - \nabla u|_{p(x)} \to 0$$

Portanto, $|u_n - u|_{p(x)} \to 0$, e daí $\rho(u_n - u) \to 0$. Concluímos que

$$\|J_2'(u_n) - J_2'(u)\| \to 0 \qquad \text{quando} \qquad n \to \infty.$$

■

Definição 1.2.1 *Uma função $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma solução fraca de (1.2) se*

$$\begin{aligned}
&M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v \, dx \\
&= \lambda \left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)} (u^+)^{q(x)} dx \right]^r \int_\Omega (u^+)^{q(x)-1} v \, dx, \ \forall \, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.1 *Seja* $L_{p(x)} : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ *a aplicação dada por* $L_{p(x)}(u)\, v = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v\, dx,\ \forall\, u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. *Então afirmamos que*

1. $L_{p(x)} : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ *é um operador contínuo, limitado e estritamente monótono;*

2. $L_{p(x)}$ *é uma aplicação do tipo* S_+*, ou seja, se* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *e, além disso, lim sup* $\langle L_{p(x)}(u_n) - L_{p(x)}(u), u_n - u\rangle \leq 0$*, então* $u_n \to u$ *em* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$*;*

3. $L_{p(x)} : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ *é um homomorfismo.*

Demonstração: Ver Fan e Zhang [13].

1.3 Resultados sobre o problema elíptico com dois termos não-locais

A seguir, vamos apresentar os 6 (seis) resultados obtidos em relação ao problema elíptico com dois termos não-locais apresentado na seção anterior. São consideradas 3 classes de termos M e são utilizados o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio Variacional de Ekeland.

Teorema 1.3.1 *Suponha que* $1 < p(x) < N$ *com* $1 < q(x) < p^*(x) = \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$*. Além disso, assuma que existem* m_0 *e* m_1 *positivos tais que* $m_0 \leq M(t) \leq m_1$*, com* $\dfrac{m_1 p^+}{m_0} < \dfrac{(q^-)^{r+1}(r+1)}{(q^+)^r}$ *e* $q^-(r+1) > p^+$*. Então o problema (1.1) possui uma solução fraca para todo* $\lambda > 0$*.*

Demonstração: Nosso primeiro passo é verificar que o funcional

$$J_\lambda(u) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)} dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u^+)^{q(x)} dx\right]^{r+1},\ \forall \lambda, r > 0$$

satisfaz a primeira e a segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha. Note que, para $t \geq 0$,

$$m_0 \leq M(s) \ \Rightarrow\ \int_0^t m_0\, ds \leq \int_0^t M(s)\, ds = \widehat{M}(t) \ \Rightarrow\ m_0\, t \leq \widehat{M}(t).$$

Portanto, adotando $t = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx$,

$$\widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) \geq m_0 \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx. \tag{1.13}$$

Como $p^+ = \max_{x\in\overline{\Omega}} p(x)$, segue que

$$m_0 \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx \geq \frac{m_0}{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx. \tag{1.14}$$

Além disso, sendo $q^- = \min_{x\in\overline{\Omega}} q(x)$, temos que

$$\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u^+)^{q(x)}dx\right]^{r+1} \leq \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \tag{1.15}$$

Por (1.13)-(1.15),

$$J_\lambda(u) \geq \frac{m_0}{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \tag{1.16}$$

Tomando $\|u\| < 1$, observe que, pela Proposição 1.1.2, item 4,

$$|\nabla u|_{p(x)} < 1 \Rightarrow \rho(\nabla u) \geq |\nabla u|_{p(x)}^{p^+} \Rightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \geq |\nabla u|_{p(x)}^{p^+},$$

ou seja, a menos de uma constante, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \geq \|u\|^{p^+}. \tag{1.17}$$

Portanto, de (1.16) e (1.17),

$$J_\lambda(u) \geq \frac{m_0}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \tag{1.18}$$

Pela imersão de Sobolev $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$|u|_{q(x)} \leq C\|u\|, \tag{1.19}$$

e adotando $\rho = \|u\|$ suficientemente pequeno, segue que

$$|u|_{q(x)} \leq C\|u\| \leq C\rho < 1,$$

de onde se tem

$$|u|_{q(x)}^{q^-} \leq (C\|u\|)^{q^-}. \tag{1.20}$$

Pela Proposição 1.1.2, item 4,

$$\int_\Omega |u|^{q(x)}dx \leq |u|_{q(x)}^{q^-}. \tag{1.21}$$

De (1.20) e (1.21), obtemos

$$\int_\Omega |u|^{q(x)}dx \leq (C\|u\|)^{q^-}, \tag{1.22}$$

e assim,

$$\left(\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right)^{r+1} \leq (C\|u\|)^{q^-(r+1)}. \tag{1.23}$$

Substituindo $\|u\|$ por ρ em (1.18) e considerando (1.23), obtemos

$$J_\lambda(u) \geq \frac{m_0}{p^+}\rho^{p^+} - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}(C\rho)^{q^-(r+1)},$$

o que, por sua vez, nos dá

$$J_\lambda(u) \geq \rho^{p^+}\left[\frac{m_0}{p^+} - \frac{\lambda C_1}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\rho^{q^-(r+1)-p^+}\right],$$

onde $C_1 = C^{q^-(r+1)}$.

Sendo $q(x) > 1$ e $r > 0$, temos $p^+ < q^-(r+1) < (q^-)^{r+1}(r+1)$. Isso implica que nós podemos encontrar números a, ρ tais que $J_\lambda(u) \geq a > 0$ se $\|u\| = \rho$ para todo $\lambda > 0$. Portanto, J_λ satisfaz a primeira geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Agora, tome $0 < \omega \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Logo,

$$J_\lambda(t\omega) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\omega|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|t\omega|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \tag{1.24}$$

Para $t > 1$, temos $t^{p(x)} \leq t^{p^+}$ e $t^{q^-} \leq t^{q(x)}$. Além disso,

$$M(s) \leq m_1 \;\Rightarrow\; \int_0^t M(s)\,ds \leq \int_0^t m_1\,ds \;\Rightarrow\; \widehat{M}(t) \leq m_1 t.$$

Consequentemente,

$$\widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\omega|^{p(x)}dx\right) \leq m_1\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\omega|^{p(x)}dx. \tag{1.25}$$

Note ainda que

$$m_1 \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla t\omega|^{p(x)} dx \leq \frac{m_1 t^{p^+}}{p^-} \int_\Omega |\nabla \omega|^{p(x)} dx \tag{1.26}$$

e

$$\frac{\lambda}{r+1} \left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)} |t\omega|^{q(x)} dx \right]^{r+1} \geq \frac{\lambda}{r+1} \frac{t^{q^-(r+1)}}{(q^+)^{r+1}} \left[\int_\Omega |\omega|^{q(x)} dx \right]^{r+1}. \tag{1.27}$$

Então, por (1.24)-(1.27),

$$J_\lambda(t\omega) \leq \frac{m_1 t^{p^+}}{p^-} \int_\Omega |\nabla \omega|^{p(x)} dx - \frac{\lambda}{(r+1)} \frac{t^{q^-(r+1)}}{(q^+)^{r+1}} \left[\int_\Omega |\omega|^{q(x)} dx \right]^{r+1}.$$

Considerando que $q^-(r+1) > p^+$ e fazendo $t \to +\infty$, temos $J_\lambda(t\omega) \to -\infty$. Isso implica que o funcional J_λ cumpre a segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Agora, mostramos que J_λ satisfaz a condição Palais-Smale (ou simplesmente (PS)), ou seja, que toda sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que

$$J_\lambda(u_n) \to C_\lambda \qquad \text{e} \qquad J'_\lambda(u_n) \to 0 \tag{1.28}$$

contém uma subsequência convergente sob a norma de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência satisfazendo (1.28). Mostraremos que (u_n) é limitada. Tomando θ tal que $\dfrac{m_1 p^+}{m_0} < \theta < \dfrac{(q^-)^{r+1}(r+1)}{(q^+)^r}$, suponha que

$$\begin{aligned}
C_\lambda + \|u_n\| &\geq J_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta} J'_\lambda(u_n) u_n \\
&= \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) - \frac{\lambda}{r+1} \left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u_n|^{q(x)} dx \right]^{r+1} \\
&- \frac{1}{\theta} M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} dx \\
&+ \frac{\lambda}{\theta} \left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u_n|^{q(x)} dx \right]^r \int_\Omega |u_n|^{q(x)} dx.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Observe que, como $\widehat{M}(t) \geq m_0 t$ e $p^+ > 1$,

$$\widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) \geq m_0 \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \geq \frac{m_0}{p^+} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} dx. \tag{1.30}$$

Como $m_1 \geq M(t)$,

$$M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)}dx\right) \leq m_1. \tag{1.31}$$

Podemos, ainda, afirmar que

$$\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_n|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \leq \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \tag{1.32}$$

e

$$\lambda\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_n|^{q(x)}dx\right]^{r}\left[\int_\Omega |u_n|^{q(x)}\,dx\right] \geq \frac{\lambda}{(q^+)^r}\left[\int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \tag{1.33}$$

Por (1.29)-(1.33), segue que

$$\begin{aligned}
C_\lambda + \|u_n\| \;&\geq\; \frac{m_0}{p^+}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx\right]^{r+1}\\
&-\; \frac{1}{\theta}\left[m_1\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx - \frac{\lambda}{(q^+)^r}\left(\int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx\right)^{r+1}\right]\\
&=\; \left(\frac{m_0}{p^+} - \frac{m_1}{\theta}\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx\\
&+\; \lambda\left(\frac{1}{\theta(q^+)^r} - \frac{1}{(q^-)^{r+1}(r+1)}\right)\left[\int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx\right]^{r+1}.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Os últimos termos à direita são positivos, pois

$$\frac{m_1 p^+}{m_0} < \theta \;\Rightarrow\; m_1\, p^+ < m_0\,\theta \;\Rightarrow\; \frac{m_1}{\theta} < \frac{m_0}{p^+}$$

e

$$\theta(q^+)^r < (q^-)^{r+1}(r+1).$$

Portanto, de (1.34) obtemos

$$C_\lambda + \|u_n\| \geq \left(\frac{m_0}{p^+} - \frac{m_1}{\theta}\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx. \tag{1.35}$$

Para $\|u_n\| > 1$, note que, raciocinando como em (1.17) e utilizando a Proposição 1.1.2, item 3,

$$|\nabla u_n|_{p(x)} > 1 \Rightarrow \rho(\nabla u_n) \geq |\nabla u_n|_{p(x)}^{p^-} \Rightarrow \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx \geq |\nabla u_n|_{p(x)}^{p^-},$$

isto é, a menos de uma constante,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} dx \geq \|u_n\|^{p^-}. \tag{1.36}$$

Se (u_n) é ilimitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, nós podemos supor, passando a uma subsequência, se necessário, que $\|u_n\| > 1$ e tendo em vista (1.35) e (1.36),

$$C_\lambda + \|u_n\| \geq \left(\frac{m_0}{p^+} - \frac{m_1}{\theta}\right) \|u_n\|^{p^-},$$

um absurdo, pois $p^- > 1$. Portanto, (u_n) é limitada. Sendo $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ um espaço de Banach reflexivo, existe uma subsequência, também denotada por (u_n), tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

De

$$J'_\lambda(u_n) \to 0,$$

segue que

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u_n)(u_n - u) &= M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)} dx\right) \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla (u_n - u) \\ &- \lambda \left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u_n|^{q(x)} dx\right]^r \int_\Omega |u_n|^{q(x)-2} u_n (u_n - u)\, dx \to 0. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Temos $q(x) < p^*(x)$, para todo $x \in (\overline{\Omega})$. Logo, $W_0^{1,q(x)}(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^{q(x)}(\Omega)$. Levando em consideração este fato e a desigualdade de Hölder, temos

$$\left|\int_\Omega |u_n|^{q(x)-2} u_n (u_n - u) dx\right| \leq \int_\Omega |u_n|^{q(x)-1} |u_n - u| dx \leq C |u_n|_{q(x)/q(x)-1} |u_n - u|_{q(x)}.$$

Como consequência da imersão de $W_0^{1,q(x)}(\Omega)$ em $L^{q(x)}(\Omega)$, (u_n) converge forte para u em $L^{q(x)}(\Omega)$. Portanto, $\displaystyle\int_\Omega |u_n|^{q(x)-2} u_n (u_n - u)\, dx \to 0$.

Por outro lado, há constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$c_1 \leq \int_\Omega \frac{1}{q(x)} |\nabla u_n|^{q(x)} \leq c_2.$$

Isso implica que

$$\lambda \left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u_n|^{q(x)} dx\right]^r \int_\Omega |u_n|^{q(x)-2} u_n (u_n - u)\, dx \to 0.$$

De (1.37), obtemos

$$L_{p(x)}(u)(u_n - u) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (u_n - u)\, dx \to 0, \tag{1.38}$$

uma vez que existem constantes positivas b_1, b_2 tais que

$$b_1 \leq M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx\right) \leq b_2.$$

Consequentemente,

$$\langle L_{p(x)}(u_n) - L_{p(x)}(u), u_n - u \rangle \to 0.$$

Temos, pelo Teorema 1.2.1, que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, o funcional J_λ satisfaz as geometrias do Passo da Montanha e, além disso, também satisfaz a condição (PS). Portanto, o problema (1.1) possui solução fraca. ■

Teorema 1.3.2 *Suponha que* $1 < p(x) < N$ *com* $1 < q(x) < p^*(x) = \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$. *Além disso, assuma que existe* $0 < m_0$ *tal que* $m_0 \leq M(t) \leq m_1$. *Se* $q^-(r+1) < p^-$, *então existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema (1.1) possui uma solução positiva* u_λ *para cada* $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Demonstração: Seguindo as ideias de Mihailescu e Radulescu [27], utilizaremos o Princípio Variacional de Ekeland. Por (1.18), temos

$$J_\lambda(u) \geq \frac{m_0}{p^+} \|u\|^{p^+} - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}} \left[\int_\Omega |u|^{q(x)} dx\right]^{r+1},$$

e para $\|u\| = \rho$ suficientemente pequeno e considerando (1.23),

$$J_\lambda(u) \geq \frac{m_0}{p^+} \|u\|^{p^+} - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}} (C\|u\|)^{q^-(r+1)},$$

e daí, sendo $C_1 = C^{q^-(r+1)}$

$$J_\lambda(u) \geq \rho^{q^-(r+1)} \left[\frac{m_0 \rho^{p^+ - q^-(r+1)}}{p^+} - \frac{\lambda C_1}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\right] \geq a \geq 0, \text{ se } 0 < \lambda < \lambda^*$$

para algum $\lambda^* > 0$. Daí, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$,

$$\inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda > 0. \tag{1.39}$$

Aqui, o parâmetro λ desempenha um papel crucial.

Por hipótese, $q^-(r+1) < p^-$. Sendo assim, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $q^-(r+1) + \epsilon_0(r+1) < p^-$. Já que $q \in C(\overline{\Omega})$, existe um conjunto aberto $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que $|q(x) - q^-| < \epsilon_0$ para todo $x \in \Omega_0$. Daí,

$$|q(x) - q^-| < \epsilon_0 \;\Leftrightarrow\; -\epsilon_0 < q(x) - q^- < \epsilon_0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (q(x) - q^-)(r+1) < \epsilon_0(r+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; q(x)(r+1) \leq q^-(r+1) + \epsilon_0(r+1) < p^-,\; \forall x \in \Omega_0. \tag{1.40}$$

Agora, seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ de modo que supp $\phi \supset \overline{\Omega}_0, \phi(x) = 1$ para todo $x \in \Omega_0$ e $0 \leq \phi \leq 1$ em Ω. Tomando um t suficientemente pequeno, em particular $t \in (0,1)$, temos $t\phi \in B_\rho(0)$. Note que

$$J_\lambda(t\phi) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\phi|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|t\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \tag{1.41}$$

Pela mesma ideia de (1.13), temos que

$$\widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\phi|^{p(x)}dx\right) \leq m_1 \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\phi|^{p(x)}dx. \tag{1.42}$$

Como $t \in (0,1)$, segue que $t^{p(x)} \leq t^{p^-}$. E sabendo que $\dfrac{1}{p(x)} \leq \dfrac{1}{p^-}$, temos

$$m_1 \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\phi|^{p(x)}dx \leq \frac{m_1 t^{p-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla \phi|^{p(x)}dx. \tag{1.43}$$

Temos que $\dfrac{1}{(q^+)^{r+1}} \leq \dfrac{1}{q(x)}$. Além disso, se $q(x)(r+1) \leq q^-(r+1) + \epsilon_0(r+1)$, então $t^{q^-(r+1)+\epsilon_0(r+1)} \leq t^{q(x)(r+1)}$. Assim,

$$\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|t\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \geq \frac{\lambda t^{q^-(r+1)+\epsilon_0(r+1)}}{(r+1)(q^+)^{r+1}}\left[\int_{\Omega_0} |\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \tag{1.44}$$

Portanto, de (1.41)-(1.44), obtemos

$$J_\lambda(t\phi) \leq \frac{m_1 t^{p-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx - \frac{\lambda t^{q^-(r+1)+\epsilon_0(r+1)}}{(r+1)(q^+)^{r+1}}\left[\int_{\Omega_0} |\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1}.$$

Tendo em vista que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx > 0$ e $t^{p^-} < t^{q^-(r+1)+\epsilon_0(r+1)}$ para $t \in (0,1)$, ocorre que

$$J_\lambda(t\phi) < 0.$$

Como para todo $u \in B_\rho(0)$ nós temos

$$J_\lambda(u) \geq \frac{m_0}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{\lambda C}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\|u\|^{q^-(r+1)},$$

segue que

$$-\infty < \underline{c} := \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda < 0. \tag{1.45}$$

Por (1.39) e (1.45), sabemos que $\displaystyle\inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda - \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda > 0$. Então, escolhemos $\displaystyle 0 < \epsilon < \inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda - \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda$. Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland para o funcional $J_\lambda : \overline{B}_\rho(0) \to \mathbb{R}$, encontramos $u_\epsilon \in \overline{B}_\rho(0)$ tal que

$$J_\lambda(u_\epsilon) < \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda + \epsilon \text{ e } J_\lambda(u_\epsilon) < J_\lambda(u) + \epsilon\|u - u_\epsilon\|,\ u \neq u_\epsilon.$$

Raciocinando como em [27], obtemos uma sequência $(w_n) \subset B_\rho(0)$ tal que

$$J_\lambda(w_n) \to \underline{c} \text{ e } J'_\lambda(w_n) \to 0.$$

Já que $q(x) < p^*(x)$ e J_λ satisfaz a condição (PS), nós temos uma subsequência, ainda representada por (w_n), e um elemento $w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tais que $w_n \to w$ e $J_\lambda(w) = \underline{c} < 0$. Pelo Corolário 1 do apêndice, $J'_\lambda(w) = 0$, e assim concluímos que w é uma solução fraca não-trivial para o problema (1.1). ■

Teorema 1.3.3 *Suponha que* $1 < p(x) < N$ *com* $1 < q(x) < p^*(x) = \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$. *Além disso, assuma que* $M(t) = at + b$, *onde* $a > 0, b > 0$ *e* $t \geq 0$. *Se* $\dfrac{2(p^+)^2}{p^-} < \dfrac{(r+1)(q^-)^{r+1}}{(q^+)^r}$ *e* $q^-(r+1) > 2p^+$, *então o problema (1.1) possui uma solução fraca positiva para todo* $\lambda > 0$.

Demonstração: Sendo $M(t) = a + bt$, é imediato que

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds = at + \frac{bt^2}{2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u^+)^{q(x)}dx\right]^{r+1} \\ &= a\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + \frac{b}{2}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right]^2 \\ &- \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u^+)^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Observe que, como $\dfrac{1}{p^+} \leq \dfrac{1}{p(x)}$, temos

$$a\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx \geq \frac{a}{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \tag{1.47}$$

e

$$\frac{b}{2}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right]^2 \geq \frac{b}{2(p^+)^2}\left[\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx\right]^2. \tag{1.48}$$

Além disso, sendo $\dfrac{1}{q(x)^{r+1}} \leq \dfrac{1}{(q^-)^{r+1}}$, ocorre que

$$\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u^+)^{q(x)}dx\right]^{r+1} \leq \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \tag{1.49}$$

Por (1.46)-(1.49), temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{a}{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \frac{b}{2(p^+)^2}\left[\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx\right]^2 \\ &- \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \end{aligned}$$

Por (1.17), para $\|u\| < 1$,

$$J_\lambda(u) \geq \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^+} + \frac{b}{2(p^+)^2}\|u\|^{2p^+} - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \tag{1.50}$$

Por (1.23),

$$\left[\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \leq (C\|u\|)^{q^-(r+1)}.$$

Daí, substituindo $\|u\|$ por ρ e retomando (1.50),

$$J_\lambda(u) \geq \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^+} + \frac{b}{2(p^+)^2}\|u\|^{2p^+} - \frac{\lambda C_1}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\|u\|^{q^-(r+1)}, \tag{1.51}$$

e já que $q^-(r+1) > 2p^+$, encontramos números δ, ρ tais que

$$J_\lambda \geq \delta > 0 \text{ se } \|u\| = \rho, \, \forall \lambda > 0.$$

e assim J_λ satisfaz a primeira geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Agora, tome $0 < \omega \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. É claro que

$$J_\lambda(t\omega) = a \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla t\omega|^{p(x)} dx + \frac{b}{2} \left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla t\omega|^{p(x)} dx \right]^2$$
$$- \frac{\lambda}{r+1} \left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)} |t\omega|^{q(x)} dx \right]^{r+1}.$$

Para $t > 1$, segue que $t^p(x) \leq t^{p^+}$ e $t^{q^-} \leq t^{q(x)}$. Daí,

$$J_\lambda(t\omega) \leq \frac{at^{p^+}}{p^-} \int_\Omega |\nabla \omega|^{p(x)} dx + \frac{bt^{2p^+}}{2(p^-)^2} \left[\int_\Omega |\nabla \omega|^{p(x)} dx \right]^2$$
$$- \frac{\lambda t^{q^-(r+1)}}{(r+1)(q^+)^{r+1}} \left[\int_\Omega |\omega|^{q(x)} dx \right]^{r+1}.$$

Como $q^-(r+1) > 2p^+$, temos $J_\lambda(t\omega) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Concluímos que J_λ satisfaz a segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Resta-nos provar que J_λ satisfaz a condição (PS). Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência tal que

$$J_\lambda(u_n) \to C_\lambda \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_n) \to 0.$$

Portanto, tomando

$$\frac{2(p^+)^2}{p^-} < \theta < \frac{(r+1)(q^-)^{r+1}}{(q^+)^r},$$

suponha que

$$C_\lambda + \|u_n\| \geq J_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta} J'_\lambda(u_n) u_n = a \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx$$
$$+ \frac{b}{2} \left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right]^2 - \frac{\lambda}{r+1} \left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)} |\nabla u_n|^{q(x)} dx \right]^{r+1} - \frac{a}{\theta} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} dx$$
$$- \frac{b}{\theta} \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \frac{\lambda}{\theta} \left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u_n|^{q(x)} dx \right]^r \int_\Omega |u_n|^{q(x)} dx. \tag{1.52}$$

Sabendo que $\frac{1}{p^+} \leq \frac{1}{p(x)} \leq \frac{1}{p^-}$, temos

$$a \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \geq \frac{a}{p^+} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} dx, \tag{1.53}$$

$$\frac{b}{2}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)}dx\right]^2 \geq \frac{b}{2(p^+)^2}\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx\right]^2. \tag{1.54}$$

e

$$\frac{b}{\theta}\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)}dx \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx \leq \frac{b}{\theta p^-}\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx\right]^2. \tag{1.55}$$

Temos também que $\frac{1}{q^+} \leq \frac{1}{q(x)} \leq \frac{1}{q^-}$. Logo,

$$\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_n|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \leq \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \tag{1.56}$$

e

$$\frac{\lambda}{\theta}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_n|^{q(x)}dx\right]^{r}\int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx \geq \frac{\lambda}{\theta(q^+)^r}\left[\int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \tag{1.57}$$

Por (1.52)-(1.57), temos

$$\begin{aligned} C_\lambda + \|u_n\| &\geq \left(\frac{a}{p^+} - \frac{a}{\theta}\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx \\ &+ \left(\frac{b}{2(p^+)^2} - \frac{b}{\theta p^-}\right)\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx\right]^2 \\ &+ \lambda\left(\frac{1}{\theta(q^+)^r} - \frac{1}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\right)\left[\int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Os termos à direita são positivos, pois

$$p^+ < \theta,$$

$$\frac{2(p^+)^2}{p^-} < \theta \;\Rightarrow\; 2(p^+)^2 < \theta p^-$$

e

$$\theta(q^+)^r < (r+1)(q^-)^{r+1}.$$

Portanto, de (1.58), temos

$$C_\lambda + \|u_n\| \geq \left(\frac{a}{p^+} - \frac{a}{\theta}\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx + \left(\frac{b}{2(p^+)^2} - \frac{b}{\theta p^-}\right)\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx\right]^2. \tag{1.59}$$

Agora, suponha que (u_n) é ilimitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Passando a uma subsequência, se necessário, temos que $\|u_n\| > 1$ e considerando (1.36) e (1.59)

$$C_\lambda + \|u_n\| \geq \left(\frac{a}{p^+} - \frac{a}{\theta}\right)\|u_n\|^{p^-} + \left(\frac{b}{2(p^+)^2} - \frac{b}{\theta(p^-)^2}\right)\|u_n\|^{2p^-},$$

um absurdo, pois $p^- > 1$. Consequentemente, (u_n) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, e assim existe uma subsequência, também denotada por (u_n), tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. De $J_\lambda(u_n)' \to 0$, temos

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u_n)(u_n-u) &= \left(a + b\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)}dx\right) L_{p(x)}u_n(u_n-u) \\ &- \lambda\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_n|^{q(x)}dx\right]^r \int_\Omega |u_n|^{q(x)-2}u_n(u_n-u)\,dx \to 0. \end{aligned}$$

Pela demonstração do Teorema 1.3.1, segue que

$$\lambda\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_n|^{q(x)}dx\right]^r \int_\Omega |u_n|^{q(x)-2}u_n(u_n-u)\,dx \to 0$$

e existem constantes positivas c_1 e c_2 de modo que $c_1 \leq \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)} \leq c_2$ e

$$L_{p(x)}(u_n)(u_n-u) = \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla(u_n-u)dx \to 0.$$

Além disso,

$$L_{p(x)}(u)(u_n-u) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla(u_n-u)dx \to 0.$$

Consequentemente,

$$\langle L_{p(x)}(u_n) - L_{p(x)}(u), u_n-u\rangle \to 0,$$

o que significa, pelo Teorema 1.2.1, que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Daí, J_λ satisfaz a condição (PS) e, assim, pelo Teorema do Passo da Montanha, o problema (1.1) possui uma solução fraca positiva para todo $\lambda > 0$. ■

Teorema 1.3.4 *Suponha que* $1 < p(x) < N$ *com* $1 < q(x) < p^*(x) = \dfrac{Np(x)}{N-p(x)}$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$ *e* $M(t) = a + bt$, *onde* $a > 0$, $b > 0$ *e* $t \geq 0$. *Se* $q^-(r+1) < p^-$, *então existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema (1.1) possui uma solução positiva* u_λ *para cada* $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Demonstração: Por (1.51), quando $\|u\| < 1$,

$$J_\lambda(u) \geq \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^+} + \frac{b}{2(p^+)^2}\|u\|^{2p^+} - \frac{\lambda C_1}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\|u\|^{q^-(r+1)}.$$

Vamos mostrar que, para $\|u\| = \rho$ suficientemente pequeno,

$$J_\lambda(u) \geq \delta > 0, \;\text{ se }\; 0 < \lambda < \lambda^*,$$

onde

$$\lambda^* = \frac{1}{3}\min\left\{\frac{(r+1)(q^-)^{r+1}a(\rho)^{p^+-q^-(r+1)}}{C_1 p^+}, \frac{(r+1)(q^-)^{r+1}b(\rho)^{2p^+-q^-(r+1)}}{2C_1(p^+)^2}\right\}.$$

Com efeito, observe que se $\lambda^* = \dfrac{1}{3}\dfrac{(r+1)(q^-)^{r+1}a(\rho)^{p^+-q^-(r+1)}}{C_1 p^+}$, e supondo que $\lambda = \lambda^*$, então

$$J_\lambda(u) \geq \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^+} + \frac{b}{2(p^+)^2}\|u\|^{2p^+} - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}(C\|u\|)^{q^-(r+1)} =$$

$$= \frac{a}{p^+}\rho^{p^+} + \frac{b}{2(p^+)^2}\rho^{2p^+} - \frac{1}{3}\frac{(r+1)(q^-)^{r+1}a(\rho)^{p^+-q^-(r+1)}C_1(\rho)^{q^-(r+1)}}{(r+1)(q^-)^{r+1}C_1 p^+} =$$

$$= \frac{a}{p^+}\rho^{p^+} + \frac{b}{2(p^+)^2}\rho^{2p^+} - \frac{1}{3}\frac{a(\rho)^{p^+-q^-(r+1)}(\rho)^{q^-(r+1)}}{p^+} =$$

$$= \frac{b}{2(p^+)^2}\rho^{2p^+} + \frac{a}{p^+}\rho^{p^+} - \frac{1}{3}\frac{a}{p^+}\rho^{p^+} =$$

$$= \frac{b}{2(p^+)^2}\rho^{2p^+} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\frac{a}{p^+}\rho^{p^+} = \frac{b}{2(p^+)^2}\rho^{2p^+} + \frac{2}{3}\frac{a}{p^+}\rho^{p^+} > 0. \tag{1.60}$$

Por outro lado, se $\lambda^* = \dfrac{1}{3}\dfrac{(r+1)(q^-)^{r+1}b(\rho)^{2p^+-q^-(r+1)}}{2C_1(p^+)^2}$, e supondo que $\lambda = \lambda^*$, então

$$J_\lambda(u) \geq \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^+} + \frac{b}{2(p^+)^2}\|u\|^{2p^+} - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}(C\|u\|)^{q^-(r+1)} =$$

$$= \frac{a}{p^+}\rho^{p^+} + \frac{b}{2(p^+)^2}\rho^{2p^+} - \frac{1}{3}\frac{(r+1)(q^-)^{r+1}b(\rho)^{2p^+-q^-(r+1)}C_1(\rho)^{q^-(r+1)}}{(r+1)(q^-)^{r+1}2C_1(p^+)^2} =$$

$$= \frac{a}{p^+}\rho^{p^+} + \frac{b}{2(p^+)^2}\rho^{2p^+} - \frac{1}{6}\frac{b(\rho)^{2p^+-q^-(r+1)}(\rho)^{q^-(r+1)}}{(p^+)^2} =$$

$$= \frac{a}{p^+}\rho^{p^+} + \frac{b}{2(p^+)^2}\rho^{2p^+} - \frac{1}{6}\frac{b}{(p^+)^2}\rho^{2p^+} =$$

$$= \frac{a}{p^+}\rho^{p^+} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)\frac{b}{(p^+)^2}\rho^{2p^+} = \frac{a}{p^+}\rho^{p^+} + \frac{1}{3}\frac{b}{(p^+)^2}\rho^{2p^+} > 0. \tag{1.61}$$

Além disso, retomando (1.51), note que $q^-(r+1) < p^- \leq 2p^+$ e $\|u\| < 1$. Portanto, por (1.60) e (1.61),

$$J_\lambda(u) \geq \delta > 0, \text{ se } 0 < \lambda < \lambda^*,$$

o que nos dá

$$\inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda > 0.$$

Seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que supp $\phi \supset \overline{\Omega}_0, \phi(x) = 1$ para todo $x \in \Omega_0$ e $0 \leq \phi \leq 1$ em Ω. Observe que para $t \in (0,1)$ suficientemente pequeno, temos $t\phi \in B_\rho(0)$ e $J_\lambda(t\phi) < 0$. Com efeito, é imediato que

$$J_\lambda(t\phi) = a\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\phi|^{p(x)}dx + \frac{b}{2}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\phi|^{p(x)}dx\right]^2 - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|\nabla t\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \tag{1.62}$$

Como $t \in (0,1)$, temos $t^{p^-} \geq t^{p(x)}$ e $\dfrac{1}{p^-} \geq \dfrac{1}{p(x)}$. Daí, segue que

$$a\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\phi|^{p(x)}dx \leq \frac{at^{p^-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx \tag{1.63}$$

e

$$\frac{b}{2}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\phi|^{p(x)}dx\right]^2 \leq \frac{bt^{2p^-}}{2(p^-)^2}\left[\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx\right]^2 \leq \frac{bt^{p^-}}{2(p^-)^2}\left[\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx\right]^2 \tag{1.64}$$

De acordo com (1.40) na demonstração do Teorema 1.3.2, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $q(x)(r+1) \leq q^-(r+1) + \epsilon_0(r+1) < p^-, \forall x \in \Omega_0 \subset \Omega$. Sabendo também que $\dfrac{1}{q^+} \leq \dfrac{1}{q(x)}$,

$$\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|\nabla t\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \geq \frac{\lambda}{r+1}\frac{t^{q^-(r+1)+\epsilon_0(r+1)}}{(q^+)^{r+1}}\left[\int_{\Omega_0} |\nabla\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \tag{1.65}$$

Por (1.62)-(1.65),

$$J_\lambda(t\phi) \leq \frac{at^{p^-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx + \frac{bt^{p^-}}{2(p^-)^2}\left[\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx\right]^2 - \frac{\lambda}{r+1}\frac{t^{q^-(r+1)+\epsilon_0(r+1)}}{(q^+)^{r+1}}\left[\int_{\Omega_0} |\nabla\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1}.$$

Portanto, tendo em vista que $\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx > 0$, segue que

$$J_\lambda(t\phi) < 0.$$

Já que para todo $u \in B_\rho(0)$ nós temos

$$J_\lambda(u) \geq \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^+} + \frac{b}{2(p^+)^2}\|u\|^{2p^+} - \frac{\lambda C_1}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\|u\|^{q^-(r+1)},$$

segue que

$$-\infty < \underline{c} := \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda < 0.$$

Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland para o funcional $J_\lambda : \overline{B}_\rho(0) \to \mathbb{R}$ e raciocinando como em [27], temos $(w_n) \subset \overline{B}_\rho(0)$ tal que

$$J_\lambda(w_n) \to \underline{c} \text{ e } J'_\lambda(w_n) \to 0.$$

Portanto, pela mesma ideia do Teorema 1.3.2, concluímos que $w = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ é uma solução fraca não-trivial para o problema (1.1). ■

Teorema 1.3.5 *Suponha que* $1 < p(x) < N$ *com* $1 < q(x) < p^*(x) = \dfrac{Np(x)}{N-p(x)}$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$. *Seja* $M(t) = t^{\alpha-1}$ *tal que* $\dfrac{\alpha(p^+)^\alpha}{(p^-)^{\alpha-1}} < \dfrac{(q^-)^{r+1}(r+1)}{(q^+)^r}$ *e* $q^-(r+1) > \alpha p^+ \geq \alpha p^- > 1$. *Então o problema (1.1) possui uma solução fraca positiva para todo* $\lambda > 0$.

Demonstração: Utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha. Observe que

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t s^{\alpha-1}ds = \left[\frac{s^\alpha}{\alpha}\right]_0^t = \frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{0^\alpha}{\alpha} = \frac{t^\alpha}{\alpha}.$$

Assim, tomando $t = \left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)$,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u^+)^{q(x)}dx\right]^{r+1} \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right]^\alpha - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u^+)^{q(x)}dx\right]^{r+1}, \quad (1.66) \end{aligned}$$

para todo $\lambda > 0$.

Note que $\dfrac{1}{p^+} \leq \dfrac{1}{p(x)}$ e $\dfrac{1}{q(x)} \leq \dfrac{1}{q^-}$. Logo,

$$\frac{1}{\alpha}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right]^\alpha \geq \frac{1}{\alpha(p^+)^\alpha}\left[\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx\right]^\alpha \tag{1.67}$$

e

$$\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u^+)^{q(x)}dx\right]^{r+1} \leq \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \tag{1.68}$$

Por (1.66)-(1.68), segue que

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{\alpha(p^+)^\alpha}\left[\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx\right]^\alpha - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \tag{1.69}$$

Supondo $\|u\| < 1$, por (1.69) e pelas desigualdades (1.17) e (1.23), obtemos

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{\alpha(p^+)^\alpha}\|u\|^{\alpha p^+} - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}(C\|u\|)^{q^-(r+1)}. \tag{1.70}$$

De maneira similar à adotada no Teorema 1.3.1, tomando $\|u\| = \rho$ em (1.70),

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{\alpha(p^+)^\alpha}\rho^{\alpha p^+} - \frac{\lambda C_1}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\rho^{q^-(r+1)},$$

o que por sua vez nos dá

$$J_\lambda(u) \geq \rho^{\alpha p^+}\left[\frac{1}{\alpha(p^+)^\alpha} - \frac{\lambda C_1}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\rho^{q^-(r+1)-\alpha p^+}\right].$$

Sendo $q^-(r+1) > \alpha p^+$, encontramos números positivos a, ρ tais que

$$J_\lambda(u) \geq a > 0 \text{ se } \|u\| = \rho \text{ e para todo } \lambda > 0.$$

Agora, seja $0 < \omega \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Veja que

$$\begin{aligned} J_\lambda(t\omega) &= \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\omega|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|t\omega|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\omega|^{p(x)}dx\right]^\alpha - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|t\omega|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Assumindo $t > 1$, observe que $t^{p(x)} \leq t^{p^+}$ e $\dfrac{1}{p(x)} \leq \dfrac{1}{p^-}$. Daí,

$$\frac{1}{\alpha}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\omega|^{p(x)}dx\right]^\alpha \leq \frac{t^{\alpha p^+}}{\alpha(p^-)^\alpha}\int_\Omega |\nabla\omega|^{p(x)}dx. \tag{1.72}$$

Veja também que $t^{q^-} \leq t^{q(x)}$ e $\dfrac{1}{q^+} \leq \dfrac{1}{q(x)}$. Assim,

$$\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|t\omega|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \geq \frac{\lambda}{r+1}\frac{t^{q^-(r+1)}}{(q^+)^{r+1}}\left[\int_\Omega |\omega|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \tag{1.73}$$

Por (1.71)-(1.73), segue que

$$J_\lambda(t\omega) \leq \frac{t^{\alpha p^+}}{\alpha(p^-)^\alpha}\int_\Omega |\nabla\omega|^{p(x)}dx - \frac{\lambda}{r+1}\frac{t^{q^-(r+1)}}{(q^+)^{r+1}}\left(\int_\Omega |\omega|^{q(x)}dx\right)^{r+1},$$

e sendo $q^-(r+1) > \alpha p^+$, temos que $J_\lambda(t\omega) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$, de onde concluímos que J_λ satisfaz as geometrias do Teorema do Passo da Montanha.

Afirmamos que J_λ satisfaz a condição (PS). De fato, seja $(u_n) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência tal que

$$J_\lambda(u_n) \to C_\lambda \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_n) \to 0.$$

Tomando $\dfrac{\alpha(p^+)^\alpha}{(p^-)^{\alpha-1}} < \theta < \dfrac{(q^-)^{r+1}(r+1)}{(q^+)^r}$, suponhamos que

$$\begin{aligned} C_\lambda + \|u_n\| \;\; &\geq \;\; J_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta}J'_\lambda(u_n)u_n = \frac{1}{\alpha}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)}dx\right]^\alpha \\ &- \;\; \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_n|^{q(x)}dx\right]^{r+1} + \frac{\lambda}{\theta}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_n|^{q(x)}dx\right]^r \int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx \\ &- \;\; \frac{1}{\theta}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)}dx\right]^{\alpha-1}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx. \end{aligned} \tag{1.74}$$

De $\dfrac{1}{p^+} \leq \dfrac{1}{p(x)} \leq \dfrac{1}{p^-}$, decorre que

$$\frac{1}{\alpha}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)}dx\right]^\alpha \geq \frac{1}{\alpha(p^+)^\alpha}\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx\right]^\alpha \tag{1.75}$$

e

$$\frac{1}{\theta}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)}dx\right]^{\alpha-1}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx \leq \frac{1}{\theta(p^-)^{\alpha-1}}\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx\right]^\alpha. \tag{1.76}$$

Como $\dfrac{1}{q^+} \leq \dfrac{1}{q(x)} \leq \dfrac{1}{q^-}$, segue que

$$\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_n|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \leq \frac{\lambda}{(q^-)^{r+1}(r+1)}\left[\int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \tag{1.77}$$

e

$$\frac{\lambda}{\theta}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_n|^{q(x)}dx\right]^r \int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx \geq \frac{\lambda}{\theta(q^+)^r}\left[\int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \tag{1.78}$$

Por (1.74)-(1.78), ocorre que

$$\begin{aligned} C_\lambda + \|u_n\| &\geq \left(\frac{1}{\alpha(p^+)^\alpha} - \frac{1}{\theta(p^-)^{\alpha-1}}\right)\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx\right]^\alpha \\ &+ \lambda\left(\frac{1}{\theta(q^+)^r} - \frac{1}{(q^-)^{r+1}(r+1)}\right)\left[\int_\Omega |u_n|^{q(x)}dx\right]^{r+1}, \end{aligned} \tag{1.79}$$

onde os termos à direita são positivos, pois

$$\frac{\alpha(p^+)^\alpha}{(p^-)^{\alpha-1}} < \theta \;\Rightarrow\; \alpha(p^+)^\alpha < \theta(p^-)^{\alpha-1}$$

e

$$\theta(q^+)^r < (q^-)^{r+1}(r+1).$$

Portanto, de (1.79), obtemos

$$C_\lambda + \|u_n\| \geq \left(\frac{1}{\alpha(p^-)^\alpha} - \frac{1}{\theta(p^-)^{\alpha-1}}\right)\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx\right]^\alpha. \tag{1.80}$$

Agora, suponha que (u_n) é ilimitada. Passando a uma subsequência, se necessário, tomamos $\|u_n\| > 1$ e (1.36) e (1.80) nos dão

$$C_\lambda + \|u_n\| \geq \left(\frac{1}{\alpha(p^-)^\alpha} - \frac{1}{\theta(p^-)^{\alpha-1}}\right)\|u_n\|^{\alpha p^-},$$

que é absurdo, uma vez que $\alpha p^- > 1$. Consequentemente, (u_n) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, que é um espaço de Banach reflexivo. Assim, existe uma subsequência, ainda denotada por (u_n), tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

De $J'_\lambda(u_n) \to 0$, nós temos

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u_n)(u_n-u) &= \left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)}dx\right]^{\alpha-1} L_{p(x)}u_n(u_n-u) \\ &- \lambda\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_n|^{q(x)}dx\right]^r \int_\Omega |u_n|^{q(x)-2}u_n(u_n-u)\,dx \to 0. \end{aligned}$$

Pelo apresentado na demonstração do Teorema 1.3.1,

$$\lambda\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_n|^{q(x)}dx\right]^r \int_\Omega |u_n|^{q(x)-2}u_n(u_n-u)\,dx \to 0$$

e há constantes positivas b_1 e b_2 tais que $b_1 \leq \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)}dx \leq b_2$ e

$$L_{p(x)}(u_n)(u_n - u) = \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u) \to 0.$$

Além disso,

$$L_{p(x)}(u)(u_n - u) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla(u_n - u) \to 0.$$

Por consequência,

$$\langle L_{p(x)}(u_n) - L_{p(x)}(u), u_n - u\rangle \to 0.$$

Concluímos que, pelo Teorema 1.2.1, $u_n \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Logo, J_λ satisfaz a condição (PS) e, pelo Teorema do Passo da Montanha, o problema (1.1) possui uma solução fraca positiva para $\lambda > 0$. ■

Teorema 1.3.6 *Suponha que* $1 < p(x) < N$ *com* $1 < q(x) < p^*(x) = \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$. *Seja* $M(t) = t^{\alpha-1}$. *Se* $q^-(r+1) < \alpha p^-$, *então existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema (1.1) possui uma solução positiva* u_λ *para cada* $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Demonstração: Vamos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland. Note que se $\|u\| < 1$, então temos, por (1.17) e (1.23),

$$\left[\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx\right]^\alpha \geq \|u\|^{\alpha p^+} \text{ e } \left[\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \leq C\|u\|^{q^-(r+1)}$$

Além disso, $\dfrac{1}{p^+} \leq \dfrac{1}{p(x)}$ e $\dfrac{1}{q(x)} \leq \dfrac{1}{q^-}$. Por estas desigualdades, segue que

$$\frac{1}{\alpha}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right]^\alpha \geq \frac{1}{\alpha(p^+)^\alpha}\|u\|^{\alpha p^+} \tag{1.81}$$

e

$$\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u^+)^{q(x)}dx\right]^{r+1} \leq \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}(C\|u\|)^{q^-(r+1)} \tag{1.82}$$

Por (1.81) e (1.82), ocorre que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{\alpha}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right]^\alpha - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u^+)^{q(x)}dx\right]^{r+1} \\ &\geq \frac{1}{\alpha(p^+)^\alpha}\|u\|^{\alpha p^+} - \frac{\lambda C_1}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\|u\|^{q^-(r+1)}. \end{aligned}$$

Substituindo $\|u\|$ por ρ e colocando $\rho^{q^-(r+1)}$ em evidência, obtemos

$$J_\lambda(u) \geq \rho^{q^-(r+1)}\left[\frac{1}{\alpha(p^+)^\alpha}\rho^{\alpha p^+ - q^-(r+1)} - \frac{\lambda C_1}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\right] \geq \delta > 0, \text{ se } 0 < \lambda < \lambda^*,$$

para algum $\lambda^* > 0$. Desta forma, para $\lambda \in (0, \lambda^*)$, temos

$$\inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda > 0.$$

Da mesma maneira que foi feito na demonstração do Teorema 1.3.2, dado $\epsilon_0 > 0$, existe $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que $|q(x) - q^-| < \epsilon_0$, para todo $x \in \Omega_0$. Analogamente a (1.40), $q(x)(r+1) \leq q^-(r+1) + \epsilon_0(r+1) < \alpha p^-$, ou ainda, $q(x) \leq q^- + \epsilon_0$, $\forall\, x \in \Omega_0$.

Seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que supp $\phi \supset \overline{\Omega}_0, \phi(x) = 1$ para todo $x \in \Omega_0$ e $0 \leq \phi \leq 1$ em Ω. Para t suficientemente pequeno, $t \in (0,1)$, temos $t\phi \in B_\rho(0)$. É claro que

$$J_\lambda(t\phi) = \frac{1}{\alpha}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\phi|^{p(x)}dx\right]^\alpha - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|t\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \qquad (1.83)$$

Como $t \in (0,1)$, temos $t^{p(x)} \leq t^{p^-}$. Além disso, $\dfrac{1}{p(x)} \leq \dfrac{1}{p^-}$. Destas desigualdades, segue que

$$\frac{1}{\alpha}\left[\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\phi|^{p(x)}dx\right]^\alpha \leq \frac{t^{\alpha p^-}}{\alpha(p^-)^\alpha}\left[\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx\right]^\alpha. \qquad (1.84)$$

De $t^{q^-(r+1)+\epsilon_0(r+1)} \leq t^{q(x)(r+1)}$ e $\dfrac{1}{q^+} \leq \dfrac{1}{q(x)}$, resulta que

$$\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|t\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \geq \frac{\lambda}{r+1}\frac{t^{q^-(r+1)+\epsilon_0(r+1)}}{(q^+)^{r+1}}\left[\int_{\Omega_0}|\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \qquad (1.85)$$

Por (1.83)-(1.85),

$$J_\lambda(t\phi) \leq \frac{t^{\alpha p^-}}{\alpha(p^-)^\alpha}\left[\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx\right]^\alpha - \frac{\lambda}{(r+1)}\frac{t^{q^-(r+1)+\epsilon_0(r+1)}}{(q^+)^{r+1}}\left[\int_{\Omega_0}|\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1}.$$

Sabendo que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx > 0$ e $q(x)(r+1) \leq q^-(r+1) + \epsilon_0(r+1) < \alpha p^-$, segue que $J(t\phi) \to -\infty$ se $t \to +\infty$. Logo, $J(t\phi) < 0$.

Já que para todo $u \in B_\rho(0)$ nós temos

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{\alpha(p^+)^\alpha}\|u\|^{\alpha p^+} - \frac{\lambda C_1}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\|u\|^{q^-(r+1)},$$

resulta que

$$-\infty < \underline{c} := \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda < 0.$$

Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland para o funcional $J_\lambda : \overline{B}_\rho(0) \to \mathbb{R}$ e raciocinando como em [27], temos que existe uma sequência (w_n) tal que

$$J_\lambda(w_n) \to \underline{c} \ \text{ e } \ J'_\lambda(w_n) \to 0.$$

Desta forma, temos de maneira análoga ao demonstrado no Teorema 1.3.2 que $w = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n$ é uma solução não-trivial para o problema (1.1). ■

Capítulo 2

Soluções para uma classe de problemas envolvendo $p(x)$-Laplaciano via sub-supersolução

Neste capítulo estudaremos existência de solução para uma classe de problemas envolvendo expoentes variáveis, os quais também foram estudados por Sousa e Tavares [33]. Os argumentos são baseados em sub-supersoluções e estimativas apropriadas em L^∞ no contexto dos espaços com expoentes variáveis.

2.1 Resultados preliminares

Teorema 2.1.1 *Sejam E um espaço de Hilbert ou Banach reflexivo e $\phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional fracamente semicontínuo inferiormente e coercivo. Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in E$ tal que $\phi(u_0) = \inf\limits_{u \in E} \phi(u)$.*

Demonstração: Ver [16].

Lema 2.1.1 *(princípio de comparação): Sejam $u, v \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ e uma aplicação $A : W^{1,p(x)}(\Omega) \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ de modo que $Au - Av \geq 0$ em $(W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ e $\varphi(x) = min\{u(x) - v(x), 0\}$. Se $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, isto é, $u \geq v$ sobre $\partial\Omega$, então $u \geq v$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: Ver [15].

Definição 2.1.1 *Um par de funções* $(\underline{u}, \overline{u}) \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \times W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *é um par sub-supersolução para (2.1) se* $\underline{u}, \overline{u} \in L^\infty(\Omega), 0 < \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ *quase sempre em* Ω *e as desigualdades*

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi \, dx \leq \int_\Omega a(x) \underline{u}^{\alpha(x)-1} \varphi \, dx + \int_\Omega f(x, \underline{u}) \varphi \, dx$$

e

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p(x)-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi \, dx \geq \int_\Omega a(x) \overline{u}^{\alpha(x)-1} \varphi \, dx + \int_\Omega f(x, \overline{u}) \varphi \, dx$$

ocorrem para todo $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *com* $\varphi(x) \geq 0$ *quase sempre em* Ω*.*

2.2 O problema principal

Nós estamos interessados no seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = a(x) u^{\alpha(x)-1} + f(x, u), & \text{em} \quad \Omega, \\ \qquad u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$ com fronteira suave, $-\Delta_{p(x)} u = -div(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$ é o operador $p(x)-$Laplaciano, $p \in C^1(\overline{\Omega})$ com $1 < p^- \leq p^+ < N$, $q^- := \text{ess inf}_\Omega q$ e $q^+ := \text{ess sup}_\Omega q$ para uma função $q \in L^\infty(\Omega), \alpha \in C(\overline{\Omega})$ é uma função não-negativa com $1 \leq \alpha^-$, $f : \Omega \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e

(H) $a \in L^\infty(\Omega)$ com $a(x) > 0$ quase sempre em Ω;

(f_1) Existe $\delta > 0$ tal que $f(x,t) \geq (1 - t^{\alpha(x)-1}) a(x)$, para todo $0 \leq t \leq \delta$ quase sempre em Ω;

(f_2) Existe $r \in L^\infty(\Omega)$ tal que $1 < r^-$ e $|f(x,t)| \leq a(x)(1 + |t|^{r(x)-1})$, para todo $t \geq 0$, quase sempre em Ω;

(f_3) Temos que $\alpha^- > 1, \alpha^+, r^+ < (p^*)^-$ com $\alpha^+ < p^-$ ou $p^+ < \alpha^-$ e existem $t_0 > 0$ e $\theta > p^+$ tais que

$$0 < \theta F(x,t) \leq f(x,t)t \text{ quase sempre em } \Omega \text{ para todo } t \geq 0.$$

Definição 2.2.1 $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *é uma solução fraca de (2.1) se*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega a(x) u^{\alpha(x)-1} \varphi \, dx + \int_\Omega f(x, u) \varphi \, dx$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Teorema 2.2.1 *Suponha que* $(H), (f_1)$ *e* (f_2) *ocorrem. Então o problema (2.1) tem uma solução para* $\|a\|_\infty$ *suficientemente pequena.*

Teorema 2.2.2 *Suponha que* $(H), (f_1) - (f_3)$ *ocorrem. Então o problema (2.1) possui duas soluções para* $\|a\|_\infty$ *suficientemente pequena.*

2.3 Resultados auxiliares

Lema 2.3.1 *Assuma que* $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *é uma função não-crescente tal que se* $h > k > k_0$, *para algum* $\alpha > 0, \beta > 1$, *ocorre que* $\phi(h) \leq \dfrac{C(\phi(k))^\beta}{(h-k)^\alpha}$. *Então* $\phi(k_0 + d) = 0$, *onde* $d^\alpha = C\, 2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}} \phi(k_0)^{\beta-1}$ *e* C *é uma constante positiva.*

Demonstração: Inicialmente, considere a sequência (k_s), onde

$$k_s = k_0 + d - \frac{d}{2^s}.$$

Note que, fazendo $h = k_{s+1}$ e $k = k_s$,

$$h - k = \left(k_0 + d - \frac{d}{2^{s+1}}\right) - \left(k_0 + d - \frac{d}{2^s}\right) = \frac{d}{2^s} - \frac{d}{2^{s+1}} = \frac{2d}{2^{s+1}} - \frac{d}{2^{s+1}} = \frac{d}{2^{s+1}}.$$

Por hipótese, $\phi(h) \leq \dfrac{C(\phi(k))^\beta}{(h-k)^\alpha}$. Substituindo h e k por k_{s+1} e k_s, obtemos

$$\phi(k_{s+1}) \leq \frac{C(\phi(k_s))^\beta}{\left(\dfrac{d}{2^{s+1}}\right)^\alpha} = \frac{C 2^{(s+1)\alpha}(\phi(k_s))^\beta}{d^\alpha}. \tag{2.2}$$

Por indução sobre s, temos

$$\phi(k_s) \leq \frac{\phi(k_0)}{2^{-s\mu}}, \tag{2.3}$$

onde $\mu = \dfrac{\alpha}{1-\beta}$. Para o caso $s = 0$, é imediato. Agora, suponhamos que (2.3) ocorre e mostremos que também vale para $s+1$. Elevando os dois lados de (2.3) a β, obtemos

$$(\phi(k_s))^\beta \leq \frac{(\phi(k_0))^\beta}{2^{-s\beta\mu}}. \tag{2.4}$$

Por (2.2) e (2.4), segue que

$$\phi(k_{s+1}) \leq \frac{C2^{(s+1)\alpha}(\phi(k_s))^\beta}{d^\alpha} \leq \frac{C2^{(s+1)\alpha}}{d^\alpha}\frac{(\phi(k_0))^\beta}{2^{-s\beta\mu}}.$$

Substituindo d^α por $C\,2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}\phi(k_0)^{\beta-1}$,

$$\phi(k_{s+1}) \leq \frac{C2^{(s+1)\alpha}}{d^\alpha}\frac{(\phi(k_0))^\beta}{2^{-s\beta\mu}} = \frac{C2^{(s+1)\alpha}}{C\,2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}\phi(k_0)^{\beta-1}}\frac{(\phi(k_0))^\beta}{2^{-s\beta\mu}} = \frac{2^{(s+1)\alpha}\phi(k_0)}{2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}-s\beta\mu}}. \quad (2.5)$$

Substituindo μ por $\dfrac{\alpha}{1-\beta}$ e efetuando as operações com os expoentes de 2 em (2.5),

$$\begin{aligned}
(s+1)\alpha - \left(\frac{\alpha\beta}{\beta-1} - s\frac{\alpha}{1-\beta}\beta\right) &= (s+1)\alpha - \frac{\alpha\beta}{\beta-1} + s\frac{\alpha}{1-\beta}\beta \\
&= \frac{(s+1)(\beta-1)\alpha - \alpha\beta - s\alpha\beta}{\beta-1} \\
&= \frac{s\beta\alpha - s\alpha + \beta\alpha - \alpha - \alpha\beta - s\alpha\beta}{\beta-1} \\
&= \frac{-(s+1)\alpha}{\beta-1} \\
&= \frac{(s+1)\alpha}{1-\beta} \\
&= (s+1)\mu.
\end{aligned}$$

Portanto, de (2.5), obtemos

$$\phi(k_{s+1}) \leq 2^{(s+1)\mu}\phi(k_0) = \frac{\phi(k_0)}{2^{-(s+1)\mu}}. \quad (2.6)$$

Como $\beta > 1$, temos μ negativo, e consequentemente $-2(s+1)\mu$ é positivo. Assim, fazendo $s \to \infty$ em (2.6), tem-se

$$\phi(k_0 + d) \leq 0.$$

Como ϕ é não-negativa por hipótese, segue que $\phi(k_0 + d) = 0$. ∎

Utilizaremos o Lema 2.3.1 na demonstração do próximo lema. Além disso, definimos a função $p^*(x)$, dada por $p^*(x) = \dfrac{Np(x)}{N-p(x)}$ se $p(x) < N$ e $p^*(x) = \infty$ se $p(x) \geq N$.

Lema 2.3.2 *Seja $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma solução para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = f & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.7}$$

onde $f \in L^{r(x)}(\Omega)$ com $r^- > \dfrac{(p^*)^-}{(p^*)^- - p^+}$. Então $u \in L^\infty$ com

$$\|u\|_\infty \leq C|\Omega|^\nu max\{\|f\|_r^{\frac{1}{p^- -1}}, \|f\|_r^{\frac{1}{p^+ -1}}\},$$

onde $|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue e ν, C são constantes que não dependem de u.

Demonstração: Definindo

$$w_k = sign(u)(|u| - k)^+, k > 0,$$

observe que $w_k \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Além disso, em $A(k) = \{x \in \Omega : |u(x)| > k\}$, temos que $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \dfrac{\partial w_k}{\partial x_i}$. Com efeito, se $u \geq 0$, então

$$w_k = (|u| - k) = (u - k) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial w_k}{\partial x_i}.$$

Por outro lado, se $u < 0$, então

$$w_k = -(-u - k) = (u + k) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial w_k}{\partial x_i}.$$

Se u é solução de (2.7), então

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla w_k dx = \int_\Omega f w_k dx,$$

e já que as derivadas de u e w_k coincidem para todo $x \in A(k)$, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla w_k dx = \int_{A(k)} |\nabla u|^{p(x)} dx.$$

Como $|\Omega| < \infty$ e $r^- \leq r(x)$, temos $L^{r(x)}(\Omega) \subset L^{r^-}(\Omega)$, para todo $x \in \Omega$. Daí, $f \in L^{r^-}(\Omega)$.

Como $(p^*)^- \leq p^*(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, temos a imersão $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{(p^*)^-}$, a qual é compacta. Portanto, $w_k \in L^{(p^*)^-}(\Omega)$.

Afirmamos que existe $q > 1$ tal que $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r^-} + \dfrac{1}{(p^*)^-} = 1$. Inicialmente, precisamos que $1 - \dfrac{1}{(p^*)^-} - \dfrac{1}{r^-} > 0$. Note que

$$1 - \frac{1}{(p^*)^-} - \frac{1}{r^-} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 > \frac{1}{(p^*)^-} + \frac{1}{r^-} = \frac{(p^*)^- + r^-}{(p^*)^- r^-} \qquad \Rightarrow$$

$$(p^*)^- r^- - r^- > (p^*)^- \qquad \Rightarrow \qquad r^-((p^*)^- - 1) > (p^*)^- \qquad \Rightarrow$$

$$r^- > \frac{(p^*)^-}{(p^*)^- - 1}. \tag{2.8}$$

De (2.8), segue que $0 < \dfrac{1}{(p^*)^-} + \dfrac{1}{r^-} < 1$, e isso garante a existência de $q > 1$ tal que $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r^-} + \dfrac{1}{(p^*)^-} = 1$. Além disso, é imediato que $1 \in L^q(\Omega)$. Aplicando a desigualdade de Hölder generalizada, obtemos

$$\int_{A(k)} |\nabla u|^{p(x)} dx = \int_\Omega f w_k dx \leq \left| \int_\Omega f w_k dx \right| \leq \|f\|_{r^-} \|w_k\|_{(p^*)^-} \|1\|_q,$$

o que por sua vez resulta em

$$\int_{A(k)} |\nabla w_k|^{p(x)} dx \leq \|f\|_{r^-} \|w_k\|_{(p^*)^-} |A(k)|^{1 - \left(\frac{1}{(p^*)^-} + \frac{1}{r^-}\right)}. \tag{2.9}$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré e imersões contínuas de Sobolev, temos que existem constantes S_1, S_2 tais que

$$\|u\|_{p^*(x)} \leq \ S_1 \|\nabla u\|_{p(x)}$$

e

$$\|u\|_{(p^*)^-} \leq S_2 \, \|\nabla u\|_{p^*(x)},$$

para todo $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Em particular, para $w_k \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$,

$$\|w_k\|_{(p^*)^-} \leq C \|w_k\|_{p^*(x)} \leq C S_1 \|\nabla w_k\|_{p(x)}.$$

Portanto, fazendo $S = \dfrac{1}{CS_1}$,

$$S\|w_k\|_{(p^*)^-} \leq \|\nabla w_k\|_{p(x)} = \left(\int_{A(k)} |\nabla w_k|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p(x)}},$$

e assim

$$S\|w_k\|_{(p^*)^-}^{p(x)} \leq \int_{A(k)} |\nabla w_k|^{p(x)} dx. \tag{2.10}$$

Note que se $\|w_k\|_{(p^*)^-} \leq 1$, então

$$\|w_k\|_{(p^*)^-}^{p^+} \leq \|w_k\|_{(p^*)^-}^{p(x)}.$$

Por outro lado, se $\|w_k\|_{(p^*)^-} > 1$, então

$$\|w_k\|_{(p^*)^-}^{p^-} \leq \|w_k\|_{(p^*)^-}^{p(x)}.$$

Devido a isso, definimos

$$\sigma := \begin{cases} p^-, \text{ se } \|w_k\| > 1 \\ p^+, \text{ se } \|w_k\| \leq 1. \end{cases}$$

Por (2.10),

$$S\|w_k\|_{(p^*)^-}^{\sigma} \leq S\|w_k\|_{(p^*)^-}^{p(x)} \leq \int_{A(k)} |\nabla w_k|^{p(x)} dx, \tag{2.11}$$

e obtemos de (2.9) e (2.11),

$$S\|w_k\|_{(p^*)^-}^{\sigma} \leq \|f\|_{r^-} \|w_k\|_{(p^*)^-} |A(k)|^{1-\left(\frac{1}{(p^*)^-}+\frac{1}{r^-}\right)},$$

de onde segue que

$$S\|w_k\|_{(p^*)^-}^{\sigma-1} \leq \|f\|_{r^-} |A(k)|^{1-\left(\frac{1}{(p^*)^-}+\frac{1}{r^-}\right)},$$

e assim

$$\|w_k\|_{(p^*)^-} \leq \frac{1}{S^{\frac{1}{\sigma-1}}} \|f\|_{r^-}^{\frac{1}{\sigma-1}} |A(k)|^{\frac{1}{\sigma-1}\left[1-\left(\frac{1}{(p^*)^-}+\frac{1}{r^-}\right)\right]}. \tag{2.12}$$

Note que se $0 < k < h$, então $A(h) \subset A(k)$. Com efeito, $x \in A(h)$ implica $k < h < |u(x)|$, e daí $k < |u(x)|$. Logo, $x \in A(k)$. Temos

$$|A(h)|^{\frac{1}{(p^*)^-}}(h-k) = \left(\int_{A(h)} 1\, dx\right)^{\frac{1}{(p^*)^-}} (h-k) = \left[\int_{A(h)} (h-k)^{(p^*)^-} dx\right]^{\frac{1}{(p^*)^-}}$$

$$\leq \left[\int_{A(h)} (|u|-k)^{(p^*)^-} dx\right]^{\frac{1}{(p^*)^-}} = \left[\int_{A(h)} (w_k)^{(p^*)^-} dx\right]^{\frac{1}{(p^*)^-}} \leq \|w_k\|_{(p^*)^-},$$

ou seja,

$$|A(h)|^{\frac{1}{(p^*)^-}}(h-k) \leq \|w_k\|_{(p^*)^-}. \tag{2.13}$$

Por (2.12) e (2.13),

$$|A(h)|^{\frac{1}{(p^*)^-}}(h-k) \leq \frac{1}{S^{\frac{1}{\sigma-1}}}\|f\|_{r^-}^{\frac{1}{\sigma-1}}|A(k)|^{\frac{1}{\sigma-1}\left[1-\left(\frac{1}{(p^*)^-}+\frac{1}{r^-}\right)\right]},$$

o que nos dá

$$|A(h)| \leq \frac{1}{(h-k)^{(p^*)^-}}\frac{1}{S^{\frac{(p^*)^-}{\sigma-1}}}\|f\|_{r^-}^{\frac{(p^*)^-}{\sigma-1}}|A(k)|^{\frac{(p^*)^-}{\sigma-1}\left[1-\left(\frac{1}{(p^*)^-}+\frac{1}{r^-}\right)\right]}. \tag{2.14}$$

Vamos mostrar que $\beta = \dfrac{(p^*)^-}{\sigma-1}\left[1-\left(\dfrac{1}{(p^*)^-}+\dfrac{1}{r^-}\right)\right] > 1$, para aplicar o Lema 2.3.1. Observe que, por hipótese, $r^- > \dfrac{(p^*)^-}{(p^*)^- - p^+} > \dfrac{(p^*)^-}{(p^*)^- - 1}$. Portanto,

$$r^- > \frac{(p^*)^-}{(p^*)^- - p^+} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(p^*)^- - p^+}{(p^*)^-} > \frac{1}{r^-},$$

de onde segue que

$$\frac{(p^*)^-}{\sigma-1}\left[1-\left(\frac{1}{(p^*)^-}+\frac{1}{r^-}\right)\right] > \frac{(p^*)^-}{\sigma-1}\left[1-\left(\frac{1}{(p^*)^-}+\frac{(p^*)^- - p^+}{(p^*)^-}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \beta > \frac{(p^*)^-}{\sigma-1} - \frac{1}{\sigma-1} - \frac{(p^*)^- - p^+}{\sigma-1}$$

$$\Rightarrow \qquad \beta > \frac{p^+ - 1}{\sigma-1} \geq 1,$$

pois $\dfrac{p^+-1}{\sigma-1} = 1$ se $\sigma = p^+$ e $\dfrac{p^+-1}{\sigma-1} \geq 1$ se $\sigma = p^-$.

Temos ainda que se $0 < k < h$, então $A(h) \subset A(k)$, e isso implica que $|A(h)| \leq |A(k)|$, e assim $\phi(h) = |A(h)|$ é não-crescente. Considerando o β que escolhemos, $\alpha = (p^*)^-$ e $C = \|f\|_{r^-}^{\frac{(p^*)^-}{\sigma-1}}/S^{\frac{(p^*)^-}{\sigma-1}}$ em (2.14), aplicamos o Lema 2.3.1 com $k_0 = 0$. Logo, $\phi(d) = 0$, onde $d^\alpha = C2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}\phi(0)^{\beta-1}$. Note ainda que

$$\phi(d) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \{x \in \Omega : |u(x)| > d\} \text{ tem medida nula.}$$

Isto é, $|u(x)| \leq d$, quase sempre em Ω, e assim $u \in L^\infty(\Omega)$. Por fim,

$$\|u\|_\infty \leq d = \left(C2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}\phi(0)^{\beta-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\|f\|_{r^-}^{\frac{\alpha}{\sigma-1}}2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}}{S^{\frac{\alpha}{\sigma-1}}}|A(0)|^{\beta-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{2^{\frac{\beta}{\beta-1}}}{S^{\frac{1}{\sigma-1}}}|\Omega|^{\frac{\beta-1}{\alpha}}\|f\|_{r^-}^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

$$= C|\Omega|^\nu \max\{\|f\|_{r^-}^{\frac{1}{p^+-1}}, \|f\|_{r^-}^{\frac{1}{p^--1}}\},$$

isto é,

$$\|u\|_\infty \leq C|\Omega|^\nu \max\{\|f\|_{r^-}^{\frac{1}{p^+-1}}, \|f\|_{r^-}^{\frac{1}{p^--1}}\}.$$

■

Lema 2.3.3 *Suponha que $(H), (f_1)$ e (f_2) ocorrem. Então existe $\xi > 0$ tal que o problema (2.1) possui um par de sub-supersolução $(\underline{u}, \overline{u}) \in (W_0^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times (W_0^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$, com $\|\underline{u}\|_\infty \leq \delta$ e δ como na suposição (f_1) sempre que $\|a\|_{L^\infty(\Omega)} < \xi$.*

Demonstração: O espaço $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é Banach (real), separável e reflexivo. Além disso, o operador $p(x)-$Laplaciano, denotado por $-\Delta_{p(x)}$, é fortemente monótono, coercivo e semicontínuo. Portanto, pelo Teorema de Minty-Browder e pelo Lema 2.3.2, existem únicas soluções positivas $\underline{u}, \overline{u} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, respectivamente, para os problemas

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}\underline{u} = a(x) \text{ em } \Omega, \\ \underline{u} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\Delta_{p(x)}\overline{u} = 1 + a(x) \text{ em } \Omega, \\ \overline{u} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.15}$$

com $\|\underline{u}\|_\infty \leq C|\Omega|^\nu \max\{\|a\|_\infty^{\frac{1}{p^--1}}, \|a\|_\infty^{\frac{1}{p^+-1}}\}$ e as constantes C, ν dadas pelo Lema 2.3.2. Podemos, ainda, escolher $\xi > 0$, dependendo apenas de C e ν, de tal maneira que $\|\underline{u}\|_\infty \leq \delta/2$ sempre que $\|a\|_\infty < \xi$. Usando o fato de que $-\Delta_{p(x)}\underline{u} \leq -\Delta_{p(x)}\overline{u}$ e o Lema 2.1.1, segue que $0 < \underline{u} \leq \overline{u}$ quase sempre em Ω.

Seja $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\varphi(x) \geq 0$ quase sempre em Ω. Sendo $\underline{u}$ solução da primeira equação em (2.15), temos que

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2}\nabla\underline{u}\nabla\varphi\, dx = \int_\Omega a(x)\varphi\, dx. \tag{2.16}$$

Por (f_1), para $0 \leq \underline{u} \leq \delta$ quase sempre em Ω, segue que

$$(1-\underline{u}^{\alpha(x)-1})a(x)\varphi \leq f(x,\underline{u})\varphi,$$

e assim,

$$-\int_\Omega f(x,\underline{u})\varphi\,dx \leq -\int_\Omega (1-\underline{u}^{\alpha(x)-1})a(x)\varphi\,dx. \tag{2.17}$$

Por (2.16) e (2.17),

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2}\nabla\underline{u}\nabla\varphi\,dx - \int_\Omega f(x,\underline{u})\varphi\,dx \leq \int_\Omega a(x)\varphi\,dx - \int_\Omega (1-\underline{u}^{\alpha(x)-1})a(x)\varphi\,dx,$$

e adicionando $-\int_\Omega a(x)\underline{u}^{\alpha(x)-1}\varphi\,dx$ aos dois lados, temos

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2}\nabla\underline{u}\nabla\varphi\,dx - \int_\Omega f(x,\underline{u})\varphi\,dx - \int_\Omega a(x)\underline{u}^{\alpha(x)-1}\varphi\,dx$$

$$\leq \int_\Omega a(x)\varphi\,dx - \int_\Omega (1-\underline{u}^{\alpha(x)-1})a(x)\varphi\,dx, - \int_\Omega a(x)\underline{u}^{\alpha(x)-1}\varphi\,dx$$

$$= \int_\Omega a(x)\varphi\,dx - \int_\Omega a(x)\varphi\,dx, + \int_\Omega a(x)\underline{u}^{\alpha(x)-1}\varphi\,dx - \int_\Omega a(x)\underline{u}^{\alpha(x)-1}\varphi\,dx = 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2}\nabla\underline{u}\nabla\varphi\,dx \leq \int_\Omega a(x)\underline{u}^{\alpha(x)-1}\varphi\,dx + \int_\Omega f(x,\underline{u})\varphi\,dx. \tag{2.18}$$

Sabendo que $\overline{u}$ é solução da segunda equação de (2.15), temos para todo $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\varphi(x) \geq 0$ quase sempre em Ω que

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p(x)-2}\nabla\overline{u}\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega (1+a(x))\varphi\,dx \geq \int_\Omega (1-a(x))\varphi\,dx,$$

e assim,

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p(x)-2}\nabla\overline{u}\nabla\varphi\,dx \geq \int_\Omega (1-a(x))\varphi\,dx. \tag{2.19}$$

Por (f_2), existe $r \in L^\infty(\Omega)$ tal que $1 < r^-$ e $|f(x,\overline{u})| \leq a(x) + a(x)|\overline{u}|^{r(x)-1}$. Logo,

$$|f(x,\overline{u})\varphi| \leq (a(x)+a(x)|\overline{u}|^{r(x)-1})\varphi \leq a(x)\varphi + \|a\|_\infty \|\overline{u}\|_\infty^{r(x)-1}\varphi$$

$$\leq a(x)\varphi + C_2\|a\|_\infty\varphi \;\;\Rightarrow\;\; |f(x,\overline{u})|\varphi \leq a(x)\varphi + C_2\|a\|_\infty\varphi,$$

onde $C_2 := \max\{\|\overline{u}\|_\infty^{r^+-1}, \|\overline{u}\|_\infty^{r^--1}\}$. Integrando dos dois lados e multiplicando ambos por -1,

$$-\int_\Omega f(x,\overline{u})\varphi\,dx \geq -\int_\Omega (a(x) + C_2\|a\|_\infty)\,\varphi\,dx. \tag{2.20}$$

Observe que

$$-\int_\Omega a(x)\overline{u}^{\alpha(x)-1}\varphi\,dx \geq -\int_\Omega \|a\|_\infty\|\overline{u}\|_\infty^{\alpha(x)-1}\varphi\,dx \geq -\int_\Omega C_3\|a\|_\infty\varphi\,dx, \tag{2.21}$$

onde $C_3 := \max\{\|\overline{u}\|_\infty^{\alpha^--1}, \|\overline{u}\|_\infty^{\alpha^+-1}\}$.

Por (2.19)-(2.21),

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla\overline{u}|^{p(x)-2}\nabla\overline{u}\nabla\varphi\,dx - \int_\Omega f(x,\overline{u})\varphi - \int_\Omega a(x)\overline{u}^{\alpha(x)-1}\varphi\,dx \\
&\geq \int_\Omega (1-a(x))\varphi\,dx - \int_\Omega (a(x) + C_2\|a\|_\infty)\,\varphi\,dx - \int_\Omega C_3\|a\|_\infty\varphi\,dx \\
&= \int_\Omega \varphi\,dx - \int_\Omega a(x)\varphi\,dx + \int_\Omega a(x)\varphi\,dx - \int_\Omega (C_2+C_3)\,\|a\|_\infty\varphi\,dx,
\end{aligned}$$

e fazendo $C_1 = C_2 + C_3$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla\overline{u}|^{p(x)-2}\nabla\overline{u}\nabla\varphi\,dx - \int_\Omega f(x,\overline{u})\varphi - \int_\Omega a(x)\overline{u}^{\alpha(x)-1}\varphi\,dx \geq \int_\Omega (1 - C_1\|a\|_\infty)\,\varphi\,dx. \tag{2.22}$$

Agora, tome $\xi > 0$ menor de tal modo que $C_1\|a\|_\infty \leq 1$ se $\|a\|_\infty < \xi$, e assim o termo do lado direito de (2.22) é não-negativo. Portanto,

$$\int_\Omega |\nabla\overline{u}|^{p(x)-2}\nabla\overline{u}\nabla\varphi\,dx - \int_\Omega f(x,\overline{u})\varphi\,dx - \int_\Omega a(x)\overline{u}^{\alpha(x)-1}\varphi\,dx \geq 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla\overline{u}|^{p(x)-2}\nabla\overline{u}\nabla\varphi\,dx \geq \int_\Omega a(x)\overline{u}^{\alpha(x)-1}\varphi\,dx + \int_\Omega f(x,\overline{u})\varphi\,dx. \tag{2.23}$$

Logo, por (2.18) e (2.23), segue que $(\underline{u},\overline{u}) \in (W_0^{1,p(x)} \cap L^\infty(\Omega)) \times (W_0^{1,p(x)} \cap L^\infty(\Omega))$ é um par sub-supersolução para o problema (2.1) com $\|\underline{u}\|_\infty \leq \delta$ sempre que $\|a\|_\infty < \xi$. ■

Demonstração do Teorema 2.2.1 Considere $\underline{u}, \overline{u} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ como no Lema 2.3.3 e defina a função $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x,t) = \begin{cases} a(x)\overline{u}^{\alpha(x)-1} + f(x,\overline{u}(x)), & \text{se } \; t > \overline{u}(x), \\ a(x)t^{\alpha(x)-1} + f(x,t), & \text{se } \; \underline{u}(x) \leq t \leq \overline{u}(x), \\ a(x)\underline{u}^{\alpha(x)-1} + f(x,\underline{u}(x)), & \text{se } \; t < \underline{u}(x), \end{cases}$$

e o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = g(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que a função $g(x,t)$ é Carathéodory. Se fixarmos $t \in \mathbb{R}$, então a função $g_t(x)$ é mensurável para qualquer $t \in \mathbb{R}$, pois a pré-imagem de qualquer conjunto mensurável em $\mathbb{R}$ é mensurável, uma vez que Ω é limitado. Além disso, tomando x fixo, a função $g_x(t)$ é contínua para cada $x \in \Omega$, pois $a(x) \in L^\infty$, $a(x)\underline{u}^{\alpha(x)-1}$ e $a(x)\overline{u}^{\alpha(x)-1}$ são constantes, $t^{\alpha(x)-1}$ é contínua para cada $t \in [\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$ e $f(x,t)$ é contínua.

O funcional associado ao problema auxiliar é

$$J(u) := \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_\Omega G(x,u)dx, \; u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega),$$

onde $G(x,t) := \int_0^t g(x,s)ds$. As soluções do problema auxiliar coincidem com os pontos críticos deste funcional.

Afirmação 1: $J(u)$ é de classe C^1.

Com efeito, se $J_1(u) = \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx$, então segue pela Proposição 1.2.1 que $J_1'(u)v = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v \, dx$, e J_1' é contínuo em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Vamos agora calcular a derivada de Gâteaux de $J_2(u) = \displaystyle\int_\Omega G(x,u)\, dx$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, $x \in \Omega$ e $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\|v\| \leq 1$, considere a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por $h(s) = G(x, u + stv)$. Note que temos $h'(s) = g(x, u + stv)\, tv$, $h(1) = G(x, u + tv)$ e $h(0) = G(x,u)$.

Pelo fato de h ser diferenciável em $(0,1)$ e contínua em $[0,1]$, o Teorema do Valor Médio nos dá a existência de $\gamma \in (0,1)$ tal que

$$h(1) - h(0) = h'(\gamma),$$

e daí

$$\left| \frac{G(x, u+tv) - G(x,u)}{1-0} \right| = |g(x, u + \gamma tv)\, tv| \,,$$

ou seja,

$$\left| \frac{G(x, u+tv) - G(x,u)}{t} \right| = |g(x, u + \gamma tv)|\, |v| \leq |g(x, u + \gamma tv)| \,. \tag{2.24}$$

Observe que se $\underline{u} \leq u + \gamma t v \leq \overline{u}$, então

$$\begin{aligned} |g(x, u + \gamma t v)| &= \left| a(x)(u + \gamma t v)^{\alpha(x)-1} + f(x, u + \gamma t v) \right| \\ &\leq |a(x)\overline{u}^{\alpha(x)-1}| + |f(x, u + \gamma t v)|. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Além disso, se $u + \gamma t v \leq \underline{u}$, então

$$\begin{aligned} |g(x, u + \gamma t v)| &= \left| a(x)\underline{u}^{\alpha(x)-1} + f(x, \underline{u}) \right| \\ &\leq |a(x)\overline{u}^{\alpha(x)-1}| + |f(x, \underline{u})| \end{aligned} \tag{2.26}$$

e se $u + \gamma t v \geq \overline{u}$, obtemos

$$\begin{aligned} |g(x, u + \gamma t v)| &= \left| a(x)\overline{u}^{\alpha(x)-1} + f(x, \overline{u}) \right| \\ &\leq |a(x)\overline{u}^{\alpha(x)-1}| + |f(x, \overline{u})| \end{aligned} \tag{2.27}$$

Pelo fato de $a \in L^\infty$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $|a(x)| \leq C_1$, para todo $x \in \Omega$. Daí, tomando $\|\overline{u}\|^{\sigma-1} = \max\{\|\overline{u}\|^{\alpha^- -1}, \|\overline{u}\|^{\alpha^+ -1}\}$,

$$|a(x)\overline{u}^{\alpha(x)-1}| \leq C_1 \|\overline{u}\|^{\sigma-1}. \tag{2.28}$$

Se $\underline{u} \leq u + \gamma t v \leq \overline{u}$, então pelo fato de f ser contínua, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$|f(x, u + \gamma t v)| \leq C_2, \tag{2.29}$$

para todo $x \in \Omega$ tal que $\underline{u} \leq u + \gamma t v \leq \overline{u}$.

Por (f_2), existe $r \in L^\infty$ com $r^- > 1$ tal que

$$|f(x, \underline{u})| \leq a(x)(1 + \underline{u}^{r(x)-1}) \leq a(x)(1 + \underline{u}^{r(x)-1})$$

e

$$|f(x, \overline{u})| \leq a(x)(1 + \overline{u}^{r(x)-1}) \leq a(x)(1 + \overline{u}^{r(x)-1}).$$

Adotando

$$\|\underline{u}\|^{\theta-1} = \max\{\|\underline{u}\|^{r^+ -1}, \|\underline{u}\|^{r^- -1}\}$$

e

$$\|\overline{u}\|^{\mu-1} = \max\{\|\overline{u}\|^{r^+ -1}, \|\overline{u}\|^{r^- -1}\},$$

temos

$$|f(x,\underline{u})| \leq C_1 + C_1\|\underline{u}\|^{\theta-1} \tag{2.30}$$

e

$$|f(x,\overline{u})| \leq C_1 + C_1\|\overline{u}\|^{\mu-1}. \tag{2.31}$$

Pondo $C_4 = \max\{C_2, C_1 + C_1\|\underline{u}\|^{\theta-1}, C_1 + C_1\|\overline{u}\|^{\mu-1},\}$ temos por (2.24)-(2.31)

$$\left|\frac{G(x,u+tv)-G(x,u)}{t}\right| \leq C_1\|\overline{u}\|^{\sigma-1} + C_4 \in L^1(\Omega).$$

Além disso, para uma sequência $|t_n| \to 0$ temos que

$$g(x,u(x)+\gamma t_n v(x))v(x) \to g(x,u(x))v(x) \text{ pontualmente em } \Omega.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{t\to 0}\frac{J_2(u+tv)-J_2(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\displaystyle\int_\Omega G(x,u+tv)\,dx - \int_\Omega G(x,u)\,dx}{t} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(x,u+\gamma t_n v)\,dx = \int_\Omega g(x,u)v\,dx.$$

Foi demonstrado que $J_2'(u)\,v = \displaystyle\int_\Omega g(x,u)\,dx$. O nosso próximo passo é mostrar que $J_2'(u)\,v$ é contínuo. Seja (u_n) uma sequência em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Das imersões compactas, segue que

$$u_n \to u \text{ em } L^{p^-}(\Omega).$$

Do Teorema de Vainberg, existem uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e uma função $\Psi \in L^{p^-}(\Omega)$ tais que

$$u_{n_j}(x) \to u(x) \text{ quase sempre em } \Omega$$

e

$$|u_{n_j}(x)| \leq \Psi(x) \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Desde que g é uma função Caratheódory,

$$[g(x,u_{n_j})(x)-g(x,u)(x)]^{p^-/p^--1}\to 0 \text{ quase sempre em } \Omega,$$

e por (2.25)-(2.31), temos

$$[g(x,u_{n_j})(x)-g(x,u)(x)]^{p^-/p^--1}\leq C[|g(x,u_{n_j})(x)|^{p^-/p^--1}+|g(x,u)(x)|^{p^-/p^--1}]$$

$$\leq 2C(C_1\|\overline{u}\|^{\sigma-1})^{p^-/p^--1}+2C_4^{p^-/p^--1}\in L^1(\Omega).$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$|g(x,u_{n_j}(x))-g(x,u(x))|_{L^{p^-/p^--1}}(\Omega)\to 0.$$

Assim, para todo $w\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $\|w\|\leq 1$, temos

$$|[J_2'(u_{n_j})-J_2'(u)]w|=\int_\Omega \left[g(x,u_{n_j})-g(x,u)\right]w\,dx.$$

Sendo p^- e $p^-/(p^--1)$ expoentes conjugados, obtemos pela Desigualdade de Hölder,

$$|[J_2'(u_{n_j})-J_2'(u)]w|\leq |g(x,u_{n_j}(x))-g(x,u(x))|_{L^{p^-/p^--1}(\Omega)}|w|_{L^{p^-}(\Omega)}.$$

Das imersões contínuas de Sobolev,

$$|[J_2'(u_{n_j})-J_2'(u)]w|\leq C|g(x,u_{n_j}(x))-g(x,u(x))|_{L^{p^-/p^--1}(\Omega)}\|w\|,$$

e portanto

$$\|J_2'(u_{n_j})-J_2'(u)\|=\sup_{\|w\|\leq 1}|[J_2'(u_{n_j})-J_2'(u)]w|$$

$$\leq C|g(x,u_{n_j}(x))-g(x,u(x))|_{L^{p^-/p^--1}}(\Omega)\to 0,$$

o que implica que $\lim\limits_{j\to+\infty}J_2'(u_{n_j})=J_2'(u)$, ou seja, J_2' é contínuo, e consequentemente J_2 é de classe C^1.

Como $J_1(u)$ e $J_2(u)$ são de classe C^1, segue que $J(u)$ também é.

Para a nossa próxima afirmação, definimos o seguinte conjunto:

$$K=\{x\in W_0^{1,p(x)}(\Omega):\underline{u}(x)\leq u(x)\leq\overline{u}(x)\ \text{ quase sempre em }\ \Omega\}.$$

Afirmação 2: $J(u)$ é coercivo sobre K.

Com efeito, seja $(u_n) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $\|u_n\| \to +\infty$. Observe que

$$\begin{aligned} J(u_n) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)}\, dx - \int_\Omega G(x, u_n)\, dx \\ &\geq \frac{1}{p^+} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}\, dx - \int_\Omega G(x, u_n)\, dx \\ &\geq \frac{1}{p^+} \|u_n\|^\rho - \int_\Omega G(x, u_n)\, dx, \end{aligned}$$

onde $\|u_n\|^\rho = \min\{\|u_n\|^{p^-}, \|u_n\|^{p^+}\}$.

Observe que como $a, \overline{u} \in L^\infty(\Omega)$, temos $a(x)t^{\alpha(x)-1} \leq \|a\|_\infty \|\overline{u}\|_\infty^{\sigma-1}$ para todo $t \in [\underline{u}, \overline{u}]$, onde $\|\overline{u}\|_\infty^{\sigma-1} = \max\{\|\overline{u}\|_\infty^{\alpha^+-1}, \|\overline{u}\|_\infty^{\alpha^--1}\}$. Além disso, sabendo que $f(x,t)$ é uma função contínua e Ω é limitado, segue que $f(x,t)$ é limitada em K. Daí, decorre que

$$\int_K G(x,u)dx = \int_K \left[\int_0^{u_n} g(x,s)ds\right] dx = \int_K \left[\frac{a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)} + F(x,u_n)\right] dx$$

é limitada sobre K. Portanto, fazendo $\|u_n\| \to +\infty$, obtemos $J(u_n) \to +\infty$, ou seja, J é coercivo sobre K.

Afirmação 3: $J(u)$ é fracamente semicontínuo inferiormente.

De fato, seja $(u_n) \subset K$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Das propriedades de convergência fraca, segue que

$$\|u\|^{p(x)} \leq \liminf \|u_n\|^{p(x)}, \tag{2.32}$$

uma vez que a norma é uma função fracamente semicontínua inferiormente. Agora, passando a uma subsequência se necessário, temos pelo Teorema de Vainberg que

$$u_n \to u \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Além disso, $|G(x, u_n(x))| \leq C$ uniformemente em K e $G(x, u_n(x)) \to G(x, u(x))$ quase sempre em Ω. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos que

$$\int_\Omega G(x, u_n)\, dx \to \int_\Omega G(x, u)\, dx, \tag{2.33}$$

ou ainda,

$$\liminf \int_\Omega G(x,u_n)\,dx = \int_\Omega G(x,u)\,dx. \tag{2.34}$$

Por (2.32) e (2.34), obtemos

$$\|u\|^{p(x)} + \int_\Omega G(x,u)\,dx \le \liminf \left[\|u_n\|^{p(x)} + \int_\Omega G(x,u_n)\,dx\right],$$

e temos o resultado desejado.

Pelo Teorema 2.1.1, a restrição do funcional J a K atinge seu ínfimo em algum ponto $u_0 \in K$. Resta-nos mostrar que u_0 é solução fraca de (2.1).

Note que o conjunto K é convexo. Tomando $u, v \in K$, segue que, dado $t \in [0,1]$, temos

$$(1-t)\underline{u} \le (1-t)u \le (1-t)\overline{u}$$

e

$$t\underline{u} \le tv \le t\overline{u},$$

e daí,

$$\underline{u} \le (1-t)u + tv \le \overline{u}.$$

Dados $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi \ge 0$ e $\epsilon > 0$, tomamos

$$v_\epsilon = \min\{\overline{u}, \max\{\underline{u}, u_0 + \epsilon\varphi\}\} \in K. \tag{2.35}$$

Definimos

$$\Phi_\epsilon = \max\{0, u_0 + \epsilon\varphi - \overline{u}\} \ge 0$$

e

$$\Gamma_\epsilon = \max\{0, \underline{u} - (u_0 + \epsilon\varphi)\} \ge 0.$$

Afirmamos que $v_\epsilon = u_0 + \epsilon\varphi - \Phi_\epsilon + \Gamma_\epsilon$. De fato, observe que há 3 casos a considerar:

Caso 1: $u_0 + \epsilon\varphi \le \underline{u} \le \overline{u}$.

Aqui temos $\Phi_\epsilon = 0$ e $\Gamma_\epsilon = \underline{u} - (u_0 + \epsilon\varphi)$. Pela definição de v_ϵ em (2.35),

$$v_\epsilon = \min\{\overline{u}, \max\{\underline{u}, u_0 + \epsilon\varphi\}\} = \min\{\overline{u}, \underline{u}\} = \underline{u}.$$

Mas
$$\underline{u} = u_0 + \epsilon\varphi - 0 + \underline{u} - (u_0 + \epsilon\varphi) = u_0 + \epsilon\varphi - \Phi_\epsilon + \Gamma_\epsilon,$$
e assim obtemos o resultado desejado.

Caso 2: $\underline{u} \leq u_0 + \epsilon\varphi \leq \overline{u}$.

Neste caso, $\Phi_\epsilon = \Gamma_\epsilon = 0$. De acordo com (2.35),
$$v_\epsilon = \min\{\overline{u}, \max\{\underline{u}, u_0 + \epsilon\varphi\}\} = \min\{\overline{u}, u_0 + \epsilon\varphi\} = u_0 + \epsilon\varphi =$$
$$= u_0 + \epsilon\varphi - 0 + 0 = u_0 + \epsilon\varphi - \Phi_\epsilon + \Gamma_\epsilon.$$

Caso 3: $\underline{u} \leq \overline{u} \leq u_0 + \epsilon\varphi$.

Note que $\Phi_\epsilon = u_0 + \epsilon\varphi - \overline{u}$ e $\Gamma_\epsilon = 0$. Por (2.35),
$$v_\epsilon = \min\{\overline{u}, \max\{\underline{u}, u_0 + \epsilon\varphi\}\} = \min\{\overline{u}, u_0 + \epsilon\varphi\} = \overline{u}.$$

Por outro lado,
$$\overline{u} = u_0 + \epsilon\varphi - (u_0 + \epsilon\varphi - \overline{u}) + 0 = u_0 + \epsilon\varphi - \Phi_\epsilon + \Gamma_\epsilon.$$

Observe que $\Phi_\epsilon, \Gamma_\epsilon \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Então $J(u)$ é diferenciável na direção $v_\epsilon - u_0$, e sendo u_0 mínimo de J em K, temos que $J(u_0) \leq J(w)$, para todo $w \in K$. Usando a convexidade de K,
$$\begin{aligned} J'(u_0)(v_\epsilon - u_0) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{J(u_0 + t(v_\epsilon - u_0)) - J(u_0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{J((1-t)u_0 + tv_\epsilon) - J(u_0)}{t} \geq 0. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Portanto,
$$J'(u_0)(v_\epsilon - u_0) \geq 0,$$
e sabendo que $v_\epsilon - u_0 = \epsilon\varphi - \Phi_\epsilon + \Gamma_\epsilon$,
$$\begin{aligned} J'(u_0)(\epsilon\varphi - \Phi_\epsilon + \Gamma_\epsilon) \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad J'(u_0)(\epsilon\varphi) \geq J'(u_0)(\Phi_\epsilon) - J'(u_0)(\Gamma_\epsilon) \\ &\Rightarrow J'(u_0)(\varphi) \geq \frac{1}{\epsilon}\left[J'(u_0)(\Phi_\epsilon) - J'(u_0)(\Gamma_\epsilon)\right]. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Definimos o conjunto
$$\Omega^\epsilon := \{x \in \Omega : u_0(x) + \epsilon\varphi(x) \geq \overline{u}(x) > u_0(x)\}.$$

Note que

$$
\begin{aligned}
J'(u_0)(\Phi_\epsilon) &= J'(\overline{u})(\Phi_\epsilon) - J'(\overline{u})(\Phi_\epsilon) + J'(u_0)(\Phi_\epsilon) \\
&= J'(\overline{u})(\Phi_\epsilon) + \left[J'(u_0) - J'(\overline{u})\right](\Phi_\epsilon) \\
&\geq \left[J'(u_0) - J'(\overline{u})\right](\Phi_\epsilon), \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

onde a desigualdade se deve ao fato de $\overline{u}$ ser supersolução de (2.1), isto é, $J'(\overline{u})(\Phi_\epsilon) \geq 0$. Recorde que

$$
J'(u)(v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v\, dx - \int_\Omega g(x,u)v\, dx \quad \forall\, u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).
$$

Prosseguindo, temos

$$
\begin{aligned}
&\left[J'(u_0) - J'(\overline{u})\right](\Phi_\epsilon) = \left[J'(u_0) - J'(\overline{u})\right](u_0 + \epsilon\varphi - \overline{u}) = \\
&= \int_{\Omega^\epsilon} \left[|\nabla u_0|^{p(x)-2}\nabla u_0 - |\nabla \overline{u}|^{p(x)-2}\nabla \overline{u}\right] \nabla(u_0 + \epsilon\varphi - \overline{u})\, dx \\
&\quad - \int_{\Omega^\epsilon} (g(x,u_0) - g(x,\overline{u}))(u_0 + \epsilon\varphi - \overline{u})\, dx. \qquad (2.39)
\end{aligned}
$$

Note que $u_0 - \overline{u} \leq 0$. Daí,

$$
\int_{\Omega^\epsilon} (g(x,u_0) - g(x,\overline{u}))(u_0 + \epsilon\varphi - \overline{u})\, dx \leq \int_{\Omega^\epsilon} |g(x,u_0) - g(x,\overline{u})|\epsilon\varphi\, dx,
$$

o que equivale a

$$
-\int_{\Omega^\epsilon} (g(x,u_0) - g(x,\overline{u}))(u_0 + \epsilon\varphi - \overline{u})\, dx \geq -\epsilon \int_{\Omega^\epsilon} |g(x,u_0) - g(x,\overline{u})||\varphi|\, dx. \qquad (2.40)
$$

Se $u_0 \leq \overline{u}$, então $|\nabla u_0| \leq |\nabla \overline{u}|$, e assim $|\nabla u_0|^{p(x)-2}\nabla u_0 \leq |\nabla \overline{u}|^{p(x)-2}\nabla \overline{u}$.

Já que $u_0(x) + \epsilon\varphi(x) - \overline{u}(x) \geq 0$ em Ω^ϵ, obtemos que

$$
0 \leq \left[|\nabla \overline{u}|^{p(x)-2}\nabla \overline{u} - |\nabla u_0|^{p(x)-2}\nabla u_0\right] \nabla(u_0 + \epsilon\varphi - \overline{u}),
$$

e assim, lembrando que $u_0 - \overline{u} \leq 0$,

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega^\epsilon} \left[|\nabla \overline{u}|^{p(x)-2}\nabla \overline{u} - |\nabla u_0|^{p(x)-2}\nabla u_0\right] \nabla(u_0 + \epsilon\varphi - \overline{u})\, dx \\
&\leq \int_{\Omega^\epsilon} \left[|\nabla \overline{u}|^{p(x)-2}\nabla \overline{u} - |\nabla u_0|^{p(x)-2}\nabla u_0\right] \nabla\epsilon\varphi\, dx.
\end{aligned}
$$

Multiplicando todos os membros da desigualdade por -1, segue que

$$\int_{\Omega^\epsilon} \left[|\nabla u_0|^{p(x)-2}\nabla u_0 - |\nabla \overline{u}|^{p(x)-2}\nabla \overline{u}\right] \nabla(u_0 + \epsilon\varphi - \overline{u})\, dx$$

$$\geq \epsilon \int_{\Omega^\epsilon} \left[|\nabla u_0|^{p(x)-2}\nabla u_0 - |\nabla \overline{u}|^{p(x)-2}\nabla \overline{u}\right] \nabla\varphi\, dx. \tag{2.41}$$

Por (2.38)-(2.41),

$$J'(u_0)(\Phi_\epsilon) \geq \epsilon \int_{\Omega^\epsilon} \left[|\nabla u_0|^{p(x)-2}\nabla u_0 - |\nabla \overline{u}|^{p(x)-2}\nabla \overline{u}\right] \nabla\varphi\, dx$$

$$-\epsilon \int_{\Omega^\epsilon} |g(x, u_0) - g(x, \overline{u})||\varphi|\, dx.$$

Note que $|\Omega^\epsilon| \to 0$ quando $\epsilon \to 0$, e daí, pela continuidade absoluta da integral de Lebesgue,

$$J'(u_0)(\Phi_\epsilon) \geq o(\epsilon), \tag{2.42}$$

de modo que $o(\epsilon)/\epsilon \to 0$ quando $\epsilon \to 0$.

De maneira análoga, definimos o conjunto

$$\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega : u_0(x) + \epsilon\varphi(x) \leq \underline{u}(x) < u_0(x)\}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} J'(u_0)(\Gamma_\epsilon) &= J'(\underline{u})(\Gamma_\epsilon) - J'(\underline{u})(\Gamma_\epsilon) + J'(u_0)(\Gamma_\epsilon) \\ &= J'(\underline{u})(\Gamma_\epsilon) + \left[J'(u_0) - J'(\underline{u})\right](\Gamma_\epsilon) \\ &\leq \left[J'(u_0) - J'(\underline{u})\right](\Gamma_\epsilon), \end{aligned} \tag{2.43}$$

onde a desigualdade se deve ao fato de $\underline{u}$ ser subsolução de (2.1), isto é, $J'(\underline{u})(\Gamma_\epsilon) \leq 0$.

Veja que

$$\left[J'(u_0) - J'(\underline{u})\right](\Gamma_\epsilon) = \left[J'(u_0) - J'(\underline{u})\right](\underline{u} - u_0 - \epsilon\varphi) =$$

$$= \int_{\Omega_\epsilon} \left[|\nabla u_0|^{p(x)-2}\nabla u_0 - |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2}\nabla \underline{u}\right] \nabla(\underline{u} - u_0 - \epsilon\varphi)\, dx$$

$$- \int_{\Omega_\epsilon} (g(x, u_0) - g(x, \underline{u}))(\underline{u} - u_0 - \epsilon\varphi)\, dx. \tag{2.44}$$

Como $\underline{u} \leq u_0$, segue que $|\nabla \underline{u}| \leq |\nabla u_0|$, de onde obtemos

$$|\nabla \underline{u}|^{p(x)-2}\nabla \underline{u} \leq |\nabla u_0|^{p(x)-2}\nabla u_0,$$

o que equivale a

$$|\nabla u_0|^{p(x)-2}\nabla u_0 - |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2}\nabla \underline{u} \geq 0.$$

Sendo $\underline{u} - u_0 - \epsilon\varphi \geq 0$ em Ω_ϵ,

$$\int_{\Omega_\epsilon} \left[|\nabla u_0|^{p(x)-2}\nabla u_0 - |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2}\nabla \underline{u}\right] \nabla(\underline{u} - u_0 - \epsilon\varphi)\, dx \geq 0,$$

e como $\underline{u} - u_0 \leq 0$,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_\epsilon} \left[|\nabla u_0|^{p(x)-2}\nabla u_0 - |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2}\nabla \underline{u}\right] \nabla(\underline{u} - u_0 - \epsilon\varphi)\, dx \\ &\leq -\epsilon \int_{\Omega_\epsilon} \left[|\nabla u_0|^{p(x)-2}\nabla u_0 - |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2}\nabla \underline{u}\right] \nabla\varphi\, dx. \qquad (2.45)\end{aligned}$$

É imediato que

$$\begin{aligned}&-\int_{\Omega_\epsilon} [g(x,u) - g(x,\underline{u})](\underline{u} - u_0 - \epsilon\varphi)\, dx \\ &\leq \int_{\Omega_\epsilon} |g(x,u) - g(x,\underline{u})|(\underline{u} - u_0 - \epsilon\varphi)\, dx, \qquad (2.46)\end{aligned}$$

e recordando que $\underline{u} - u_0 \leq 0$,

$$\int_{\Omega_\epsilon} |g(x,u_0) - g(x,\underline{u})|(\underline{u} - u_0 - \epsilon\varphi)\, dx \leq -\epsilon \int_{\Omega_\epsilon} |g(x,u_0) - g(x,\underline{u})|\varphi\, dx. \quad (2.47)$$

Portanto, por (2.43)-(2.47),

$$\begin{aligned}J'(u_0)(\Gamma_\epsilon) \leq &-\epsilon \int_{\Omega_\epsilon} \left[|\nabla u_0|^{p(x)-2}\nabla u_0 - |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2}\nabla \underline{u}\right] \nabla\varphi\, dx \\ &-\epsilon \int_{\Omega_\epsilon} |g(x,u) - g(x,\underline{u})|\varphi\, dx.\end{aligned}$$

Assim como ocorre com Ω^ϵ, note que $|\Omega_\epsilon| \to 0$ quando $\epsilon \to 0$, o que nos mostra que

$$J'(u_0)(\Gamma_\epsilon) \leq o(\epsilon). \qquad (2.48)$$

Retomando (2.37),

$$J'(u_0)(\varphi) \geq \frac{1}{\epsilon}\left[J'(u_0)(\Phi_\epsilon) - J'(u_0)(\Gamma_\epsilon)\right],$$

e considerando (2.42) e (2.48), temos que

$$J'(u_0)(\varphi) \geq 0,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi \geq 0$. Como $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ é arbitrário e $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, segue que $J'(u_0) = 0$. ■

Demonstração do Teorema 2.2.2: Seja $\underline{u} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ como no Lema 2.3.3. Defina a função

$$h(x,t) = \begin{cases} a(x)t^{\alpha(x)-1} + f(x,t), & \text{se } t \geq \underline{u}(x), \\ a(x)\underline{u}^{\alpha(x)-1} + f(x,\underline{u}(x)), & \text{se } t < \underline{u}(x), \end{cases}$$

e o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = h(x,u) & \text{em } \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

O funcional associado ao problema é

$$L(u) := \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega H(x,u)dx, \ u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega),$$

onde $H(x,t) := \int_0^t h(x,s)\,ds$. De modo análogo ao Teorema 2.2.1, temos que L é de classe C^1.

Antes de demonstrar o Teorema 2.2.2, precisamos enunciar e demonstrar outros dois resultados.

Lema 2.3.4 *O funcional L satisfaz a condição Palais-Smale.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência tal que $L'(u_n) \to 0$ e $L(u_n) \to c$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que (u_n) é limitada.

Consideremos inicialmente o caso $p^+ < \alpha^-$. Suponha que existem uma constante $S_1 > 0$ e $\overline{\theta} > 0$ tais que $p^+ < \overline{\theta} < \min\{\alpha^-, \theta\}$ e

$$S_1 + o_n(1)\|u_n\| \geq L(u_n) - \frac{1}{\overline{\theta}}L'(u_n)u_n. \tag{2.49}$$

Note que

$$L(u_n) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)}dx - \int_\Omega H(x,u_n)\,dx.$$

Sendo $\dfrac{1}{p(x)} \geq \dfrac{1}{p^+}$, temos

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)}dx \geq \frac{1}{p^+}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx,$$

e portanto

$$\begin{aligned} L(u_n) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)}dx - \int_\Omega H(x,u_n)\,dx \\ &\geq \frac{1}{p^+}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx - \int_\Omega H(x,u_n)\,dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p^+}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx - \int_{\{u_n<0\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}u_n(x)\,dx - \int_{\{u_n<0\}} f(x,\underline{u})u_n(x)\,dx$$

$$- \int_{\{0\leq u_n<\underline{u}\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}u_n(x)\,dx - \int_{\{0\leq u_n<\underline{u}\}} f(x,\underline{u})u_n(x)\,dx$$

$$- \int_{\{\underline{u}\leq u_n\}} \frac{a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}dx - \int_{\{\underline{u}\leq u_n\}} F(x,u_n)\,dx. \tag{2.50}$$

Veja também que

$$\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}L'(u_n)u_n = \frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx - \frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_\Omega h(x,u_n)\,u_n(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx - \frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_{\{u_n<0\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}\,u_n(x)\,dx - \frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_{\{u_n<0\}} f(x,\underline{u})\,u_n(x)\,dx$$

$$-\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_{\{0\leq u_n<\underline{u}\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}\,u_n(x)\,dx - \frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_{\{0\leq u_n<\underline{u}\}} f(x,\underline{u})\,u_n(x)\,dx$$

$$-\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_{\{\underline{u}\leq u_n\}} a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}dx - \frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_{\{\underline{u}\leq u_n\}} f(x,u_n)u_n(x)\,dx. \tag{2.51}$$

Por (2.49)-(2.51),

$$S_1 + o_n(1)\|u_n\| \geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx - \int_{\{u_n<0\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}u_n(x)\,dx$$

$$- \int_{\{u_n<0\}} f(x,\underline{u})u_n(x)\,dx - \int_{\{0\leq u_n<\underline{u}\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}u_n(x)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\{0\le u_n<\underline{u}\}} f(x,\underline{u})u_n(x)\,dx-\int_{\{\underline{u}\le u_n\}}\frac{a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}dx-\int_{\{\underline{u}\le u_n\}}F(x,u_n)\,dx\\
&\quad+\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_{\{u_n<0\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}\,u_n(x)\,dx+\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_{\{u_n<0\}} f(x,\underline{u})u_n(x)\,dx\\
&\quad+\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_{\{0\le u_n<\underline{u}\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}\,u_n(x)\,dx+\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_{\{0\le u_n<\underline{u}\}} f(x,\underline{u})u_n(x)\,dx\\
&\quad+\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_{\{\underline{u}\le u_n\}} a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}dx+\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_{\{\underline{u}\le u_n\}} f(x,u_n)u_n(x)\,dx. \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

Sendo $p^+<\overline{\overline{\theta}}$, é imediato que

$$\left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx\ge 0.$$

Por (1.17) e (1.36) pondo $C_2=\dfrac{1}{p^+}-\dfrac{1}{\overline{\overline{\theta}}}$,

$$C_2\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx\ge C_2\,\min\,\{\|u_n\|^{p^+},\|u_n\|^{p^-}\}. \qquad (2.53)$$

Se $u_n(x)<0$, então

$$a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}(-u_n(x))dx>0,$$

e assim,

$$\int_{\{u_n<0\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}(-u_n(x))dx=-\int_{\{u_n<0\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}u_n(x)dx>0.$$

Portanto, como $\overline{\overline{\theta}}>1$ e consequentemente $\dfrac{1}{\overline{\overline{\theta}}}<1$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_{\{u_n<0\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}u_n(x)dx-\int_{\{u_n<0\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}u_n(x)dx\\
&\qquad=\left(\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}-1\right)\int_{\{u_n<0\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}u_n(x)dx>0. \qquad (2.54)
\end{aligned}
$$

Pela hipótese (f_2),

$$
\begin{aligned}
&|f(x,\underline{u})|\,(-u_n(x))\le -a(x)u_n(x)-a(x)\underline{u}(x)^{r(x)-1}u_n(x)\\
\Rightarrow &\int_{\{u_n<0\}} |f(x,\underline{u})u_n(x)|\,dx\;\le\int_{\{u_n<0\}}(a(x)|u_n(x)|+a(x)\underline{u}(x)^{r(x)-1}|u_n(x)|)\,dx,
\end{aligned}
$$

e como $\left|\int_{\{u_n<0\}} f(x,\underline{u})u_n(x)\,dx\right| \leq \int_{\{u_n<0\}} |f(x,\underline{u})u_n(x)|\,dx$,

$$\left|\int_{\{u_n<0\}} f(x,\underline{u})u_n(x)\,dx\right| \leq \int_{\{u_n<0\}} (a(x)|u_n(x)| + a(x)\underline{u}(x)^{r(x)-1}|u_n(x)|)\,dx,$$

de onde segue que

$$\int_{\{u_n<0\}} f(x,\underline{u})u_n(x)\,dx \leq \int_{\{u_n<0\}} (a(x)|u_n(x)| + a(x)\underline{u}(x)^{r(x)-1}|u_n(x)|)\,dx \quad (2.55)$$

e

$$-\int_{\{u_n<0\}} f(x,\underline{u})u_n(x)\,dx \leq \int_{\{u_n<0\}} (a(x)|u_n(x)| + a(x)\underline{u}(x)^{r(x)-1}|u_n(x)|)\,dx. \quad (2.56)$$

De (2.55),

$$\begin{aligned} -\int_{\{u_n<0\}} f(x,\underline{u})u_n(x)\,dx &\geq -\int_{\{u_n<0\}} (a(x)|u_n(x)| + a(x)\underline{u}(x)^{r(x)-1}|u_n(x)|)\,dx \\ &\geq -(\|a\|_\infty + \|a\|_\infty\|\underline{u}\|_\infty^{\mu-1})\int_{\{u_n<0\}} |u_n(x)|\,dx \\ &\geq -(\|a\|_\infty + \|a\|_\infty\|\underline{u}\|_\infty^{\mu-1})\int_{\Omega} |u_n(x)|\,dx \\ &= -(\|a\|_\infty + \|a\|_\infty\|\underline{u}\|_\infty^{\mu-1})\|u_n\|, \end{aligned}$$

onde $\|\underline{u}\|_\infty^{\mu-1} = \max\{\|\underline{u}\|_\infty^{r^+-1}, \|\underline{u}\|_\infty^{r^--1}\}$. Pondo $S_2 = \|a\|_\infty + \|a\|_\infty\|\underline{u}\|_\infty^{\mu-1}$,

$$-\int_{\{u_n<0\}} f(x,\underline{u})u_n(x)\,dx \geq -S_2\|u_n\|. \quad (2.57)$$

Analogamente, por (2.56) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{\theta}}\int_{\{u_n<0\}} f(x,\underline{u})u_n(x)\,dx &\geq -\frac{1}{\overline{\theta}}\int_{\{u_n<0\}} (a(x)|u_n(x)| + a(x)\underline{u}(x)^{r(x)-1}|u_n(x)|)\,dx \\ &\geq -\frac{1}{\overline{\theta}}(\|a\|_\infty + \|a\|\|\underline{u}\|_\infty^{\mu-1})\int_{\{u_n<0\}} |u_n(x)|\,dx \\ &\geq -\frac{1}{\overline{\theta}}(\|a\|_\infty + \|a\|\|\underline{u}\|_\infty^{\mu-1})\int_{\Omega} |u_n(x)|\,dx \\ &= -\frac{1}{\overline{\theta}}(\|a\|_\infty + \|a\|\|\underline{u}\|_\infty^{\mu-1})\|u_n\|, \end{aligned}$$

e fazendo $S_3 = \frac{1}{\overline{\theta}}(\|a\|_\infty + \|a\|_\infty\|\underline{u}\|_\infty^{\mu-1})$,

$$\frac{1}{\overline{\theta}}\int_{\{u_n<0\}} f(x,\underline{u})u_n(x)\,dx \geq -S_3\|u_n\|. \quad (2.58)$$

Se $0 \leq u_n(x) < \underline{u}(x)$, então

$$\frac{1}{\theta} \int_{\{0 \leq u_n < \underline{u}\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1} u_n(x) \geq 0, \tag{2.59}$$

e além disso, já que $a, \underline{u} \in L^{\infty}(\Omega)$, segue que

$$-\int_{\{0 \leq u_n < \underline{u}\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1} u_n(x)\, dx \geq -\int_{\{0 \leq u_n < \underline{u}\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\, dx.$$

Definindo $A_1 := \{x \in \Omega : 0 \leq u_n(x) < \underline{u}(x)\}$,

$$-\int_{\{0 \leq u_n < \underline{u}\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1} u_n(x)\, dx \geq -\|a\|_{\infty} \|\underline{u}\|_{\infty}^{\sigma} |A_1| = S_4, \tag{2.60}$$

onde $\|\underline{u}\|_{\infty}^{\sigma} = \max\{\|\underline{u}\|_{\infty}^{\alpha^- -1}, \|\underline{u}\|_{\infty}^{\alpha^+ -1}\}$.

Novamente por (f_2),

$$|f(x, \underline{u})|\, u_n(x) \leq a(x)u_n(x) + a(x)\underline{u}(x)^{r(x)-1} u_n(x)$$

$$\Rightarrow \int_{\{0 \leq u_n < \underline{u}\}} |f(x, \underline{u}) u_n(x)|\, dx \leq \int_{\{0 \leq u_n < \underline{u}\}} (a(x)|u_n(x)| + a(x)\underline{u}(x)^{r(x)-1} |u_n(x)|)\, dx,$$

e pelas mesmas ideias de (2.57) e (2.58),

$$-\int_{\{0 \leq u_n < \underline{u}\}} f(x, \underline{u}) u_n(x)\, dx \geq -S_2 \|u_n\| \tag{2.61}$$

e

$$\frac{1}{\theta} \int_{\{0 \leq u_n < \underline{u}\}} f(x, \underline{u}) u_n(x)\, dx \geq -S_3 \|u_n\|. \tag{2.62}$$

Portanto, por (2.52), (2.53), (2.54), (2.57), (2.58), (2.59), (2.60), (2.61) e (2.62),

$$\begin{aligned} S_1 + o_n(1)\|u_n\| \ &\geq \ C_2 \min\{\|u_n\|^{p^+}, \|u_n\|^{p^-}\} - \int_{\{\underline{u} \leq u_n\}} \frac{a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)} dx \\ &- \ (2S_2 + 2S_3)\|u_n\| - \int_{\{\underline{u} \leq u_n\}} F(x, u_n)\, dx - S_4 \\ &+ \ \frac{1}{\theta} \int_{\{\underline{u} \leq u_n\}} a(x)u_n(x)^{\alpha(x)} dx + \frac{1}{\theta} \int_{\{\underline{u} \leq u_n\}} f(x, u_n)\, u_n(x)\, dx, \end{aligned}$$

e escrevendo $S_5 = S_1 + S_4$ e $C_3 = 2S_2 + 2S_3$,

$$S_5 + o_n(1)\|u_n\| \geq C_2 \min\{\|u_n\|^{p^+}, \|u_n\|^{p^-}\} - \int_{\{\underline{u} \leq u_n\}} \frac{a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)} dx - C_3 \|u_n\|$$

$$+\frac{1}{\theta}\int_{\{\underline{u}\leq u_n\}} a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}dx+\frac{1}{\theta}\int_{\{\underline{u}\leq u_n\}} f(x,u_n)\,u_n(x)\,dx-\int_{\{\underline{u}\leq u_n\}} F(x,u_n)\,dx. \tag{2.63}$$

Tendo em vista a hipótese (f_3) e que $t_0>0$, defina os conjuntos

$$A_2=\{x\in\Omega:\underline{u}(x)\leq u_n(x)\ \text{ e }\ u_n(x)\geq t_0\},$$

e

$$A_3=\{x\in\Omega:\underline{u}(x)\leq u_n(x)\ \text{ e }\ u_n(x)< t_0\}.$$

Obtemos por (2.63),

$$\begin{aligned}S_5+o_n(1)\|u_n\| &\geq C_2\min\{\|u_n\|^{p^+},\|u_n\|^{p^-}\}-\int_{\{\underline{u}\leq u_n\}}\frac{a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}dx-\,C_3\,\|u_n\|\\ &+\frac{1}{\theta}\int_{\{\underline{u}\leq u_n\}} a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}dx+\frac{1}{\theta}\int_{A_2} f(x,u_n)\,u_n(x)\,dx-\int_{A_2} F(x,u_n)\,dx\\ &+\frac{1}{\theta}\int_{A_3} f(x,u_n)\,u_n(x)\,dx-\int_{A_3} F(x,u_n)\,dx.\end{aligned}$$

De (f_3), segue que $\frac{1}{\theta}\int_{A_2} f(x,u_n)\,u_n(x)\,dx-\int_{A_2} F(x,u_n)\,dx\geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned}S_5+o_n(1)\|u_n\| &\geq C_2\min\{\|u_n\|^{p^+},\|u_n\|^{p^-}\}-\int_{\{\underline{u}\leq u_n\}}\frac{a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}dx-\,C_3\,\|u_n\|\\ &+\frac{1}{\theta}\int_{\{\underline{u}\leq u_n\}} a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}dx+\frac{1}{\theta}\int_{A_3} f(x,u_n)\,u_n(x)\,dx-\int_{A_3} F(x,u_n)\,dx.\end{aligned} \tag{2.64}$$

Sendo $u_n(x)\geq\underline{u}(x)$ e $u_n(x)<t_0$, então por (f_2) segue que

$$|f(x,u_n)|u_n(x)\leq a(x)u_n(x)+a(x)u_n(x)^{r(x)}$$

$$\Rightarrow\ \int_{A_3}|f(x,u_n)|u_n(x)dx\leq\int_{A_3}(a(x)u_n(x)+a(x)u_n(x)^{r(x)})dx$$

$$\Rightarrow\ -\int_{A_3} f(x,u_n)\,u_n(x)\,dx\leq\int_{A_3} a(x)u_n(x)\,dx+\int_{A_3} a(x)u_n(x)^{r(x)}dx$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\frac{1}{\theta}\int_{A_3} f(x,u_n)\,u_n(x)\,dx &\geq -\frac{1}{\theta}\int_{A_3} a(x)u_n(x)\,dx-\frac{1}{\theta}\int_{A_3} a(x)u_n(x)^{r(x)}dx\\ &\geq -\frac{1}{\theta}\|a\|_\infty\,t_0\int_{A_3}dx-\frac{1}{\theta}\|a\|_\infty\,t_0^\sigma\int_{A_3}1\,dx\\ &= -\frac{1}{\theta}\|a\|_\infty|A_3|(t_0+t_0^\sigma),\end{aligned}$$

onde $t_0^\sigma = \max\{t_0^{r^+}, t_0^{r^-}\}$. Pondo, $S_6 = \dfrac{1}{\overline{\theta}}\|a\|_\infty |A_3|(t_0 + t_0^\sigma)$,

$$\frac{1}{\overline{\theta}} \int_{A_3} f(x, u_n)\, u_n(x)\, dx \geq -S_6. \tag{2.65}$$

Novamente por (f_2), para $t \geq 0$, e $u_n(x) \geq \underline{u}(x)$,

$$\begin{aligned}
&|f(x,t)| \leq a(x) + a(x)\, t^{r(x)-1} \\
\Rightarrow\ & \int_0^{u_n} |f(x,t)|dt \leq \int_0^{u_n} a(x)dt + \int_0^{u_n} a(x) t^{r(x)-1} dt \\
\Rightarrow\ & \left| \int_0^{u_n} f(x,t)dt \right| \leq a(x)\, u_n(x) + a(x)\, \frac{u_n(x)^{r(x)}}{r(x)} \\
\Rightarrow\ & F(x, u_n) \leq a(x)\, u_n(x) + a(x)\, \frac{u_n(x)^{r(x)}}{r(x)}.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Integrando sobre A_3, e multiplicando ambos os lados por -1,

$$\begin{aligned}
-\int_{A_3} F(x, u_n)dx &\geq -\int_{A_3} a(x)\, u_n(x)\, dx - \int_{A_3} a(x)\, \frac{u_n(x)^{r(x)}}{r(x)} dx \\
&\geq -\|a\|_\infty \int_{A_3} t_0\, dx - \frac{\|a\|_\infty}{r^-} \int_{A_3} t_0^\sigma dx \\
&= -\|a\|_\infty |A_3| \left(t + \frac{t^\sigma}{r^-} \right).
\end{aligned}$$

Escrevendo $S_7 = \|a\|_\infty |A_3| \left(t + \dfrac{t^\sigma}{r^-} \right)$, obtemos

$$-\int_{A_3} F(x, u_n)dx \geq -\, S_7. \tag{2.67}$$

Por (2.64), (2.65) e (2.67),

$$S_5 + o_n(1)\|u_n\| \geq C_2 \min\{\|u_n\|^{p^+}, \|u_n\|^{p^-}\} - \int_{\{\underline{u} \leq u_n\}} \frac{a(x) u_n(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)} dx$$

$$- C_3\, \|u_n\| + \frac{1}{\overline{\theta}} \int_{\{\underline{u} \leq u_n\}} a(x) u_n(x)^{\alpha(x)} dx - S_6 - S_7,$$

e pondo $C_1 = S_5 + S_6 + S_7$, finalmente obtemos que

$$C_1 + o_n(1)\|u_n\| \geq C_2 \min\{\|u_n\|^{p^+}, \|u_n\|^{p^-}\} - C_3\, \|u_n\|$$

$$+\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_{\{\underline{u}\leq u_n\}} a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}dx - \int_{\{\underline{u}\leq u_n\}} \frac{a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}dx. \tag{2.68}$$

Como $\overline{\theta} < \alpha^-$, segue que

$$\int_{\{\underline{u}\leq u_n\}} \left(\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}} - \frac{1}{\alpha(x)}\right) a(x)\, u_n(x)^{\alpha(x)} \geq 0,$$

e assim,

$$C_1 + o_n(1)\|u_n\| \geq C_2 \min\{\|u_n\|^{p^+}, \|u_n\|^{p^-}\} - C_3\,\|u_n\|,$$

de onde concluímos que (u_n) é limitada pelo fato de $p^- > 1$.

Para o caso $\alpha^+ < p^-$, nosso ponto de partida é a expressão (2.68). Veja que como $\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}}\int_{\{\underline{u}\leq u_n\}} a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}dx \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} C_1 + o_n(1)\|u_n\| &\geq C_2 \min\{\|u_n\|^{p^+}, \|u_n\|^{p^-}\} - C_3\,\|u_n\| - \int_{\{\underline{u}\leq u_n\}} \frac{a(x)u_n(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}dx \\ &\geq C_2 \min\{\|u_n\|^{p^+}, \|u_n\|^{p^-}\} - C_3\,\|u_n\| - \frac{\|a\|_\infty}{\alpha^-}\int_\Omega |u_n(x)|^{\alpha(x)}dx, \end{aligned}$$

e escrevendo $C_4 = \dfrac{\|a\|_\infty}{\alpha^-}$,

$$\begin{aligned} C_1 + o_n(1)\|u_n\| &\geq C_2 \min\{\|u_n\|^{p^+}, \|u_n\|^{p^-}\} - C_3\,\|u_n\| - C_4\int_\Omega |u_n(x)|^{\alpha(x)}dx \\ &\geq C_2 \min\{\|u_n\|^{p^+}, \|u_n\|^{p^-}\} - C_3\,\|u_n\| - C_4 \max\{\|u_n\|^{\alpha^-}_{\alpha(x)}, \|u_n\|^{\alpha^+}_{\alpha(x)}\}. \end{aligned}$$

Pelas imersões contínuas de Sobolev, existe uma constante $C_5 > 0$ tal que

$$-C_4 \max\{\|u_n\|^{\alpha^-}_{\alpha(x)}, \|u_n\|^{\alpha^+}_{\alpha(x)}\} \geq -C_5 \max\{\|u_n\|^{\alpha^-}, \|u_n\|^{\alpha^+}\}.$$

Portanto,

$$C_1 + o_n(1)\|u_n\| \geq C_2 \min\{\|u_n\|^{p^+}, \|u_n\|^{p^-}\} - C_3\,\|u_n\| - C_5 \max\{\|u_n\|^{\alpha^-}, \|u_n\|^{\alpha^+}\},$$

e daí,

$$C_1 + o_n(1)\|u_n\| + C_3\,\|u_n\| + C_5 \max\{\|u_n\|^{\alpha^-}, \|u_n\|^{\alpha^+}\} \geq C_2 \min\{\|u_n\|^{p^+}, \|u_n\|^{p^-}\}.$$

Já que $\alpha^+ < p^-$, obtemos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Sendo $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ um espaço de Banach reflexivo, existe uma subsequência, ainda denotada por (u_n), tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Pelas imersões contínuas de Sobolev, a menos de subsequência,

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^{\xi(x)} \ \text{ para } \ 1 < \xi^- \leq \xi^+ < (p^*)^-.$$

Além disso, se $L'(u_n) \to 0$, temos por (1.38) e (2.33) que

$$\int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle \, dx \to 0.$$

Segue que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Portanto, L satisfaz a condição $(PS)_c$. ■

Lema 2.3.5 *Suponha que $(H), (f_1) - (f_3)$ ocorrem. Então para $\|a\|_{L^\infty}$ pequeno, as afirmações abaixo ocorrem.*

i) Há constantes R e β com $R > \|\underline{u}\|$ satisfazendo

$$L(\underline{u}) < 0 < \beta \leq \inf_{u \in \partial B_R(0)} L(u).$$

ii) Existe $e \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \overline{B_{2R}(0)}$ tal que $L(e) < \beta$.

Demonstração: Começamos mostrando que $L(\underline{u}) < 0$. Veja que

$$\begin{aligned} L(\underline{u}) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla \underline{u}|^{p(x)}dx - \int_\Omega H(x,\underline{u})\,dx \\ &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla \underline{u}|^{p(x)}dx - \int_\Omega \left[\int_0^{\underline{u}} h(x,t)\,dt\right] dx \\ &< \frac{1}{p^-}\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)}dx - \int_\Omega \left[\int_0^{\underline{u}} h(x,t)\,dt\right] dx. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left[\int_0^{\underline{u}} h(x,t)\,dt\right] dx &= \int_\Omega \left[\int_0^{\underline{u}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}dt\right] dx + \int_\Omega \left[\int_0^{\underline{u}} f(x,\underline{u})dt\right] dx \\ &= \int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}\underline{u}(x)\,dx + \int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\,dx \\ &= \int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\,dx + \int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\,dx. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Por (2.69) e (2.70),

$$L(\underline{u}) < \frac{1}{p^-}\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)}dx - \int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\,dx - \int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\,dx. \tag{2.71}$$

Pela Definição 2.1.1, que trata de par de sub-supersolução,

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2}\nabla \underline{u}\nabla \varphi\,dx \leq \int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}\varphi(x)\,dx + \int_\Omega f(x,\underline{u})\varphi(x)\,dx,$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$ quase sempre em Ω.

Tomando $\varphi = \underline{u}$, temos

$$\frac{1}{p^-}\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)}\,dx \leq \frac{1}{p^-}\int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\,dx + \frac{1}{p^-}\int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\,dx, \tag{2.72}$$

e além disso,

$$3\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)}\,dx \leq 3\int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\,dx + 3\int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\,dx, \tag{2.73}$$

De (2.71) e (2.72), obtemos

$$\begin{aligned} L(\underline{u}) &< \frac{1}{p^-}\int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\,dx + \frac{1}{p^-}\int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\,dx \\ &- \int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\,dx - \int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\,dx. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Se $\int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\,dx = 0$, temos por (2.74) que $L(u) < 0$, uma vez que

$$L(\underline{u}) < \left(\frac{1}{p^-} - 1\right)\int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}dx < 0.$$

Caso $\int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\,dx > 0$, observe que

$$\left(\frac{1}{p^-} - 1\right)\int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\,dx < 0$$

e de (2.74),

$$\begin{aligned} L(\underline{u}) &< \frac{1}{p^-}\int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\,dx + \frac{1}{p^-}\int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\,dx \\ &- \int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\,dx - \int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\,dx \\ &\leq \left(\frac{1}{p^-} - 1\right)\int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\,dx + \|a\|_\infty \|\underline{u}\|_\infty^\sigma \int_\Omega \left(\frac{1}{p^-} + 1\right)dx, \end{aligned}$$

onde $\|\underline{u}\|_\infty^\sigma = \max\{\|\underline{u}\|_\infty^{\alpha^+}, \|\underline{u}\|_\infty^{\alpha^-}\}$.

Tomando $\|a\|_\infty$ suficientemente pequena, temos

$$\left(\frac{1}{p^-} - 1\right) \int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\, dx + \|a\|_\infty \|\underline{u}\|_\infty^\sigma \int_\Omega \left(\frac{1}{p^-} + 1\right) dx < 0,$$

e daí

$$L(\underline{u}) < 0.$$

Se $\displaystyle\int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\, dx < 0$, veja que por (2.71) e (2.73),

$$\begin{aligned}
L(\underline{u}) &< \frac{1}{p^-}\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)} dx - \int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\, dx - \int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\, dx \\
&< 3\int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\, dx + 3\int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\, dx - \int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\, dx \\
&- \int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\, dx \\
&\leq 2\int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\, dx + 4\|a\|_\infty \|\underline{u}\|_\infty^\sigma \int_\Omega 1\, dx \\
&= 2\int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}(x)\, dx + 4\|a\|_\infty \|\underline{u}\|_\infty^\sigma |\Omega|.
\end{aligned}$$

Tomando $\|a\|_\infty$ suficientemente pequena, obtemos que

$$2\int_\Omega f(x,\underline{u})\underline{u}\, dx + 4\|a\|_\infty \|\underline{u}\|_\infty^\sigma |\Omega| < 0,$$

e consequentemente $L(\underline{u}) < 0$.

Agora, seja $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $\|u\| \geq 1$. Observe que

$$\begin{aligned}
L(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)} - \int_\Omega H(x,u)\, dx \\
&\geq \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^-} - \int_\Omega \left[\int_0^u h(x,t)\, dt\right] dx \\
= \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^-} &- \int_{\{u<0\}} \left[\int_0^u \left(a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1} + f(x,\underline{u})\right) dt\right] dx \\
&- \int_{\{0\leq u<\underline{u}\}} \left[\int_0^u \left(a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1} + f(x,\underline{u})\right) dt\right] dx \\
&- \int_{\{\underline{u}<u\}} \left[\int_0^u \left(a(x)t^{\alpha(x)-1} + f(x,t)\right)\, dt\right] dx,
\end{aligned}$$

de onde se tem

$$L(u) \geq \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^-} - \int_{\{u<0\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}u(x)dx - \int_{\{u<0\}} f(x,\underline{u})u(x)\,dx$$

$$- \int_{\{0\leq u<\underline{u}\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}u(x)dx - \int_{\{0\leq u<\underline{u}\}} f(x,\underline{u})u(x)\,dx$$

$$- \int_{\{\underline{u}\leq u\}} a(x)\frac{u(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}dx - \int_{\{\underline{u}\leq u\}} F(x,u)\,dx. \tag{2.75}$$

Note que

$$\begin{aligned} - \int_{\{u<0\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}u(x)dx &\geq -\|a\|_\infty\|\underline{u}\|_\infty^{\sigma-1}\int_{\{u<0\}}|u(x)|\,dx \\ &\geq -\|a\|_\infty\|\underline{u}\|_\infty^{\sigma-1}\int_\Omega |u(x)|\,dx, \end{aligned}$$

onde $\|\underline{u}\|_\infty^{\sigma-1} = \max\{\|\underline{u}\|_\infty^{\alpha^+-1}, \|\underline{u}\|_\infty^{\alpha^--1}.\}$ Pondo $S_1 = \|a\|_\infty\|\underline{u}\|_\infty^{\sigma-1}$,

$$- \int_{\{u<0\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}u(x)dx \geq -\,S_1\|u\|. \tag{2.76}$$

Analogamente,

$$- \int_{\{0\leq u<\underline{u}\}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}u(x)dx \geq -\,S_1\|u\|. \tag{2.77}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} - \int_{\{\underline{u}\leq u\}} a(x)\frac{u(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}dx &\geq -\frac{\|a\|_\infty}{\alpha^-}\int_{\{\underline{u}\leq u\}}|u(x)|^{\alpha(x)}dx \\ &\geq -\frac{\|a\|_\infty}{\alpha^-}\int_\Omega |u(x)|^{\alpha(x)}dx \\ &\geq -\frac{\|a\|_\infty}{\alpha^-}\|u\|_{\alpha(x)}^{\alpha^+}. \end{aligned}$$

Pelas imersões contínuas de Sobolev, existe uma constante $S_2 > 0$ tal que

$$-\frac{\|a\|_\infty}{\alpha^-}\|u\|_{\alpha(x)}^{\alpha^+} \geq -S_2\|a\|_\infty\|u\|^{\alpha^+}.$$

Logo,

$$- \int_{\{\underline{u}\leq u\}} a(x)\frac{u(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}dx \geq -S_2\|a\|_\infty\|u\|^{\alpha^+}. \tag{2.78}$$

Pelas desigualdades (2.57) e (2.61), presentes na demonstração do lema anterior, temos que existe uma constante $S_3 > 0$ tal que

$$-\int_{\{u<0\}} f(x,\underline{u})u(x)\,dx \geq -S_3\|u\| \tag{2.79}$$

e

$$-\int_{\{0\leq u<\underline{u}\}} f(x,\underline{u})u(x)\,dx \geq -S_3\|u\|. \tag{2.80}$$

Pela expressão (2.66),

$$F(x,u) \leq a(x)\,u(x) + a(x)\,\frac{u(x)^{r(x)}}{r(x)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ -\int_{\{\underline{u}\leq u\}} F(x,u)\,dx \ &\geq\ -\int_{\{\underline{u}\leq u\}} a(x)\,u(x)dx - \int_{\{\underline{u}\leq u\}} a(x)\,\frac{u(x)^{r(x)}}{r(x)}dx\\
&\geq\ -\|a\|_\infty \int_{\{\underline{u}\leq u\}} |u(x)|dx - \frac{\|a\|_\infty}{r^-}\int_{\{\underline{u}\leq u\}} |u(x)|^{r(x)}dx\\
&\geq\ -\|a\|_\infty \int_{\Omega} |u(x)|dx - \frac{\|a\|_\infty}{r^-}\int_{\Omega} |u(x)|^{r(x)}dx\\
&\geq\ -\|a\|_\infty\|u\| - \frac{\|a\|_\infty}{r^-}\|u\|^{r^+},
\end{aligned}$$

e pondo $S_4 = \dfrac{1}{r^-}$,

$$-\int_{\{\underline{u}\leq u\}} F(x,u)\,dx \geq -\|a\|_\infty\|u\| - S_4\|a\|_\infty\|u\|^{r^+}. \tag{2.81}$$

Por (2.75)-(2.81),

$$L(u) \geq \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^-} - (2S_1 + 2S_3)\|u\| - S_2\|a\|_\infty\|u\|^{\alpha^+} - \|a\|_\infty\|u\| - S_4\|a\|_\infty\|u\|^{r^+},$$

e escrevendo $K_1 = \dfrac{1}{p^+}$, $K_2 = 2S_1 + 2S_3 + \|a\|_\infty$ e $K_3 = 2\max\{S_2, S_4\}$,

$$L(u) \geq K_1\|u\|^{p^-} - K_2\|u\| - K_3\|a\|_\infty(\|u\|^{\alpha^+} + \|u\|^{r^+}). \tag{2.82}$$

Agora, considere uma constante $\beta > 0$ e fixe $R > \|\underline{u}\|_\infty$ suficientemente grande de tal maneira que

$$K_1R^{p^-} - K_2R \geq 2\beta. \tag{2.83}$$

Note que isso é possível pelo fato de $p^- > 1$.

Adote $\|a\|_\infty$ suficientemente pequena de modo que

$$K_3\|a\|_\infty\left(R^{\alpha^+} + R^{r^+}\right) \le \beta. \tag{2.84}$$

De (2.82)-(2.84), obtemos que $L(u) \ge \beta$ para todo $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\|u\| = R$. Logo,

$$L(\underline{u}) < 0 < \beta \le \inf_{u\in\partial B_R(0)} L(u),$$

o que encerra a demonstração de i).

Para mostrar ii), veja que, sendo $t \ge 1$,

$$\begin{aligned} L(t\underline{u}) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\underline{u}|^{p(x)}dx - \int_\Omega \left[\int_0^{t\underline{u}} h(x,s)ds\right]dx \\ &\le \frac{t^{p^+}}{p^-}\int_\Omega |\nabla\underline{u}|^{p(x)}dx - \int_\Omega\left[\int_0^{t\underline{u}} h(x,s)ds\right]dx, \end{aligned}$$

e como

$$\int_\Omega\left[\int_0^{t\underline{u}} h(x,s)ds\right]dx = \int_\Omega\left[\int_0^{\underline{u}} h(x,s)ds\right]dx + \int_\Omega\left[\int_{\underline{u}}^{t\underline{u}} h(x,s)ds\right]dx,$$

segue que

$$L(t\underline{u}) \le \frac{t^{p^+}}{p^-}\int_\Omega|\nabla\underline{u}|^{p(x)}dx - \int_\Omega\left[\int_0^{\underline{u}} h(x,s)ds\right]dx - \int_\Omega\left[\int_{\underline{u}}^{t\underline{u}} h(x,s)ds\right]dx. \tag{2.85}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} -\int_\Omega\left[\int_0^{\underline{u}} h(x,s)ds\right]dx &= -\int_\Omega\left[\int_0^{\underline{u}} a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1}ds\right]dx - \int_\Omega\left[\int_0^{\underline{u}} f(x,\underline{u})ds\right]dx \\ &= -\int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}dx - \int_\Omega f(x,\underline{u})\,\underline{u}(x)\,dx \end{aligned} \tag{2.86}$$

e

$$-\int_\Omega\left[\int_{\underline{u}}^{t\underline{u}} h(x,s)ds\right]dx = -\int_\Omega\left[\int_{\underline{u}}^{t\underline{u}} a(x)s^{\alpha(x)-1}ds\right]dx - \int_\Omega\left[\int_{\underline{u}}^{t\underline{u}} f(x,s)ds\right]dx$$

$$= -\int_\Omega \frac{a(x)t^{\alpha(x)}\underline{u}(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}dx + \int_\Omega\frac{a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)} - \int_\Omega\left[\int_{\underline{u}}^{t\underline{u}} f(x,s)\,ds\right]dx. \tag{2.87}$$

Por (2.85)-(2.87),

$$\begin{aligned} L(t\underline{u}) &\leq \frac{t^{p^+}}{p^-}\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)}dx - \int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}dx - \int_\Omega f(x,\underline{u})\,\underline{u}(x)\,dx \\ &- \int_\Omega \frac{a(x)t^{\alpha(x)}\underline{u}(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}dx - \int_\Omega \left[\int_{\underline{u}}^{t\underline{u}} f(x,s)\,ds\right]dx. \end{aligned}$$

Sendo

$$-\int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}dx + \int_\Omega \frac{a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}dx \leq 0$$

e

$$-\int_\Omega \frac{a(x)t^{\alpha(x)}\underline{u}(x)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}\,dx \leq -\frac{t^{\alpha^-}}{\alpha^+}\int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\,dx,$$

temos

$$\begin{aligned} L(t\underline{u}) &\leq \frac{t^{p^+}}{p^-}\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)}dx - \frac{t^{\alpha^-}}{\alpha^+}\int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\,dx \\ &- \int_\Omega f(x,\underline{u})\,\underline{u}(x)\,dx - \int_\Omega \left[\int_{\underline{u}}^{t\underline{u}} f(x,s)\,ds\right]dx. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left[\int_{\underline{u}}^{t\underline{u}} f(x,s)ds\right]dx &= \int_\Omega \left[\int_0^{t\underline{u}} f(x,s)ds\right]dx - \int_\Omega \left[\int_0^{\underline{u}} f(x,s)ds\right]dx \\ &= \int_\Omega F(x,t\underline{u})\,dx - \int_\Omega F(x,\underline{u})\,dx. \end{aligned}$$

Voltando a (2.88), segue que

$$\begin{aligned} L(t\underline{u}) \leq \frac{t^{p^+}}{p^-}\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)}dx - \frac{t^{\alpha^-}}{\alpha^+}\int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\,dx - \int_\Omega f(x,\underline{u})\,\underline{u}(x)\,dx \\ -\int_\Omega F(x,t\underline{u})\,dx + \int_\Omega F(x,\underline{u})\,dx. \end{aligned} \tag{2.89}$$

Pela hipótese (f_3), existem $\theta > p^+$ e $t_0 > 0$ de modo que, para $s \geq t_0$

$$0 < \theta F(x,s) \leq f(x,s)\,s \quad \text{quase sempre em } \Omega.$$

Note que as desigualdades anteriores implicam que $\dfrac{\theta}{s} \leq \dfrac{f(x,s)}{F(x,s)}$, e tomando t suficientemente grande de modo que $t\underline{u}(x) \geq t_0$ quase sempre em Ω, obtemos

$$0 < \int_{t_0}^{t\underline{u}} \frac{\theta}{s}ds \leq \int_{t_0}^{t\underline{u}} \frac{f(x,s)}{F(x,s)}ds$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 0 < \theta\,[ln\ s]_{t_0}^{t\underline{u}} &\leq \int_{t_0}^{t\underline{u}} \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds \\
\Rightarrow \quad 0 < \theta\, ln\, t\underline{u}(x) - \theta\, ln\, t_0 &\leq \int_{t_0}^{t\underline{u}} \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds \\
\Rightarrow \quad 0 < ln\, \frac{t^\theta \underline{u}(x)^\theta}{{t_0}^\theta} &\leq \int_{t_0}^{t\underline{u}} \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds.
\end{aligned}
\tag{2.90}
$$

Para calcular $\int_{t_0}^{t\underline{u}} \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds$, vamos utilizar uma substituição de variável. Escreva $v = F(x,s)$. Então

$$
\frac{dv}{ds} = f(x,s),
$$

e daí

$$
dv = f(x,s)ds.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t\underline{u}} \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds = \int_{t_0}^{t\underline{u}} \frac{dv}{v} = [ln\, F(x,s)]_{t_0}^{t\underline{u}} &= ln\, F(x,t\underline{u}) - ln\, F(x,t_0) \\
&= ln\, \frac{F(x,t\underline{u})}{F(x,t_0)}.
\end{aligned}
\tag{2.91}
$$

Por (2.90) e (2.91),

$$
0 < ln\, \frac{t^\theta \underline{u}(x)^\theta}{{t_0}^\theta} \leq ln\, \frac{F(x,t\underline{u})}{F(x,t_0)},
$$

e assim

$$
0 < \frac{t^\theta \underline{u}(x)^\theta F(x,t_0)}{{t_0}^\theta} \leq F(x,t\underline{u}).
$$

Portanto,

$$
0 < \frac{t^\theta}{{t_0}^\theta} \int_\Omega \underline{u}(x)^\theta F(x,t_0)\, dx \leq \int_\Omega F(x,t\underline{u})\, dx \tag{2.92}
$$

De (2.89) e (2.92),

$$
\begin{aligned}
L(t\underline{u}) \leq \frac{t^{p^+}}{p^-} \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)} dx - \frac{t^{\alpha^-}}{\alpha^+} \int_\Omega a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)}\, dx - \int_\Omega f(x,\underline{u})\, \underline{u}(x)\, dx \\
- \frac{t^\theta}{{t_0}^\theta} \int_\Omega \underline{u}(x)^\theta F(x,t_0)\, dx + \int_\Omega F(x,\underline{u})\, dx.
\end{aligned}
$$

Por fim, observe que sendo $\theta > p^+$, segue que $L(t\underline{u}) < 0$ quando $t \to +\infty$, e consequentemente obtemos $ii)$. ■

Concluindo a demonstração do Teorema 2.2.2: Considere as funções $\underline{u}, \overline{u} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ dadas pelo Lema 2.3.3. Seja $u_1 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ a solução de (2.1) obtida no Teorema 2.2.1 que atinge o mínimo de $J_{|K}$ com

$$K = \{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) : \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

Pelos Lemas 2.3.4 e 2.3.5, as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha são satisfeitas pelo funcional L, e daí

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} L(\gamma(t)), \text{ onde } \Gamma := \{\gamma \in C([0,1], W_0^{1,p(x)}(\Omega)) : \gamma(0) = \underline{u}, \gamma(1) = e\},$$

é um valor crítico de L, isto é, $L'(u_2) = 0$ e $L(u_2) = c$, para algum $u_2 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Pela definição de g no desenvolvimento do Teorema 2.2.1 temos que $J(u) = L(u)$ para cada $u \in W_0^{1,p(x)}$ tal que $0 \leq u(x) \leq \overline{u}(x)$ quase sempre em Ω, e assim $J(\underline{u}) = L(\underline{u})$. Desta forma, segue que $L(u_1) = J(u_1) = \inf_{u \in K} J(u)$.

Pelo Lema 2.3.5, temos $L(\underline{u}) < 0$. Logo, caso $u_2(x) \geq \underline{u}(x)$ quase sempre em Ω, resulta que o problema (2.1) possui duas soluções fracas, $u_1, u_2 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, de modo que $L(u_1) \leq L(\underline{u}) < 0 < \beta \leq c = L(u_2)$, onde β é uma constante dada pelo Lema 2.3.5.

De fato, $u_2(x) \geq \underline{u}(x)$ quase sempre em Ω. Para demonstrar tal afirmação, considere a função teste $(\underline{u} - u_2)^+ \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e o problema auxiliar no Teorema 2.2.2 dado por

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = h(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_2|^{p(x)-2} \nabla u_2 \nabla(\underline{u} - u_2)^+ dx &= \int_{\{u_2 < \underline{u}\}} h(x, u_2)(\underline{u} - u_2)^+ dx \\
&= \int_{\{u_2 < \underline{u}\}} (a(x)\underline{u}(x)^{\alpha(x)-1} + f(x, \underline{u}))(\underline{u} - u_2)^+ dx \\
&\geq \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2} \nabla \underline{u} \nabla(\underline{u} - u_2)^+,
\end{aligned}$$

onde a desigualdade resulta da Definição 2.1.1. Prosseguindo, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2} \nabla \underline{u} \nabla(\underline{u} - u_2)^+ - \int_\Omega |\nabla u_2|^{p(x)-2} \nabla u_2 \nabla(\underline{u} - u_2)^+ dx \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \langle |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2}\nabla \underline{u} - |\nabla u_2|^{p(x)-2}\nabla u_2, \nabla(\underline{u}-u_2)^+\rangle\, dx \le 0$$

$$\Rightarrow \int_{\{\underline{u}>u_2\}} \langle |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2}\nabla \underline{u} - |\nabla u_2|^{p(x)-2}\nabla u_2, \nabla \underline{u} - \nabla u_2\rangle\, dx \le 0. \tag{2.93}$$

Dados dois vetores $a, b \in \mathbb{R}^N$, considere a seguinte desigualdade (ver [25], pág. 97-100):

$$\langle |a|^{s-2}a - |b|^{s-2}b, a-b\rangle \ge \begin{cases} (s-1)\dfrac{|a-b|^2}{(1+|a|^2+|b|^2)^{\frac{2-s}{2}}}, & \text{se } 1 \le s \le 2, \\ \dfrac{1}{2^{s-2}}|a-b|^s, & \text{se } s \ge 2. \end{cases}$$

Pondo $a = \nabla \underline{u}, b = \nabla u_2$ e $s = p(x)$, temos pela desigualdade anterior que

$$\langle |\nabla \underline{u}|^{p(x)-2}\nabla \underline{u} - |\nabla u_2|^{p(x)-2}\nabla u_2, \nabla \underline{u} - \nabla u_2\rangle \ge 0. \tag{2.94}$$

Por (2.93) e (2.94), obtemos que

$$\int_{\{p\ge 2\}} |\nabla(\underline{u}-u_2)^+|^{p(x)} = \int_{\{1<p<2\}} \frac{|\nabla(\underline{u}-u_2)^+|^2}{(1+|\nabla \underline{u}|^2+|\nabla u_2|^2)^{\frac{2-p(x)}{2}}} = 0.$$

Portanto, $\nabla(\underline{u}-u_2)^+(x) = 0$ quase sempre em Ω. Pela desigualdade de Poincaré, concluímos que $(\underline{u}-u_2)^+(x) = 0$ quase sempre em Ω, o que prova a afirmação e encerra a demonstração. ■

Apêndice A

Definições e resultados auxiliares

Definição 1 (Sequência Palais-Smale e condição Palais-Smale) *Sejam E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Se existirem $c \in \mathbb{R}$ e uma sequência $(u_n) \subset E$ tais que*

$$I(u_n) \to c$$

e

$$I'(u_n) \to 0,$$

então afirmamos que (u_n) é uma sequência Palais-Smale no nível c para I ou, simplesmente, (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I. Além disso, se tal sequência possui uma subsequência convergente, então podemos dizer que I satisfaz a condição Palais-Smale no nível c ou que I satisfaz a condição $(PS)_c$.

Definição 2 (Função Carathéodory) *Uma função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma Função Carathéodory se a função $f_s : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, definida por $f_s(x) = f(x, s)$ para cada $s \in \mathbb{R}$, é mensurável e, além disso, a função $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f_x(s) = f(x, s)$ para cada $x \in \overline{\Omega}$, é contínua.*

Teorema 1 (Princípio Variacional de Ekeland) *Sejam X um espaço métrico completo e $\Phi : X \to (-\infty, +\infty]$ um funcional semicontínuo inferiormente. Suponha que Φ seja limitado inferiormente e sejam $\epsilon > 0$, $\lambda > 0$ e $u \in X$ dados tais que*

$$\Phi(u) \leq \inf_X \Phi + \frac{\epsilon}{2}.$$

Então existe $v_\epsilon \in X$ tal que

- $\Phi(v_\epsilon) \leq \Phi(u)$;
- $d(u, v_\epsilon) \leq \dfrac{1}{\lambda}$;
- *Para cada* $w \neq v_\epsilon \in X, \Phi(v_\epsilon) < \Phi(w) + \epsilon\lambda d(v_\epsilon, w)$.

Demonstração: Veja [10].

Corolário 1 *Sejam E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 que é limitado inferiormente. Se I satisfaz a condição $(PS)_c$ com $c = \inf_{u\in E} I(u)$, então c é atingido em um ponto $u_0 \in E$ e u_0 é ponto crítico de I.*

Demonstração: Veja [16].

Teorema 2 (Teorema do Passo da Montanha) *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que existem $\alpha, \rho > 0$ tais que*

$$I(u) \geq \alpha > 0 \text{ para todo } u \in X : \|u\| = \rho$$

e existe $e \in X$ tal que $\|e\| > \rho$ e

$$I(e) < 0.$$

Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $u_\epsilon \in X$ tal que

- $c - 2\epsilon \leq I(u_\epsilon) \leq c + 2\epsilon$;
- $\|I'(u_\epsilon)\| < 4\epsilon$,

onde

$$0 < c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{[0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração: Veja [7].

Teorema 3 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge quase sempre para uma função real mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração: Veja [3].

Teorema 4 (Teorema de Vainberg) *Sejam (f_n) uma sequência de funções em $L^q(\Omega)$ e $f \in L^q(\Omega)$ tais que $f_n \to f$ em $L^q(\Omega)$. Então existem $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ e uma função $g \in L^q(\Omega)$ tais que*

$$|f_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad \textit{quase toda parte em} \ \ \Omega$$

e

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \quad \textit{quase toda parte em} \ \ \Omega.$$

Demonstração: Veja [10].

Teorema 5 (Desigualdade de Hölder em L^p) *Sejam $r \in (0, \infty]$ e $p_1, \ldots, p_N \in (0, \infty]$ números reais tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_N}$. Se $f_k \in L^{p_k}$ com $k = 1, \ldots, N$, então $f_1, \ldots, f_N \in L^r$ e, além disso,*

$$\|f_1 \ldots f_N\|_{L^r} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

Demonstração: Veja [2].

Teorema 6 (Desigualdade de Poincaré) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, conexo e limitado. Então, para todo $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, existe uma constante positiva C a qual não depende de u tal que*

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}.$$

Demonstração: Veja [19].

Teorema 7 (Teorema de Minty-Browder) *Sejam E um espaço de Banach, separável e reflexivo e $A : E \to E^*$ um operador fortemente monótono, coercivo e semicontínuo. Então existe o operador A^{-1} e ele é lipschitziano.*

Demonstração: Veja [20].

Bibliografia

[1] Alves, C. O., Corrêa, F. J. S. A. e Ma, T. F., *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl. 49, 2005, 85-93.

[2] Araújo, D. T., *Desigualdade de Hölder generalizada com normas mistas e aplicações*. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.

[3] Bartle, R. G., *The Elements of Integration*. John Wiley & Sons., Inc., 1966.

[4] Bebernes, J. W. e Lacey, A., *Global existence and finite-time blow-up for a class of nonlocal parabolic problems*, Adv. Differ. Equ. 2 (6), 1997, 927-953.

[5] Bebernes, J. W. e Talaga, P., *Nonlocal problems modelling shear banding*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 3 (2), 1996, 79-103.

[6] Carrillo, J. A., *On a nonlocal elliptic equation with decreasing nonlinearity arising in plasma physics and heat conduction*, Nonlinear Anal. 32 (1), 1998, 97-115.

[7] Chabrowski, J., *Variational methods for potential operator equations with applications to non-linear elliptic equations*, Volume 24 of de Gruyter studies in mathematics. Berlin: Walter de Gruyter, 1997.

[8] Corrêa, F. J. S. A. e Costa, A. C. R., *A variational approach for a bi-non-local elliptic problem involving the $p(x)$-Laplacian and non-linearity with non-standard growth*, Glasgow Math. J. 56 (2014), 317-333.

[9] Corrêa, F. J. S. A. e Figueiredo, G. M., *On an elliptic equation of p-Kirchhof type via variational methods*, Bull. Aust. Math. Soc. 74, 2006, 263-277.

[10] De Figueiredo, D. G., *The Ekeland variational Principle with applications and detours*. Springler - Tata Institute of Fundamental Research Bombay, 1989.

[11] Dolbeault, J., *Stationary states in plasma physics: Maxwellian solutions of the Vlasov-Poisson system*, Math. Models. Meth. Appl. Sci. 1, 1991, 183-148.

[12] Fan, X. L., Shen, J. S. e Zhao, D., *Sobolev embedding theorems for spaces* $W^{k,p(x)}(\Omega)$, J. Math Anal. Appl. 262, 2001, 749-760.

[13] Fan, X. L., Zhang, Q. H., *Existence of solutions for p(x)-Laplacian Dirichlet problems*, Nonlinear Anal. 52, 2003, 1843-1852.

[14] Fan, X. L. e Zhao, D., *On the spaces* $L^{p(x)}$ *e* $W^{m,p(x)}$, J. Math. Anal. Appl. 263, 2001, 424-446.

[15] Fan, X., Zhao, Y. e Zhang, Q., *A strong maximum principle for p(x)-Laplace equations*, Chin. J. Contemp. Math. 21 (1), 2000, 1-7.

[16] Figueiredo, G. J. M., *Um introdução à teoria dos pontos críticos*, Universidade de Brasília, Departamento de Matemática, 2016.

[17] Gogny, D. e Lions, P. L., *Sur les états dequlibre pour las densités életroniques das les plasmas*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 23, 1998, 137-153.

[18] Gomes, J. M. e Sanchez, L., *On a variational approach to some non-local boundary value problems*, Appl. Anal., 84 (9), Setembro 2005, 909-925.

[19] Gonzales, M. S. T., *Soluções positivas para uma classe de equações elípticas do tipo Kirchhoff via métodos variacionais.* Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2020.

[20] Guo, D. e Lakshmikantham, V., *Nonlinear problems in abstract cones*, Academic Press, Nova Iorque-Londres, 1988.

[21] Kirchhoff, G., *Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1883.

[22] Lima, A. A., *O Método de Sub e Supersolução e Aplicações a Problemas Elípticos*. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2011.

[23] Lions, J. L., *On some questions in boundary value problems of mathematical physics*, International Symposium on Continuum, Mechanics and Partial Diferential Equations, Rio de Janeiro (1977) (1978), 284-346.

[24] Lions, P. L., *On the Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations*, SIAM Rev. 24 (1982), 441-467.

[25] Lindqvist, P., *Notes on the stationary p-Laplace equation*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, Cham, 2019.

[26] Mihailescu, M. e Radulescu, V., *A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids*, Proc. R. Soc. A, 462, 2006, 2625-2641.

[27] Mihailescu, M. e Radulescu, V., *On a non-homogeneous quasilinear eigenvalue problem in Sobolev spaces with variable exponent*, Proc. Amer. Math. Soc., 135 (9), Setembro 2007, 2929-2937.

[28] Nakano, H., *Modulared Semi-ordered Linear Spaces*, Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1950.

[29] Orlicz, W., *Über konjugierte Exponentenfolgen*, Studia Math. 3 (1931), 200-212.

[30] Perera, K. e Zhang, Z., *Nontrivial solutions of Kirchhoff-type via Yang index*, J. Diff. Equ. 221 2006, 246-255.

[31] Perera, K. e Zhang, Z., *Sign changing solutions of Kirchhoff type problems via invariant sets of descent flows*, J. Math. Anal. Appl. 317, 2006, 456-463.

[32] Růžička, M., *Electrorheological fluids: modelling and mathematical theory*, Springer-Verlag, Berlin, Alemanha, 2000.

[33] Sousa, K. C. V. e Tavares, L. S., *Multiple solutions for a class of problems involving the $p(x)$-Laplacian operator*, Applicable Analysis, v. 100, p. 1-9, 2021.

[34] Zhang, Q., *A strong maximum principle for differential equations with non-standard p(x)-growth conditions*, J. Math. Anal. Appl. 312, 2005, 24-32.