UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Existência de soluções para uma equação de Choquard não-linear com potencial anulando no infinito

Izaque Pantoja Portugal

BELÉM-PA
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Izaque Pantoja Portugal

Existência de soluções para uma equação de Choquard não-linear com potencial anulando no infinito

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística-PPGME da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos

BELÉM-PA
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P839e Portugal, Izaque Pantoja.
Existência de soluções para uma equação de Choquard não-linear com potencial anulando no infinito / Izaque Pantoja Portugal. — 2021.
x, 80 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Equação de Choquard Não-linear. 2. Não linearidade Não local. 3. Método Variacional. 4. Solução Positiva. 5. Método de Penalização. I. Título.

CDD 515.353

Izaque Pantoja Portugal

Existência de soluções para uma equação de Choquard não-linear com potencial anulando no infinito

Dissertação apresentada ao curso de mestrado em Matemática e Estatística UFPA, como pré-requisito para a obtenção do Titulo de Mestre em Matemática

Belém, 13 de Dezembro de 2021.

Resultado: APROVADO

Banca Examinadora

Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos -Orientador
PPGME/PDM/UFPA

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa -Membro Titular Interno
PPGME/PDM/UFPA

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares -Membro Titular Externo
UFCA

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, que me deu esperança, fé e amor para continuar mesmo às circunstancias não sendo favoráveis, ao meu Pai Manoel Gonçalves Portugal e a minha Mãe Raimunda Duarte Portugal.

AGRADECIMENTOS

Ao Pai ao Filho e a o Espirito Santo, que sempre se fizeram presentes em minha vida e nunca me deixaram sozinho, mesmo diante das dificuldades e obstaculos da vida, Deus sou grato a ti por isso.

Ao meu amado pai, Manoel Gonçalves Portugal, pelos conselhos nos momentos difíceis, por sempre acreditar em mim e me instruir no caminho em que se deve andar, sempre serei grato por isso.

A minha amada Mãe, Raimunda Duarte Portugal por ser essa mãe dedicada que sempre me incentivou a continuar estudando e por ser minha amiga, e protetora que Deus lhe abençoe.

Aos meus irmãos, João Batista, Débora, Edson, Ednalva, Elias, Eliana, Eunice, Enoque e Eliseu pelo apoio de vocês, e que Deus abençoe a todos .

Ao orientador desta Dissertação, Professor Dr. Gelson Conceição Gonçalves do Santos pelo apoio, paciência e condução desse meu trabalho, que Deus lhe abençoe e guie todos os seus passos.

Aos professores deste Programa, que contribuíram e me ajudaram para que eu chegasse até aqui, que Deus abençoe a todos vocês.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES)-Código de Financiamento 001".

Aos meus amigos e colegas de Curso, Jorge Felipe, Lucian, Nilcilene, e amigos que conheci de outras turmas: André, Clayton, Enielson, Igor, Jefferson, Júlio, Marcos, Mario, Maridilce, Mayara, Pastana, Rosenildo, Stefania, Wilson, com quem sempre pude aprender duarante o curso, que Deus os Abençoe.

Enfim, de maneira geral, a minha família, amigos, professores e a todas as pessoas que me ajudaram direta e indiretamente para que eu chegasse até aqui.

Notações e Terminologia

- $\mathbb{R}^N$ denota o espaço euclidiano N-dimensional.
- C, C_i denotam constantes positivas.
- $\nabla u(x) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x), ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_N}(x)\right)$ denota o gradiente de u em x.
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o Laplaciano de u.
- $o_n(1)$ representa qualquer quantidade que tende a 0 quando n tende ao infinito;
- $B_R(x_0)$ denota a bola aberta centrada no ponto x_0 com raio $R > 0$.
- B_R denota a bola aberta centrada na origem com raio $R > 0$.
- $L^s(\mathbb{R}^N)$, para $1 \leq s < \infty$ denota o espaço de Lebesgue com as normas

$$|u|_s := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

- Se u é uma função mensurável, denotamos por u_+, u_- sua parte positiva e parte negativa respectivamente ou seja,

$$u_+(x) = \max\{u(x), 0\} \text{ e } u_-(x) = \max\{-u(x), 0\}.$$

- ω_n denota o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$.
- O simbolo $\to$ denota a convergência em norma(forte).
- O simbolo $\rightharpoonup$ denota a convergência fraca.
- Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável à Lebesgue então $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de Ω.
- Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$, o espaço

$$L^\infty = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } \exists C > 0 \text{ tal que } |u(x)| \leq C \; q.t.p. \text{ sobre } \Omega\},$$

munido da norma

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{C;\ |u| \leq C \; q.t.p. \text{ em } \Omega\}.$$

- $L^s_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável $|u|^s$ é integrável segundo Lebesgue sobre cada compacto $K \subset \Omega\}$.

- $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço das funções infinitamente diferênciáveis com suporte compacto em $\mathbb{R}^N$.

- Denotamos por $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ o espaço de Hilbert

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) | |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\},$$

  e a norma

$$||u||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- S é a melhor constante que verifica

$$|u|_{2^*}^2 \leq S \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \; \forall \, u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

- Sejam Ω um dominío do $\mathbb{R}^N$ denotamos por:

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega); \; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \; i = 1, ..., N \right\},$$

  munido da norma

$$||u||_{H^1(\Omega)} := \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Sejam Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$, $H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ com relação a norma $||.||_{H^1(\Omega)}$.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência de solução da seguinte equação de Choquard não-linear:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \left(\dfrac{1}{|x|^{\mu}} * F(u)\right) f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ u(x) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{SNE}$$

onde $0 < \mu < N$, $N \geq 3$, Δ é o operador Laplaciano, V é uma função real contínua não-negativa e F é a função primitiva de f. A técnica utilizada para obtermos existência de solução para (SNE) foi o Método variacional com argumento de truncamento e estimativas L^{∞}. Mais precisamente, combinado com o Método de Penalização de Del Pino e Felmer com uma aplicação do Teorema do Passo da Montanha [21] e estimativas L^{∞} via Teoria de Moser [23].

Palavras-chave: Equação de Choquard Não-linear; Não linearidade Não local; Método Variacional; Solução Positiva; Método de Penalização.

Abstract

In this work, we study the existence of a solution of the following nonlinear Choquard equation:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \left(\dfrac{1}{|x|^{\mu}} * F(u)\right) f(u) \text{ in } \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ u(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{SNE}$$

where $0 < \mu < N$, $N \geq 3$, Δ is the Laplacian operator, V is a continuous non-negative real function, and F is the primitive function of f. The technique used to obtain the existence of a solution for (SNE) was the variational method with truncation argument and estimates L^{∞}. More precisely, combined with Del Pino and Felmer's Penalty Method with an application of the Mountain Pass Theorem [21] and estimates L^{∞} via Moser's Theory [23].

Keywords: Nonlinear Choquard Equation; Non-linearity Non-local; Variational Method; Positive Solution; Penalty Method.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudamos a existência de solucões não-triviais para a seguinte equação de Choquard não-linear,

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \left(\dfrac{1}{|x|^{\mu}} * F(u)\right) f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ u(x) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{SNE}$$

onde $0 < \mu < N$, $N \geq 3$, Δ é o operador Laplaciano, V é uma função real contínua não-negativa e F é a função primitiva de f.

Os resultados que apresentaremos nessa dissertação são devidos a Alves, Figueiredo e Yang, foram obtidos do artigo [4] publicado no ano de 2016 na revista Advances in Nonlinear Analysis, onde foi mostrado a existência de soluções positivas para o problema (SNE) em que f é não linear e V é um potencial não negativo e pode anula-se no infinito, isto é,

$$V(x) \geq 0 \text{ e } V(x) \longrightarrow 0 \text{ quando } |x| \longrightarrow \infty.$$

De modo preciso, assumiremos que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes condições:

(f_1) $\displaystyle\lim_{s \to 0^+} \frac{sf(s)}{s^q} < \infty; q \geq 2^*$ onde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$.

(f_2) Existe $0 < \mu < \frac{N+2}{2}$ tal que

$$\lim_{s \to \infty} \frac{sf(s)}{s^p} = 0,$$

para algum $p \in \left(1, \frac{2(N-\mu)}{N-2}\right)$.

(f_3) (Condição de Ambrosetti-Rabinowitz) Existe $\theta > 2$, tal que

$$0 < \theta F(s) \leq 2f(s)s, \; \forall \, s > 0,$$

onde $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$.

Para enunciar o primeiro resultado precisamos de duas definições:

$$m := \max_{|x|\leq 1} V(x). \tag{1}$$

Definimos a função $\nu : (1, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ por

$$\nu(R) = \frac{1}{R^{(q-2)(N-2)}} \inf_{|x|\geq R} |x|^{(q-2)(N-2)} V(x). \tag{2}$$

Os principais resultados estudados nesta dissertação, devido a [4], são:

Teorema 0.1. Suponha que $0 < \mu < \frac{N+2}{2}$ e as condições (f_1), (f_2) e (f_3) sejam válidas. Existe uma constante $\nu_0 = \nu_0(m, \theta, p, \mu, c_0)$ tal que se $\nu(R) > \nu_0$ para algum $R > 1$, então o problema (SNE) possui uma solução positiva.

Como exemplo de potencial V onde podemos aplicar o Teorema 0.1, temos:

Exemplo 0.1. Seja

$$V(x) = \begin{cases} \Phi(x) & \text{se } |x| \leq 2 \\ \nu_0 2^{(q-2)(N-2)+1} |x|^{-(q-2)(N-2)}, & \text{se } |x| \geq 2, \end{cases}$$

onde $\Phi : \overline{B_2(0)} \longrightarrow [0, \infty)$ é contínua, o que torna V contínua então sabemos que $\nu(2) = 2\nu_0 > \nu_0$. E assim, $\nu(2) > \nu_0$.

Agora, passaremos a descrever o segundo resutado principal dessa dissertação. Suponha que o potencial V seja radial, isto é

$$V(x) = V(|x|), \, \forall \, x \in \mathbb{R}^N.$$

Definimos a função $\mathcal{W} : (1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ por

$$\mathcal{W}(R) = \inf_{|x|\geq R} |x|^{\frac{4-\mu}{2}} V(x). \tag{3}$$

Podemos usar a técnica utilizada na prova do Teorema 0.1 para estudar o caso em que

$$f(t) = |t|^{\frac{4-\mu}{N-2}} t, \, \forall \, t \in \mathbb{R}, \tag{f_4}$$

onde $0 < \mu < \min\left\{\frac{N+2}{2}, 4\right\}$.

Portanto, obtemos o segundo resultado de [4] sobre existência de solução de (SNE):

Teorema 0.2. Suponha que $0 < \mu < \min\left\{\frac{N+2}{2}, 4\right\}$, V é uma função radial e a condição (f_4) é válida. Existe uma constante $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}(m, \mu)$ tal que se $\mathcal{W}(R) > \mathcal{W}_0$ para algum $R > 1$, então o problema (SNE) possui uma solução positiva.

Como uma aplicação, podemos usar o Teorema 0.2 para estudar o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \left(\frac{1}{|x|} * u^5\right) u^4 \text{ em } \mathbb{R}^3 \\ u(x) > 0 \text{ em } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

onde V pode ser como em um dos dois casos abaixo:

Exemplo 0.2. Seja $\delta > 0$ e

$$V(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ |x|^{\frac{-(4-\mu)}{2}+\delta} & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

temos $\mathcal{W}(R) = R^\delta$, $\forall\, R > 1$.

Portanto

$$\lim_{R \to +\infty} \mathcal{W}(R) = +\infty,$$

assim, para R grande o suficiente $\mathcal{W}(R) > \mathcal{W}_0$.

Exemplo 0.3. Seja

$$V(x) = \begin{cases} 2\mathcal{W}_0, & \text{se } |x| \leq 1 \\ 2\mathcal{W}_0 |x|^{-\frac{4-\mu}{2}}, & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

Então sabemos que $\mathcal{W}(R) = 2\mathcal{W}_0$, e assim, $\mathcal{W}(R) > \mathcal{W}_0$, $\forall\, R > 1$.

A seguir, daremos mais detalhes sobre o problema (SNE) e apresentaremos um breve resumo dos resultados presentes na literatura relacionados ao problema (SNE).

A existência de soluções do problema (SNE) está associada a busca de soluções de ondas estacionárias para a equação de Schörodinger não linear do tipo

$$i\partial_t \Psi = -\Delta\Psi + W(x)\Psi - (Q(x) * |\Psi|^q)|\Psi|^{q-2}\Psi, \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{4}$$

aqui W é o potencial externo e Q é a função de resposta que possui informações sobre a iteração mútua entre os bósons. Este tipo de equação não-local é conhecida por descrever a propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas [16] e desempenha um papel importante na Teoria de condensação de Bose-Einstein [11]. É bem conhecido que $\Psi(x,t) = u(x)e^{-iEt}$ resolve a equação de evolução (4) se, e somente se u resolver

$$-\Delta u + V(x)u = (Q(x) * |u|^q)|u|^{q-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{5}$$

onde $V(x) = W(x) - E$.

Quando a função de resposta, é a função de Dirac, ou seja $Q(x) = \delta(x)$, a resposta não linear é de fato local e somos levados a equação de Schörodinger

$$-\Delta u + V(x)u = |u|^{q-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{6}$$

que têm sido estudado extensivamente com várias hipóteses sobre os potênciais e as não linearidades veja por exemplo, [1, 2, 5–8, 12, 15, 18, 21, 22, 25, 39, 40].

O objetivo deste trabalho é estudar a existência de soluções para a classe de equações de Schorödinger não-local (SNE), ou seja, a função resposta é do tipo Coloumb, por exemplo $\dfrac{1}{|x|^{\mu}}$ então chegamos à equação de Choquard-Pekar

$$-\Delta u + V(x)u = \left(\frac{1}{|x|^{\mu}} * |u|^{q}\right)|u|^{q-2} \text{ em } \mathbb{R}^N. \tag{7}$$

O caso $q = 2$ e $\mu = 1$ remonta à descrição da Teoria Quântica de um polaron em repouso por S. Pekar em 1954 [30] e à modelagem de um elétron preso em seu próprio buraco em 1976 no trabalho de P. Choquard, em uma certa aproximação à Teoria Hartree-Fock do plasma de um componente [10]. A equação também é conhecida como a equação de Schrödinger-Newton, que foi introduzida por Penrose em sua discussão sobre o colapso autogravitacional de uma função de onda da mecânica quântica. Penrose sugeriu que as soluções de (7), até a reparametrização, são os estados estacionários básicos que não colapsam mais espontaneamente, dentro de uma certa escala de tempo.

Na literatura, a maioria dos artigos existente considera a existência e propriedades das soluções para a equação não-linear de Choquard (SNE) com potencial constante. Em [10] Lieb provou a existência e unicidade a menos de translação, de solução ground state para (7), posteriormente, [26], Lions mostrou a existência de uma sequência de soluções radialmente simétricas para esta equação. Envolvendo as propriedades das soluções ground state, Ma e Zhao [19] consideraram a equação de Choquard generalizada (7) para $q \geq 2$, e provaram que cada solução positiva de (7) é radialmente simétrica e monótona decrescente em algum ponto, partindo do pressuposto de que um certo conjunto de números reais, definidos em termos de N, α e q não é vazio. Sob a mesma suposição, Cingolanni, Clapp e Secchi [29] spresentam alguns resultados de existência e multiplicidade no caso eletromagnético, e estabeleceram a regularidade e algum decaimento assintóticamente no infinito de solução ground state de (7). Em [35] Moroz e Van Schaftingen eliminaram esta restrição e mostraram a regularidade, positividade e simetria radial de soluções ground states para a faixa ideal de parametros, e obtem decaimento derivado assintóticamente no infinito. Além disso, Moroz e Van Schaftingen em [36, 38] também consideraram a existência de soluções ground states para o crescimento crítico no sentido da desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev e sob a condição do tipo Berestycki-Lions.

Envolvendo o Problema com potênciais não-constantes

$$-\Delta u + V(x)u = \left(\frac{1}{|x|^{\mu}} * F(u)\right) f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{8}$$

onde V é uma função periódica contínua com $\inf\limits_{\mathbb{R}^N} V(x) > 0$, notando que o termo não-local é invariante sob translação, é possível provar um resultado de existência facilmente aplicando o Teorema do Passo da Montanha, ver [25] por exemplo. Para um potencial periódico V que muda de sinal e 0 encontra-se no intervalo do espectro do operador de Schörodinger $-\Delta + V$, o problema é fortemente indefinido, e em [3] os autores provaram a existência de solução não trivial com $\mu = 1$ e $F(u) = u^2$ por métodos de redução.

Para uma classe geral de função de resposta Q e não linearidade f, Ackermann [25] propôs uma abordagem para provar a existência de um número infinito de soluções fracas geométricamente distintas.

Para artigos que estudam o caso em que V anula-se no infinito podemos substituindo Δ por $\varepsilon^2\Delta$, citamos S. Secchi [31] onde o mesmo obteve o resultado de existência para ε pequeno quando $V > 0$ e

$$\liminf_{|x|\to+\infty} V(x)|x|^{\gamma} > 0,$$

para algum $\gamma \in [0, 1)$ por uma redução do tipo Lyapunov-Schmidt. Em [37], os autores provam a existência e comportamento de concentração de soluções semiclássicos para o problema com $F(u) = u^p$ para ε pequeno. Mais precisamente, eles desenvolveram uma técnica de penalização construindo supersoluções para uma linearização do problema penalizado em domínio exterior, então eles estimam a solução do problema penalizado por algum princípio de comparação.

Além dos fatos acima citados e do aritgo [5] de Alves e Souto. O objetivo principal deste trabalho é mostrar a existência de soluções positivas para o problema (SNE) com potenciais anulando no infinito, ou seja, $V(\infty) = 0$. Esta classe de problemas remonta ao trabalho de Berestycki e Lions em [12] onde os autores estudaram a equação de Schrödinger com massa zero e mostraram que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

não possui solução ground state se $f(t) = |t|^{q-2}t$. No entanto, eles também provaram que se f se comportar como $|t|^{q-2}t$ para t pequeno e $|t|^{p-2}t$ para t grande quando $p < 2^* < q$, então o problema possui uma solução ground state. Por exemplo, essas condições são verificadas pela função

$$f(t) = \begin{cases} |t|^{q-2}t;\ t \le 1, \\ h(t);\ 1 \le t \le 2, \\ |t|^{p-2}t;\ t \ge 2 \end{cases}$$

onde h é selecionado de forma que f seja uma função $C^1(\mathbb{R})$. Posteriormente, Benci, Grisanti e Micheletti [33, 34] consideraram problemas do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

e estudaram a existência e não existência de soluções ground state.

Esta dissertação está dividida em um capítulo contendo quatro seções e quatro apêndices. A seguir detalharemos a divisão do capítulo e faremos um resumo das principais ideias e objetivos de cada seção.

No início do Capítulo 1, para facilitar o leitor, apresentaremos novamente o problema (SNE) e as hipóteses sobre V e f. Na Seção 1.1, apresentamos o espaço onde vamos buscar a solução do problema (SNE). Além disso, exibiremos algumas propriedades desse espaço, e associamos um funcional ao problema (SNE) de tal modo que o ponto crítico do funcional é solução do problema. Entretanto, para aplicar o Teorema do Passo da Montanha (veja o Apêndice B, Teorema B.3) e obter ponto crítico de I, nos deparamos com uma dificuldade técnica em provar que o funcional I satisfaz a condição Palais-Smale, porque não temos imersão compacta de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Na Seção 1.2, afim de superar a falta de compacidade citada acima, aplicamos o Método de Penalização de Del Pino e Felmer, veja [21], que será a principal técnica para provar o Teorema 0.1. Neste método, fazemos uma penalização na não linearidade f, isto é, iremos considerar uma função auxiliar que nos permitirá estudar um problema auxiliar (APE) relacionado a (SNE), cujo funcional associado satisfaz a condição (PS). .

Na Seção 1.3, mostramos a existência de solução do problema (APE) e buscamos estimativas adequadas para mostrar que essa solução é solução do problema original (SNE). Para tal obteremos algumas estimativas $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e alguns resultados técnicos para mostrar que a solução do prolema auxiliar (APE) é realmente solução do problema original (SNE). Por último, através de todos os resultados apresentados, somos capazes de demonstrar o Teorema 0.1, citado anteriormente. Na Seção 1.4 analisamos o caso em que o potencial $V(x)$ é uma função radial e considerando (3) e (f_4) podemos usar os mesmos argumentos usados na prova do Teorema 0.1 para provar o Teorema 0.2.

No Apêndice A, apresentamos alguns resultados básicos usados ao longo da dissertação. No Apêndice B, apresentamos uma revisão dos espaços de Sobolev e provaremos o Lema de deformação e duas versões do Teorema do Passo da Montanha. No Apêndice C, mostramos algumas propriedades do subespaço onde buscamos a solução do problema penalizado (APE). Por fim, no Apêndice D, apresentamos alguns resultados da Teoria dos pontos críticos e provamos que o funcional Φ associado ao problema penalizado (APE) é de classe $C^1(E,\mathbb{R})$ e exibimos sua derivada de Fréchet.

Capítulo 1

Existência de soluções para uma equação de Choquard não-linear com potencial anulando no infinito

Neste capítulo, iremos estudar a seguinte classe de problemas elípticos:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \left(\dfrac{1}{|x|^{\mu}} * F(u)\right) f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ u(x) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{SNE}$$

onde $0 < \mu < N$, $N \geq 3$, Δ é o operador Laplaciano, V é uma função real contínua não-negativa e F é a função primitiva de f. Também denotaremos $\dfrac{1}{|x|^{\mu}} * F(u)$ por:

$$\frac{1}{|x|^{\mu}} * F(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(u(y))}{|x-y|^{\mu}} dy.$$

Para enunciarmos os resultados principais desse capítulo precisamos fazer algumas definições e enunciar as hipóteses sobre f. Iniciamos definindo o seguinte número

$$m := \max_{|x| \leq 1} V(x). \tag{1.1}$$

Definimos a função $\nu : (1, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ por

$$\nu(R) = \frac{1}{R^{(q-2)(N-2)}} \inf_{|x| \geq R} |x|^{(q-2)(N-2)} V(x). \tag{1.2}$$

Assumimos as seguintes condições sobre a não linearidade f:

(f_1) $\displaystyle\lim_{s \to 0^+} \frac{sf(s)}{s^q} < \infty; q \geq 2^*$ onde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$.

(f_2) Existe $0 < \mu < \frac{N+2}{2}$ tal que

$$\lim_{s \to \infty} \frac{sf(s)}{s^p} = 0,$$

para algum, $p \in \left(1, 2\frac{(N-\mu)}{N-2}\right)$.

(f_3) (Condição de Ambrosetti-Rabinowitz) Existe $\theta > 2$, tal que

$$0 < \theta F(s) \leq 2f(s)s, \; \forall \, s > 0,$$

onde $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$.

Como estamos interessados em provar a existência de soluções positivas para o problema (SNE), iremos assumir,

$$f(s) = 0, \; \forall \, s < 0.$$

Iniciamos os nossos estudos com o seguinte lema:

Lema 1.1. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo (f_1), (f_2), então existe $c_0 > 0$ tal que

$$|sf(s)| \leq c_0 |s|^p, \; |sf(s)| \leq c_0 |s|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}, \; |sf(s)| \leq c_0 |s|^{2^*} \text{ e } |sf(s)| \leq c_0 |s|^q \tag{1.3}$$

para algum $p \in \left(1, \frac{2(N-\mu)}{N-2}\right)$, $q \geq 2^*$ e para todo $s \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Pela hipótese (f_2) para todo $\varepsilon > 0$ existe s_0 tal que

$$\sup_{s > s_0} \frac{sf(s)}{s^p} \leq \varepsilon,$$

para algum $p \in \left(1, \frac{2(N-\mu)}{N-2}\right)$.

A hipótese (f_1) e (f_2) implicam que existe $C > 0$ tal que $\forall \, \varepsilon > 0$, $\exists \, \delta > 0$

$$\sup_{0 < s \leq \delta} \frac{sf(s)}{s^q} \in (C - \varepsilon, \, C + \varepsilon).$$

Então, tomando o mesmo ε em ambas as relações, podemos considerar o valor

$$\max_{s \in [\delta, \, s_0]} \frac{sf(s)}{s^q},$$

com $q \geq 2^*$ e escolhendo

$$c_0 = \max\left\{ C + \varepsilon, \, \max_{s \in [\delta, \, s_0]} \frac{sf(s)}{s^q}, \, \max_{s \in [\delta, \, s_0]} \frac{sf(s)}{s^p} \right\},$$

podemos concluir que vale $|sf(s)| \leq c_0|s|^q$ (além disso, podemos considerar $s_0 > 1$ de modo que $\frac{sf(s)}{s^q} \leq \frac{sf(s)}{s^p}$).

Resta-nos verificamos que para esse mesmo valor de c_0, temos

$$|sf(s)| \leq c_0|s|^p, \ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

para algum $p \in \left(1, \frac{2(N-\mu)}{N-2}\right)$. De fato, temos

$$\sup_{s>s_0} \frac{sf(s)}{s^p} < \varepsilon \leq c_0$$

e tomando $\delta < 1$, temos

$$\sup_{0<s<\delta} \frac{sf(s)}{s^p} < \sup_{0<s<\delta} \frac{sf(s)}{s^q}.$$

Observe que o intervalo $\left(1, \frac{2(N-\mu)}{N-2}\right)$ não é vazio por causa da condição acima em μ. Note que por (f_1), e o fato de que

$$\frac{2(N-\mu)}{N-2} < \frac{2N-\mu}{N-2} < 2^*,$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{sf(s)}{s^{\frac{2N-\mu}{N-2}}} = 0 \text{ e } \lim_{s\to 0} \frac{sf(s)}{s^p} = 0, \tag{1.4}$$

então por $(f_1) - (f_2)$ e (1.4), existe $c_0 > 0$ tal que

$$\left|\frac{sf(s)}{s^p}\right| \leq c_0 \Rightarrow \frac{|sf(s)|}{|s^p|} \leq c_0 \Rightarrow \frac{|sf(s)|}{|s|^p} \leq c_0$$
$$\Rightarrow |sf(s)| \leq c_0|s|^p \leq c_0|s|^{\frac{2N-\mu}{N-2}} \leq c_0|s|^{2^*} \leq c_0|s|^q, \ \forall\, s \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

como queriamos provar. □

1.1 O subespaço E e o funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (SNE)

Nesta seção vamos apresentar o espaço onde vamos buscar a solução do problema (SNE). Além disso, apresentamos algumas propriedades desse espaço.

Desde que $V(x) \geq 0$, podemos definir o seguinte subespaço de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$,

$$E = \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) | \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^2 dx < +\infty \right\},$$

que é um espaço de Hilbert com a norma definida por

$$||u|| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

No Apêndice C mostramos que E é um espaço de Hilbert com a norma definida acima.

Definição 1.1. Seja E um espaço de Hilbert real e $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$, um funcional de classe C^1. Dizemos que $(u_n) \subset E$ é uma sequência Palais-Smale no nível c para I, se (u_n) satisfaz $I(u_n) \longrightarrow c$ e $I'(u_n) \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow +\infty$.

Além disso, dizemos que I satisfaz a conidição $(PS)_c$, se toda sequência $(PS)_c$ possuir uma subsequência convergente.

Para a aplicação do Método variacional, é importante verificar que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u) \right) F(u) dx \right| < \infty, \ \forall\, u \in E. \tag{1.6}$$

Para provar a integrabilidade acima, isto é que a integral em (1.6) é finita, é importante lembrar a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev, que será freqüentemente usada nesse trabalho.

Devido a sua importância no trabalho, nós também enunciaremos e demonstraremos essa desigualdade no Apêndice A, veja Teorema A.9.

Proposição 1.1. [[9], Theorem 4.3] (Desigualdade Hardy-Littlewood-Sobolev) Seja $s, r > 1$ e $0 < \mu < N$ com $\frac{1}{s} + \frac{\mu}{N} + \frac{1}{r} = 2$. Se $g \in L^s(\mathbb{R}^N)$ e $h \in L^r(\mathbb{R}^N)$, então existe uma constante aguda $C(s,\ N,\ \mu,\ r)$, independente de $g,\ h$, de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g(x)h(y)}{|x-y|^\mu} dydx \leq C(s,\ N,\ \mu,\ r)|g|_s |h|_r.$$

A desigualdade acima garante que (1.6) é válido, porque por (f_3) e (1.5),

$$|F(u)| \leq 2c_0 |u|^{\frac{2N-\mu}{N-2}} \tag{1.7}$$

Assim, pela desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev, temos,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * |F(u)| \right) |F(u)| dx < \infty,$$

se $F(u) \in L^t(\mathbb{R}^N)$ para $t > 1$ e

$$\begin{aligned} \frac{2}{t} + \frac{\mu}{N} &= 2, \\ \frac{2}{t} &= 2 - \frac{\mu}{N} \\ \frac{2}{t} &= \frac{2N-\mu}{N} \\ t &= \frac{2N}{2N-\mu} \end{aligned}$$

Além disso, por (1.7), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(u)|^t dx \leq (2c_0)^t \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx < \infty, \ \forall\, u \in E.$$

Isso mostra que $F(u) \in L^t(\mathbb{R}^N)$ para todo $u \in E$. Portanto o funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) F(u)dx,$$

está bem definido e é de classe $C^1(E,\, \mathbb{R})$ com sua derivada dada por

$$I'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + V(x)u\varphi)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u)\varphi\, dx\, \forall\, u,\ \varphi \in E.$$

Assim, percebe-se que as soluções de (SNE) correspondem aos pontos criticos do funcional energia I. Entretanto existem dificuldades técnicas em provar que o funcional I satisfaz a condição (PS) em geral. A principal dificuldade é a falta de imersão compacta de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Afim de superar essa dificuldade, adaptamos o método de Penalização introduzido por Del Pino e Felmer em [21].

1.2 O Problema Penalizado

Para $\ell > 1$ e $R > 1$ a serem determinados posteriormente, definimos as funções

$$\widehat{f}(x,s) := \begin{cases} f(s), & \text{se } \ell f(s) \leq V(x)s, \\ \frac{V(x)}{\ell}s, & \text{se } \ell f(s) > V(x)s, \end{cases} \tag{1.8}$$

e

$$g(x,s) := \chi_{B_R}(x)f(s) + (1-\chi_{B_R}(x))\widehat{f}(x,s), \tag{1.9}$$

onde χ_{B_R} denota a função caracteristica da bola B_R. Usando as notações anteriores, vamos introduzir o problema auxiliar:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \left(\dfrac{1}{|x|^{\mu}} * G(x,u)\right) g(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ u(x) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{APE}$$

onde $G(x,s) := \displaystyle\int_0^s g(x,\tau)d\tau$.

Lema 1.2. Sejam $\widehat{f}$ e g definidas em (1.8) e (1.9). Para todo $s \in \mathbb{R}$ temos:

(1) $\widehat{f}(x,s) \leq f(s)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$,

(2) $g(x,s) \leq \frac{V(x)}{\ell}s$, $\forall\, |x| \geq R$,

(3) $G(x,s) = F(s)$, $\forall\, |x| \leq R$,

(4) $G(x,s) \leq \frac{V(x)}{2\ell}s^2\; \forall\, |x| \geq R$.

Demonstração. (1) Segue diretamente da definição de $\widehat{f}(x,s)$.

(2) Sabemos que

$$g(x,s) := \chi_{B_R}(x)f(s) + (1 - \chi_{B_R}(x))\widehat{f}(x,s),$$

se $|x| \geq R$ então $x \notin B_R$, assim $\chi_{B_R}(x) = 0$. Então

$$g(x,s) = 0f(s) + (1-0)\widehat{f}(x,s),$$

como

$$\widehat{f}(x,s) \leq \frac{V(x)}{\ell}s,\ \forall\, |x| \geq R.$$

Então

$$g(x,s) \leq \frac{V(x)}{\ell}s.$$

(3) Se $|x| \leq R$ então $x \in B_R$, assim $\chi_{B_R}(x) = 1$. Logo,

$$g(x,\ s) = 1f(s) + (1-1)\widehat{f}(x,\ s) = f(s),$$

assim,

$$G(x,\ s) = \int_0^s g(x,\ \tau)d\tau = \int_0^s f(\tau)d\tau = F(s).$$

(4) De fato, se $|x| \geq R$ então pela definição de $G(x,s)$ e por (2) temos

$$G(x,s) = \int_0^s g(x,\tau)d\tau$$

então,

$$G(x,s) \leq \int_0^s \frac{V(x)}{\ell}\tau d\tau.$$

Como $\ell > 1$ e $V(x) \geq 0$ temos

$$G(x,s) \leq \frac{V(x)}{\ell}\int_0^s \tau d\tau \leq \frac{V(x)}{\ell}\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^s \leq \frac{V(x)s^2}{2\ell}.$$

$\square$

Agora, iremos mostrar a relação entre a solução do problema penalizado e o problema original.

Nota 1.1. Note que se u for uma solução positiva da equação (APE) com

$$\ell f(u(x)) \leq V(x)u(x),\ \forall\, |x| \geq R, \tag{1.10}$$

então $g(x,u) = f(u)$. Observe que da definição de $g(x,s)$ temos:

$$g(x,s) = \chi_{B_R}(x)f(s) + (1-\chi_{B_R}(x))\widehat{f}(x,s).$$

Como $|x| > R$ então $\chi_{B_R}(x) = 0$ isso implica que $g(x,s) = \widehat{f}(x,s)$ como consequência, da definição de $\widehat{f}(x,s)$ concluímos que u é de fato uma solução do problema (SNE). Portanto, para obter a solução de (SNE), nosso objetivo será encontrar a solução de (APE) verificando a relação (1.10).

O funcional de Euler-Lagrange associado a (APE) é dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \Psi(u),$$

onde

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right)G(x,u)dx.$$

De (1.5) e do Lema 1.2 concluímos que Φ é bem definida e pertence a $C^1(E,\mathbb{R})$ com sua derivada dada por

$$\Phi'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla\varphi + V(x)u\varphi)dx - \Psi'(u)\varphi,\ \forall\, u,\varphi \in E$$

onde

$$\Psi'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right)g(x,u)\varphi dx,\ \forall\, u,\varphi \in E,$$

ver Apendice D Lema D.1. Assim, as soluções de (APE) correspondem aos pontos críticos do funcional energia Φ.

No próximo lema obtemos uma estimativa que nos será util no próximo resultado.

Lema 1.3. Assuma que a condição (f_3) é valida. Então

$$\Psi'(u)u \geq \theta\Psi(u) > 0,\ \forall\, u \in E \setminus \{0\}.$$

Demonstração. De fato, sabemos que

$$\Psi'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right) g(x,u)v dx,\ \forall\, u, v \in E.$$

Assim, para $u \in E \setminus \{0\}$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta}\Psi'(u)u - \Psi(u) &= \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right) g(x,u)u dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right) G(x,u) dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right) \frac{1}{\theta} g(x,u)u dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right) \frac{1}{2} G(x,u) dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right) \left(\frac{1}{\theta} g(x,u)u - \frac{1}{2} G(x,u)\right) dx\\
&= \int_{B_R \cup (\mathbb{R}^N \setminus B_R)} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right) \left(\frac{1}{\theta} g(x,u)u - \frac{1}{2} G(x,u)\right) dx\\
&= \int_{\{|x|\leq R\}\cup\{|x|>R\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right) \left(\frac{1}{\theta} g(x,u)u - \frac{1}{2} G(x,u)\right) dx\\
&= \int_{|x|\leq R} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right) \left(\frac{1}{\theta} g(x,u)u - \frac{1}{2} G(x,u)\right) dx\\
&+ \int_{|x|>R} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right) \left(\frac{1}{\theta} g(x,u)u - \frac{1}{2} G(x,u)\right) dx,
\end{aligned}$$

como $B_R = \{|x| \leq R\}$, pelo item (3) do Lema 1.2 temos

$$G(x,u) = F(u) \text{ e } g(x,u) = f(u).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta}\Psi'(u)u - \Psi(u) &= \int_{|x|\leq R} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right) \left(\frac{1}{\theta} f(u)u - \frac{1}{2} F(u)\right) dx\\
&+ \int_{|x|>R} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right) \left(\frac{1}{\theta} g(x,u)u - \frac{1}{2} G(x,u)\right) dx,\\
&\geq \int_{|x|>R} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right) \left(\frac{1}{\theta} g(x,u)u - \frac{1}{2} G(x,u)\right) dx,
\end{aligned}$$

Note que podemos escrever o conjunto $\mathbb{R}^N \setminus B_R = \{|x| > R\}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\{|x| > R\} &= \{|x| > R\} \cap [\{\ell f(u(x)) \leq V(x)u(x)\} \cup \{\ell f(u(x)) \geq V(x)u(x)\}]\\
&= [\{|x| > R\} \cap \{\ell f(u(x)) \leq V(x)u(x)\}] \cup [\{|x| > R\} \cap \{\ell f(u(x)) \geq V(x)u(x)\}].
\end{aligned}$$

Substituindo obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta}\Psi'(u)u - \Psi(u) &\geq \int_{\{|x|>R\}\cap\{\ell f(u(x))\leq V(x)u(x)\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right)\left(\frac{1}{\theta}g(x,u)u - \frac{1}{2}G(x,u)\right)dx,\\
&+ \int_{\{|x|>R\}\cap\{\ell f(u(x))\geq V(x)u(x)\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right)\left(\frac{1}{\theta}g(x,u)u - \frac{1}{2}G(x,u)\right)dx\\
&\geq \int_{\{|x|>R\}\cap\{\ell f(u(x))\leq V(x)u(x)\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right)\left(\frac{1}{\theta}f(u)u - \frac{1}{2}F(u)\right)dx,\\
&+ \int_{\{|x|>R\}\cap\{\ell f(u(x))\geq V(x)u(x)\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right)\left(\frac{1}{\theta}g(x,u)u - \frac{1}{2}G(x,u)\right)dx.
\end{aligned}$$

Pelo item (4) do Lema 1.2 temos

$$g(x,u) \leq \frac{V(x)}{\ell}u, \text{ se } |x| > R \text{ e } G(x,u) \leq \frac{V(x)}{2\ell}u^2, \text{ se } |x| > R.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta}\Psi'(u)u - \Psi(u) &\geq \int_{\{|x|>R\}\cap\{\ell f(u(x))\geq V(x)u(x)\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right)\left(\frac{1}{\theta}g(x,u)u - \frac{1}{2}G(x,u)\right)dx,\\
&\geq \int_{\{|x|>R\}\cap\{\ell f(u(x))\geq V(x)u(x)\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right)\left(\frac{1}{\theta}\frac{V(x)u}{\ell}u - \frac{1}{2}\frac{V(x)}{2\ell}u^2\right)dx,\\
&\geq \int_{\{|x|>R\}\cap\{\ell f(u(x))\geq V(x)u(x)\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right)\left(\frac{1}{\ell\theta} - \frac{1}{4\ell}\right)V(x)u^2dx.
\end{aligned}$$

Como $V(x) \geq 0$, para todo $u \in E \setminus \{0\}$, $2 < \theta < 4$, temos

$$\frac{1}{\theta}\Psi'(u)u - \Psi(u) > 0 \Longrightarrow \Psi'(u)u > \theta\Psi(u) \Longrightarrow 0 < \theta\Psi(u) \leq \Psi'(u)u.$$

□

Nota 1.2. Observe que da hipotese (f_3) na prova do lema anterior precisamos de $\theta < 4$ para obter a estimativa.

O seguinte lema mostra que o funcional penalizado Φ satisfaz as geometrias do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosseti e Rabinowitz(ver Apêndice B, Teorema B.3).

Lema 1.4. Suponha que $0 < \mu < N$ e as condições $(f_1) - (f_3)$ são válidas. Então:

(1) Existe ρ, $\delta_0 > 0$ tal que $\Phi|_{S_\rho} \geq \delta_0 > 0$, $\forall\, u \in S_\rho = \{u \in E : ||u|| = \rho\}$.

(2) Existe $r > 0$ e $e \in H_0^1(B_1)$ com $||e|| > r$ tal que $\rho(e) < 0$.

Demonstração. (1) De fato, por (1.7) e (1.5) temos,

$$|G(x,u)| \leq |F(u)| \leq |2f(u)u| \leq 2|f(u)u| \leq 2c_0|u|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right)G(x,u)dx \\
&\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * 2c_0|u|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}\right)2c_0|u|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}dx \\
&\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{2c_0}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * 2c_0|u|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}\right)|u|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}dx \\
&\geq \frac{1}{2}||u||^2 - 2c_0^2\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * |u|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}\right)|u|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}dx.
\end{aligned}$$

E como

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * |u|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}\right)dx = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(y)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}}{|x-y|^\mu}dydx,$$

substituindo temos

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - 2c_0^2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(y)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}|u(x)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}}{|x-y|^\mu}dydx.$$

Pela desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(y)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}|u(x)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}}{|x-y|^\mu}dydx &\leq c_2||u||^{\frac{2N-\mu}{N-2}}||u||^{\frac{2N-\mu}{N-2}} \\
&\leq c_2||u||^{\frac{2(2N-\mu)}{N-2}}.
\end{aligned}$$

Assim, substituindo obtém-se,

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - 2c_0^2c_2||u||^{\frac{2(2N-\mu)}{N-2}}.$$

Tomando $C_1 = 2c_0^2c_2 > 0$ implica

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - C_1||u||^{\frac{2(2N-\mu)}{N-2}}.$$

Como $\frac{2N-\mu}{N-2} > 1$, a conclusão de (1) segue se escolhermos ρ pequeno o suficiente.
(2) Fixando $u_0 \in H_0^1(B_{R_0})$ com $u_0^+(x) = \max\{u_0(x), 0\} \neq 0$ definimos

$$A(t) = \Psi\left(\frac{tu_0}{||u_0||}\right) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * G\left(x, \frac{tu_0}{||u_0||}\right)\right)G\left(x, \frac{tu_0}{||u_0||}\right)dx > 0 \text{ para } t > 0.$$

Assim pelo Lema (1.2) temos

$$A'(t)t \geq \theta A(t) > 0,$$

o que implica

$$\frac{A'(t)}{A(t)} \geq \frac{\theta}{t},\ t > 0.$$

Integrando para todo $s > \frac{1}{||u_0||}$ temos

$$\int_{\frac{1}{||u_0||}}^{s} \frac{\theta}{t} dt \leq \int_{\frac{1}{||u_0||}}^{s} \frac{A'(t)}{A(t)} dt$$
$$\theta \int_{\frac{1}{||u_0||}}^{s} \frac{1}{t} dt \leq \int_{\frac{1}{||u_0||}}^{s} \frac{A'(t)}{A(t)} dt.$$

Observe que no segundo membro da desigualdade por integração por partes temos

$$\int_{\frac{1}{||u_0||}}^{s} \frac{A'(t)}{A(t)} dt = \left[\frac{A(t)}{A(t)}\right]_{\frac{1}{||u_0||}}^{s} - \int_{\frac{1}{||u_0||}}^{s} -\frac{A(t)}{[A(t)]^2} dt = \int_{\frac{1}{||u_0||}}^{s} \frac{1}{A(t)} dt,$$

substituindo,

$$\int_{\frac{1}{||u_0||}}^{s} \frac{1}{t} dt \leq \int_{\frac{1}{||u_0||}}^{s} \frac{1}{A(t)} dt.$$

Calculando a integral obtemos,

$$\begin{aligned}
\theta[ln(t)]^{s}_{\frac{1}{||u_0||}} &\leq [ln(A(t)]^{s}_{\frac{1}{||u_0||}} \Rightarrow \theta \left(ln(s) - ln\left(\frac{1}{||u_0||}\right)\right) \leq \left(ln(A(s)) - ln(A\left(\frac{1}{||u_0||}\right))\right) \\
\Rightarrow \theta ln\left(\frac{s}{\frac{1}{||u_0||}}\right) &\leq ln\left(\frac{A(s)}{A\left(\frac{1}{||u_0||}\right)}\right) \Rightarrow \theta ln(s||u_0||) \leq ln\left(\frac{A(s)}{A\left(\frac{1}{||u_0||}\right)}\right) \\
\Rightarrow ln(s||u_0||)^{\theta} &\leq ln\left(\frac{A(s)}{A\left(\frac{1}{||u_0||}\right)}\right) \Rightarrow e^{ln(s||u_0||)^{\theta}} \leq e^{ln\left(\frac{A(s)}{A\left(\frac{1}{||u_0||}\right)}\right)} \\
(s||u_0||)^{\theta} &\leq \frac{A(s)}{A\left(\frac{1}{||u_0||}\right)} \Rightarrow s^{\theta}||u_0||^{\theta} \leq \frac{A(s)}{A\left(\frac{1}{||u_0||}\right)}.
\end{aligned}$$

Pela definição de $A(s)$ e como $s > \frac{1}{||u_0||}$ temos

$$\Psi\left(\frac{u_0}{||u_0||}\right) s^{\theta}||u_0||^{\theta} \leq \Psi(su_0).$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\Phi(su_0) &= \frac{1}{2}||su_0||^2 - \Psi(su_0) = \frac{||u_0||^2}{2}s^2 - \Psi(su_0) \\
&\leq \frac{||u_0||^2}{2}s^2 - \Psi\left(\frac{u_0}{||u_0||}\right)||u_0||^{\theta}s^{\theta}.
\end{aligned}$$

Tomando $C_1 = \frac{||u_0||^2}{2} > 0$ e $C_2 = \Psi\left(\frac{u_0}{||u_0||}\right)||u_0||^\theta > 0$ temos

$$\Phi(su_0) \leq C_1 s^2 - C_2 s^\theta \text{ para } s > \frac{1}{||u_0||}.$$

E a conclusão de (2) vale para $e = su_0$ com s grande o suficiente. □

Aplicando o Teorema do Passo da Montanha sem condição (PS) (ver Apêndice B Teorema B.2), sabemos que existe uma sequência $(PS)_{c_v}$, a sequência $(u_n) \subset E$ tal que

$$\Phi'(u_n) \longrightarrow 0 \text{ e } \Phi(u_n) \longrightarrow c_v, \tag{1.11}$$

onde c_v é o nível do Passo da Montanha caracterizado por

$$0 < c_v := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max \Phi(\gamma(t)) \leq \inf_{u \in E\setminus\{0\}} \max \Phi(tu),$$

e

$$\Gamma := \{\gamma \in C^1([0,1], H_0^1(B_1)) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}. \tag{1.12}$$

Agora observe que estendendo "por zero"as funções de $H_0^1(B_1)$, podemos concluir que $H_0^1(B_1) \subset E$. Note também que $\Phi(u) \leq \widehat{\Phi}(u)$, para toda $u \in H_0^1(B_1)$, onde

$$\widehat{\Phi}(u) = \frac{1}{2}\int_{B_1}(|\nabla u|^2 + mu^2)dx - \frac{1}{2}\int_{B_1}\int_{B_1}\frac{F(u(x))F(u(y))}{|x-y|^\mu}dydx,$$

com m dado em (1). Em particular, temos $\Phi(\gamma(t)) \leq \widehat{\Phi}(\gamma(t))$, para toda $t \in [0,1]$ e $\gamma \in \Gamma$, onde o conjunto Γ é definido em (1.12). Como $e \in H_0^1(B_1)$ temos que para $t \geq 0$,

$$\max_{t \geq 0} \Phi(\gamma(t)) \leq \max_{t \geq 0} \widehat{\Phi}(\gamma(t))$$

então

$$\inf_{u \in H_0^1(B_1)\setminus\{0\}} \max_{t \geq 0} \Phi(\gamma(t)) \leq \inf_{u \in H_0^1(B_1)\setminus\{0\}} \max_{t \geq 0} \widehat{\Phi}(\gamma(t)).$$

Portanto, obtém-se

$$0 < c_v \leq d := \inf_{u \in H_0^1(B_1)\setminus\{0\}} \max_{t \geq 0} \widehat{\Phi}(\gamma(tu)). \tag{1.13}$$

Aqui, é importante observar que d é independente da escolha de ℓ e R, que será importante em estimativas futuras. No próximo lema mostraremos que a sequência (u_n) é limitada.

Lema 1.5. Suponha que $0 < \mu < N$ e as condições $(f_1)-(f_3)$ são válidas. Então a sequência (u_n) dada em (1.11) é limitado por uma constante independente da escolha de ℓ e R.

Demonstração. De fato, sabemos que

$$\Phi(u_n) = \frac{1}{2}||u_n||^2 - \Psi(u_n)$$

e

$$\Phi'(u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla u_n + V(x)u_n u_n)dx - \Psi'(u_n)u_n,$$

logo

$$\Phi(u_n) - \frac{1}{\theta}\Phi'(u_n)u_n = \frac{1}{2}||u_n||^2 - \Psi(u_n) - \frac{1}{\theta}\left[\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla u_n + V(x)u_n u_n)dx - \Psi'(u_n)u_n\right].$$

Assim, obtemos

$$\Phi(u_n) - \frac{1}{\theta}\Phi'(u_n)u_n = \frac{1}{2}||u_n||^2 - \Psi(u_n) - \frac{1}{\theta}||u_n||^2 + \frac{1}{\theta}\Psi'(u_n)u_n,$$

pelo Lema (1.3) temos

$$\begin{aligned}
\Phi(u_n) - \frac{1}{\theta}\Phi'(u_n)u_n &\geq \frac{1}{2}||u_n||^2 - \Psi(u_n) - \frac{1}{\theta}||u_n||^2 + \frac{\theta}{\theta}\Psi(u_n) \\
&\geq \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{\theta}||u_n||^2 \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)||u_n||^2.
\end{aligned}$$

Como (u_n) é uma sequêcia $(PS)_{c_v}$ obtida pelo Teorema do Passo da Montanha sem a condição PS(ver Apêndice B Teorema B.2), então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)||u_n||^2 \leq c_v + 1 \Rightarrow ||u_n||^2 \leq \frac{2\theta}{\theta - 2}(c_v + 1), \ \forall\, n > n_0,$$

o que implica que (u_n) é limitado em E. Além disso, por (1.13), temos

$$||u_n||^2 \leq \frac{2\theta}{\theta - 2}(d + 1), \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

mostrando o lema, pois d é independente da escolha de ℓ e R. □

Antes de provar o próximo lema, precisamos apresentar algumas notações. No que se segue,

$$\mathcal{B} := \left\{u \in E : \ ||u||^2 \leq \frac{2\theta}{\theta - 2}(d + 1)\right\} \tag{1.14}$$

e

$$K(u)(x) := \frac{1}{|x|^\mu} * G(x, u),$$

ou seja

$$K(u)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(y,u)}{|x-y|^\mu} dy.$$

Com as notações acima, somos capazes de mostrar a seguinte estimativa.

Lema 1.6. Suponha que $0 < \mu < \frac{N+2}{2}$ e as condições $(f_1) - (f_3)$ são válidas. Então existe $\ell_0 > 0$ independente de R, de modo que

$$\frac{\sup_{u \in \mathcal{B}} |K(u)(x)|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\ell_0} < \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Da definição de G, $|G(x,u)| \leq |F(u)|$, para todo $u \in E$. Assim,

$$|G(x,u)| \leq 2c_0 |u|^{2^*} \text{ e } |G(x,u)| \leq 2c_0 |u|^p \text{ com } p \in \left(1, \frac{2(N-\mu)}{N-2}\right).$$

Então,

$$\begin{aligned} |K(u)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(y,u)}{|x-y|^\mu} dy \right| \\ &= \left| \int_{|x-y|\leq 1} \frac{G(y,u)}{|x-y|^\mu} dy \right| + \left| \int_{|x-y|>1} \frac{G(y,u)}{|x-y|^\mu} dy \right| \\ &\leq 2c_0 \int_{|x-y|\leq 1} \frac{|u|^p}{|x-y|^\mu} dy + 2c_0 \int_{|x-y|>1} |u|^{2^*} dy, \end{aligned}$$

onde nas regiões de integração denotamos $|x-y| \leq 1$ como o conjunto $\{y \in \mathbb{R}^N : |x-y| \leq 1\}$ e por $|x-y| > 1$ como o conjunto $\{y \in \mathbb{R}^N : |x-y| > 1\}$. Pela imersão contínua de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ temos

$$\int_{|x-y|>1} |u|^{2^*} dy \leq |u|_{2^*}^2 \leq S^{-1} |\nabla u|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^2, \text{ para todo } u \in E,$$

onde S é a melhor constante na imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, isso implica

$$\int_{|x-y|>1} |u|^{2^*} dy \leq S^{-1} ||u||^2.$$

Assim,

$$|K(u)(x)| \leq 2c_0 \int_{|x-y|\leq 1} \frac{|u|^p}{|x-y|^\mu} dy + 2c_0 S^{-1} ||u||^2.$$

Tomando $C_1 = 2c_0 S^{-1} ||u||^2 > 0$ temos

$$|K(u)(x)| \leq 2c_0 \int_{|x-y|\leq 1} \frac{|u|^p}{|x-y|^\mu} dy + C_1.$$

Agora escolhendo $t = \dfrac{2^*}{p} > \dfrac{N}{N-\mu}$ e como $\dfrac{1}{t} + \dfrac{t-1}{t} = 1$, segue-se da desigualdade de

Hölder que,

$$\begin{aligned}\int_{|x-y|\leq 1}\frac{|u|^p}{|x-y|^\mu}dy &\leq \left(\int_{|x-y|\leq 1}|u|^{pt}dy\right)^{\frac{1}{t}}\left(\int_{|x-y|\leq 1}\left[\frac{1}{|x-y|^\mu}\right]^{\frac{t}{t-1}}dy\right)^{\frac{t-1}{t}}\\ &\leq \left(\int_{|x-y|\leq 1}|u|^{2^*}dy\right)^{\frac{1}{t}}\left(\int_{|x-y|\leq 1}\left[\frac{1}{|x-y|^\mu}\right]^{\frac{t}{t-1}}dy\right)^{\frac{t-1}{t}}.\end{aligned}$$

Por mudança de váriavel temos,

$$\int_{|x-y|\leq 1}\frac{1}{|x-y|^{\frac{t\mu}{t-1}}}dy = C_N\omega_N\int_0^r \frac{1}{|r|^{\frac{t\mu}{t-1}}}|r|^{N-1}dr,$$

assim,

$$\begin{aligned}\int_{|x-y|\leq 1}\frac{|u|^p}{|x-y|^\mu}dy &\leq C_1\left(C_N\omega_N\int_0^r \frac{1}{|r|^{\frac{t\mu}{t-1}}}|r|^{N-1}dr\right)^{\frac{t-1}{t}}\\ &\leq C_1(C_N)^{\frac{t-1}{t}}(\omega_N)^{\frac{t-1}{t}}\left(\int_0^r \frac{1}{|r|^{\frac{t\mu}{t-1}}}|r|^{N-1}dr\right)^{\frac{t-1}{t}}.\end{aligned}$$

Uma vez que $N-1-\frac{t\mu}{t-1} > -1$, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{|x-y|\leq 1}\frac{|u|^p}{|x-y|^\mu}dy \leq C_2 \,\forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Portanto, $K(u)(x)$ é limitado. A partir disso, existe $\ell_0 > 0$, a ser escolhido posteriormente verificando

$$\frac{\sup_{u\in\mathcal{B}}|K(u)(x)|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\ell_0} \leq \frac{1}{2}. \tag{1.15}$$

A partir de agora, tomamos $\ell > \ell_0$ e consideramos o problema penalizado com não linearidade definido em (1.9). □

Lema 1.7. Suponha que $0 < \mu < \frac{N+2}{2}$ e as condições $(f_1)-(f_3)$ ocorrem. Então a sequência (u_n) dada em (1.11) satisfaz a seguinte propriedade: Para cada $\varepsilon > 0$ existe $r = r(\varepsilon) > R$ verificando

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2r}}(|\nabla u_n|^2 + V(x)|u_n|^2)dx < \varepsilon.$$

Demonstração. Do Lema (1.5)

$$||u_n||^2 \leq \frac{2\theta}{\theta-2}(d+1),\ \forall\, n\in\mathbb{N},$$

onde d é independente da escolha de ℓ e R. Pelo fato de que toda sequência limitada em um espaço de Hilbert possui uma subsequência convergindo fracamente, podemos supor que existe $u \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em E. Assim, para cada $\varepsilon > 0$, existe $r > R > 0$, tal que

$$\omega_N^{\frac{1}{N}} ||u_n|| \left(\int_{r \leq |x| \leq 2r} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} < \frac{\varepsilon}{8}, \tag{1.16}$$

onde ω_N é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$. Para realizar esta escolha de r de maneira adequada, é suficiente mostrar que

$$\left(\int_{r \leq |x| \leq 2r} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} < \varepsilon.$$

Suponha, por contradição que (1.16) não ocorra. Então como (u_n) é limitada, podemos supor que existe $\varepsilon' > 0$ tal que para todo $r > R > 1$ tenhamos

$$\left(\int_{r \leq |x| \leq 2r} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \geq \varepsilon'.$$

Tome 2^t como a menor potência de 2 tal que $2^t > R$. Nesse caso, vemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx = \int_{r \leq |x| \leq 2^t} |u|^{2^*} dx + \int_{2^t \leq |x| \leq 2^{t+1}} |u|^{2^*} dx + \int_{2^{t+1} \leq |x| \leq 2^{t+2}} |u|^{2^*} dx + ... = +\infty,$$

uma contradição, então a relação (1.16) ocorre.

Seja $\eta_r \in C^\infty(B_r^c)$ tal que $\eta_r(x) = 1$ se $x \notin B_{2r}(0)$, com $0 \leq \eta_r(x) \leq 1$ e $|\nabla \eta_r(x)| \leq \frac{2}{r}$, como

$$\begin{aligned} \Phi'(u_n)(u_n\eta_r) &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla(u_n\eta_r) + V(x)u_n(u_n\eta_r)dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x, u_n) \right) g(x, u_n)u_n\eta_r dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \eta_r(|\nabla u_n|^2 + V(x)|u_n|^2)dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_n \nabla u_n \nabla \eta_r dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x, u_n) \right) g(x, u_n)u_n\eta_r dx, \end{aligned}$$

observe que,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \eta_r(|\nabla u_n|^2 + V(x)|u_n|^2)dx &= \Phi'(u_n)(u_n\eta_r) + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x, u_n) \right) g(x, u_n)u_n\eta_r dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} u_n \nabla u_n \nabla \eta_r dx. \end{aligned}$$

Afirmamos que $(u_n\eta_r)$ é limitado em E. De fato, note que

$$\begin{aligned}
||u_n\eta_r||^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n\eta_r)|^2 + V(x)|u_n\eta_r|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\eta_r\nabla(u_n) + u_n\nabla(\eta_r)|^2 + V(x)|u_n\eta_r|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\eta_r\nabla(u_n) + u_n\nabla(\eta_r)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n\eta_r|^2 dx,
\end{aligned}$$

como $0 \leq \eta_r \leq 1$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n\eta_r|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n|^2 dx \leq ||u_n||^2,$$

assim resta-nos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\eta_r\nabla(u_n) + u_n\nabla(\eta_r)|^2 dx$$

é limitado. De fato observe que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\eta_r\nabla(u_n) + u_n\nabla(\eta_r)|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\eta_r\nabla(u_n)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n\nabla(\eta_r)|^2 dx \\
&+ 2\int_{\mathbb{R}^N} |\eta_r||u_n||\nabla\eta_r||\nabla u_n| dx,
\end{aligned}$$

observe ainda que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\eta_r\nabla(u_n)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\eta_r|^2|\nabla(u_n)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n)|^2 dx \leq ||u_n||^2$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u_n\nabla(\eta_r)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2|\nabla(\eta_r)|^2 dx \\
&\leq \left(\frac{2}{r}\right)^2 \int_{B_{2r}} |u_n|^2 dx \\
&\leq \frac{4}{r^2}|B_{2r}|^{\frac{2^*-2}{2^*}} \left(\int_{B_{2r}} |u_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{4}{r^2}|B_{2r}|^{\frac{2^*-2}{2^*}} C||\nabla u_n||_{L^2(B_{2r})} \\
&\leq \frac{4}{r^2}|B_{2r}|^{\frac{2^*-2}{2^*}} C||u_n||.
\end{aligned}$$

E por fim,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|\eta_r||u_n||\nabla\eta_r||\nabla u_n|dx &\leq \frac{2}{r}\int_{B_{2r}}|u_n||\nabla u_n|dx\\ &\leq \frac{2}{r}\left(\int_{B_{2r}}|u_n|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_{2r}}|\nabla u_n|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|\eta_r||u_n||\nabla\eta_r||\nabla u_n|dx &\leq \frac{2}{r}|B_{2r}|^{2^*-2}||u_n||_{L^{2^*}(B_{2r})}C||\nabla u_n||_{L^2(B_{2r})}\\ &\leq \frac{2}{r}|B_{2r}|^{2^*-2}||u_n||_{L^{2^*}(B_{2r})}C||u_n||,\end{aligned}$$

o que mostra que $(u_n\eta_r)$ é limitado. Assim segue-se que

$$\Phi'(u_n)(u_n\eta_r)\longrightarrow 0,\ \text{ou seja}\ \Phi'(u_n)(u_n\eta_r)=o_n(1).$$

Além disso, lembrando que $\eta_r(x)=0$ em B_r, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\eta_r(|\nabla u_n|^2+V(x)|u_n|^2)dx=\int_{|x|\geq r}\eta_r(|\nabla u_n|^2+V(x)|u_n|^2)dx.$$

Observe ainda que,

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq r}\eta_r(|\nabla u_n|^2+V(x)|u_n|^2)dx &= \Phi'(u_n)(u_n\eta_r)-\int_{|x|\geq r}u_n\nabla u_n\nabla\eta_r dx\\ &+ \int_{|x|\geq r}\left(\frac{1}{|x|^\mu}*G(x,u_n)\right)g(x,u_n)u_n\eta_r dx.\end{aligned}$$

além disso recorde que pelo Lema 1.6, $K(u)(x)$ é limitado, então

$$|K(u_n)(x)|\leq\sup_n|K(u_n)(x)|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\ \text{e}\ |\nabla\eta_r|\leq\frac{2}{r}\ \text{para}\ x\notin B_{2r}(0)$$

temos

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq r}\eta_r(|\nabla u_n|^2+V(x)|u_n|^2)dx &\leq \int_{|x|\geq r}\sup_n|K(u_n)(x)|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\frac{V(x)u_n}{\ell}u_n\eta_r dx\\ &- \int_{r\leq|x|\leq 2r}u_n\nabla u_n\frac{2}{r}dx+o_n(1)\\ &\leq \frac{1}{\ell}\int_{|x|\geq r}\sup_n|K(u_n)(x)|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\eta_r V(x)|u_n|^2dx\\ &- \frac{2}{r}\int_{r\leq|x|\leq 2r}u_n\nabla u_n dx+o_n(1),\end{aligned}$$

recorde do Lema 1.6, estamos fixando ℓ_0 de modo que

$$\frac{\sup_n |K(u_n)(x)|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\ell_0} \leq \frac{1}{2}.$$

então,

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq r} \eta_r(|\nabla u_n|^2 + V(x)|u_n|^2)dx &\leq \frac{1}{2\ell}\int_{|x|\geq r} \eta_r V(x)|u_n|^2 dx\\ &- \frac{2}{r}\int_{r\leq|x|\leq 2r} u_n \nabla u_n dx + o_n(1).\end{aligned}$$

Para $|x| \geq 2r$, $\eta_r(x) = 1$ então,

$$\int_{|x|\geq 2r} (|\nabla u_n|^2 + V(x)|u_n|^2)dx \leq \frac{4}{r}\int_{r\leq|x|\leq 2r} u_n \nabla u_n dx + o_n(1). \tag{1.17}$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n| dx &\leq \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq |\nabla u_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Uma vez que $u_n \longrightarrow u$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e (u_n) é limitado em E, segue-se que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n| dx \leq ||u_n||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando a desigualdade de Hölder com $\dfrac{2^*}{2} + \dfrac{1}{N} = 1$ temos,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n| dx \leq ||u_n||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} |B_{2r}|^{\frac{1}{N}}.$$

Uma vez que $|B_{2r}|^{\frac{1}{N}} = \omega_N 2^N r^N$ por (1.17) temos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq 2r} (|\nabla u_n|^2 + V(x)|u_n|^2)dx &\leq \frac{4}{r}\limsup_{n\to\infty} \int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n| dx\\ &\leq \frac{4}{r}||u_n||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} |B_{2r}|^{\frac{1}{N}}\\ &\leq \frac{4}{r}||u_n||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} 2r\omega_N^{\frac{1}{N}}\\ &\leq 8\omega_N^{\frac{1}{N}} ||u_n||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}}.\end{aligned}$$

Por (1.16)

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|\geq 2r}(|\nabla u_n|^2+V(x)|u_n|^2)dx<8\frac{\varepsilon}{8}=\varepsilon.$$

□

Lema 1.8. Suponha que $0<\mu<\frac{N+2}{2}$ e as condições $(f_1)-(f_3)$ são válidas. Então Φ satisfaz a condição $(PS)_{c_v}$.

Demonstração. Uma vez que $u_n \rightharpoonup u$ em E, temos

$$\Phi'(u_n)(u_n)=o_n(1) \text{ e } \Phi'(u_n)u=o_n(1).$$

E como

$$\Phi'(u_n)(u_n)=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n\nabla u_n+V(x)u_nu_ndx-\int_{\mathbb{R}^N}K(u_n)(x)g(x,u_n)u_ndx$$

e

$$\Phi'(u_n)u=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n\nabla u+V(x)u_nudx-\int_{\mathbb{R}^N}K(u_n)(x)g(x,u_n)udx.$$

Obtemos,

$$\begin{aligned}
\Phi'(u_n)(u_n-u) &= \Phi'(u_n)(u_n)-\Phi'(u_n)u\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n\nabla u_n+V(x)u_nu_ndx-\int_{\mathbb{R}^N}K(u_n)(x)g(x,u_n)u_ndx\\
&- \left[\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n\nabla u+V(x)u_nudx-\int_{\mathbb{R}^N}K(u_n)(x)g(x,u_n)udx\right]\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n\nabla u_n+V(x)u_nu_ndx-\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n\nabla u+V(x)u_nudx\\
&- \left[\int_{\mathbb{R}^N}K(u_n)(x)g(x,u_n)u_ndx-\int_{\mathbb{R}^N}K(u_n)(x)g(x,u_n)udx\right]\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n(\nabla u_n-\nabla u)+V(x)u_n(u_n-u)dx\\
&- \int_{\mathbb{R}^N}K(u_n)(x)g(x,u_n)(u_n-u)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n\nabla(u_n-u)+V(x)u_n(u_n-u)dx\\
&- \int_{\mathbb{R}^N}K(u_n)(x)g(x,u_n)(u_n-u)dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n\nabla(u_n-u)+V(x)u_n(u_n-u)dx=\Phi'(u_n)(u_n-u)+\int_{\mathbb{R}^N}K(u_n)(x)g(x,u_n)(u_n-u)dx.$$

Segue-se que,

$$||u_n - u||^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u)|^2 + V(x)|u_n - u|^2 dx,$$

então,

$$\begin{aligned}
||u_n - u||^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u)\nabla(u_n - u) + V(x)(u_n - u)(u_n - u)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla(u_n - u) - \nabla u \nabla(u_n - u) \\
&+ V(x)u_n(u_n - u) - V(x)u(u_n - u)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla(u_n - u) + V(x)u_n(u_n - u)dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla(u_n - u) + V(x)u(u_n - u)dx. \\
&= \Phi'(u_n)(u_n - u) + \int_{\mathbb{R}^N} K(u_n)(x)g(x, u_n)(u_n - u)dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla(u_n - u) + V(x)u(u_n - u)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} K(u_n)(x)g(x, u_n)(u_n - u)dx + o_n(1),
\end{aligned}$$

então

$$||u_n - u||^2 = \int_{\mathbb{R}^N} K(u_n)(x)g(x, u_n)(u_n - u)dx + o_n(1). \tag{1.18}$$

Agora, nosso objetivo é mostrar a seguinte igualdade,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(u_n)(x)g(x, u_n)(u_n - u)dx = o_n(1).$$

Começamos lembrando que pelo Lema (1.6) existe $C > 0$ tal que

$$|K(u_n)(x)| \leq C, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Observe que de (1.5) temos $|g(x, u)u| \leq c_0|u|^p$ com $p < 2^*$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_r} K(u_n)(x)g(x, u_n)(u_n - u)dx \right| &\leq \int_{B_r} |K(u_n)(x)||g(x, u_n)||u_n - u|dx \\
&\leq C \int_{B_r} |g(x, u_n)||u_n - u|dx \\
&\leq Cc_0 \int_{B_r} |u_n|^{p-1}|u_n - u|dx,
\end{aligned}$$

como p e $\dfrac{p}{p-1}$ são expoêntes conjugados pela desigualdade de Hölder (ver Apêndice A

Teorema A.5) temos

$$\int_{B_r} |u_n|^{p-1}|u_n - u|dx \leq \left(\int_{B_r} |u_n|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B_r} |u_n - u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

a imersão compacta de Sobolev de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ implica que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^p(B_r).$$

Portanto,

$$\left|\int_{B_r} K(u_n)(x)g(x,u_n)(u_n - u)dx\right| \leq C\int_{B_r} |g(x,u_n)||u_n - u|dx \longrightarrow 0.$$

Note que em $\mathbb{R}^N \setminus B_r$ temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} K(u_n)(x)g(x,u_n)u_n dx\right| \leq C\int_{R^N\setminus B_r} (|\nabla u_n|^2 + V(x)|u_n|^2)dx,$$

logo pelo Lema 1.7 temos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} |K(u_n)(x)||g(x,u_n)u_n|dx &\leq C\limsup_{n\to\infty}\int_{R^N\setminus B_r} (|\nabla u_n|^2 + V(x)|u_n|^2)dx \\ &\leq C\varepsilon,\end{aligned}$$

da mesma forma pela Desigualdade de Hölder e a imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} K(u_n)(x)g(x,u_n)udx\right| &\leq C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} |u_n|^{2^*-1}|u|dx \\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} |u_n|^{2^*}dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} |u|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \\ &\leq C||u_n||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} |u|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \\ &\leq CM\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} |u|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}}.\end{aligned}$$

Como $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} K(u_n)(x)g(x,\ u_n)udx = o_n(i),$$

onde $o_n(i) \longrightarrow 0$ se $n \longrightarrow \infty$.

Desde que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} K(u_n)(x)g(x,\, u_n)(u_n-u)dx\right| &\leq \left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} K(u_n)(x)g(x,\, u_n)u_n dx\right| \\ &+ \left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} K(u)(x)g(x,\, u_n)u dx\right| \\ &+ \left|\int_{B_r} K(u_n)(x)g(x,\, u_n)(u_n-u)dx\right|.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(u_n)(x)g(x,\, u_n)(u_n-u)dx \longrightarrow 0,$$

que combinado com (1.18) conclui a prova do Lema. □

1.3 Existência de soluções para o problema penalizado (APE)

Nesta seção iremos usar os resultados obtidos anteriormente para provar que o problema penalizado possui solução e obter umas estimativas uniforme para tal solução na norma de E. Além disso, obteremos estimativas L^∞ para essa solução que será fundamental em nossos argumentos.

O seguinte resultado trata-se da existência de solução do problema auxiliar (APE).

Teorema 1.1. Suponha que $0 < \mu < \frac{N+2}{2}$ e as condições $(f_1) - (f_3)$ são mantidas. Então o problema (APE) tem solução positiva com

$$||u||^2 \leq \frac{2\theta d}{\theta - 2}.$$

Demonstração. Aplicando os Lemas (1.4) e (1.8) e o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz (veja Apêndice B Teorema B.3) obtemos o resultado. □

A seguir, estudaremos a estimativa $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ da solução u do problema penalizado cuja a finalidade é provar que u é também solução do problema original (SNE). Para tanto adaptamos algumas técnicas em [1, 16].

Lema 1.9. Seja u obtido na solução do problema (APE) do Teorema 1.1. Então, existe uma constante M_0 que depende apenas de N, μ, θ, m, p, c_0, tal que

$$|u|_\infty \leq M_0.$$

Demonstração. Por hipótese, u é uma solução de

$$-\Delta u + V(x)u = K(u)g(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

com

$$K(u) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ e } |K(u)|_\infty \leq \frac{1}{2}.$$

Como $V(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e

$$|g(u,t)| \leq |f(t)t| \leq c_0 \frac{|t|^{2^*}}{|t|} \leq c_0 |t|^{2^*-1}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
-\Delta u + V(x)u &= K(u)g(x,u) \\
&\leq \frac{1}{2} c_0 |u|^{2^*-1} \\
&\leq \frac{1}{2} c_0 |u|^{\frac{N+2}{N-2}} \\
&\leq \frac{1}{2} c_0 |u|^{\frac{4}{N-2}+1}.
\end{aligned}$$

Isso implica,

$$-\Delta u \leq \frac{1}{2} a(x)(1+|u|) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

onde $a(x) = |u|^{\frac{4}{N-2}} \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$. Por um argumento de iteração Trudinger-Brézis-Kato (ver Apêndice A Lema A.11) deduzimos que $u \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para todos os $s > 1$. Além disso, uma vez que $|a(x)|_{\frac{N}{2}}$ não dependem de $R > 0$, as normas $|u|_s$ também não dependem de $R > 1$. Agora, fixando s suficiente, os argumentos bootstrap implicam que existe $M_0 > 0$ que é independente de R, de modo que

$$|u|_\infty \leq M_0.$$

□

1.4 Existência de soluções para o problema (SNE)

Agora estamos em condições de demonstrar o Teorema 0.1, para facilitar a leitura vamos enuncia-lo novamente.

Teorema 1.2. Suponha que $0 < \mu < \frac{N+2}{2}$ e as condições (f_1), (f_2) e (f_3) sejam válidas. Existe uma constante $\nu_0 = \nu_0(m, \theta, p, \mu, c_0)$ tal que se $\nu(R) > \nu_0$ para algum $R > 1$, então o problema (SNE) possui uma solução positiva.

Demonstração. Pelo Teorema 1.1, o problema (APE) tem uma solução positiva $u_R \in E$

para cada $R > 1$. Assim, para provar a existência do problema de solução (SNE), devemos mostrar que existe $R > 1$ tal que u_R satisfaz a desigualdade

$$f(u_R) \leq \frac{V(x)}{\ell_0} u_R \text{ para } |x| \geq R.$$

Seja $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ a função definida por

$$v(x) = \frac{R^{N-2}|u|_\infty}{|x|^{N-2}}.$$

Afirmação 1.1. *v é uma função harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ isto é $\Delta v = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.*

De fato, recorde que

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$$

e

$$|x|^{N-2} = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{N-2}{2}},$$

assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) &= R^{N-2}|u|_\infty \frac{\partial}{\partial x_i}(|x|^{2-N}) \\
&= R^{N-2}|u|_\infty \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{2-N}{2}} \\
&= R^{N-2}|u|_\infty \left(\frac{2-N}{2} \right) \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{-N}{2}} 2x_i \\
&= R^{N-2}|u|_\infty (2-N) \frac{x_i}{|x|^N}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x) &= R^{N-2}|u|_\infty (2-N) \frac{\partial v}{\partial x_i} \left[\frac{x_i}{|x|^N} \right] \\
&= R^{N-2}|u|_\infty (2-N) \frac{\partial v}{\partial x_i} \left[\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{-N}{2}} x_i \right] \\
&= R^{N-2}|u|_\infty (2-N) \left[\frac{-N}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{-N-2}{2}} 2x_i x_i + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{-N}{2}} .1 \right] \\
&= R^{N-2}|u|_\infty (2-N) \left[\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{-N-1} (-N x_i^2 + 1) \right]
\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x) \;=\; R^{N-2}|u|_\infty \frac{(2-N)}{|x|^N}\left[\frac{-N}{|x|^2}x_i^2+1\right].$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta v(x) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\left[R^{N-2}|u|_\infty \frac{(2-N)}{|x|^N}\left(\frac{-N}{|x|^2}x_i^2+1\right)\right]\\
&= R^{N-2}|u|_\infty \frac{(2-N)}{|x|^N}\left[\frac{-N}{|x|^2}|x|^2+N\right]
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\Delta v(x) &= R^{N-2}|u|_\infty \frac{(2-N)}{|x|^N}.0\\
&= 0,
\end{aligned}$$

em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ para $N \geq 3$, mostrando que v é harmônica.

Pelo Lema 1.9, temos a desigualdade

$$u(x) \leq v(x) \text{ em } \partial B_R,$$

o que implica que a função

$$w(x) = \begin{cases} (u(x)-v(x))_+, & \text{se } |x| \geq R\\ 0, & \text{se } |x| \leq R, \end{cases}$$

pertence a $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Como $\Delta v = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $w = 0$ em ∂B_R e $w \geq 0$ segue-se que,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u-v)\nabla w dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla w - \nabla v \nabla w) dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla w dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w dx.
\end{aligned}$$

Pela Formula de Green (ver Apêndice A Teorema A.3), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} \nabla u \nabla w dx = \int_{\partial B_R} \frac{\partial v}{\partial w} v d\sigma - \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} (\Delta v) w dx.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla w dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla w dx - \left[\int_{\partial B_R} \frac{\partial v}{\partial w} v d\sigma - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} (\Delta v) w dx \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla w dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (K(u)(x) g(x,u) uw - V(x) uw) dx \\
&= \int_{\{|x|<R\} \cup \{|x| \geq R\}} (K(u)(x) g(x,u) uw - V(x) uw) dx \\
&= \int_{\{|x|<R\}} (K(u)(x) g(x,u) uw - V(x) uw) dx \\
&+ \int_{\{|x| \geq R\}} (K(u)(x) g(x,u) uw - V(x) uw) dx,
\end{aligned}
$$

logo

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx &= \int_{\{|x| \geq R\}} (K(u)(x) g(x,u) uw - V(x) uw) dx \\
&\leq \int_{\{|x| \geq R\}} \left((K(u)(x) \frac{V(x)}{\ell_0} uw - V(x) uw \right) dx \\
&\leq \int_{\{|x| \geq R\}} \left(\frac{1}{\ell_0} K(u)(x) u - 1 \right) V(x) uw dx \\
&\leq 0.
\end{aligned}
$$

Mostrando que $w \equiv 0$, isto é $u \leq v$ em $|x| \geq R$, equivalentemente

$$
u(x) \leq \frac{R^{N-2} |u|_\infty}{|x|^{N-2}}.
$$

Pelo Lema (1.9) temos,

$$
u(x) \leq \frac{R^{N-2} M_0}{|x|^{N-2}}, \; \forall \, |x| \geq R.
$$

usando o fato de $|f(u)| \leq c_0 |u|^{q-1}$, temos

$$
\frac{f(u)}{u} \leq c_0 |u|^{q-2} \leq \left| \frac{R^{N-2} M_0}{|x|^{N-2}} \right|^{q-2} \leq c_0 M_0^{q-2} \frac{R^{(q-2)(N-2)}}{|x|^{(q-2)(N-2)}}, \forall \, |x| \geq R.
$$

Agora, fixe $R > 1$ e tomando a função ν definido em (2) temos $\nu(R) > 0$. Então, a última desigualdade combinada com a definição (2) nos permite concluir que

$$
\frac{f(u)}{u} \leq c_0 |u|^{q-2} \leq \frac{c_0 \ell_0 M_0^{q-2} V(x)}{\ell_0 \nu(R)}, \forall \, |x| \geq R.
$$

Assim, defina o número

$$\nu_0 = c_0 \ell_0 M_0^{q-2},$$

Usando a hipótese que $\nu(R) > \nu_0$, para algum $R > 1$, concluímos que

$$\frac{f(u_R)}{u_R} \leq \frac{\nu_0 V(x)}{\ell_0 \nu(R)} \leq \frac{V(x)\nu(R)}{\ell_0 \nu(R)} = \frac{V(x)}{\ell_0},$$

assim,

$$f(u_R) \leq \frac{V(x)}{\ell_0} u_R \text{ para } |x| \geq R.$$

Portanto, por (1.10), concluímos que a solução do problema penalizado também é solução do problema (SNE). □

1.5 Existência de soluções para o problema (SNE) no caso em que $V(x)$ é radial

Nesta seção, vamos analisar o caso em que $V(x)$ é uma função radial, e obtemos um resultado de existência de solução do problema.

Se o potencial V é uma função radial ou seja,

$$V(x) = V(|x|), \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Definimos a função $\mathcal{W} : (1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ por

$$\mathcal{W}(R) = \inf_{|x| \geq R} |x|^{\frac{4-\mu}{2}} V(x). \tag{1.19}$$

Podemos usar a técnica utilizada na prova do Teorema 1.2 para estudar o caso em que

$$f(t) = |t|^{\frac{4-\mu}{N-2}} t, \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{f_4}$$

onde $0 < \mu < \min\left\{\frac{N+2}{2}, 4\right\}$.

Teorema 1.3. Suponha que $0 < \mu < \min\left\{\frac{N+2}{2}, 4\right\}$, V é uma função radial e a condição (f_4) é valida. Existe uma constante $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}(m, \mu)$ tal que se $\mathcal{W}(R) > \mathcal{W}_0$ para algum $R > 1$, então o problema (SNE) possui uma solução positiva.

Na demonstração do Teorema 1.3, substituimos o espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ por $D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e consideramos

$$E_{rad} = \left\{ u \in D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Neste caso, devido à desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev, o funcional energia

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{(N-2)^2}{2(2N-\mu)^2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * |u|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}\right)|u|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}dx,$$

está bem definido e pertence a $C^1(E,\,\mathbb{R})$. Agora, repetindo as mesmas idéias das seções anteriores, podemos considerar novamente o problema (APE).

Demonstração. Seguindo os mesmos argumentos do teorema anterior conseguimos verificar que o funcional Φ satisfaz, os Lemas 1.3, 1.4 e 1.5.

A partir dos Lemas 1.3, 1.4 e 1.5 e do Teorema 1.1, (APE) tem uma solução positiva $u_R \in E_{rad}$. Assim, para provar que se trata de fato de uma solução do problema (SNE). Devemos mostrar que existe $R > 1$ tal que u_R satisfaz a desigualdade

$$f(u_R(x)) \le \frac{V(x)}{\ell_0}u_R(x) \text{ para } |x| \ge R.$$

Inicialmente, recorde que

$$|u_R(x)| \le \frac{C||u_R||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}}{|x|^{\frac{N-2}{2}}},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

e

$$||u_R||^2 \le \frac{2\theta d}{\theta - 2},$$

de onde segue

$$||u_R||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \le A,\ \text{onde } A = \sqrt{\frac{2\theta d}{\theta-2}}$$

então,

$$u_R(x) \le \frac{CA}{|x|^{\frac{N-2}{2}}},\ \text{para } |x| \ge R.$$

Agora usando, $f(u) = |u|^{\frac{4-\mu}{N-2}}u$ temos

$$\frac{f(u_R)}{u_R} = |u_R|^{\frac{4-\mu}{N-2}} \le \frac{(CA)^{\frac{4-\mu}{N-2}}}{|x|^{\frac{4-\mu}{2}}} \text{ para } |x| \ge R.$$

Usando a definição de $\mathcal{W}(R)$, segue que

$$\frac{f(u_R)}{u_R} = |u_R|^{\frac{4-\mu}{N-2}} \le \frac{\ell_0(CA)^{\frac{4-\mu}{N-2}}V(x)}{\ell_0\mathcal{W}(R)} \text{ para } |x| \ge R.$$

Fixando

$$\mathcal{W}_0 = \ell_0(CA)^{\frac{4-\mu}{N-2}} > 0,$$

e supondo que exista $R > 1$ tal que $\mathcal{W}(R) > \mathcal{W}_0$. Então, para $R > 1$, podemos garantir que

$$\frac{f(u_R)}{u_R} \leq \frac{\mathcal{W}_0 V(x)}{\ell_0 \mathcal{W}(R)} \leq \frac{\mathcal{W}(R) V(x)}{\ell_0 \mathcal{W}(R)} \leq \frac{V(x)}{\ell_0}, \text{ para } |x| \geq R,$$

implicando que $I'(u_R) = 0$ em E_{rad}. Agora usando o Principio da Criticalidade Simétrica de Palais, veja o Apêndice A Teorema A.12 podemos concluir que

$$I'(u_R) = 0 \text{ em } E,$$

finalizando a prova. $\square$

Apêndice A

Resultados e Definições

Como uma referência rápida ao leitor, apresentamos definições e resultados que usamos neste trabalho.

Definição A.1. Uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita *mensurável* se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$E_\alpha = \{x \in \Omega;\ u(x) \geq \alpha\}$$

é mensurável no sentido de Lebesgue.

Definição A.2. Uma medida sobre um espaço mensurável $(X, \mathcal{X})$ é uma função $\mu : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ onde $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty,\ -\infty\}$ que verifica as seguintes propriedades:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(E) \geq 0,\ \forall\, E \in \mathcal{X}$

(iii) Se $\{E_n\} \subset \mathcal{X}$ uma sequência de conjuntos disjuntos ($E_n \cap E_m = \emptyset$, para $n \neq m$) então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Definição A.3. Para $1 \leq p < +\infty$. O espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ é o seguinte conjunto

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ é mensurável e } \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p dx < +\infty\right\},$$

munido da norma

$$||u||^p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição A.4. Definimos o espaço $L^\infty(\Omega)$ por

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{é mensurável e existe } c \text{ tal que } |u(x)| \leq c\, q.t.p \text{ em } \Omega\}.$$

Um elemento de $L^\infty(\Omega)$ é dito uma *função essencialmente limitada*. E para cada $u \in L^\infty(\Omega)$, definimos

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess \inf\{c;\ |u(x)| \leq c\, q.t.p \text{ em } \Omega\}.$$

Definição A.5. Seja $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Chamaremos de *suporte* de u o conjunto

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}.$$

Definição A.6. Designamos por $C_0(\Omega)$ o espaço das funções contínuas sobre Ω que têm suporte compacto e por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções que têm suporte compacto e que possuem em derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados *funções testes* em Ω.

Definição A.7. Para $1 \leq p < +\infty$. Denotamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o espaço das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u(x)|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω, este é chamado de *espaço das funções localmente integráveis.*

Definição A.8. Uma função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma *função Carathéodory* quando a função $f_s : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_s(x) = f(x,\ s)$ é mensurável, para cada $s \in \mathbb{R}$ e a função $f_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_x(x) = f(x,\ s)$ é contínua, para cada $x \in \overline{\Omega}$.

Teorema A.1. (Teorema da Convergência Monótona) Seja (f_n) uma sequência não-decrescente de funções em $M^+(X,\ \mathcal{X})$, que converge para f, então

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Demonstração. Ver [27] página 31. □

Lema A.1. (Lema de Fatou) Se $(f_n) \in M^+(X,\ \mathcal{X})$, então

$$\int \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [27] página 33. □

Teorema A.2. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis as quais convergem quase sempre para f. Se existe uma função g integrável tal que

$$|f_n| \leq g,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \text{quase sempre},$$

então f é integrável e

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Demonstração. Ver [27] página 44. □

Lema A.2. Seja $1 < p < \infty$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$ convergindo $q.t.p.$ para f. Então $f_n \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega)$.

Demonstração. Ver [27] página 11. □

Teorema A.3. (Fórmula de Green) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e suave. Sejam $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Então

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} v d\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

onde $v = v(x)$ é o exterior normal a $\partial\Omega$ em x, $\dfrac{\partial u}{\partial v}(x) = \nabla u(x) v(x)$ e σ é a medida de superficie em $\partial\Omega$.

Demonstração. Ver [17], página 628, Teorema 3. □

Teorema A.4. (de Vainberg) Sejam $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^q(\Omega)$ e $f \in L^q(\Omega)$ tais que

$$f_j \longrightarrow f \text{ em } L^q(\Omega).$$

Então, existe $(f_{j_k}) \subset (f_j)$ e uma função $g \in L^q(\Omega)$ tal que

$$|f_{j_k}(x)| \leq g(x) \; q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Demonstração. Ver [13], página 94, Teorema 4.9. □

Seja $1 < p < +\infty$. Dizemos que q é expoente conjugado de p se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Teorema A.5. (Desigualdade de Hölder) Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^p(\Omega)$ com $p \geq 1$ e $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$||fg||_{L^1(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)} ||g||_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [27] página 56. □

Teorema A.6. (Teorema de Representação de Riesz) Se $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida arbitrário e G um funcional linear limitado em $L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$, $1 < p < \infty$, então existe $g \in L^q(X, \mathcal{X}, \mu)$, onde $q = \frac{p}{p-1}$, tal que

$$G(f) = \int fg d\mu,$$

para todo f em $L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$. Além disso, $||G|| = ||g||_{L^q(X, \mathcal{X}, \mu)}$.

Demonstração. Ver [27] página 92. □

Teorema A.7. (Teorema de Fubini) Sejam $(X,\ \mathcal{X},\ \mu)$ e $(Y,\ \mathcal{Y},\ \nu)$ espaços σ-finitos e seja a medida ω em $Z = X \times Y$ o produto de μ e ν. Se a função F em $Z = X \times Y$ para $\mathbb{R}$ é integrável com respeito a ω, então as funções de valor real estendidas *q.t.p.* dado por

$$f(x) = \int_Y F_x d\nu,\ \int_X F_y d\mu, \tag{A.1}$$

têm integrais finitas e

$$\int_X f d\mu = \int_Z F d\omega = \int_Y g d\nu. \tag{A.2}$$

Em outros símbolos,

$$\int_X \left[\int_Y F_x d\nu\right] d\mu = \int_Z F d\omega = \int_Y \left[\int_X F_y d\mu\right] d\nu. \tag{A.3}$$

Demonstração. Ver [27] página 120. □

Teorema A.8. Seja ν uma medida nos conjuntos de Borel da reta real positiva $[0;+\infty)$ tal que

$$\Phi(t) := \nu([0,\ t)), \tag{A.4}$$

é finito para cada $t > 0$. (Note que $\Phi(0) = 0$ e que Φ, sendo monótona, é mensurável em Borel). Seja $(\Omega,\ \sigma,\ \mu)$ um espaço de medida e f qualquer função mensurável não-negativa em Ω. Então

$$\int_\Omega \Phi(f(x))\mu(dx) = \int_0^\infty \mu(\{x : f(x) > t\})\nu(dt). \tag{A.5}$$

Em particular, escolhendo $\nu(dt) = pt^{p-1}dt$ para $p > 0$, temos

$$\int_\Omega \Phi(f(x))\mu(dx) = p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{x : f(x) > t\})dt. \tag{A.6}$$

Ao escolher μ ser a medida de Dirac em algum ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e $p = 1$, temos

$$f(x) = \int_0^\infty \chi_{\{f>t\}}(x)dt. \tag{A.7}$$

Demonstração. Ver [9] página 26. □

Teorema A.9. [9], Theorem 4.3 (Desigualdade Hardy-Littlewood-Sobolev) Seja $s,\ r > 1$ e $0 < \mu < n$ com $\frac{1}{s} + \frac{\mu}{n} + \frac{1}{r} = 2$. Se $g \in L^s(\mathbb{R}^N)$ e $h \in L^r(\mathbb{R}^N)$, então existe uma constante aguda $C(s,\ n,\ \mu,\ r)$, independente de g, h, de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{g(x)h(y)}{|x-y|^{\mu}}dydx \leq C(s,\ n,\ \mu,\ r)|g|_s|h|_r.$$

A constante satisfaz

$$C(s,\ n,\ \mu,\ r) \leq \frac{n}{\mu(n-\mu)}\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{\mu}{n}}\frac{1}{sr}\left[\left(\frac{\frac{\mu}{n}}{1-\frac{1}{s}}\right)^{\frac{\mu}{n}}+\left(\frac{\frac{\mu}{n}}{1-\frac{1}{r}}\right)^{\frac{\mu}{n}}\right].$$

Demonstração. Sejam $g \in L^s(\mathbb{R}^n)$ e $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$ funções não negativas tal que $||g||_s = ||h||_r = 1$. Pelo Teorema A.8 temos as seguintes fórmulas:

$$|x|^{-\mu} = \mu\int_0^{\infty} c^{-\mu-1}\chi_{\{|x|<c\}}(x)dc, \tag{A.8}$$

$$g(x) = \mu\int_0^{\infty}\chi_{\{g>a\}}(x)da, \tag{A.9}$$

$$h(x) = \int_0^{\infty}\chi_{\{h>b\}}(x)db. \tag{A.10}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|x-y|^{-\mu}h(y)dydx \\ &:= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{\infty}\chi_{\{g>a\}}(x)da\left(\mu\int_0^{\infty}c^{-\mu-1}\chi_{\{|x|<c\}}(x)dc\int_0^{\infty}\chi_{\{h>b\}}(x)db\right)dydx \\ &:= \mu\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}c^{-\mu-1}\chi_{\{g>a\}}(x)\chi_{\{h>b\}}(y) \\ &\times\ \chi_{\{|x|<c\}}(x-y)dcdbdadydx. \end{aligned} \tag{A.11}$$

As integrais sobre x e y em (A.11) podem ser estimadas, substituindo um dos três $\chi's$ em (A.11) por 1. Assim,

$$I \leq \mu\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}c^{-\mu-1}I(a,\ b,\ c)dcdbda$$

e

$$I(a,\ b,\ c) := \frac{v(a)w(b)u(c)}{\max\{v(a),\ w(b),\ u(c)\}}, \tag{A.12}$$

com

$$w(b) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{h>b\}}(y)db, \; v(a) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{g>a\}}(x)da \text{ e } u(c) = \left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right) c^n.$$

As normas de f e h podem ser escritas como

$$||f||_s^s = s\int_0^\infty a^{p-1}v(a)da = 1, \; ||h||_r^r = r\int_0^\infty b^{r-1}w(b)db = 1. \tag{A.13}$$

Para fazer a integração em c, assumimos primeiro que $v(a) \geq w(b)$. Usando (A.12) calculamos

Se $u(c) = \left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right) c^n > v(a)$ então $c^n > \frac{v(a)n}{|S^{n-1}|}$ logo $c > \left(\frac{v(a)n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{1}{n}}$ assim,

$$\int_0^\infty c^{-\mu-1}I(a,\, b,\, c)dc \;\; \leq \;\; \int_{u(c)\leq v(a)} c^{-\mu-1}w(b)u(c)dc + \int_{u(c)>v(a)} c^{-mu-1}w(b)v(a)dc.$$

então,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty c^{-\mu-1}I(a,\, b,\, c)dc \;\; &\leq \;\; w(b)\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)\int_0^{\left(\frac{v(a)n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{1}{n}}} c^{-\mu-1+n}dc \\
&+ \;\; w(b)v(a)\int_{\left(\frac{v(a)n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{1}{n}}}^\infty c^{-\mu-1+n}dc \\
&\leq \;\; w(b)\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)\left[\frac{c^{-\mu+n}}{-\mu+n}\right]_o^{\left(\frac{v(a)n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{1}{n}}} \\
&+ \;\; w(b)v(a)\int_{\left(\frac{v(a)n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{1}{n}}}^\infty c^{-\mu-1+n}dc.
\end{aligned}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
w(b)v(a)\int_{\left(\frac{v(a)n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{1}{n}}}^\infty c^{-\mu-1+n}dc \;\; &= \;\; \lim_{j\to\infty}\left(\int_{\left(\frac{v(a)n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{1}{n}}}^j c^{-\mu-1+n}dc\right) \\
&= \;\; w(b)v(a)\lim_{j\to\infty}\left[\frac{c^{-\mu}}{-\mu}\right]_{\left(\frac{v(a)n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{1}{n}}}^j \\
&= \;\; w(b)v(a)\lim_{j\to\infty}\left[\frac{j^{-\mu}}{-\mu} - \frac{\left[\left(\frac{v(a)n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{-\mu}}{-\mu}\right] \\
&= \;\; w(b)\frac{1}{\mu}\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{\mu}{n}} v(a)^{1-\frac{\mu}{n}}
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
w(b)\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)\left[\frac{c^{-\mu+n}}{-\mu+n}\right]_o^{\left(\frac{v(a)n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{1}{n}}} &= w(b)\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)\frac{1}{n-\mu}\left[\left(\frac{v(a)n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{-\mu+n} \\
&= w(b)\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)\frac{1}{n-\mu}\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{\mu}{n}-1} v(a)^{1-\frac{\mu}{n}} \\
&= w(b)\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{\mu}{n}}\frac{1}{n-\mu}v(a)^{1-\frac{\mu}{n}}.
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty c^{-\mu-1}I(a,\, b,\, c)dc &\leq w(b)\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{\mu}{n}}\frac{1}{n-\mu}v(a)^{1-\frac{\mu}{n}}+\frac{1}{\mu}\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{\mu}{n}}v(a)^{1-\frac{\mu}{n}} \\
&\leq \frac{n}{\mu(n-\mu)}\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{\mu}{n}}w(b)v(a)^{1-\frac{\mu}{n}}. \qquad \text{(A.14)}
\end{aligned}
$$

Agora se $w(b)\geq v(a)$ temos

$$
\int_0^\infty c^{-\mu-1}I(a,\, b,\, c)dc \leq \int_{u(c)\leq w(b)} c^{-\mu-1}v(a)u(c)dc+\int_{u(c)>w(b)} c^{-mu-1}v(a)w(b)dc.
$$

Se $u(c)=\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)c^n>w(b)$ então $c^n>\frac{w(b)n}{|S^{n-1}|}$ logo $c>\left(\frac{w(b)n}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{1}{n}}$ e semelhantemente,

$$
\int_0^\infty c^{-\mu-1}I(a,\, b,\, c)dc \leq \frac{n}{\mu(n-\mu)}\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{\mu}{n}}w(b)^{1-\frac{\mu}{n}}v(a). \qquad \text{(A.15)}
$$

De (A.14) e (A.15) temos

$$
I\leq \frac{n}{\mu(n-\mu)}\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{\mu}{n}}\times\int_0^\infty\int_0^\infty \min\{w(b)v(a)^{1-\frac{\mu}{n}},\, w(b)^{1-\frac{\mu}{n}}v(a)\}dadb. \qquad \text{(A.16)}
$$

Observe que $w(b)\leq v(a)$ se, e somente se $w(b)v(a)^{1-\frac{\mu}{n}}\leq w(b)^{1-\frac{\mu}{n}}v(a)$. A seguir, dividimos a integral em b, em duas integrais de 0 a $a^{\frac{s}{r}}$ e de $a^{\frac{s}{r}}$ ao infinito. Assim, a integral

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty\int_0^\infty \min\{w(b)v(a)^{1-\frac{\mu}{n}},\, w(b)^{1-\frac{\mu}{n}}v(a)\}dadb &\leq \int_0^\infty v(a)\left[\int_0^{a^{\frac{s}{r}}} w(b)^{1-\frac{\mu}{n}}db\right]da \\
&+ \int_0^\infty v(a)^{1-\frac{\mu}{n}}\left[\int_{a^{\frac{s}{r}}}^\infty w(b)^{1-\frac{\mu}{n}}db\right]da.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema de Fubini temos

$$
\int_0^\infty v(a)^{1-\frac{\mu}{n}}\left[\int_{a^{\frac{s}{r}}}^\infty w(b)^{1-\frac{\mu}{n}}db\right]da=\int_0^\infty w(a)\left[\int_0^{a^{\frac{r}{s}}} v(b)^{1-\frac{\mu}{n}}db\right]da. \qquad \text{(A.17)}
$$

Como $1-\frac{\mu}{n}$ e $\frac{\mu}{n}$ são expoentes conjugados e com $m=(r-1)\left(1-\frac{1}{\mu}\right)$. Pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}\int_0^{a^{\frac{s}{r}}} w(b)^{1-\frac{\mu}{n}}db &= \int_0^{a^{\frac{s}{r}}} w(b)^{1-\frac{\mu}{n}}b^m b^{-m}db\\ &\leq \left(\int_0^{a^{\frac{s}{r}}} w(b)^{\frac{(1-\frac{\mu}{n})}{1-\frac{\mu}{n}}} b^{r-1}db\right)^{1-\frac{\mu}{n}} \left(\int_0^{a^{\frac{s}{r}}} b^{\frac{-mn}{\mu}}db\right)^{\frac{\mu}{n}},\end{aligned}$$

como $\frac{mn}{\mu}<1$ temos

$$\left(\int_0^{a^{\frac{s}{r}}} b^{-\frac{mn}{\mu}}db\right)^{\frac{\mu}{n}} = \left(\left[\frac{b^{1-\frac{mn}{\mu}}}{1-\frac{mn}{\mu}}\right]_0^{a^{\frac{s}{r}}}\right)^{\frac{\mu}{n}} = \left(\frac{\mu}{\mu-mn}\right)^{\frac{\mu}{n}}\left[\left(a^{\frac{s}{r}}\right)^{\frac{\mu-mn}{\mu}}\right]^{\frac{\mu}{n}}.$$

Como

$$\frac{\mu-mn}{\mu}=\frac{1}{\mu}\left[\mu-(r-1)\left(\frac{n-\mu}{n}\right)n\right]=\frac{\mu-rn+ru+n-\mu}{\mu}=\frac{n-r(n-\mu)}{\mu}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty v(a)\left[\int_0^{a^{\frac{s}{r}}} w(b)^{1-\frac{\mu}{n}}db\right]da &\leq \left(\frac{\mu}{n-r(n-\mu)}\right)^{\frac{\mu}{n}}\left(\int_0^\infty v(a)\left[\left(a^{\frac{s}{r}}\right)^{\frac{\mu-mn}{\mu}}\right]^{\frac{\mu}{n}}da\right)\\ &\times\left(\int_0^\infty w(b)b^{r-1}db\right)^{1-\frac{\mu}{n}}\end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}\frac{s}{r}\left[\frac{\mu-mn}{\mu}\right]\frac{\mu}{n} &= \frac{s}{r}\left[\frac{n-r(n-\mu)}{\mu}\right]\frac{\mu}{n}=\frac{s}{r}\left[\frac{n-r(n-\mu)}{n}\right]\\ &= \frac{s}{r}\left[1-r+\frac{r\mu}{n}\right]=s\left[\frac{1}{r}+\frac{\mu}{n}-1\right].\end{aligned}$$

Por hipótese $\frac{1}{r}+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{s}=2 \Longleftrightarrow \frac{1}{r}+\frac{\mu}{n}=\frac{2s-1}{s}$ então,

$$\frac{s}{r}\left[\frac{\mu-mn}{\mu}\right]\frac{\mu}{n} = s\left(\frac{2s-1}{s}-1\right)=s-1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty v(a)\left[\int_0^{a^{\frac{s}{r}}} w(b)^{1-\frac{\mu}{n}}db\right]da &\leq \left(\frac{\mu}{n-r(n-\mu)}\right)^{\frac{\mu}{n}}\left(\int_0^\infty v(a)a^{s-1}da\right)\\ &\times\left(\int_0^\infty w(b)b^{r-1}db\right)^{1-\frac{\mu}{n}}\end{aligned}$$

Por (A.13) temos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty v(a)\left[\int_0^{a^{\frac{s}{r}}} w(b)^{1-\frac{\mu}{n}}db\right]da &\leq \left(\frac{\mu}{n-r(n-\mu)}\right)^{\frac{\mu}{n}}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{r}\right)^{1-\frac{\mu}{n}}\\
&\leq \left(\frac{\mu r}{n-r(n-\mu)}\right)^{\frac{\mu}{n}}\frac{1}{rs}
\end{aligned}
$$

Observe que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mu r}{n-r(n-\mu)} &= \frac{\mu r}{r\left(\frac{n}{r}-n+\mu\right)} \Longleftrightarrow \frac{\frac{\mu}{n}}{\frac{\left(\frac{n}{r}-n+\mu\right)}{n}} = \frac{\frac{\mu}{n}}{\frac{1}{r}-1+\frac{\mu}{n}}\\
&= \frac{\frac{\mu}{n}}{\frac{2s-1}{s}-1} = \frac{\frac{\mu}{n}}{1-\frac{1}{s}}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty v(a)\left[\int_0^{a^{\frac{s}{r}}} w(b)^{1-\frac{\mu}{n}}db\right]da &\leq \left(\frac{\mu}{n-r(n-\mu)}\right)^{\frac{\mu}{n}}\left(\int_0^\infty v(a)a^{s-1}da\right)\\
&\times \left(\int_0^\infty w(b)b^{r-1}db\right)^{1-\frac{\mu}{n}}\\
&\leq \frac{1}{sr}\left(\frac{\frac{\mu}{n}}{1-\frac{1}{s}}\right)^{\frac{\mu}{n}}. \qquad (A.18)
\end{aligned}
$$

Um cálculo análogo usando (A.17) obtemos

$$
\int_0^\infty v(a)^{1-\frac{\mu}{n}}\left[\int_{a^{\frac{s}{r}}}^\infty w(b)^{1-\frac{\mu}{n}}db\right]da \leq \frac{1}{sr}\left(\frac{\frac{\mu}{n}}{1-\frac{1}{r}}\right)^{\frac{\mu}{n}}. \qquad (A.19)
$$

Logo de (A.18) e (A.19) temos

$$
I \leq \frac{n}{\mu(n-\mu)}\left(\frac{|S^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{\mu}{n}}\frac{1}{sr}\left[\left(\frac{\frac{\mu}{n}}{1-\frac{1}{s}}\right)^{\frac{\mu}{n}}+\left(\frac{\frac{\mu}{n}}{1-\frac{1}{r}}\right)^{\frac{\mu}{n}}\right],
$$

o que concluí a prova. □

Teorema A.10. Seja $N \geq 3$. Então,

$$
D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)
$$

esta imersão é contínua. Veja [20], [24].

Salientamos que a continuidade da imersão acima é expressa explicitamente por desigualdades da forma

$$
||u||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C||u||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}.
$$

Teorema A.11. [[23], Lema B3, pg. 270] Seja Ω um dominio em $\mathbb{R}^N$ e seja $g : \Omega\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função Carathéodory tal que para quase todo $x \in \Omega$ é valido

$$|g(x,\ u)| \leq a(x)(1 + |u|) \tag{A.20}$$

com a função $0 \leq a \in L^{\frac{n}{2}}_{loc}(\Omega)$. Seja $u \in H^{1,2}_{loc}(\Omega)$ uma solução fraca da equação

$$-\Delta u = g(.,\ u) \text{ em } \Omega, \tag{A.21}$$

então $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ para qualquer $q < \infty$. Se $u \in H^{1,2}_0(\Omega)$ e $a \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$, então $u \in L^q(\Omega)$ para qualquer $q < \infty$.

Demonstração. Escolha $\eta \in C^\infty_0(\Omega)$ e para $s \geq 0$, $L \geq 0$ seja

$$\varphi = \varphi_{s,\,L} = u \min\{|u|^{2s},\ L^2\}\eta^2 \in H^{1,2}_0(\Omega).$$

Com $\operatorname{supp}\varphi \subset\subset \Omega$, usando φ como função teste em (A.21) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2 \min\{|u|^{2s},\ L^2\}\eta^2 dx \ &+\ \frac{s}{2}\int_{\{x\in\Omega;\ |u(x)|^s\leq L\}} |\nabla(|u|^2)|^2|u|^{2s-2}\eta^2 dx \\
&\leq\ -2\int_\Omega (\nabla u)u \min\{|u|^{2s},\ L^2\}(\nabla\eta)\eta dx \\
&+\ \int_\Omega a(1 + 2|u|^2) \min\{|u|^{2s},\ L^2\}\eta^2 dx \\
&\leq\ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \min\{|u|^{2s},\ L^2\}\eta^2 dx \\
&+\ c\int_\Omega a|u|^2 \min\{|u|^{2s},\ L^2\}|\nabla\eta|^2 dx \\
&+\ 3\int_\Omega a|u|^2 \min\{|u|^{2s},\ L^2\}\eta^2 dx + \int_\Omega |a|\eta^2 dx.
\end{aligned}$$

Suponha que $u \in L^{2s+2}(\operatorname{supp}(\eta))$, então para qualquer $K \geq 1$ com constantes c dependendo da norma em $L^{2s+2}(\Omega)$ de u, restrito a $\operatorname{supp}(\eta)$, são válidas

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(u \min\{|u|^s,\ L^2\}\eta)|^2 dx \ &\leq\ c + c\int_\Omega a|u|^2 \min\{|u|^s,\ L^2\}\eta^2 dx \\
&\leq\ c + cK\int_\Omega a|u|^2 \min\{|u|^s,\ L^2\}\eta^2 dx \\
&+\ c\int_{\{x\in\Omega;\ a(x)\geq K\}} a|u|^2 \min\{|u|^s,\ L^2\}\eta^2 dx,
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(u\min\{|u|^s,\ L^2\}\eta)|^2dx &\le c(1+K)+\left(c\int_{\{x\in\Omega;\, a(x)\ge K\}} a^{\frac{n}{2}}dx\right)^{\frac{2}{n}}\\ &\times \left(\int_\Omega |u\min\{|u|^s,\ L\}\eta|^{\frac{2n}{n-2}}dx\right)^{\frac{n-2}{2}}\\ &\le c(1+K)+c_1\varepsilon(K)\int_\Omega |\nabla(u\min\{|u|^s,\ L\}\eta)|^2dx,\end{aligned}$$

onde

$$\varepsilon(K)=\left(\int_{\{x:\Omega;\, a(x)\ge K\}} a^{\frac{n}{2}}dx\right)^{\frac{2}{n}} \longrightarrow 0,\ (K\longrightarrow\infty).$$

Fixe K tal que $c_1\varepsilon(K)=\frac{1}{2}$ e observe que para esta escolha de K(e como s acima) agora podemos concluir que

$$\int_\Omega |\nabla(u\min\{|u|^s,\ L\}\eta)|^2dx\le c(1+K),$$

permanece uniformemente limitado em L. Portanto, fazendo $L\longrightarrow\infty$ temos

$$|u|^{s+1}\eta\in H_0^{1,2}(\Omega)\hookrightarrow L^{2^*}(\Omega),$$

ou seja, sempre que $u\in L^{2s+2}_{loc}(\Omega)$ encontramos $u\in L_{loc}^{\frac{(2s+2)n}{n-2}}(\Omega)$. Agora iterando, deixando $s_0=0,\ s_i+1=(s_{i-1}+1)\frac{n}{n+2}$, se $i\ge 1$, para obter a conclusão do Teorema.

Se $u\in H_0^{1,2}(\Omega)$ podemos deixar $n=1$ para obter que $u\in L^q(\Omega)$. Para todo $q<\infty$. □

Teorema A.12. (Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais) Sejam H um espaço de Hilbert e G um grupo topológico. Suponha que uma ação de G sobre o espaço H seja isométrica e suponha que $I\in C^1(H,\,\mathbb{R})$ é invariante pela ação. Suponha que u é um ponto crítico de I restrito ao $Fix(G)$, que é dado por

$$Fix(G):=\{u\in H;\ gu=u,\ \forall\, g\in G\},$$

onde $gu(x)=u(g^{-1}x), \forall\, x\in H$. Então, u é ponto crítico de I em H. Veja [28].

Apêndice B

Teorema do Passo da Montanha

Neste Apêndice, vamos apresentar uma breve revisão dos espaços de Sobolev, enunciaremos e demonstraremos o Lema de Deformação, o qual é a principal ferramenta para demonstrarmos o celebrado Teorema do Passo da Montanha de Ambrosseti e Rabinowitz [21]. Também enunciaremos e demonstraremos a versão do Teorema do Passo da Montanha devido a Willen [24].

B.1 Revisão sobre Espaços de Sobolev

Seja Ω um dominio do $\mathbb{R}^N$, isto é um aberto e conexo do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave. Definimos o seguinte Espaço de Banach:

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

com $||u||_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

Definimos também o seguinte subespaço fechado de $H^1(\Omega)$:

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}$$

com relação à norma $||.||_{H^1(\Omega)}$.

Vamos agora definir imersão contínua e imersão compacta e, em seguida, verificar as imersões que ocorrem em $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.

Definição B.1. Sejam E_1, E_2 dois espaços normados tais que $E_1 \subset E_2$. Diz-se que E_1 está *imerso continuamente* em E_2 ou que a imersão $E_1 \hookrightarrow E_2$ é contínua, quando a aplicação $i : E_1 \longrightarrow E_2$ tal que $i(x) = x$ é uma aplicação contínua.

Definição B.2. Sejam E_1, E_2 dois espaços normados tais que $E_1 \subset E_2$. Diz-se que E_1 está *imerso compactamente* em E_2 ou que a imersão $E_1 \hookrightarrow E_2$ é compacta, quando a aplicação $i : E_1 \longrightarrow E_2$ tal que $i(x) = x$ é uma aplicação compacta.

Vamos agora recordar as imersões contínuas e as imersões compactas sobre o espaços de Sobolev $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.

As seguintes imersões são contínuas:

$$\begin{cases} \text{Para todo } s \in \left[2,\ 2^* = \dfrac{2N}{N-2}\right] \text{ se } N \geq 3 \\ H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \text{Para todo } s \in [2,\ +\infty) \text{ se } N = 1 \text{ ou } n = 2 \\ H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \end{cases}$$

Como consequência dessas imersões, existe $C > 0$ tal que

$$||u||_s \leq C||u||_{H^1(\Omega)},\ \forall\, u \in H^1(\Omega),$$

onde

$$||u||_s = \left(\int_\Omega |u|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Antes de apresentarmos as imersões compactas, recordemos a desigualdade de Poincaré:

Teorema B.1. Se Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, então existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, sobre $H_0^1(\Omega)$ é possível definir a norma $||u||_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$, a qual é equivalente a norma $||.||_{H_0^1(\Omega)}$.

Se Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, as seguintes imersões são compactas:

$$\begin{cases} \text{Para todo } s \in \left[2,\ 2^* = \dfrac{2N}{N-2}\right[\text{ se } N \geq 3 \\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \text{Para todo } s \in [1,\ +\infty) \text{ se } N = 1 \text{ ou } n = 2 \\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \end{cases}$$

como consequência dessas imersões e desde que $H_0^1(\Omega)$ é um Espaço de Banach reflexivo, concluímos que para toda sequência limitada $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, existem $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in$

$H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega),$$
$$u_{n_j} \longrightarrow u \text{ em } L^s(\Omega),$$

o número 2^* é chamado expoente crítico de Sobolev.

Definição B.3. Seja X um Espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e

$$\widetilde{X} = \{u \in X : \; I'(u) \neq 0\},$$

o conjunto dos pontos regulares de I. Dizemos que a função $\varphi : X \longrightarrow \widetilde{X}$ é um campo pseudo-gradiente para I quando φ e localmente lipschitziana e

a) $||\varphi(u)||_X \leq 2||I'(u)||_{X'}$

b) $I'(u)\varphi(u) \geq ||I'(u)||^2_{X'}$.

Agora já podemos enunciar e demonstrar o Lema da Deformação sem condição de compacidade devido a Willem [24].

Lema B.1. (Lema de Deformação) Sejam X um Espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Se

$$||I'(u)|| \geq 4\varepsilon \tag{B.1}$$

para todo $u \in I^{-1}([c - 2\varepsilon, \; c + 2\varepsilon])$, então existe $\eta \in C(X, \; X)$ tal que

i) $\eta(u) = u, \; \forall \, u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, \; c + 2\varepsilon])$,

ii) $\eta(I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$,

onde

$$I^d := I^{-1}(] - \infty, \; d[).$$

Demonstração. Definamos a função

$$\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \Psi(u) = \frac{dist(u, \; X \setminus A)}{dist(u, \; X \setminus A) + dist(u, \; B)},$$

onde

$$A := I^{-1}([c - 2\varepsilon, \; c + 2\varepsilon]) \text{ e } B := I^{-1}([c - \varepsilon, \; c + \varepsilon]).$$

Para mostrar que Ψ está bem definida, vamos mostrar que

$$dist(u, \; X \setminus A) + dist(u, \; B) > 0.$$

Suponha, por contradição, que exista $u \in X$ tal que

$$dist(u,\ X \setminus A) + dist(u,\ B) = 0.$$

Desde que $dist(u,\ B) = 0$ e B é fechado, segue-se que $u \in B$, isto é,

$$c - \varepsilon \leq I(u) \leq c + \varepsilon. \tag{B.2}$$

Por outro lado, $dist(u,\ X \setminus A) = 0$ implica que $u \in X \setminus A$. Assim, existe uma sequência $(u_n) \subset X \setminus A$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em X, ou seja,

$$I(u_n) < c - 2\varepsilon \text{ ou } I(u_n) > c + 2\varepsilon.$$

Passando o limite de $n \longrightarrow \infty$ nas desigualdades na última linha e da continuidade do Funcional I, encontramos

$$I(u_n) \leq c - 2\varepsilon \text{ ou } I(u_n) \geq c + 2\varepsilon,$$

o que contradiz (B.2). Além disso, desde que a função distância é lipschitziana, concluímos que a função Ψ é contínua e localmente lipschitziana.

Observemos também que $\Psi = 1$ em B e $\Psi = 0$ em $X \setminus A$.

Seja $\Phi : X \longrightarrow \widetilde{X}$ um campo pseudo-gradiente para I e definamos

$$\begin{aligned} W(u) &:= -\Psi(u)\frac{\Phi(u)}{||\Phi(u)||_X},\ u \in A, \\ &:= 0,\ u \in X \setminus A. \end{aligned}$$

Notemos que W é localmente lipschtiziana e $||W(u)|| \leq 1$, para todo $u \in X$. Assim, para cada $u \in X$, o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma(t,\ u) &= W(\sigma(t,\ u)), \\ \sigma(0,\ u) &= u, \end{aligned}$$

possui uma única solução $\sigma(.,\ u)$ definida em $\mathbb{R}$ com $\sigma \in C(\mathbb{R} \times X,\ X)$.

Consideremos a função η definida em X por $\eta(u) := \sigma(1,\ u)$. Como $W = 0$ para todo $u \in X \setminus A$, então $\sigma(t,\ u)$ é constante para cada $u \in X \setminus A$. Desde que $\sigma(0,\ u) = u$, temos que η satisfaz (i).

Notemos que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(\sigma(t,\ u)) &= I'(\sigma(t,\ u))\frac{d}{dt}(\sigma(t,\ u)) \\ &= I'(\sigma(t,\ u))W(\sigma(t,\ u)) = 0, \end{aligned} \tag{B.3}$$

para todo $\sigma(t,\, u) \in X \setminus A$.

Para $\sigma(t,\, u) \in A$ encontramos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I(\sigma(t,\, u)) &= I'(\sigma(t,\, u))\frac{d}{dt}(\sigma(t,\, u))\\ &= I'(\sigma(t,\, u))W(\sigma(t,\, u))\\ &= -I'(\sigma(t,\, u))\varphi(\sigma(t,\, u))\frac{\Psi(\sigma(t,\, u))}{||\varphi(\sigma(t,\, u))||_{X'}}.\end{aligned}$$

Desde que φ é um Campo Pseudo-Gradiente, por b),

$$\frac{d}{dt}I(\sigma(t,\, u)) \leq -\Psi(\sigma(t,\, u))\frac{||I'(\sigma(t,\, u))||^2_{X'}}{||\Psi(\sigma(t,\, u))||_X} \leq 0. \tag{B.4}$$

Por (B.3) e (B.4), temos $I(\sigma(t,\, u))$ é não crescente.

Considerando $u \in I^{c+\varepsilon}$, se existir $\bar{t} \in [0,\, 1]$ tal que $I(\sigma(\bar{t},\, u)) < c-\varepsilon$, então $I(\sigma(1,\, u)) \leq I(\sigma(\bar{t},\, u)) < c-\varepsilon$ e (ii) ocorre.

Se $u \in I^{c+\varepsilon}$ e se $c-\varepsilon \leq I(\sigma(t,\, u))$, para todo $t \in [0,\, 1]$, temos

$$c-\varepsilon \leq I(\sigma(t,\, u)) \leq c+\varepsilon, \text{ para todo } t \in [0,\, 1].$$

Assim, de (B.3),

$$\begin{aligned}I(\eta(u)) = I(\sigma(1,\, u)) &= I(u) + \int_0^1 \frac{d}{dt}I(\sigma(t,\, u))dt\\ &\leq I(u) - \int_0^1 \Psi(\sigma(t,\, u))\frac{||I'(\sigma(t,\, u))||^2}{||\Psi(\sigma(t,\, u))||_X}dt\\ &= I(u) - \int_0^1 \Psi(\sigma(t,\, u))\frac{||I'(\sigma(t,\, u))||^2_{X'}}{||\Psi(\sigma(t,\, u))||_X}dt.\end{aligned}$$

Do item a) da definição de campo Pseudo-gradiente, temos

$$I(\eta(u)) \leq c+\varepsilon - \frac{1}{2}\int_0^1 ||I'(\sigma(t,\, u))||.$$

Da hipótese (B.1), encontramos

$$I(\eta(u)) \leq c+\varepsilon-2\varepsilon = c-\varepsilon$$

e ii) também é satisfeita. □

Neste momento enunciaremos duas versões do Teorema do Passo da Montanha. A primeira é devida a Willem [24] e a segunda é devida a Ambrosetti e Rabinowitz [21].

Teorema B.2. (Teorema do Passo da Montanha M. Willem) Sejam X um Espaço de Banach e $I \in C^1(X,\, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que existem $\alpha,\, \rho > 0$ tais que

(H_1) $I(u) \geq 0$ para todo $u \in X$; $||u|| = \rho$ e existe $e \in X$ tal que $||e|| > \rho$ e

(H_2) $I(e) < 0$.

Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in X$ tal que

(a) $c - 2\varepsilon \leq I(u_\varepsilon) \leq c + 2\varepsilon$

(b) $||I'(u_\varepsilon)|| < 4\varepsilon$, onde

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,\, 1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,\, 1],\, X);\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração. Vamos inicialmente provar que c é finito. De fato, desde que $\gamma(0) = 0 \in B_\rho(0)$, $\gamma(1) = e \in X \setminus \overline{B_\rho(0)}$ e $\gamma([0,\, 1])$ e conexo, temos que

$$\gamma([0,\, 1]) \bigcap \partial B_\rho(0) \neq 0.$$

Logo, da hipótese (H_1), temos

$$\max_{t \in [0,\, 1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha,$$

implicando que $c \geq \alpha > 0$, ou seja, que c é um número real postivo.

Suponha agora, por contradição, que para algum $\varepsilon > 0$ as condições (a) e (b) não ocorram, ou seja, que ocorra

(c) $c - 2\varepsilon < I(u) < c + 2\varepsilon$, $\forall\, u \in X$

(d) $||I'(u)|| \geq 4\varepsilon$, $\forall\, u \in X$.

Notemos que essas propriedades continuaram válidas para todo $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Desde que $c > 0$ e diminuido ε se necessário, temos

$$I(c) < I(0) = 0 < c - 2\varepsilon. \tag{B.5}$$

Em vista dos itens (c) e (d), do Lema de deformação, existe $\eta \in C(X;\, X)$ tal que

(i) $\eta(u) = u$ se $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon,\ c + 2\varepsilon])$

(ii) $\eta(I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$.

Segue da definição de c que existe $\overline{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,\, 1]} I(\overline{\gamma}(t)) \leq c + \varepsilon.$$

Consideremos $\widehat{\gamma} : [0,\ 1] \longrightarrow X$ definido por $\widehat{\gamma}(t) = \eta(\widehat{\gamma}(t))$. Observe que:

$$\widehat{\gamma}(0) = \eta(\widehat{\gamma}(t)) = \eta(0)$$

e

$$\widehat{\gamma}(1) = \eta(\widehat{\gamma}(1)) = \eta(e).$$

Por (B.5), temos $0,\ e \notin I^{-1}([c-2\varepsilon,\ c+2\varepsilon])$.

Do Lemma da Deformação, $\eta(0) = 0$ e $\eta(e) = e$.

Portanto,

$$\widehat{\gamma}(0) = 0$$

e

$$\widehat{\gamma}(1) = e$$

mostrando que $\widehat{\gamma} \in \Gamma$. Novamente pelo Lema de Deformação, para qualquer $t \in [0,\ 1]$, encontramos

$$\widehat{\gamma}(t) = \eta(\overline{\widehat{\gamma}(t)}) \in I^{c-\varepsilon}.$$

Desse modo

$$c \leq \max_{t\in[0,\ 1]} I(\widehat{\gamma}(t)) \leq c - \varepsilon,$$

o que é absurdo, provando assim o Teorema. $\square$

Nota B.1. As hipóteses (H_1) e (H_2) são chamadas, respectivamente, 1° geometria e 2° geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Teorema B.3. (Teorema do Passo da Montanha-Ambrosetti-Rabinowitz) Sejam X um Espaço de Banach e $I \in C^1(X,\ \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que existem $\alpha,\ \rho > 0$ tais que

(H_1) $I(u) \geq \alpha > 0$ para todo $u \in X$; $||u|| = \rho$, e existe $e \in X$ tal que $||e|| > \rho$ e

(H_2) $I(e) < 0$.

Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in X$ tal que

(a) $c - 2\varepsilon \leq I(u_\varepsilon) \leq c + 2\varepsilon$

(b) $||I'(u_\varepsilon)|| < 4\varepsilon$,

onde

$$0 < c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,\ 1]} I(\gamma(t)),$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,\ 1],\ X);\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}.$$

Se I satisfaz a condição $(PS)_c$, então c é um valor crítico de I, isto é, existe $u \in X$ tal que

$$I(u) = c > 0 \text{ e } I'(u) = 0.$$

Demonstração. Para $\varepsilon = \frac{1}{n}$ no Teorema anterior, temos que existe $(u_n) \subset X$ tal que

$$I(u_n) \longrightarrow c,$$

e

$$I'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Desde que I satisfaz a condicão $(PS)_c$ existem $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in X$ tal que:

$$u_{n_j} \longrightarrow u \text{ em } X.$$

Da continuidade de I e I', temos

$$I(u) = c > 0 \text{ e } I'(u) = 0.$$

□

Apêndice C

Propriedades do Espaço E

Nesse Apêndice, vamos mostrar algumas propriedades do subespaço onde buscamos solução do problema penalizado (APE).

Lema C.1. E é um subespaço de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. De fato, para mostrar que E é subespaço, devemos mostrar que,

(1) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ então $\lambda v \in E$, $\forall\, v \in E$.
Seja $v \in E$, então $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v|^2 dx < \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\lambda v|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\lambda|^2|v|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\lambda^2|v|^2 dx \\ &= \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v|^2 dx < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $\lambda v \in E$.

(2) Se $u,\, v \in E$ então $(u+v) \in E$.
De fato, como $u,\, v \in E$ então $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^2 dx < \infty$ e $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v|^2 dx < \infty$.
Sabemos que,

$$(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2 \geq 0 \Rightarrow 2uv \leq u^2 + v^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u+v|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(|u|+|v|)^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(|u|^2 + 2|u||v| + |v|^2) dx \\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v|^2 dx < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $(u+v) \in E$. Logo E é subespaço de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

$\square$

Lema C.2. A expressão

$$||u||^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)dx, \tag{C.1}$$

define uma norma em E associado ao seguinte produto interno

$$\begin{array}{rcl} (.,\, .) : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,\, v) & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx. \end{array} \tag{C.2}$$

Demonstração. Vamos verificar que a aplicação é um produto interno em E assim:

(P_1) $(\alpha u + \beta v,\, w) = \alpha(u,\, w) + \beta(v,\, w)\, \forall\, u,\, v,\, w \in E$ e $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ (Linearidade).
Dados $u,\, v,\, w \in E$ e $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (\alpha u + \beta v,\, w) &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla(\alpha u + \beta v)\nabla w + V(x)(\alpha u + \beta v)w)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\alpha \nabla u + \beta \nabla v)\nabla w + \alpha V(x)uw + \beta V(x)vw)dx \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla w + V(x)uw)dx + \beta \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla w + V(x)vw)dx \\ &= \alpha(u,\, w) + \beta(v,\, w). \end{aligned}$$

(P_2) $(u,\, v) = (v,\, u)\, \forall\, u,\, v \in E$ (Simetria).
A simetria do produto interno de E é consequência da simetria em $\mathbb{R}$ e da simetria do produto interno natural de $\mathbb{R}^N$.

(P_3) $(u,\, u) \geq 0$ e $(u,\, u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0\, \forall\, u \in E$.

$$\begin{aligned} (u,\, u) &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla u + V(x)uu)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)dx \\ &= ||u||^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Se $(u,\, u) = 0$ então $(u,\, u) = ||u||^2 = 0 \Longleftrightarrow u = 0$,

assim, (C.2) é o produto interno. Portanto, mostramos que (C.1) como definida é uma norma em E. $\square$

Lema C.3. O espaço

$$E = \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^2 dx < \infty \right\},$$

é um espaço de Hilbert(Banach) munido da norma definida em (C.1).

Demonstração. De fato, seja $(u_n) \subset E$, uma sequência de Cauchy. Pela imersão contínua de E em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ concluímos que (u_n) também é uma sequência de Cauchy em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e como $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach então existe $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \tag{C.3}$$

assim, a menos de subsequência,

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \; q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Desde que, (u_n) é uma sequência de Cauchy em E, então (u_n) é limitada em E. Em particular existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n|^2 dx \leq C.$$

Pelo Lema de Fatou (Lema A.1), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n|^2 dx \leq C.$$

Isso implica que $u \in E$. Agora resta-nos mostrar que $u_n \longrightarrow u$ em E. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer n, $m \geq n_0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_m - u_n|^2 dx < \varepsilon.$$

Para todo $m > n_0$ fixo e pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_m - u|^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_m - u_n|^2 dx \leq \varepsilon.$$

Ou seja

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_m - u|^2 dx = 0. \tag{C.4}$$

Como $u_n \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \longrightarrow u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ então

$$||u_n - u||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u)|^2 dx < \varepsilon. \tag{C.5}$$

De (C.4) e (C.5) segue que $||u_n - u|| \longrightarrow 0$. Logo $u_n \longrightarrow u$ em E. $\square$

Apêndice D

Resumo da Teoria dos Pontos Críticos

D.1 Revisão sobre a diferenciabilidade de funcionais

Neste Apêndice vamos apresentar alguns resultados da Teoria dos Pontos Críticos que foram utilizados ao longo da dissertação. Além disso, mostraremos que o funcional Φ associado ao problema penalizado (APE) é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$.

Definição D.1. Dado um Espaço de Banach X e um funcional $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dizemos que I possui derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T_0 \in X'$ tal que:

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - T_0 v}{t} = 0.$$

A derivada de Gateaux no ponto u quando existe, é única. Vamos denotá-la por $DI(u)$.

Definição D.2. Dado um Espaço de Banach X e um funcional $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dizemos que I possui derivada de Fréchet no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T \in X'$ tal que:

$$\lim_{||v|| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Tv}{||v||} = 0.$$

A derivada de Fréchet no ponto u quando existe, é única. Vamos denotá-la por $I'(u)$.

Definição D.3. Se A é um conjunto aberto em X, dizemos que I é de classe C^1 em A ou que $I \in C^1(A, \mathbb{R})$ quando a Derivada de Fréchet I existe em todo ponto $u \in A$ e a aplicação $I' : A \longrightarrow X'$ é contínua.

Teorema D.1. Sejam X um espaço de Banach e $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Se I tem derivada de Gateaux contínua em $A \subset X$, então $I \in C^1(A, \mathbb{R})$.

Demonstração. Sejam $u+v$, com $u \in A$. Como I possui derivada de Gateaux sobre A, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\alpha \in (0,\, 1)$ tal que

$$I(u+v) - I(u) = DI(u+\alpha v)v.$$

Observe que:

$$I(u+v) - I(u) - DI(u)v = DI(u+\alpha v)v - DI(u)v.$$

De onde segue que,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{||v||}[I(u+v) - I(u) - DI(u)v] &= \frac{1}{||v||}[DI(u+\alpha v)v - DI(u)v] \\
&= \frac{v}{||v||}[DI(u+\alpha v) - DI(u)]
\end{aligned}$$

Isso implica que,

$$\left\| \frac{1}{||v||}[I(u+v) - I(u) - DI(u)v] \right\| = ||DI(u+\alpha v) - DI(u)||.$$

Como a Derivada de Gateaux é contínua, Dado $\varepsilon > 0$ e existe $\delta > 0$, tal que se $||v|| < \delta$, temos

$$||DI(u+\alpha v) - DI(u)|| < \varepsilon.$$

Assim,

$$\lim_{||v|| \to 0} \frac{1}{||v||}[I(u+v) - I(u) - DI(u)v] = 0.$$

Então, a derivada de Fréchet existe e é igual a derivada de Gateaux. Portanto, a derivada de Fréchet é contínua em $A \subset X$, ou seja $I \in C^1(A,\, X)$. □

Agora com esses resultados vamos mostrar que o funcional associado ao problema (APE) é Fréchet diferênciavel.

Lema D.1. O funcional de Euler-Lagrange associado a (APE) dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right) G(x,u)dx$$

é de classe $C^1(E,\, \mathbb{R})$ com

$$\Phi'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,u)\right) g(x,u)vdx,\ \forall\, u,\ v \in E.$$

Demonstração. De fato, vamos mostrar que o funcional

$$\begin{array}{rcl} \Phi: E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \Phi(u) = \dfrac{1}{2}||u||^2 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(\dfrac{1}{|x|^\mu} * G(x,\, u)\right) G(x,\, u)dx, \end{array}$$

têm derivada de Gateaux contínua. Com efeito, considere os funcionais Φ_1, Φ_2, definidos por:

$$\Phi_1(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2 dx,\ \Phi_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,\, u)\right) G(x,\, u)dx.$$

Dessa forma, podemos escrever $\Phi = \dfrac{1}{2}\Phi_1 - \dfrac{1}{2}\Phi_2$. Assim, vamos mostrar que $\Phi_i \in C^1(E,\, \mathbb{R})$ para todo $i = 1,\, 2$, vamos começar com o funcional

$$\Phi_1(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2 dx.$$

Para obter a derivada deste funcional primeiro vamos calcular o seguinte quociente:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\Phi_1(u+tv) - \Phi_1(u)}{t} & = & \dfrac{1}{t}\left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u+tv)|^2 + V(x)|u+tv|^2 - (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)dx\right] \\ & = & \dfrac{1}{t}\left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u+tv)\nabla(u+tv) - |\nabla u|^2 + V(x)(|u+tv|^2 - |u|^2)dx\right] \\ & = & \dfrac{1}{t}\left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + 2t\nabla u \nabla v + t^2|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2\right. \\ & + & \left. V(x)((u+tv)^2 - u^2)dx\right] \\ & = & \dfrac{1}{t}\left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} 2t\nabla u\nabla v + t^2|\nabla v|^2 + V(x)(u^2 + 2tuv + t^2v^2 - u^2)dx\right] \\ & = & \dfrac{1}{t}\left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} 2t\nabla u\nabla v + t^2|\nabla v|^2 + V(x)(2tuv + t^2v^2)dx\right] \\ & = & \dfrac{1}{t}\left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} 2t(\nabla u\nabla v + V(x)uv)dx + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} t^2(|\nabla v|^2 + V(x)v^2)dx\right] \\ & = & \dfrac{2t}{t}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla v + V(x)uv)dx + \dfrac{t^2}{t}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2)dx. \end{array}$$

Assim, aplicando o limite quando $t \longrightarrow 0$ obtemos,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{t\to 0} \dfrac{\Phi_1(u+tv) - \Phi_1(u)}{t} & = & \displaystyle\lim_{t\to 0} 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla v + V(x)uvdx + \lim_{t\to 0} t\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2)dx \\ & = & 2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla v + V(x)uvdx \\ & = & 2(u,\, v). \end{array}$$

Então,

$$D\Phi_1(u)v = 2(u, v), \text{ que define uma aplicação linear.}$$

Afirmação D.1. Φ_1 têm derivada de Gateaux Contínua.

De fato, seja $(u_n) \subset E$, uma sequência tal que $u_n \longrightarrow u$ em E. Dado $v \in E$, temos

$$|D\Phi_1(u_n)(v) - D\Phi_2(u)v| = |2(u_n,\, v) - 2(u,\, v)| = |2[(u_n,\, v) - (u,\, v)] = 2|(u_n - u,\, v)|.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|(u_n - u,\, v)| \leq (u_n - u,\, u_n - u)^{\frac{1}{2}}(v,\, v)^{\frac{1}{2}} \leq ||u_n - u||||v||,$$

como $u_n \longrightarrow u$ em E então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |D\Phi_1(u_n)(v) - D\Phi_2(u)v| &\leq 2||u_n - u||||v|| \\ &< 2\varepsilon||v||, \end{aligned}$$

portanto $D\Phi_1(u_n) \longrightarrow D\Phi_1(u)$.

Por último, analisaremos o funcional

$$\Phi_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,\, u)\right) G(x,\, u)dx.$$

Note que,

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_2(u+tv) - \Phi_2(u)}{t} &= \frac{1}{t}\left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,\, u+tv)\right) G(x,\, u+tv)dx \right. \\ &- \left. \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(x,\, u)\right) G(x,\, u)dx\right] \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(y,\, u+tv)G(x,\, u+tv) - G(y,\, u)G(x,\, u)}{|x-y|^\mu} dy\right) dx\right]. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $G(y,\, u)G(x,\, u+tv)$ na igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_2(u+tv) - \Phi_2(u)}{t} &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(x,\, u+tv)[G(y,\, u+tv) - G(y,\, u)]}{t|x-y|^\mu} dydx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(y,\, u)[G(x,\, u+tv) - G(x,\, u)]}{t|x-y|^\mu} dydx. \end{aligned} \tag{D.1}$$

Defina a função $h_1 : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h_1(s) = G(y,\, u+stv)$, como $h_1(1) = G(y,\, u+tv)$, $h_1(0) = G(y,\, u)$ e $h_1'(s) = [G(y,\, u+stv)]' = g(y, u+stv)tv$ pelo Teorema do Valor Médio existe $\alpha = \alpha(y) \in (0,\, 1)$ tal que $h(1) - h(0) = h'(\alpha)$ ou seja,

$$G(y,\, u+tv) - G(y,\, u) = g(y,\, u+\alpha tv)tv,$$

então
$$\frac{G(y,\ u+tv)-G(y,\ u)}{t}=g(y,\ u+\alpha tv)v,$$
similarmente, obtemos
$$\frac{G(x,\ u+tv)-G(x,\ u)}{t}=g(x,\ u+\beta tv)v,$$
com $\beta=\beta(x)\in(0,\ 1)$.

Assim,
$$\begin{aligned}\frac{\Phi_2(u+tv)-\Phi_2(u)}{t} &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{G(x,\ u+tv)g(y,\ u+\alpha tv)v}{|x-y|^{\mu}}dydx\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{G(y,\ u)g(x,\ u+\beta tv)v}{|x-y|^{\mu}}dydx. \end{aligned}\tag{D.2}$$

Note que para aplicarmos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema A.2) vamos mostrar que
$$\left|\frac{G(x,\ u+tv)g(y,\ u+\alpha tv)v}{|x-y|^{\mu}}\right|\le h(x,\ y)\in L^1(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N).$$

De fato, usando o fato de que
$$|g(y,\ u+\alpha tv)|\le c_0|u+\alpha tv|^{\frac{2N-\mu}{N-2}-1},$$
então, como $\alpha\in(0,\ 1)$, $|t|\le 1$, temos
$$\begin{aligned}\left|\frac{G(x,\ u+tv)g(y,\ u+\alpha tv)v}{|x-y|^{\mu}}\right| &\le \frac{2c_0|u(x)+tv(x)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}c_0|u(y)+\alpha tv(y)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}-1}|v(y)|}{|x-y|^{\mu}}\\ &\le \frac{2c_0(|u(x)|+|v(x)|)^{\frac{2N-\mu}{N-2}}c_0(|u(y)|+|v(y)|)^{\frac{2N-\mu}{N-2}-1}|v(y)|}{|x-y|^{\mu}}\\ &\le \frac{\widehat{C}(|u(x)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}+|v(x)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}})|v(y)|}{|x-y|^{\mu}}\\ &\times\ (|u(y)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}-1}+|v(y)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}-1}),\end{aligned}$$
onde $\widehat{C}=2^{\frac{2(2N-\mu)}{N-2}+1}c_0^2>0$ temos
$$\begin{aligned}\left|\frac{G(x,\ u+tv)g(y,\ u+\alpha tv)v}{|x-y|^{\mu}}\right| &\le \frac{\widehat{C}(|u(x)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}+|v(x)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}})}{|x-y|^{\mu}}\\ &\times\ (|u(y)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}-1}|v(y)|+|v(y)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}})\\ &\le \frac{\widehat{C}(w(x)^{\frac{2N-\mu}{N-2}}w(y)^{\frac{2N-\mu}{N-2}})}{|x-y|^{\mu}},\end{aligned}$$

onde $w(y) = \max\{|u(y)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}-1},\ |v(y)|^{\frac{2N-\mu}{N-2}-1}\}$.

Pela desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev (ver Teorema A.9) com $p = q = \frac{2N-\mu}{N-2}$, temos

$$\frac{\widehat{C}(w(x)^{\frac{2N-\mu}{N-2}}w(y)^{\frac{2N-\mu}{N-2}})}{|x-y|^{\mu}} \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N),$$

assim pelo Teorema da Convergência Dominada (ver Apêndice A Teorema A.2)

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(x,\ u+tv)g(y,\ u+\alpha tv)v}{|x-y|^{\mu}}dydx \to \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(x,\ u)g(y,\ u)v}{|x-y|^{\mu}}dydx, \tag{D.3}$$

similarmente temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(y,\ u+tv)g(x,\ u+\beta tv)v}{|x-y|^{\mu}}dydx \to \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(y,\ u)g(x,\ u)v}{|x-y|^{\mu}}dydx. \tag{D.4}$$

Portanto, por (D.2), (D.3) e (D.4) obtemos

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi_2(u+tv)-\Phi_2(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(x,\ u)g(y,\ u)v}{|x-y|^{\mu}}dydx + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(y,\ u)g(x,\ u)v}{|x-y|^{\mu}}dydx.$$

Pelo Teorema de Fubini (ver Apêndice A Teorema A.7) e por meio da mudança de variável temos,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(x,\ u)g(y,\ u)v}{|x-y|^{\mu}}dydx = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(y,\ u)g(x,\ u)v}{|x-y|^{\mu}}dydx,$$

então

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\Phi_2(u+tv)-\Phi_2(u)}{t} &= 2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(y,\ u)g(x,\ u)v}{|x-y|^{\mu}}dydx \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^{\mu}} * G(x,\ u)\right)g(x,\ u)vdx.\end{aligned} \tag{D.5}$$

Portanto,

$$D\Phi_2(u)v = 2\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^{\mu}} * G(x,\ u)\right)g(x,\ u)vdx,$$

que define uma aplicação linear.

Afirmação D.2. Φ_2 tem derivada de Gateaux contínua.

Com efeito, seja $(u_n) \subset E$, uma sequência tal que $u_n \longrightarrow u$ em E, dado $v \in E$, com $||v|| \leq 1$ temos

$$D\Phi_2(u)v = 2\int_{\mathbb{R}^N} K(u)(x)g(x,\ u)vdx,$$

logo,

$$|D\Phi_2(u_n)v - D\Phi_2(u)v| \;=\; 2\left|\int_{\mathbb{R}^N}(K(u_n)g(x,\, u_n) - K(u)g(x,\, u))vdx\right| \qquad \text{(D.6)}$$

Note que como (u_n) converge para u então (u_n) é limitada em E. Sem perda de generalidade, podemos supor que $u_n \in \mathcal{B}$, logo $K(u_n) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$K(u_n)(x)g(x,\, u_n) \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N).$$

Analogamente

$$K(u)(x)g(x,\, u) \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N).$$

Pela Desiguadade de Hölder

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|K(u_n)(x)g(x,\, u_n) \;&-\; K(u)(x)g(x,\, u)||v|dx \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N}|K(u_n)(x)g(x,\, u_n) - K(u)(x)g(x,\, u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \\ &\times \left(\int_{\mathbb{R}^N}|v(x)|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}}, \qquad \text{(D.7)}\end{aligned}$$

por (D.6) e (D.7), temos

$$\sup_{||v||\le 1}|D\Phi_2(u_n) - D\Phi_2(u)| \le \left(\int_{\mathbb{R}^N}|K(u_n)(x)g(x,\, u_n) - K(u)(x)g(x,\, u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}dx\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}}.$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|K(u_n)(x)g(x,\, u_n) - K(u)(x)g(x,\, u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}dx \to 0.$$

De fato, como $u_n \longrightarrow u$ em E, do Teorema de Vainberg, existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $h \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|u_{n_j}(x)| \le h(x)\; q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^N$$

e

$$K(u_{n_j})(x)g(x,\, u_{n_j}) \to K(u)(x)g(x,\, u)\; q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^N$$

assim,

$$\begin{aligned}|K(u_{n_j})(x)g(x,\, u_{n_j}) - K(u)(x)g(x,\, u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \;&\le\; c|g(x,\, u_{n_j})|^{\frac{2^*}{2^*-1}} + c|g(x,\, u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\ &\le\; cc_0|u_{n_j}(x)|^{2^*} + cc_0|u(x)|^{2^*} \\ &\le\; cc_0|h(x)|^{2^*} + cc_0|h(x|)^{2^*},\end{aligned}$$

então

$$|K(u_{n_j})(x)g(x,\ u_{n_j}) - K(u)(x)g(x,\ u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \leq 2cc_0|h(x)|^{2^*} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |K(u_{n_j})(x)g(x,\ u_{n_j}) - K(u)(x)g(x,\ u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \to 0,$$

de modo que

$$||D\Phi_2(u_{n_j}) - D\Phi_2(u)|| \leq C||K(u_{n_j})(x)g(x,\ u_{n_j}) - K(u)(x)g(x,\ u)||_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

Assim, mostramos que $D\Phi_2$ é contínua, e pelo Teorema D.1, $\Phi_1,\ \Phi_2 \in C^1(E,\ \mathbb{R})$ então $\Phi = \dfrac{1}{2}\Phi_1 - \dfrac{1}{2}\Phi_2 \in C^1(E,\ \mathbb{R})$, o que prova o lema. $\square$

Nota D.1. De maneira semelhante, mostramos que o funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ asssociado ao problema original (SNE) dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right)F(u)dx,$$

é de classe $C^1(E,\ \mathbb{R})$ com a derivada dada por

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla v + V(x)uv)dx - \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right)f(u)vdx,\ \forall\, u,\ v \in E.$$

Referências Bibliográficas

[1] A. Ambrosetti, V. Felli & A. Malchiodi, *Ground states of nonlinear Shorödinger equations with potentials vanishing at infinity,*, J. Eur. Math. Soc. **7** (2005) 177-144.

[2] A. Floer & A. Weinstein, *Nonspreading wave pachets for the packets for the cubic Schrödinger with a bounded potential*, J. Funct. Anal., **69**(1986), 397–408.

[3] B. Buffoni, L. Jeanjean & C.A. Stuart, *Existence of a nontrivial solution to a strongly indefinite semilinear equation*, Proc. Amer. Math. Soc., **119** (1993), 179–186.

[4] C. O. Alves, G. M. Figueiredo & Minbo Yang, *Existence of solutions for a nonlinear Choquard equation with potential vanishing at infinity*, Adv. Nonlinear Anal. 2016,5,1-15.

[5] C. O. Alves & M. Souto , *Existence of solutions for a class of elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$ *with vanishing potentials*, J. Differential Equations **254** (2013), 1977-1991.

[6] C. O. Alves, M. Souto & M. Montenegro, *Existence of solutions for two classes of elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$ *with zero mass*, J. Differential Equations **252** (2012), 5735-5750.

[7] C. Liu, Z. Wang, & H. Zhou, *Asymptotically linear Schrödinger equation with potential vanishing at infinity*, J. Differential Equations **245** (2008), 201-222.

[8] D. Bonheure & J. Van Schaftingen , *Ground states for the nonlinear Shorödinger equation with potential vanishing at infinity*, Ann. Mat. Pura Appl.**189** (2010), 273–301.

[9] E. Lieb & M. Loss, *"Analysis,"Gradute Studies in Mathematics*, AMS, Providence, Rhode island, 2001.

[10] E. H. Lieb, *Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation*, Studies in Appl. Math., 57(1976/77), 93–105.

[11] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii & Sandro Stringari, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Rev. Mod. Phys., **71** (1999), 463–512.

[12] H. Berestycki & P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations, I Existence of a ground state*, Arch. Ration. Mech. Anal. **82** (1983), 313–346.

[13] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer Sience & Bussiness Media, 2010.

[14] H. Brezis & T. Kato, *Remarks on the Schrödinger operator with regular complex potentials*, J. Math. Pures Appl. **58** (1979),137–151.

[15] J. Byeon & Z. Q. Wang,*Standing waves with a critical frequency for nonlinear Schrödinger equations II,*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **18**, (2003), 207-219.

[16] L. Bergé & A. Couairon, *Nonlinear propagation of self-guided ultra-short pulses in ionized gases*, Phys. Plasmas,**7** (2000), 210–230.

[17] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.

[18] L. Jeanjean & K. Tanaka, *Singularly perturbed elliptic problems with superlinear or asymptotically linear nonlinearities*, Calc. Var. Partial Differential Equations **21**, (2004), 287–318.

[19] L. Ma & L. Zhao, *Classification of positive solitary solutions of the nonlinear Choquard equation*, Arch. Ration. Mech. Anal., 195(2010), 455–467.

[20] M. Badiale, E. Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*, Springer, 2010.

[21] M. del Pino & P. Felmer, *Local Mountain Pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var., **4** (1996), 121–137.

[22] M. del Pino & P. Felmer, *Multipeak bound states of nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **15** (1998), 127–149.

[23] M. Struwe, *Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems.*, Springer-Verlag, Fourth Edition, 2007.

[24] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, 1996.

[25] N. Ackermann, *On a periodic Shorödinger equation with nonlocal superlinear part*, Math. Z., **248** (2004), 423-443.

[26] P.L. Lions, *The Choquard equation and related questions*, Nonlinear Anal., 4 (1980), 1063–1072.

[27] R. G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure*, Wiley Online Library, 1995.

[28] R.S. Palais, *The Principle of Symmetric Criticality*, Commun. Math. Phys. 69 (1979), 19-30.

[29] S. Cingolani, M. Clapp, & S. Secchi, *Multiple solutions to a magnetic nonlinear Choquard equation*, Z. Angew. Math. Phys., **63** (2012), 233–248.

[30] S. Pekar, *Untersuchungüber die Elektronentheorie der Kristalle*, Akademie Verlag, Berlin, 1954.

[31] S. Secchi, *note on Schrödinger-Newton systems with decaying electric potential*, Nonlinear Anal., **72**(2010), 3842–3856.

[32] T. Bartsch, A.Pankov & Z. Q. Wang, *Nonlinear Schrödinger equations with steep potential well*, Commun. Contemp. Math. **3**, (2001) 549–569.

[33] V. Benci, C.R. Grisanti & A.M. Micheletti, *Existence of solutions for the nonlinear Schrödinger equation with* $V(\infty) = 0$, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 66 (2005), 53-65.

[34] V. Benci, C.R. Grisanti & A.M. Micheletti, *Existence and non existence of the ground state solution for the nonlinear Schrödinger equations with* $V(\infty) = 0$, Topol. Methods in Nonlinear Anal 26 (2005), 203-219.

[35] V. Moroz & J. Van Schaftingen, *Ground states of nonlinear Choquard equations: Existence, qualitative properties and decay asymptotics*, J. Funct. Anal., 265(2013), 153–184.

[36] V. Moroz & J. Van Schaftingen, *Existence of groundstates for a class of nonlinear Choquard equations*, Trans. Amer. Math. Soc. doi:10.1090/S0002-9947-2014-06289-2.

[37] V. Moroz & J. Van Schaftingen, *Semi-classical states for the Choquard equation, Calc. Var. Partial Differential Equations*, **52** (2015), 199–235.

[38] V. Moroz & J. Van Schaftingen, *Groundstates of nonlinear Choquard equation: Hardy-Littlewood-Sobolev critical exponent* Communications in Contemporary Mathematics, (2015),17(05), 1550005.

[39] Y. Ding & K. Tanaka, *Multiplicity of positive solutions of a nonlinear Schrödinger equation*,Manus. Math., **112**, (2003), 109–135.

[40] Y. Ding & A. Szulkin, *Bound states for semilinear Schrödinger equations with sign-changing potential*, Calc. Var. Partial Differential Equations **29**, (2007), 397–419.