UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Enielson Ewerton da Silva Gama

Existência de solução para uma classe de equações elípticas no $\mathbb{R}^N$ com potencial anulando-se no infinito

Orientador: Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves do Santos

BELÉM-PA

2021

Enielson Ewerton da Silva Gama

Existência de solução para uma classe de equações elípticas no $\mathbb{R}^N$ com potencial anulando-se no infinito

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves do Santos

BELÉM-PA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586e Silva Gama, Enielson Ewerton da.
Existência de solução para uma classe de equações elípticas no RN com potencial anulando-se no infinito / Enielson Ewerton da Silva Gama. — 2021.
77 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves do Santos
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Equações elípticas. 2. Crescimento subcrítico. 3. Método variacional. 4. Solução positiva. 5. Método de penalização. I. Título.

CDD 510

Enielson Ewerton da Silva Gama

Existência de solução para uma classe de equações elípticas no $\mathbf{R}^N$ com potencial anulando-se no infinito

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves do Santos

Data da defesa: 30 / 07 / 2021

Conceito: Aprovado

Gelson Conceição G. dos Santos

Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves do Santos (Orientador - PPGME/UFPA)

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa (Membro Titular - PPGME/UFPA)

Amanda Suellen Sena Corrêa Leão.

Prof[a]. Dr[a]. Amanda Suellen Sena Corrêa Leão (Membro Titular Externo - FACMAT/UFPA)

Leandro da Silva Tavares

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares (Membro Titular Externo - UFCA)

BELÉM-PA

2021

Dedico este trabalho à minha mãe, Selma Melo,
pelo grandioso apoio, amor e compreensão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela saúde, força e por mais essa vitória. Sem Ele essa conquista não teria se concretizado. A Ele toda honra e toda Glória.

A minha família por todo apoio. Em especial a minha mãe, Selma Melo, pelo apoio, amor e por ser um exemplo de persistência e coragem.

À Universidade Federal do Pará, por todas as oportunidades de acesso ao conhecimento.

Aos professores Dr. Augusto César dos Reis Costa, Drª. Amanda Suellen Sena Corrêa Leão e Dr. Leandro da Silva Tavares por aceitarem o convite para participar da banca examinadora deste trabalho. Em especial ao professor Dr. Augusto Costa pelas disciplinas que lecionou e que contribuiram para a formação do meu conhecimento. Foi uma grande honra ser seu aluno.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves do Santos pela sua disponibilidade, excelente orientação, paciência e incentivo que foram fundamentais para realizar e prosseguir este estudo, pelos conhecimentos repassados durante todo o desenvolvimento do trabalho e por acreditar em minha capacidade.

A minha namorada, Andreina Alves, pela compreensão, paciência nos momentos em que estive distante e por sempre me incentivar.

Aos queridos amigos: José Pastana de Oliveira Neto e Rafael Augusto Duarte Guimarães, por todos os momentos que estudamos juntos, por todo apoio e ajuda durante o mestrado, pelos momentos descontraídos de muitas risadas e por todo o companheirismo ao longo deste percurso.

Agradeço também ao grande parceiro, Camil Samer Zahlan Redwan, pelo seu apoio durante meus estudos e pela sua amizade.

NOTAÇÕES E TERMINOLOGIA

- $\mathbb{R}^N$ denota o espaço euclidiano N-dimensional;
- $\nabla u(x) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}(x)\right)$ denota o gradiente de u em x;
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o Laplaciano de u;
- $o_n(1)$ representa qualquer quantidade que tente a zero quando n tende ao infinito;
- ω_N denota o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$;
- $B_R(x_0)$ denota a bola aberta de centro x_0 e raio $R > 0$;
- B_R denota a bola aberta de centro 0 e raio $R > 0$;
- O símbolo $\to$ significa convergência em norma (forte);
- O símbolo $\rightharpoonup$ significa convergência fraca;
- Se $A \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável à Lebesgue, então $|A|$ denota a medida de Lebesgue de A;
- Se $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é mensurável, então u^+ e u^- denotam as partes positiva e negativa de u, respetivamente. Ou seja,

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\} \quad \text{e} \quad u^-(x) = \min\{-u(x), 0\};$$

- $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $\mathbb{R}^N$;
- Sejam Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\Omega)$ denota o espaço usual de Lebesgue munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}};$$

- Sejam Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$, $H^1(\Omega) := \left\{u \in L^2(\Omega); \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, ..., N\right\}$, munido da norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx \right)^{1/2}.$$

- Sejam Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$, $H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ com relação a norma $\|.\|_{H^1(\Omega)}$.

- Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$, $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável; $\exists\, C$ tal que $|u(x)| \leq C\, q.t.p.$ sobre $\Omega\}$ munido da norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf \{C; |u| \leq C \;\, q.t.p. \text{ em}\, \Omega\}\,;$$

- $L^P_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável; $|u|^P$ é integrável segundo Lebesgue sobre cada compacto $K \subset \Omega\}$.

RESUMO

Neste trabalho investigamos a existência de solução positiva para a seguinte classe de equações elípticas

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem crescimento subcrítico e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é um potencial não negativo que, sob certas hipóteses, pode anular-se no infinito, isto é,

$$V(x) \to 0 \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty,$$

ou de forma abreviada, $V(\infty) = 0$. As principais ferramentas utilizadas são os Métodos Variacionais, Teorema do Passo da Montanha e o Método de Penalização de Del Pino e Felmer.

Palavras-chave: Equações Elípticas; Crescimento Subcrítico, Método Variacional; Solução Positiva; Método de Penalização.

ABSTRACT

In this paper investigate the existence of positive solutions for following class of elliptic equation

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

where $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ has a subcritical growth and $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is a nonnegative potential, which can vanish at infinity, that is,

$$V(x) \to 0 \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty,$$

or shortly, $V(\infty) = 0$. The main tools used are the Variational Methods, a Mountain Pass Theorem and the Penalization Method of Del Pino and Felmer.

Keywords: Elliptic Equations; Subcritical Growth; Variational Methods; Positive Solutions; Penalization Method.

Sumário

Introdução

Nos últimos anos, muitos autores têm considerado a existência de solução para a seguinte classe de equações elípticas

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u), \ \text{em } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \ \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{P}$$

onde $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, com V sendo uma função não negativa e f tendo um crescimento subcrítico ou crítico. O conhecimento das soluções de (P) é de grande importância para o estudo de soluções de existência de ondas estacionárias para a equação de Schrödinger não linear

$$ih\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -h^2\Delta\Psi + W(x)\Psi - f(\Psi), \ (t,x) \in (0,+\infty) \times \Omega, \tag{1}$$

em que $h > 0$ é um parâmetro e Ω é um domínio do $\mathbb{R}^N$. A equação (1) é um dos principais objetos de estudo da Física quântica, porque aparece em problemas envolvendo Óptica não linear, Física de plasma e Física de matéria condensada.

Na literatura, encontramos muitos trabalhos onde os autores consideram a existência de soluções para (P), e observamos que condições interessantes sobre V foram estudadas, vamos citar alguns desses trabalhos.

Começamos com um artigo devido a Berestycki e Lions [12], onde o potencial V foi considerado constante, ou seja, existe $c > 0$ tal que

$$V(x) = c, \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Em Coti-Zelati e Rabinowitz [29], Pankov [1], Pankov e Pflüger [2] e Kryszewski e Szulkin [23], os autores estudaram o caso em que o potencial V tem ínfimo positivo e é uma função periódica como

$$V(x+y) = V(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall y \in \mathbb{Z}^N.$$

Em Zhu e Yang [30] [31] o potencial V foi considerado assintótico para uma constante positiva, isto é, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$V(x) \leq \alpha,\ \forall x \in \mathbb{R}^N \ \text{ e } \ |V(x) - \alpha| \to 0 \ \text{ com } \ |x| \to +\infty.$$

O caso em que V é assintoticamente periódico, ou seja, existe uma função periódica $V_p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que

$$V(x) \leq V_p(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^N \ \text{ e } \ |V(x) - V_p(x)| \to 0 \ \text{ com } \ |x| \to +\infty,$$

foi considerado em Alves, Carrião e Miyagaki [9]. Em Costa [10] e Miyagaki [24], os autores concentraram a atenção no caso em que V é coercivo, isto é,

$$\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = +\infty.$$

Em Barstch e Wang [27], uma condição mais fraca do que a coercitividade em V foi assumida, mais precisamente, foi assumido que

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq M\}\right) < \infty,$$

para todo $M > 0$. Para o caso em que V é uma função radical, isto é,

$$V(x) = V(r),\ \text{ onde } \ |x| = r,$$

citamos o artigo de Alves, de Morais Filho e Souto [6]. No famoso artigo [25], Rabinowitz introduziu a seguinte condição sobre V,

$$0 < \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) < \liminf_{|x| \to +\infty} V(x).$$

Posteriormente, Del Pino e Felmer [20] consideraram a seguinte condição, mais fraca, sobre V:

Existe um conjunto aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$0 < \min_{x \in \overline{\Omega}} V(x) < \min_{x \in \partial\Omega} V(x).$$

A última hipótese que gostaríamos de citar sobre o potencial V é o caso massa zero, isto é,

$$\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = 0,$$

que recebeu atenção nos artigos de Ambrosetti e Wang [5], Ambrosetti, Felli e Malchiodi [4], Berestycki e Lions [12] e Benci, Grisanti e Micheletti [28].

Esta dissertação tem como objetivo apresentar os resultados obtidos no artigo [8] Claudianor O. Alves e Marco A.S. Souto. E o objetivo principal deste trabalho é mostrar a existência de soluções positivas para o problema (P) em que f tem um crescimento subcrítico e V é um potencial não negativo que pode se anular no infinito, isto é,

$$V(x) \to 0 \text{ quando } |x| \to \infty.$$

Mais precisamente, assumiremos que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfazem:

(f_1) $\limsup\limits_{s \to 0^+} \dfrac{sf(s)}{s^{2^*}} < +\infty$ onde $2^* = 2N/(N-2)$ para $N \geq 3$,

(f_2) Existe $p \in (2, 2^*)$ tal que

$$\limsup_{s \to +\infty} \frac{sf(s)}{s^p} = 0,$$

(f_3) (Condição de Ambrosetti-Rabinowitz). Existe $\theta > 2$ tal que

$$\theta F(s) \leq sf(s), \forall s > 0, \quad \text{onde} \quad F(s) = \int_0^s f(t)dt,$$

(f_4) $f(t) = 0$, para todo $t \leq 0$.

(V_1) $V(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$,

(V_2) $V(x) \leq V_\infty, \forall x \in B_1(0)$ para uma constante $V_\infty > 0$, e

(V_3) Existem $\Lambda > 0$ e $R > 1$ tais que

$$\frac{1}{R^4} \inf_{|x| \geq R} |x|^4 V(x) \geq \Lambda.$$

O resultado principal deste trabalho, veja [8], é enunciado como segue:

Teorema 0.1. Suponha que V e f satisfazem as hipóteses $(V_1)-(V_3)$ e $(f_1)-(f_4)$, respectivamente. Então, existe uma constante $\Lambda^* = \Lambda^*(V_\infty, \theta, p, c_0)$ tal que o problema (P) possui uma solução positiva para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$.

O artigo [8], objeto do nosso estudo, originou importantes resultados na área de Equações Diferenciais Parciais Elípticas. Por exemplo, as geometrias sobre V introduzidas em [8] foram consideradas em Alves, Figueiredo e Yang [7], Santos, Figueiredo e Nascimento[11], Bastos, Miyagaki e Vieira [22], Aires e Souto [14] [15] e em Cardoso, Prazeres e Severo [16].

Em [7] Alves, Figueiredo e Yang, usando uma adaptação do Método de penalização de Del Pino e Felmer [20], estudaram a equação de Choquard

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \left(\dfrac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $0 < \mu < N$ e $N \leq 3$ e obtiveram resultados similares ao obtido em [8]. Além disso, eles obtiveram outro resultado de existência considerando V radial e $f(t) = |t|^{(4-\mu)/N-2}t$, para adequados μ.

O problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \dfrac{k}{2}\Delta(u^2)u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

foi estudado por Aires e Souto em [14] para o caso $k = -2$ e em [15] para o caso $k > 0$.

Recentemente, em [11], Santos, Figueiredo e Nascimento estudaram o problema com não linearidade descontínua

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = H(u-\beta)f(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,2}_{loc}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $\beta \geq 0$, f é uma função de Caratheodory e H é a função de Heaviside, isto é, $H(t) = 1$ se $t > 0$ e $H(t) = 0$ se $t \leq 0$. Neste trabalho, o mesmo resultado de [8] foi obtido para o caso em que a não linearidade é do tipo descontínua. Em adição, assumindo que as funções V e f são funções radiais, novos resultados foram obtidos.

Em [22] os autores provaram um resultado de existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u_{ap} + V(x)|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, u \in D_a^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $\mathcal{L}u_{ap} = -div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u), 1 < p < N, -\infty < a < \dfrac{N-P}{P}, a \leq e \leq a+1$, $d = 1 + a - e$ e $p^* = \dfrac{Np}{N-dp}$ denota o expoente crítico de Hardy-Sobolev.

Muito recentemente em [16] Cardoso, Prazeres e Severo, adaptaram o método de Penalização de Del Pino e Felmer [20] para mostrar a existência de solução para o seguinte problema superlinear supercrítico

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + V(x)u = g(u) + \lambda|u|^{q-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, u \in D^{1,s}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ é pequeno e $q \geq 2_s^* := \dfrac{2N}{N-2S}$.

Estes trabalhos e outros revelam a importância do estudo de [8] e do nosso interesse em estudarmos o problema (P) com o potencial V satisfazendo $(V_1) - (V_3)$.

Esta dissertação está dividida em um capítulo contendo três seções e quatro apêndices, que estão organizados da seguinte forma:

No início do Capítulo 1, para facilidade do leitor, apresentaremos novamente o problema (P) e as hipóteses sobre V e f. Na Seção 1.1, apresentamos a estrutura variacional na qual o estudo se desenvolve, apresentando o espaço onde vamos buscar por soluções do problema estudado e a formulação variacional do problema (P), isto é, associamos um funcional ao problema (P) de tal modo que ponto crítico do funcional é solução do problema. Entretanto, para aplicar o Teorema do Passo da Montanha (veja o Apêndice B, Teorema B.2) e obter ponto crítico de I, consequentemente, solução fraca de (P), temos uma dificuldade técnica em provar que o funcional I satisfaz a condição Palais-Smale, porque não temos imersão contínua compacta de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Na Seção 1.2, com a finalidade de contornar a falta de compacidade citada acima, aplicamos o Método de Penalização de Del Pino e Felmer, veja [20]. Neste método, fazemos uma penalização na não linearidade f, isto é, iremos considerar uma função auxiliar que nos permitirá estudar um problema auxiliar (problema penalizado) associado a (P).

Depois, mostramos que o funcional associado a esse novo problema satisfaz a condição Palais-

Smale e as outras condições do teorema do Passo da Montanha, Teorema B.2. Assim, obtemos solução do problema auxiliar.

Na Seção 1.3, buscamos estimativas adequadas para mostrar que solução do problema penalizado é solução do problema original. Para tal obteremos algumas estimativas $L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ usando o método de interação de Moser,[17]. Em seguida, usamos a função harmônica associada ao operador laplaciano combinada com a estimativa $L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ para mostrar que a solução do problema auxiliar (penalizado) é realmente solução do problema original. Por último, através de todos os resultados apresentados, somos capazes de demonstrar o Teorema 0.1, citado mais acima, que é o objetivo principal deste trabalho.

No Apêndice A, apresentamos alguns resultados básicos usados ao longo da dissertação. No Apêndice B, nos apresentaremos algumas definições e alguns resultados de Teoria dos Pontos Críticos, além disso, enunciaremos e provaremos o Lema de deformação e duas versões do Teorema do Passo da Montanha. No apêndice C, demonstramos algumas propriedades do subespaço onde buscaremos por solução do problema penalizado. Por fim, no apêndice D, provamos que o funcional J associado ao problema penalizado é de classe $C^1(E,\mathbb{R})$ e exibimos sua derivada de Gateaux.

Capítulo 1

Existência de solução para uma classe de equações elípticas no $\mathbb{R}^N$ com potencial anulando-se no infinito

Neste capítulo, iremos estudar a seguinte classe de problemas elípticos:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{1.1}$$

onde o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

onde $2^* = 2N/(N-2)$ com $N \geq 3$. Admitimos que o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfaz:

(V_1) $V(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$,

(V_2) $V(x) \leq V_\infty, \forall x \in B_1(0)$ para uma constante $V_\infty > 0$,

(V_3) existem $\Lambda > 0$ e $R > 1$ tais que

$$\frac{1}{R^4} \inf_{|x| \geq R} |x|^4 V(x) \geq \Lambda.$$

Em relação a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamada de não linearidade, assumimos que satisfaz as seguintes condições:

(f_1) $\limsup\limits_{s\to 0^+} \dfrac{sf(s)}{s^{2^*}} < +\infty$ onde $2^* = 2N/(N-2)$ para $N \geq 3$,

(f_2) Existe $p \in (2, 2^*)$ tal que

$$\limsup_{s\to +\infty} \frac{sf(s)}{s^p} = 0,$$

(f_3) (Condição de Ambrosetti-Rabinowitz). Existe $\theta > 2$ tal que

$$\theta F(s) \leq sf(s), \forall s > 0, \quad \text{onde} \quad F(s) = \int_0^s f(t)dt.$$

Motivado pelo fato de estarmos interessados em provar a existência de soluções positivas para o problema (1.1), vamos supor adicionalmente que a função f satisfaz a seguinte hipótese

(f_4) $f(t) = 0$, para todo $t \leq 0$.

Um exemplo de uma função V que satisfaz $(V_1) - (V_3)$ é dada por

$$V(x) = \begin{cases} \varrho_1, & \text{se } |x| \leq \varrho_1 + \varrho_2, \\ |x| - \varrho_2, & \text{se } \varrho_1 + \varrho_2 < |x| \leq R, \\ \dfrac{(R-\varrho_2)R^4}{|x|^4}, & \text{se } |x| > R, \end{cases}$$

onde $\varrho_1, \varrho_2 \geq 0, 0 < \varrho_1 + \varrho_2 < R$. Nós temos $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = 0$ e $V(x) = 0$ em $B_{\varrho_2}(0)$ para $\varrho_1 = 0$.

Um exemplo típico de uma função que satisfaz as condições $(f_1) - (f_4)$ é dado por

$$f(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \leq 0, \\ \alpha|s|^{2^*-1}, & \text{se } 0 \leq s \leq 1 \\ h(s), & \text{se } 1 \leq s \leq 2 \\ \beta|s|^{q-2}, & \text{se } s \geq 2. \end{cases}$$

Em que $0 < \alpha \leq \beta, 3 < q$ e h é escolhida de modo que f seja contínua.

O principal resultado deste trabalho, veja [8], é enunciado como segue:

Teorema 1.1. Sejam $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz as hipóteses $(V_1) - (V_3)$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz as hipóteses $(f_1) - (f_4)$. Então, existe uma constante $\Lambda^* = \Lambda^*(V_\infty, \theta, p, c_0)$ tal que o problema (1.1) possui uma solução positiva para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$.

Iniciamos nossas análises destacando o seguinte lema:

Lema 1.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função continua satisfazendo $(f_1), (f_2)$ e (f_4) , então existe $c_0 > 0$ tal que

$$|sf(s)| \leq c_0 |s|^{2^*} \quad \text{e} \quad |sf(s)| \leq c_0 |s|^p. \tag{1.2}$$

Demonstração. A hipótese (f_2) significa dizer que para todo $\varepsilon > 0$ existe s_0 tal que

$$\sup_{s > s_0} \frac{sf(s)}{s^p} \leq \varepsilon$$

e as hipóteses (f_1) e (f_2) implicam que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \sup_{0 < s < \delta} \frac{sf(s)}{s^{2^*}} \in (K - \varepsilon, K + \varepsilon).$$

Logo, escolhendo um mesmo $\varepsilon > 0$ em ambas as hipóteses, podemos considerar o valor

$$\max_{s \in [\delta, s_0]} \frac{sf(s)}{s^{2^*}}$$

e tomando

$$c_0 = \max \left\{ K + \varepsilon, \max_{s \in [\delta, s_0]} \frac{sf(s)}{s^{2^*}}, \max_{s \in [\delta, s_0]} \frac{sf(s)}{s^p} \right\}$$

podemos concluir que vale $|sf(s)| \leq c_0 |s|^{2^*}$ (observe que podemos considerar $s_0 > 1$ de modo que $sf(s)/s^{2^*} \leq sf(s)/s^p$).

Vamos verificar que para esse mesmo valor de c_0 nós temos $|sf(s)| \leq c_0 |s|^p$. De fato, temos

$$\sup_{s > s_0} \frac{sf(s)}{s^p} < \varepsilon \leq c_0,$$

e, se considerarmos $\delta < 1$, temos

$$\sup_{0<s<\delta} \frac{sf(s)}{s^p} < \sup_{0<s<\delta} \frac{sf(s)}{s^{2^*}} < c_0,$$

de modo que fica demonstrado o afirmado. ■

1.1 O subespaço E e o funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (1.1)

Agora, iremos apresentar o espaço em que nós vamos buscar solução do problema (1.1). Além disso, apresentaremos algumas propriedades desse espaço.

A partir de (V_1), notamos que podemos introduzir o seguinte subespaço

$$E = \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < +\infty \right\}$$

de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ munido com o produto interno definido por

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx. \tag{1.3}$$

e norma associada

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx. \tag{1.4}$$

No **Apendice C** mostramos que E é um espaço de Banach com a norma definida em (1.4).

O funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (1.1) é dado por

$$\begin{gathered} I : E \longmapsto \mathbb{R} \\ I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx. \end{gathered} \tag{1.5}$$

A partir das condições sobre f, podemos provar que o funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e que a derivada de Fréchet desse funcional é dada por,

$$I'(u)v = \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx. \tag{1.6}$$

Os pontos críticos de (1.6) correspondem a soluções fracas de (1.1).

Podemos mostrar que o funcional I satisfaz a primeira e segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha. Entretanto, a maior dificuldade em obter pontos crítico do funcional I via Teorema do Passo da Montanha é o fato de não termos imersão compacta do espaço de Sobolev $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ no espaço $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ o que gera dificuldade ao tentarmos mostrar que o funcional I satisfaz a condição Palais-Smale e assim obter solução de (1.1). Com o objetivo de contornar essa falta de compacidade e com a finalidade de obtermos uma solução positiva para (1.1), nós iremos utilizar o Método de Penalização de Del Pino e Felmer explorado em [20].

1.2 O Método de Penalizacão de Del Pino e Felmer

Iniciamos definindo a constante $k = 2\theta/(\theta - 2) > 2$. Para k e $R > 1$, definimos as funções

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(t), \text{ se } f(t) \leq \dfrac{V(x)t}{k} \\ \dfrac{V(x)t}{k}, \text{ se } f(t) > \dfrac{V(x)t}{k} \end{cases} \tag{1.7}$$

e a função penalizada

$$g(x,t) = \begin{cases} f(t), \text{ se } |x| \leq R, \\ \\ \tilde{f}(x,t), \text{ se } |x| > R. \end{cases} \tag{1.8}$$

O problema auxiliar (problema penalizado) que será considerado é o seguinte

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = g(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in E. \end{cases} \tag{1.9}$$

O Problema Penalizado (1.9) está fortemente relacionado ao problema original (1.1). De fato, se u é uma solução do problema (1.9) tal que

$$f(u) \leq \frac{V(x)}{k}u, \text{ para todo } |x| \geq R,$$

então $g(x,u) = f(u)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. E portanto, solução do problema penalizado é solução do problema original. Assim, nossa tarefa de encontrar solução do problema original (1.1) é transferida à encontrar solução do problema penalizado (1.9) que satisfaz a condição citada anteriormente.

O funcional de Euler-Lagrange associado ao problema auxiliar é dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int\limits_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx, u \in E \tag{1.10}$$

que é $C^1(E,\mathbb{R})$ e Fréchet diferenciável, veja o Apêndice D, com

$$J'(u)v = \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x,u)vdx, \; u,v \in E. \tag{1.11}$$

E os pontos críticos de J correspondem às soluções fracas do problema auxiliar (1.9).

Lema 1.2. Sejam $\tilde{f}$ e g definidas em (1.7) e (1.8), respectivamente. Para todo $t \in \mathbb{R}$ temos:

$$\tilde{f}(x,t) \leq f(t), \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.12}$$

$$g(x,t) \leq \frac{V(x)}{k}t, \forall\, |x| \geq R. \tag{1.13}$$

$$G(x,t) = F(t) \;\; \text{para} \;\; |x| \leq R. \tag{1.14}$$

$$G(x,t) \leq \frac{V(x)t^2}{2k}, \text{ se } |x| > R. \tag{1.15}$$

Demonstração. A relação (1.12) segue diretamente da definição de $\tilde{f}$. Para vermos que (1.13) é válida, consideramos primeiramente $|x| > R$, assim temos $g(x,t) = \tilde{f}(x,t) \leq V(x)t/k$. Agora, dado x com $|x| = R$, segue da definição que $g(x,t) = f(t) \leq V(x)t/k$.

Uma vez que $g(x,t) = f(t)$ dentro da bola B_R, integrando de 0 a t (em g integramos em relação à segunda variável), temos

$$\int_0^t g(x,\xi)d\xi = \int_0^t f(\xi)\xi$$

logo $G(x,t) = F(t)$. Assim, basta integrar em relação a t para $|x| \leq R$ e obtemos (1.14).

Para obtermos (1.15), basta notar que $g(x,t) \leq \dfrac{V(x)}{k}t, \forall\, |x| \geq R$ e integrar em relação a t. ■

1.2.1 Geometria do Passo da Montanha

Com o intuito de aplicar o célebre Teorema do Passo da Montanha, de Ambrosetti e Rabinowitz [3], veja o Apêndice B-Teorema B.2, para o funcional $J : E \to \mathbb{R}$, a seguir, mostraremos que o mesmo verifica as chamadas geometrias do passo da montanha.

Lema 1.3. O funcional $J : E \to \mathbb{R}$ verifica as duas geometrias do Teorema do Passo da Montanha, isto é,

(I) Existem $\alpha, \rho > 0 = J(0)$ tais que

$$J(u) \geq \alpha > 0 \quad \text{para todo} \quad u \in E : \|u\| = \rho.$$

(II) Existe $e \in C_0^\infty(B_1(0))$ com $\|e\| > \rho$ e $J(e) < 0$.

Demonstração. Da definição de g podemos provar que

$$|g(x,u)| \leq c_0 |u|^{2^*-1}.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx \leq \frac{c_0}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx.$$

Pela imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx \leq \frac{c_0}{2^*} \|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*} \leq M \|u\|^{2^*}.$$

Assim,

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - M \|u\|^{2^*},$$

ou seja,

$$J(u) \geq \|u\|^2 \left(\frac{1}{2} - M \|u\|^{2^*-2} \right).$$

Tomando

$$0 < \rho < \left(\frac{1}{2M} \right)^{\dfrac{1}{2^* - 2}}.$$

E escolhendo

$$\alpha = \rho^2 \left[\frac{1}{2} - M\rho^{2^*-2} \right]$$

temos $J(u) \geq \alpha > 0, J(0) = 0$, para $\|u\| = \rho$.

Mostraremos que J satisfaz a segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha. Da condição de Ambrosetti-Rabinowitz (f_3), temos

$$0 < \frac{\theta}{t} \leq \frac{f(t)}{F(t)}, \quad \text{para todo} \quad t > 0.$$

Assim, para qualquer $s > 1$, tem-se

$$0 < \int_1^s \frac{\theta}{t} dt \leq \int_1^s \frac{f(t)}{F(t)} dt,$$

o que implica em

$$0 < \theta \ln s \leq \ln F(s) - \ln F(1), \quad \text{para todo} \quad s > 1,$$

então, segue que

$$0 < \ln s^\theta \leq \ln \frac{F(s)}{F(1)}, \quad \text{para todo} \quad s > 1.$$

Como o logarítmo é crescente

$$s^\theta \leq \frac{F(s)}{F(1)}, \quad \text{para todo} \quad s > 1,$$

consequentemente

$$F(s) \geq c_1 s^\theta, \quad \text{para todo} \quad s > 1, \tag{1.16}$$

em que $c_1 = F(1)$.

Pela continuidade de F, existe $M > 0$ tal que $F(s) \geq -M$ para todo $s \in [0, 1]$. Assim, consideramos $c_2 = c_1 + M$, temos

$$F(s) \geq -M = c_1 - c_2 \geq c_1 s^\theta - c_2, \quad \text{para todo} \quad s \in [0,1]. \tag{1.17}$$

De (1.16) e (1.17) concluímos que

$$F(s) \geq c_1 s^\theta - c_2, \quad \text{para todo} \quad s \geq 0. \tag{1.18}$$

Agora, seja $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ com $\varphi \neq 0$, assim φ tem suporte compacto em $B_1(0)$. Temos

$$G(x,s) = F(s) \quad \text{para} \quad |x| \leq R.$$

Portanto,

$$J(t\varphi) = \frac{t^2}{2} \|\varphi\|^2 - \int\limits_{B_1(0)} F(t\varphi) dx.$$

De (1.18), obtemos

$$J(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2} \|\varphi\|^2 - \int\limits_{B_1(0)} \left(c_1 t^\theta |\varphi|^\theta - c_2 \right) dx,$$

logo

$$J(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2} \|\varphi\|^2 - c_1 t^\theta \int\limits_{B_1(0)} |\varphi|^\theta dx + c_2 |B_1(0)|.$$

Portanto, desde que $\theta > 2$, obtemos $J(t\varphi) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$ e esse limite implica que existe $t^* > 0$ tal que $e = t^* \varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ com $\|e\| > \rho$ e $J(e) < 0$. ■

Como consequência do Teorema do Passo da Montanha, Teorema B.2 do apêndice B, existe uma sequência Palais-Smale $(u_n) \subset E$ tal que

$$J(u_n) \to c \quad \text{e} \quad J'(u_n) \to 0$$

em que

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \tag{1.19}$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Agora, nosso objetivo é mostrar que o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale. Mostraremos primeiramente que as sequências (PS) para o funcional J são limitadas.

Lema 1.4. Supondo que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz $(f_1) - (f_3)$ e supondo também que a função $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínua e verifica a condição (V_1). Se $(u_n) \subset E$ é uma sequência Palais-Smale do funcional J, então (u_n) é limitada em E.

Demonstração. Pelas definições do funcional J e de sua derivada J', podemos calcular

$$J(u) - \frac{1}{\theta}J'(u)u = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int\limits_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx + \frac{1}{\theta}\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x,u)udx, \tag{1.20}$$

onde podemos analisar as integrais dentro da bola B_R e fora dela. Temos

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx - \frac{1}{\theta}\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x,u)udx = & \int\limits_{|x|\leq R} G(x,u)dx - \frac{1}{\theta}\int\limits_{|x|\leq R} g(x,u)udx \\ & + \int\limits_{|x|>R} G(x,u)dx - \frac{1}{\theta}\int\limits_{|x|>R} g(x,u)udx\end{aligned}$$

e como $G(x,u) = F(u)$ para $|x| \leq R$ e $g(x,u) = f(u)$ para $|x| \leq R$, temos pela condição de Ambrosetti e Rabinowitz

$$\int\limits_{|x|\leq R} G(x,u)dx - \frac{1}{\theta}\int\limits_{|x|\leq R} g(x,u)udx = \int\limits_{|x|\leq R} F(u)dx - \frac{1}{\theta}\int\limits_{|x|\leq R} f(u)udx = \int\limits_{|x|\leq R} (F(u) - f(u)u/\theta)dx \leq 0.$$

E como $G(x,u) \leq V(x)u^2/(2k)$ para $|x| > R$, então

$$\frac{1}{2k}\|u\|^2 - \int\limits_{|x|\geq R} G(x,u)dx + \frac{1}{\theta}\int\limits_{|x|\leq R} g(x,u)udx \geq \frac{1}{2k}\int\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2dx - \int\limits_{|x|\geq R} G(x,u)dx + \frac{1}{\theta}\int\limits_{|x|\leq R} g(x,u)udx.$$

E também podemos concluir que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2k}\|u\|^2 - \int\limits_{|x|\geq R} G(x,u)dx + \frac{1}{\theta}\int\limits_{|x|\leq R} g(x,u)udx & \geq \frac{1}{2k}\int\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2dx - \frac{1}{2k}\int\limits_{|x|\geq R} V(x)u^2dx + \frac{1}{\theta}\int\limits_{|x|\leq R} g(x,u)udx \\ & \geq 0.\end{aligned}$$

É importante observar que a integral $\frac{1}{\theta}\int_{|x|\leq R} g(x,u)udx$ na desigualdade anterior é positiva. De fato, temos $g(x,u) = \tilde{f}(x,u)$ para $|x| \geq R$, de modo que ou $g(x,u) = f(u) \geq 0$ ($g(x,u) = f(u) = 0$ caso $u < 0$), ou nós temos $g(x,u) = V(x)u/(k)$, que resulta em $g(x,u)u = V(x)u^2/k \geq 0$, como queríamos mostrar. Daí podemos concluir

$$J(u) - \frac{1}{\theta}J'(u)u =$$

$$= \frac{1}{2k}\|u\|^2 + \underbrace{\frac{1}{2k}\|u\|^2 - \int\limits_{|x|>R} G(x,u)dx + \frac{1}{\theta}\int\limits_{|x|\geq R} g(x,u)udx}_{\geq 0} \underbrace{- \int\limits_{|x|\leq R} G(x,u)dx + \frac{1}{\theta}\int\limits_{|x|\leq R} g(x,u)udx}_{\geq 0}.$$

E assim vemos que

$$J(u) - \frac{1}{\theta}J'(u)u \geq \frac{1}{2k}\|u\|^2, \ \ \forall u \in E. \tag{1.21}$$

A sequência $J(u_n)$ é limitada pois (u_n) é uma sequência Palais-Smale, assim seja M uma constante que limita a sequência $(J(u_n))$. Temos $|J'(u_n)u_n| \leq \|u_n\|$ para n suficientemente grande também porque (u_n) é uma sequência Palais-Smale. De fato, para $\varepsilon = 1$, existe n_0 suficientemente grande tal que $\|J'(u_n)\| \leq \varepsilon = 1$ que implica $|J'(u_n)u_n| \leq \|J'(u_n)\| \|u_n\| < \|u_n\|$ para $n \geq n_0$. Assim,

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta}J'(u_n)u_n \leq M + \|u_n\|, \forall n \geq n_0. \tag{1.22}$$

De (1.21) e (1.22), temos

$$\frac{1}{2k}\|u_n\|^2 \leq M + \|u_n\|, \forall n > n_0. \tag{1.23}$$

A última equação mostra que a sequência (u_n) é limitada. De fato, se (u_n) não fosse limitada, então haveria n suficientemente grande para o qual o lado esquerdo da última equação iria ultrapassar o lado direito, o que seria uma contradição. Logo (u_n) é limitada em E. ■

A seguir, nós iremos mostrar que o funcional $J : E \to \mathbb{R}$, associado ao problema penalizado (1.9), satisfaz a condição de Palais-Smale.

Lema 1.5. Sob as hipóteses do Lema 1.4, o funcional J satisfaz a condição Palais-Smale.

Demonstração. Pelo Lema 1.4, e pelo fato de que toda sequência limitada de um espaço de Hilbert possui uma subsequência fracamente convergente, podemos supor que existe $u \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em E.

Para $\varepsilon > 0$, escolha $r > R > 1$ tal que

$$4\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-1}\omega_N^{\frac{1}{N}}\,\|u\|\left(\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r}|u|^{2^*}\right)^{1/2^*} < \varepsilon. \tag{1.24}$$

onde ω_N é o volume da bola de raio unitário em $\mathbb{R}^N$.

Para realizar essa escolha de r de maneira apropriada, precisamos primeiramente observar que $u \in E \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Isso implica que

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\right)^{1/2^*}$$

deve ser um valor finito e bem definido.

Supomos, por contradição, que exista $\varepsilon' > 0$, tal que para todo $r > R > 1$ tenhamos

$$\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r}|u|^{2^*} \geq \varepsilon'.$$

Considere ainda que 2^s seja a menor potência de 2 tal que $2^s > R$. Nesse caso, vemos que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}dx = \int\limits_{0\leq|x|\leq 2^s}|u|^{2^*}dx + \int\limits_{2^s\leq|x|\leq 2^{s+1}}|u|^{2^*}dx + \int\limits_{2^{s+1}\leq|x|\leq 2^{s+2}}|u|^{2^*}dx + \cdots = \infty,$$

o que é uma contradição, e logo deve haver $r > R$ tal que $\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}dx \leq \varepsilon$.

Agora, seja η uma função que depende de r e que possui as seguintes características:

(η_1) $\eta \in C^\infty(B_r^c) = C^\infty(\mathbb{R}^N\backslash B_r)$,

(η_2) $\eta = 0$ em B_R.

(η_3) Por outro lado, a função η satisfaz $\eta = 1$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_{2r} = B_{2r}^c$ e

(η_4) $0 \leq \eta \leq 1$ para todo $\mathbb{R}^N$.

(η_5) Além disso, a função η deve satisfazer $|\nabla \eta| \leq \dfrac{2}{r}, \forall x \in \mathbb{R}^N$.

Nosso próximo passo é mostrar que a sequência (ηu_n) é limitada, para concluírmos que

$$J'(u_n)(\eta u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\eta u_n) + V(x) u_n (\eta u_n)] - \int_{\mathbb{R}^N} \eta g(x, u_n) u_n dx = o(1).$$

Afirmamos que a sequência (ηu_n) é limitada em E. De fato, Como (u_n) converge fracamente para u, já sabemos que (u_n) é limitada em E. Agora vamos analisar a norma

$$\|\eta u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(\eta u_n)|^2 + V(x)(\eta u_n)^2) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\eta u_n)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(\eta u_n)^2 dx. \tag{1.25}$$

Como $0 \leq \eta \leq 1$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)(\eta u_n)^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_n^2 dx \leq \|u_n\|^2 . \tag{1.26}$$

Assim, só falta mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\eta u_n)|^2 dx \text{ é limitada.} \tag{1.27}$$

Uma vez que $0 \leq \eta \leq 1$ e $|\nabla \eta| \leq 2/r$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\eta u_n)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\eta \nabla u_n + u_n \nabla \eta|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\eta \nabla u_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n \nabla \eta|^2 dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\eta||u_n||\nabla \eta||\nabla u_n| dx.$$

Prosseguindo, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\eta \nabla u_n|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\eta|^2 |\nabla u_n|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2. \tag{1.28}$$

E também temos

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_n \nabla \eta|^2 dx &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 |\nabla \eta|^2 dx \\
&\leq \left(\frac{2}{r}\right)^2 \int\limits_{B_{2r}} |u_n|^2 dx \\
&\leq \frac{4}{r^2} \left(\int\limits_{B_{2r}} |u_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} |B_{2r}|^{\frac{2^*-2}{2}} \qquad (1.29) \\
&\leq \frac{4}{r^2} |B_{2r}|^{\frac{2^*-2}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \\
&\leq \frac{4}{r^2} |B_{2r}|^{\frac{2^*-2}{2}} C \left\| \nabla u_n \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

E por fim

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\eta||u_n||\nabla \eta||\nabla u_n| dx &\leq \frac{2}{r} \int\limits_{B_{2r}} |u_n||\nabla u_n| dx \\
&\leq \frac{2}{r} \left\| u \right\|_{L^2(B_{2r})} \left\| \nabla u_n \right\|_{L^2(B_{2r})} \\
&\leq \frac{2}{r} \left\| u \right\|_{L^{2^*}(B_{2r})} |B_{2r}|^{2^*-2} \left\| \nabla u_n \right\|_{L^2(B_{2r})} \qquad (1.30) \\
&\leq \frac{2}{r} |B_{2r}|^{2^*-2} C \left\| \nabla u_n \right\|_{L^2(B_{2r})} \\
&\leq \frac{2}{r} |B_{2r}|^{2^*-2} C \left\| u_n \right\|.
\end{aligned}
$$

De (1.28), (1.29) e (1.30), concluímos que (1.27) é verdadeira. E (1.25),(1.26) e (1.27), mostram que a sequência (ηu_n) é limitada em E.

Segue da definição da norma do operador $J'(u_n)$ e devido a $J'(u_n) \to 0$ por (u_n) ser uma sequência de Palais-Smale que $J'(u_n)(\eta u_n) = o(1)$. De fato, temos

$$
|J'(u_n)(\eta u_n)| \leq \left\| J'(u_n) \right\| \left\| \eta u_n \right\|,
$$

em que (ηu_n) é limitada e $\left\| J'(u_n) \right\| \to 0$, o que mostra o limite desejado.

Observemos que $J'(u_n)u_n = o(1)$ significa

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\eta u_n) + V(x)u_n(\eta u_n)] = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \eta g(x, u_n)u_n dx + o(1). \tag{1.31}$$

Agora, vamos usar o fato de que $\eta = 0$ em B_R, combinado com (1.13) e a equação (1.31) para concluir que

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right) \int\limits_{|x|\geq r} \eta[\nabla u_n \nabla u_n + V(x)u_n^2] \leq \frac{2}{r} \int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n| + o(1).$$

Como $\nabla u_n \nabla(\eta u_n) = \nabla u_n(u_n \nabla \eta + \eta \nabla u_n)$, então podemos escrever

$$\int\limits_{|x|\geq r} [\nabla u_n \nabla(\eta u_n) + V(x)u_n(\eta u_n)] = \int\limits_{|x|\geq r} \eta[\nabla u_n \nabla u_n + V(x)u_n^2] + \int\limits_{|x|\geq r} u_n \nabla u_n \nabla \eta$$

e como $g(x, t) \leq V(x)t/k, \forall |x| \geq R$, temos $g(x, u_n) \leq V(x)u_n/k$ e

$$\int\limits_{|x|\geq r} \eta g(x, u_n)u_n dx \leq \int\limits_{|x|\geq r} \eta u_n V(x)u_n/k dx = \frac{1}{k} \int\limits_{|x|\geq r} \eta V(x)u_n^2 dx.$$

Assim, podemos concluir a partir da Equação (1.31) que

$$\int\limits_{|x|\geq r} \eta[\nabla u_n \nabla u_n + V(x)u_n^2] \leq \frac{1}{k} \int\limits_{|x|\geq r} \eta V(x)u_n^2 dx - \int\limits_{|x|\geq r} u_n \nabla u_n \nabla \eta + o(1).$$

Subtraindo $\frac{1}{k} \int\limits_{|x|\geq r} \eta V(x)u_n^2 dx$ da última equação temos

$$\int\limits_{|x|\geq r} \eta[\nabla u_n \nabla u_n + V(x)u_n^2] - \frac{1}{k} \int\limits_{|x|\geq r} \eta V(x)u_n^2 dx \leq - \int\limits_{|x|\geq r} u_n \nabla u_n \nabla \eta + o(1).$$

E assim

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \int\limits_{|x|\geq r} \eta[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2] &\leq \int\limits_{|x|\geq r} \eta[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2] - \frac{1}{k} \int\limits_{|x|\geq r} \eta V(x)u_n^2 dx \\ &\leq - \int\limits_{|x|\geq r} u_n \nabla u_n \nabla \eta + o(1). \end{aligned}$$

Mas observemos que $\eta = 1$ em B_{2r}^c, então temos $\nabla\eta = 0$ em B_{2r}^c (η é constante fora da bola B_{2r}). Podemos então escrever

$$-\int\limits_{|x|\geq r} u_n \nabla u_n \nabla \eta = -\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} u_n \nabla u_n \nabla \eta \leq \int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n||\nabla\eta| \leq \frac{2}{r}\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n|$$

onde temos $|\nabla\eta| \leq 2/r$ e assim

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\int\limits_{|x|\geq r} \eta[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2] \leq \frac{2}{r}\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n| + o(1). \tag{1.32}$$

Queremos concluir que

$$\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u|dx \leq \|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\left(\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} u_n^2\right)^{1/2} \tag{1.33}$$

por meio da desigualdade de Hölder, Teorema A.3. Pela desigualdade de Hölder, para $p = 2$ e $q = 2$, segue que

$$\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u|dx \leq \left(\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n|^2\right)^{1/2}\left(\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} |\nabla u_n|^2\right)^{1/2}.$$

E assim mostramos que

$$\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u|dx \leq \left(\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n|^2\right)^{1/2}\left(\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} |\nabla u|^2\right)^{1/2} \leq \left(\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n|^2\right)^{1/2} \|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

O espaço E está compactamente imerso no espaço $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, de modo que podemos tomar uma subsequência onde $u_n \to u$ em $L^2(B_{2r}\backslash B_r)$, assim (u_n) também é limitada em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$\limsup_n \int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n|dx \leq \frac{C}{r}\left(\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} u^2dx\right)^{1/2} \tag{1.34}$$

para algum $C > 0$.

Vamos mostrar que

$$\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} u^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^{2^*}\right)^{1/2^*} |B_{2r}\backslash B_r|^{1/N}. \qquad (1.35)$$

Para se chegar à Equação (1.35) utilizamos a desigualdade de Hölder, veja o Apêndice A-Teorema A.3, com $p = 2^*/2 > 1$ e $q = N/2 > 1$, como mostra desenvolvimento a seguir

$$\begin{aligned}\int_{r\leq|x|\leq 2r} u^2 &\leq \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} (u^2)^p\right)^{1/p} \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} 1^q\right)^{1/q}\\ &\leq \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} u^{2^*}\right)^{2/2^*} \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} 1^{N/2}\right)^{2/N}\end{aligned}$$

que implica na desigualdade (1.35) quando se passa a raiz quadrada.

Utilizando que $|B_{2r}\backslash B_r| \leq |B_{2r}| = \omega_N 2^N r^N$ juntamente com as equações (1.34) e (1.35), temos

$$\limsup_n \int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n|dx \leq 2C\omega_N^{1/N} \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^{2^*}\right)^{1/2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}\limsup_n \int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n|dx &\leq \frac{C}{r}\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} u^2dx\right)^{1/2}\\ &\leq \frac{C}{r}\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} u^{2^*}\right)^{1/2^*} |B_{2r}\backslash B_r|^{1/N}\\ &= \frac{C}{r}(2^N r^N \omega_N)^{1/N}\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} u^{2^*}\right)^{1/2^*}\\ &= 2C\omega_N^{1/N}\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} u^{2^*}\right)^{1/2^*}.\end{aligned}$$

E portanto

$$\limsup_n \int\limits_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n|dx \leq 2C\omega_N^{1/N}\left(\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r}|u|^{2^*}\right)^{1/2}. \tag{1.36}$$

Devido a escolha de r na Equação (1.24), devido a estimativa realizada na Equação (1.32) e a estimativa da Equação (1.36), temos

$$\limsup_n \int\limits_{|x|\geq 2r} [|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2]dx < \varepsilon,$$

com mais detalhes, temos

$$\begin{aligned}\int\limits_{|x|\geq r} \eta[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2]dx &\leq \frac{2}{r}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-1}\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r}|u_n||\nabla u_n|dx + o(1)\\ &\leq \frac{4}{r}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-1}C\omega_N^{1/N}\left(\int\limits_{r\leq|x|\leq 2r}|u|^{2^*}\right)^{1/2^*} + o(1)\end{aligned}$$

e reescrevendo a integral do lado esquerdo temos

$$\int\limits_{|x|\leq 2r} \eta[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2]dx + \int\limits_{|x|\geq 2r} \eta[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2]dx \leq \varepsilon + o(1)$$

onde sabemos que $\eta = 1$ em B_{2r}^c e podemos concluir assim que

$$\int\limits_{|x|\geq 2r} \eta[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2]dx = \int\limits_{|x|\geq 2r} [|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2]dx$$

e por fim

$$\limsup_n \int\limits_{|x|\geq 2r} [|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2]dx < \varepsilon. \tag{1.37}$$

Sabendo que $g(x,u) \leq V(x)u/k$ para todo $|x| > R$ e que $k > 2$, podemos escrever

$$\limsup_n \int\limits_{|x|\geq 2r} u_n g(x,u_n)dx \leq \frac{1}{k}\limsup_n \int\limits_{|x|\geq 2r} V(x)u_n^2 dx \leq \frac{1}{k}\int\limits_{|x|\geq 2r}[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2]dx < \frac{\varepsilon}{k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Observe que $|ug(x,u)| \leq c_0|u|^{2^*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, consequentemente existe $r > 0$ suficientemente

grande, tal que
$$\int\limits_{|x|\geq 2r} ug(x,u)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ e $r > 0$ suficientemente grande tais que

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} [u_n g(x,u_n) - ug(x,u)]dx \right| \leq \varepsilon + \left| \int\limits_{|x|\leq 2r} [u_n g(x,u_n) - ug(x,u)]dx \right|. \quad (1.38)$$

Por imersão compacta

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) \quad \text{para} \quad p \in (2, 2^*),$$

a menos de subsequência, (u_n) converge pra u em $L^p(B_{2r})$. Logo, do Teorema de Vainberg, veja o Apêndice A-Teorema A.4, existe $h \in L^p(B_{2r})$ tal que

$$u_n(x) \to u(x) \ \ q.t.p \ \text{ em } \ B_{2r} \ \text{ e}$$

$$|u_n(x)| \leq h(x), \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ q.t.p \ \text{ em } \ B_{2r}.$$

Assim, como g é contínua, temos

$$|g(x,u_n)u_n - g(x,u)u| \to 0 \ \ q.t.p \ \text{ em } \ B_{2r}$$

Agora, como g tem um crescimento subcrítico, temos

$$\begin{aligned} |g(x,u_n)u_n - g(x,u)u| &\leq |g(x,u_n)u_n| + |g(x,u)u| \\ &\leq c_0|u_n|^p + c_0|u|^p \\ &\leq c_0|h(x)|^p + c_0|u|^p. \end{aligned}$$

E

$$c_0|h(x)|^p + c_0|u|^p \in L^1(B_{2r}).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, veja o Apêndice A-Teorema A.2, temos

$$\int\limits_{|x|\leq 2r} [g(x,u_n)u_n - g(x,u)u]dx \to 0. \quad (1.39)$$

Finalmente, de (1.38) e (1.39) concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n g(x,u_n)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} ug(x,u)dx. \tag{1.40}$$

Como $(u_n - u)$ é limitada em E, de

$$|J'(u_n)(u_n-u)| \leq \|J'(u_n)\| \, \|u_n - u\| \, ,$$

temos

$$J'(u_n)(u_n-u) = o(1),$$

isto é,

$$\|u_n\|^2 - \|u\|^2 + \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x,u)udx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n dx = o(1).$$

Passando o limite com $n \to +\infty$, juntamente com (1.40), encontramos

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|^2 = \|u\|^2 \, .$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n-u)\nabla(u_n-u)dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n-u)^2 dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - 2\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n^2 - 2u_n u + u^2)dx \\
&= \|u_n\|^2 + \|u\|^2 - 2\left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u_n \nabla u + V(x)u_n u\right) dx\right] \\
&= o(1).
\end{aligned}$$

Isso mostra que $u_n \to u$ em E e portanto o funcional J satisfaz a condição Palais-Smale. ■

Proposição 1.1. Suponha que V satisfaz (V_1) e que f satisfaz $(f_1) - (f_4)$. Então, o problema auxiliar (1.9) (problema penalizado) possui uma solução positiva $u \in E$.

Demonstração. De fato, usando os Lemas 1.3 e 1.5 combinado com o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz, veja o Apêndice B - Teorema B.2, concluímos que J possui um ponto crítico u tal que

$$J(u) = c \text{ e } J'(u) = 0.$$

Portanto,

$$0 = \int\limits_{R^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx - \int\limits_{R^N} g(x,u)v dx, \ \ v \in E.$$

Agora, verificaremos que u é uma solução positiva. Como u é solução de (1.9) e $u^- \in E$, segue que

$$J'(u)u^- = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{R^N} (\nabla u \nabla u^- + V(x)uu^-)dx - \int\limits_{R^N} g(x,u)u^- dx \\ &\geq \int\limits_{R^N} [|\nabla u^-|^2 + V(x)(u^-)^2]dx - \int\limits_{R^N} g(x,u)u^- dx \\ &= \int\limits_{R^N} [|\nabla u^-|^2 + V(x)(u^-)^2]dx = \left\|u^-\right\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, como $u^- = 0$, então $u \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$. Pelo princípio do máximo, $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$. ■

1.3 Existência de solução para o problema (1.1)

Nosso objetivo agora, é provar que solução do problema auxiliar (problema penalizado) é também solução do problema original (1.1) e assim demonstrarmos o Teorema principal deste trabalho. Para isso, inicialmente iremos obter algumas estimativas adequadas sobre a solução do problema auxiliar (1.9) através dos Lemas 1.7, 1.8 e 1.9.

1.3.1 Estimativas sobre as soluções do problema penalizado

Definição 1.1. Denotamos por $B = B_1(0)$ a bola aberta centrada em 0 e de raio 1 e por $I_0 : H_0^1(B) \to \mathbb{R}$ o funcional definido por

$$I_0(u) = \frac{1}{2}\int\limits_B (|\nabla u|^2 + V_\infty u^2)dx - \int\limits_B F(u)dx \tag{1.41}$$

onde $V_\infty > 0$ é a constante da hipótese (V_2). Em que $H_0^1(B)$ é o completamento de $C_0^\infty(B)$ com relação a norma $\|.\|_{H^1(B)}$.

Lema 1.6. O funcional $I_0 : H_0^1(B) \to \mathbb{R}$ verifica as duas geometrias do Teorema do Passo da Montanha, isto é,

(I) Existem $\alpha, \rho > 0 = I_0(0)$ tais que

$$I_0(u) \geq \alpha > 0 \text{ para todo } u \in H_0^1(B) : \|u\| = \rho.$$

(II) E existe $e \in H_0^1(B)$ com $\|e\| > \rho$ e $I_0(e) < 0$.

Demonstração. A prova deste resultado é semelhante ao que foi feito no Lema 1.3.

Consideramos assim o ponto $e \in H_0^1(B)\backslash\{0\}$ para o qual $I_0(e) < 0$ e todos os caminhos que partem de 0 e chegam em e, mais precisamente considere o conjunto

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C([0,1], H_0^1(B)) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\right\} \tag{1.42}$$

de modo que temos o nível da montanha associado a I_0 que é dado por

$$d = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_0(\gamma(t)). \tag{1.43}$$

Uma vez que $J(u) \leq I_0(u)$ para todo $u \in H_0^1(B)\backslash\{0\}$, temos

$$\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I_0(\gamma(t)) \tag{1.44}$$

para toda curva $\gamma \in \Gamma$. Então, a partir das definições dos números c e d, concluímos que

$$c \leq d. \tag{1.45}$$

Lema 1.7. Para $R > 1$, qualquer solução *ground state* positiva u de (1.9) satisfaz a estimativa

$$\|u\|^2 \leq 2kd. \tag{1.46}$$

Demonstração. Do Lema 1.4 sabemos que para todo $u \in E$ temos

$$J(u) - \frac{1}{\theta}J'(u)u \geq \frac{1}{2k}\|u\|^2,$$

de modo que podemos concluir

$$\|u\|^2 \leq 2k[J(u) - \frac{1}{\theta}J'(u)u] \leq 2kJ(u) \leq 2kc \leq 2kd. \qquad \blacksquare$$

Observação 1.1. No Lema 1.7 destacamos o fato de que $\|u\|$ é limitada por uma constante que depende apenas de V_∞, θ e f. Esta constante não depende de $R > 1$.

A proposição que iremos demonstrar a seguir estabelece uma estimativa importante envolvendo a norma $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ da solução u, o que é de extrema importância para obtenção dos resultados de existência de solução do problema proposto.

Proposição 1.2. Seja $h \in L^q(\mathbb{R}^N), 2q > N$ e $v \in E \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma solução fraca do problema

$$-\Delta v + b(x)v = H(x,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{1.47}$$

onde $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo

$$|H(x,s)| \leq h(x)|s|, \forall s > 0$$

e b é uma função não-negativa em $\mathbb{R}^N$. Então existe uma constante $M = M(q, \|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}) > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M \|v\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

Demonstração. Para cada $m \in \mathbb{N}$ e um $\beta > 1$, definimos

$$A_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |v|^{\beta-1} \leq m \right\}$$

e

$$v_m = \begin{cases} v|v|^{2(\beta-1)} & \text{em } A_m, \\ m^2 v, & \text{em } B_m = \mathbb{R}^N \backslash A_m. \end{cases}$$

Observamos que $v_m \in E, v_m \leq |v|^{2\beta-1}$,

$$\nabla v_m = (2\beta - 1)|v|^{2(\beta-1)} \nabla v \quad \text{em} \quad A_m \quad \text{e} \quad \nabla v_m = m^2 \nabla v \quad \text{em} \quad B_m. \tag{1.48}$$

Da hipótese da proposição, a função v satisfaz $-\Delta v + b(x)v = H(x, v)$. Multiplicando ambos os lados dessa equação por v_m e integrando em $\mathbb{R}^N$, obtemos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} -\Delta v \, v_m + \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x) v v_m = \int\limits_{\mathbb{R}^N} H(x, v) v_m$$

e assim

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla v_m + \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x) v v_m = \int\limits_{\mathbb{R}^N} H(x, v) v_m.$$

Observemos que a integral $\int\limits_{\mathbb{R}^N} v v_m$ pode ser reescrita como a soma das integrais em A_m e B_m e utilizando as observações feitas em (1.48), temos

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla v_m &= \int\limits_{A_m} \nabla v \nabla v_m + \int\limits_{B_m} \nabla v \nabla v_m \\ &= (2\beta - 1) \int\limits_{A_m} |v|^{2(\beta-1)} |\nabla v|^2 + m^2 \int_{B_m} |\nabla v_m|^2. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Definimos

$$\omega_m = \begin{cases} v|v|^{\beta-1} & \text{em } A_m, \\ mv, & \text{em } B_m. \end{cases}$$

Observamos que

$$\nabla \omega_m = \beta |v|^{\beta-1} \nabla v \quad \text{em} \quad A_m \quad \text{e} \quad \nabla \omega_m = m \nabla v \quad \text{em} \quad B_m, \tag{1.50}$$

e isso nos permite escrever a integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega_m|^2$ como

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega_m|^2 = \int_{A_m} |\nabla\omega_m|^2 + \int_{B_m} |\nabla\omega_m|^2 = \beta^2 \int_{A_m} |v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2 + m^2 \int_{B_m} |\nabla v|^2 \tag{1.51}$$

Utilizando (1.51) e (1.49), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\omega_m|^2 + b(x)\omega_m^2)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega_m|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)\omega_m^2 dx \\
&= \beta^2 \int_{A_m} |v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2 dx + m^2 \int_{B_m} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} b(x) w_m^2 dx \\
&= \beta^2 \int_{A_m} |v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla v_m dx \\
&\quad -(2\beta-1) \int_{A_m} |v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} b(x) w_m^2 dx.
\end{aligned}$$

E isso mostra que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\omega_m|^2 + b(x)\omega_m^2)dx = (\beta-1)^2 \int_{A_m} |v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla v_m + b(x) w_m^2)dx. \tag{1.52}$$

Observe que pela definição de v_m, temos $\omega_m^2 = v v_m \geq 0$ e que podemos somar $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} b(x) v v_m$ nos dois lados da Equação (1.49) para obter

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla v_m + b(x) v v_m)dx = (2\beta-1) \int_{A_m} |v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2 dx + \underbrace{m^2 \int_{B_m} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} b(x) v v_m dx}_{\geq 0}$$

que implica

$$(2\beta-1) \int_{A_m} |v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla v_m + b(x) v v_m)\, dx. \tag{1.53}$$

De (1.52) e (1.53), temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\omega_m|^2+b(x)\omega_m^2)dx &\leq (\beta-1)^2\int_{A_m}|v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla v\nabla v_m+b(x)vv_m)dx\\ &\leq \frac{(\beta-1)^2}{2\beta-1}\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla v\nabla v_m+b(x)vv_m)dx+\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla v\nabla v_m+b(x)vv_m)dx\\ &= \left[\frac{(\beta-1)^2}{2\beta-1}+1\right]\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla v\nabla v_m+b(x)vv_m)dx,\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\omega_m|^2+b(x)\omega_m^2)dx\leq\frac{\beta^2}{2\beta-1}\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla v\nabla v_m+b(x)vv_m)dx. \tag{1.54}$$

Observamos que devido à hipótese de v satisfazer $-\Delta v+b(x)v=H(x,v)$ em $\mathbb{R}^N$ podemos escrever

$$-\Delta vv_m+b(x)vv_m=H(x,v)v_m\Rightarrow\nabla v\nabla v_m+b(x)vv_m=H(x,v)v_m,$$

então a equação (1.54) implica na desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\omega_m|^2+b(x)\omega_m^2)dx\leq\frac{\beta^2}{2\beta-1}\int_{\mathbb{R}^N}H(x,v)v_mdx\leq\beta^2\int_{\mathbb{R}^N}H(x,v)v_mdx, \tag{1.55}$$

notando que a última desigualdade vale pois $\beta>1$.
Consideramos a menor constante S que satisfaça

$$\|u\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}\leq S\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2,\forall u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{1.56}$$

Usando a definição de w_m e a estimativa $|h(x,s)|\leq h(x)|s|$ para todo $s>0$, temos

$$\left[\int_{A_m}|\omega_m|^{2^*}dx\right]^{\frac{N-2}{N}}\leq 2S\beta^2\int_{\mathbb{R}^N}h(x)\omega_m^2dx. \tag{1.57}$$

Para tanto, consideramos a desigualdade (1.56) com $u = \omega_m$ para obtermos

$$\|\omega_m\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq S \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_m|^2 dx,$$

isto é,

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\omega_m|^{2^*} dx \right)^{\frac{N-2}{N}} \leq S \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_m|^2 dx. \tag{1.58}$$

De (1.55), nós concluímos que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_m|^2 dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \omega_m|^2 + b(x)\omega_m^2) dx \leq \beta^2 \int\limits_{\mathbb{R}^N} H(x,v) v_m dx. \tag{1.59}$$

Por fim, como $|H(x,s)| \leq h(x)|s|$ para todo $s > 0$, de (1.58) e (1.59) vemos que

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\omega_m|^{2^*} dx \right)^{\frac{N-2}{N}} \leq S\beta^2 \int\limits_{\mathbb{R}^N} H(x,v) v_m dx \leq S\beta^2 \int\limits_{\mathbb{R}^N} h(x) v_m v dx.$$

e assim

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\omega_m|^{2^*} dx \right)^{\frac{N-2}{N}} \leq S\beta^2 \int\limits_{\mathbb{R}^N} h(x) \omega_m^2 dx.$$

Consideramos o conjugado $q_1 > 1$ de q que satisfaz $1/q_1 + 1/q = 1$. Podemos utilizar a desigualdade de Hölder para obtermos a seguinte estimativa

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} h(x)\omega_m^2 dx \leq \|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \left(\int |\omega_m|^{2q_1} dx \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Podemos ainda aplicar essa desigualdade para escrevermos

$$\left[\int\limits_{A_m} |\omega_m|^{2^*} dx \right]^{\frac{N-2}{N}} \leq \left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\omega_m|^{2^*} dx \right]^{\frac{N-2}{N}} \leq S\beta^2 \|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\omega_m|^{2q_1} dx \right]^{\frac{1}{q_1}}.$$

Por fim, verificamos que $|\omega_m| \leq |v|^\beta$ em $\mathbb{R}^N$. Isso é imediato da definição de ω_m em A_m. Para ver que $|\omega_m| \leq |v|^\beta$ em B_m, devemos relembrar que $B_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^N, |v|^{\beta-1} > m \right\}$ de modo que temos nesse conjunto $\omega_m = mv < |v|^\beta$. Assim, podemos reescrever a última desigualdade como

$$\left[\int\limits_{A_m} |\omega_m|^{2^*} dx\right]^{\frac{N-2}{N}} \leq S\beta^2 \|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} |v|^{2\beta q_1} dx\right]^{\frac{1}{q_1}}. \tag{1.60}$$

O Teorema da convergência monótona afirma que se uma sequência de números reais (a_n) é monótona crescente (decrescente) e limitada, então ela converge para o seu supremo (ínfimo). Queremos aplicar o Teorema da convergência monótona para mostrarmos que

$$\|v\|^{2\beta}_{L^{2^*\beta}(\mathbb{R}^N)} \leq \beta^2 S \|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \|v\|^{2\beta}_{L^{2\beta q_1}(\mathbb{R}^N)},$$

ou, elevando ambos os lados a $1/(2\beta)$,

$$\|v\|_{L^{2^*\beta}(\mathbb{R}^N)} \leq \beta^{\frac{1}{\beta}} \left(S \|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{2\beta}} \|v\|_{L^{2\beta q_1}}. \tag{1.61}$$

Para tanto, devemos observar pela definição de A_m como $A_m = \left\{x \in \mathbb{R}^N, |v|^{\beta-1} \leq m\right\}$ que a sequência $(|A_m|)$ é monótona crescente. Além disso, devemos observar que $|w_m|^{1/\beta} \to |v|$ pontualmente para $m \to +\infty$. Por fim, obtemos

$$\left[\int\limits_{A_m} |\omega_m|^{2^*} dx\right]^{\frac{N-2}{N}} = \left(\left[\int\limits_{A_m} \left(|\omega_m|^{\frac{1}{\beta}}\right)^{2^*\beta} dx\right]^{\dfrac{1}{2^*\beta}}\right)^{2\beta} \to \left(\left(\int\limits_{A_m} |v|^{2^*\beta} dx\right)^{\dfrac{1}{2^*\beta}}\right)^{2\beta} = \|v\|^{2\beta}_{L^{2^*\beta}(\mathbb{R}^N)}.$$

Isso mostra que podemos obter a desigualdade desejada a partir de (1.60).

Definimos $\sigma = \dfrac{N}{q_1(N-2)} > 1$, onde lembramos que $\dfrac{N}{N-2} > q_1$, observamos que tomando $\beta = \sigma$, podemos escrever

$$\beta = \frac{N}{q_1(N-2)} \quad \Rightarrow \quad 2\beta q_1 = \frac{2N}{N-2} = 2^*$$

e assim a equação (1.61) pode ser reescrita como

$$\|v\|_{L^{2^*\sigma}(\mathbb{R}^N)} \leq \sigma^{\frac{1}{\sigma}} \left(S \|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \|v\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

Se fazemos $\beta = \sigma^2$, podemos escrever

$$\sigma^2 = \frac{N^2}{q_1^2(N-2)^2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{q_1}\frac{N}{N-2}\frac{N}{q_1(N-2)} \Rightarrow 2\beta q_1 = 2^*\sigma$$

e assim a desigualdade da Equação (1.61) pode ser reescrita como

$$\|v\|_{L^{2^*\sigma^2}(\mathbb{R}^N)} \leq \sigma^{\frac{2}{\sigma^2}} \left(S\|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{2\sigma^2}} \|v\|_{L^{2^*\sigma}(\mathbb{R}^N)}.$$

Podemos juntar as duas últimas desigualdades obtidas para escrevermos

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^{2^*\sigma^2}(\mathbb{R}^N)} &\leq \sigma^{\frac{2}{\sigma^2}} \left(S\|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{2\sigma^2}} \|v\|_{L^{2^*\sigma}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \sigma^{\frac{2}{\sigma^2}} \left(S\|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{2\sigma^2}} \left[\sigma^{1/\sigma}\left(S\|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \|v\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}\right] \\
&= \sigma^{\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}\right)} \left(S\|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\right)} \|v\|_{L^{2^*}}.
\end{aligned}$$

E disso vemos que vale a desigualdade

$$\|v\|_{L^{2^*\sigma^m}(\mathbb{R}^N)} \leq \sigma^{\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}+\cdots+\frac{m}{\sigma^m}\right)} \left(S\|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}+\cdots+\frac{1}{\sigma^m}\right)} \|v\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.62}$$

Como

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{\sigma^j} = \frac{1}{\sigma-1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma^j} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma-1},$$

então podemos passar a desigualdade (1.62) ao limite para obtermos

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \sigma^{\frac{1}{\sigma-1}} \left(S\|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{2(\sigma-1)}} \|v\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.63}$$

Portanto,

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M\|v\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)},$$

onde $M = \sigma^{\frac{1}{\sigma-1}} \left(S\|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{2(\sigma-1)}}$ e $\sigma = \dfrac{N(q-1)}{q(N-2)}$, como queríamos provar. ■

Lema 1.8. Para todo $R > 1$, qualquer solução *ground state* positiva u de (1.9) satisfaz a desigualdade

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M(2Skd)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Definimos as funções auxiliares

$$H(x,t) = \begin{cases} f(t), & \text{se} \quad |x| < R \quad \text{ou} \quad f(t) \leq \dfrac{V(x)}{k}t \\ \\ 0, & \text{se} \quad |x| \geq R \quad \text{e} \quad f(t) > \dfrac{V(x)}{k}t \end{cases}$$

e

$$b(x) = \begin{cases} V(x), & \text{se} \quad |x| < R \quad \text{ou} \quad f(u) \leq \dfrac{V(x)}{k}u \\ \\ \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)V(x), & \text{se} \quad |x| \geq R \quad \text{e} \quad f(u) > \dfrac{V(x)}{k}u. \end{cases}$$

Para essas funções auxiliares definidas acima, podemos ver que se $u \in E$ é solução do problema auxiliar (1.9), então também é solução do problema

$$-\Delta u + b(x)u = H(x,u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N.$$

Para verificar o afirmado, basta aplicarmos a definição das funções auxiliares H e b. Seja u uma solução de (1.9). Dado um ponto $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$|x| < R \ \text{ ou } \ f(u) \leq \frac{V(x)}{k}u(x)$$

ou

$$|x| \geq R \ \text{ e } \ f(u) > \frac{V(x)}{k}u(x).$$

No primeiro dos casos, temos

$$-\Delta u + V(x)u = g(x,u) = f(u) \ \Rightarrow \ -\Delta u + b(x) = H(x,u),$$

e no segundo caso temos

$$-\Delta u + V(x)u = g(x,u) = \tilde{f}(x,u) = \frac{V(x)}{k}u \Rightarrow -\Delta u + \left(1 - \frac{1}{k}\right)V(x)u = 0 \Rightarrow -\Delta u + b(x)u = H(x,u).$$

Seja S a menor constante que satisfaça a desigualdade

$$\|u\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq S \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{1.64}$$

Pela definição de H temos $|H(x,t)| \leq |f(t)|$. Também sabemos que existe uma constante c_0 tal que $|tf(t)| \leq c_0|t|^p$ o que implica em $|f(t)| \leq c_0|t|^{p-1}$, de modo que $|H(x,t)| \leq c_0|t|^{p-1}$ e assim podemos escrever

$$|H(x,u)| \leq c_0|u|^{p-1},$$

ou

$$|H(x,u)| \leq h(x)|u| \tag{1.65}$$

com $h(x) = c_0|u|^{p-2}$.

Para $q = \dfrac{2^*}{p-2}$, verificamos que $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$. De fato,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^q dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[c_0|u|^{p-2}\right]^{\frac{2^*}{p-2}} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} c_0|u|^{2^*} dx < +\infty,$$

pois $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Da desigualdade (1.64) segue que

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} c_0|u|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c_0 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{p-2}{2}} \\ &\leq c_0 S^{\frac{p-2}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{p-2}{2}}. \end{aligned}$$

E pelo Lema 1.7 temos

$$\|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq c_0 S^{\frac{p-2}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{p-2}{2}} \leq c_0(2Skd)^{\frac{p-2}{2}}.$$

Por fim, utilizamos a Proposição 1.2 e obtemos

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq M \left(S\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq M(2Skd)^{\frac{1}{2}}.$$

finalizando assim a demonstração. $\blacksquare$

Observação 1.2. Pela Proposição 1.2 e do Lema 1.8, nós observamos que a constante M depende somente de p, V_∞, θ e c_0.

Lema 1.9. Para todo $R > 1$, qualquer solução ground state positiva u de (1.9) satisfaz a desigualdade

$$u(x) \leq \frac{R^{N-2}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{|x|^{N-2}} \leq \frac{R^{N-2}M(2Skd)^{1/2}}{|x|^{N-2}}, \forall |x| \ \geq R.$$

Demonstração. Seja $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ a função dada por

$$v(x) = \frac{R^{N-2}M(2Skd)^{1/2}}{|x|^{N-2}}.$$

Afirmamos que v é uma função harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, isto é, $\Delta v(x) = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. De fato, notemos que

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x),\ |x|^{N-2} = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{\frac{N-2}{2}}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) &= R^{N-2}M(2Skd)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_i}(|x|^{2-N}) \\
&= R^{N-2}M(2Skd)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{\frac{2-N}{2}} \\
&= R^{N-2}M(2Skd)^{1/2}\frac{2-N}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{\frac{-N}{2}} 2x_i \\
&= R^{N-2}M(2Skd)^{1/2}(2-N)\frac{x_i}{|x|^N}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(R^{N-2}M(2Skd)^{1/2}(2-N)\frac{x_i}{|x|^N}\right)\\
&= R^{N-2}M(2Skd)^{1/2}(2-N)\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{\frac{-N}{2}} x_i\right]\\
&= R^{N-2}M(2Skd)^{1/2}(2-N)\left[-\frac{N}{2}\left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{\frac{-N-2}{2}} 2x_i x_i + \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{\frac{-N}{2}} \cdot 1\right]\\
&= R^{N-2}M(2Skd)^{1/2}\frac{(2-N)}{|x|^N}\left[-\frac{N}{|x|^2}x_i^2+1\right].
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\Delta v(x) &= R^{N-2}M(2Skd)^{1/2}\frac{(2-N)}{|x|^N}\left[-\frac{N}{|x|^2}|x|^2+N\right]\\
&= R^{N-2}M(2Skd)^{1/2}\frac{(2-N)}{|x|^N}\cdot 0\\
&= 0
\end{aligned}
$$

em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ para $N \geq 3$, concluindo a prova da nossa afirmação de que v é harmônica.

Pelo o que foi visto no Lema 1.8, uma solução ground state positiva para o problema (1.9) satisfaz a desigualdade $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M(2Skd)^{1/2}$, o que significa dizer que se considerarmos apenas os pontos $x \in \partial B_R$, isto é, apenas os pontos com $|x| = R$, temos $u \leq v$ em ∂B_R. De fato, dado um ponto $x \in \partial B_R$, então $|x| = R$ e $v(x) = M(2Skd)^{1/2}$ e assim segue que $u(x) \leq v(x)$.

Definimos a função

$$
\omega(x) = \begin{cases} (u(x)-v(x))^+, & \text{se } |x| \geq R,\\ 0\,, & \text{se } |x| \leq R.\end{cases}
$$

Da definição de ω temos $\omega \geq 0$ e também podemos concluir que $\omega = 0$ em ∂B_R. De fato, em ∂B_R temos

$$
u \leq v \;\Rightarrow\; (u-v) \leq 0 \;\Rightarrow\; (u-v)^+ = 0.
$$

Notemos que $\omega(x) \leq u(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $\omega(x) \geq 0$. Assim,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\omega(x)|^{2^*} dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{2^*} dx < +\infty$$

e isso nos mostra que $\omega \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Uma vez que $\nabla\omega(x) = 0$ para $|x| \leq R$ ou quando $u(x) \leq v(x)$ e como $\nabla\omega(x) = \nabla u(x) - \nabla v(x)$ se $u(x) > v(x)$, também podemos concluir que $\nabla\omega \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e portanto $\omega \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Como $\omega \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, podemos calcular $\nabla\omega$, assim temos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla(u-v)\nabla w dx = \int\limits_{|x|<R} \nabla(u-v)\nabla w dx + \int\limits_{|x|\geq R} \nabla(u-v)\nabla w dx = \int\limits_{|x|\geq R} \nabla(u-v)\nabla w dx.$$

Como $\Delta v = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_R$, $\omega = 0$ em ∂B_R, então pelo Teorema de Greem, veja o Apêndice A - Teorema A.6, obtemos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega|^2 dx = -\int\limits_{|x|\geq R} \Delta(u-v)\omega dx = -\int\limits_{|x|\geq R} \Delta u\omega dx. \tag{1.66}$$

E como supomos que u é uma uma solução ground state positiva de (1.9), temos $-\Delta u = g(x,u) - V(x)u$ e por isso podemos escrever

$$-\int\limits_{|x|\geq R} \Delta u\omega dx = \int\limits_{|x|\geq R} (g(x,u)\omega - V(x)u\omega) dx. \tag{1.67}$$

Uma vez que $g(x,t) \leq V(x)t/k, |x| \geq R$, temos

$$\int\limits_{|x|\geq R} (g(x,u)\omega - V(x)u\omega) dx \leq \int\limits_{|x|\geq R} \left(\frac{1}{k}V(x)u\omega - V(x)u\omega\right) dx = \left(\frac{1}{k} - 1\right) \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)u\omega dx \leq 0.$$

Essa última desigualdade, juntamente com as equações (1.66) e (1.67) implicam que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega|^2 dx = 0$$

e assim $\omega(x) = 0$ para $|x| \geq R$. Portanto, observamos pela definição de ω que $u \leq v, \forall |x| \geq R$, como queríamos mostrar. ■

1.3.2 Solução Positiva para o Problema (1.1)

Através de todos os resultados que foram apresentados anteriormente, somos agora capazes de provar o Teorema 1.1. Para facilitar a leitura, vamos enunciar novamente este teorema:

Teorema 1.2. Sejam $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz as hipóteses $(V_1) - (V_3)$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz as hipóteses $(f_1) - (f_4)$. Então, existe uma constante $\Lambda^* = \Lambda^*(V_\infty, \theta, p, c_0)$ tal que o Problema (1.1) possui uma solução positiva para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$.

Demonstração. Recorde que pelos Lemas 1.4 e 1.5 combinado com O Teorema do Passo da Montanha, Veja o Apêndice A - Teorema B.2, obtemos solução para o problema auxiliar (1.9). Afirmamos que sob as hipóteses (V_2) e (V_3) essas soluções também são soluções do problema original 1.1.

A essência da demonstração desse teorema é mostrar que sob as hipóteses (V_2) e (V_3) nós temos $g(x,u) = f(u)$, o que reduz o problema (1.9) ao problema (1.1).

Para isso, é suficiente mostrar que $f(u) \leq V(x)u/k, \forall |x| \geq R$. De fato, se $f(u) \leq V(x)u/k$, então temos por definição $\tilde{f}(x,u) = f(u)$, que significa dizer que $g(x,u) = f(u), \forall x \in \mathbb{R}^N$, ou seja, (1.9) se reduz a (1.1).

Como observado anteriormente, existe $c_0 > 0$ para o qual $|sf(s)| \leq c_0|s|^{2^*}, \forall s \in \mathbb{R}$, que implica

$$uf(u) \leq c_0|u|^{2^*} \Rightarrow uf(u) \leq c_0|u|^{\frac{2N}{N-2}}$$

e assim

$$\frac{f(u)}{u} \leq c_0|u|^{\frac{2N}{N-2} - \frac{2N-4}{N-2}}. \tag{1.68}$$

Logo,

$$\frac{f(u)}{u} \leq c_0|u|^{\frac{4}{N-2}}. \tag{1.69}$$

Por meio do Lema 1.9, sabemos que vale a desigualdade

$$u(x) \leq \frac{R^{N-2}M(2Skd)^{1/2}}{|x|^{N-2}}, \forall |x| \geq R$$

e podemos concluir que

$$\frac{f(u)}{u} \leq c_0|u|^{\frac{4}{N-2}} \leq c_0 \left[\frac{R^{N-2}M(2Skd)^{1/2}}{|x|^{N-2}}\right]^{\frac{4}{N-2}} = c_0\frac{R^4}{|x|^4}\left[M(2Skd)^{1/2}\right]^{\frac{4}{N-2}}$$

e fazendo $\Lambda^* = kc_0\left(M(2Skd)^{1/2}\right)^{4/(N-2)}$ e tomando um valor $\Lambda \geq \Lambda^*$, temos pela hipótese (V_3) que

$$\begin{aligned} \frac{f(u)}{u} &\leq \frac{\Lambda^*}{k}\frac{R^4}{|x|^4} \\ &\leq \frac{\Lambda}{k}\frac{R^4}{|x|^4} \\ &\leq \left[\frac{1}{R^4}\inf_{|x|\geq R}|x|^4V(x)\right]\frac{1}{k}\frac{R^4}{|x|^4} \\ &= \frac{1}{k}\frac{\inf_{|x|\geq R}|x|^4V(x)}{|x|^4}. \end{aligned}$$

Uma vez que $\inf_{|x|\geq R}|x|^4V(x) \leq |x|^4V(x), |x| \geq R$, podemos concluir que

$$\frac{\inf_{|x|\geq R}|x|^4V(x)}{|x^4|} \leq V(x)$$

e portanto $\frac{f(u)}{u} \leq \frac{V(x)}{k}, \forall |x| \geq R$. ■

Apêndice A

Resultados e Definições

Apresentaremos algumas definições e resultados básicos usados ao longo da dissertação.

Definição A.1. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita *mensurável* se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$E_\alpha = \{x \in \Omega; u(x) \geq \alpha\}$$

é mensurável no sentido de Lebesgue.

Definição A.2. Para $1 \leq p < +\infty$. O espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ é o seguinte conjunto

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e} \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty\}.$$

munido da norma definido por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p .dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição A.3. Definimos o espaço $L^\infty(\Omega)$ por

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e existe } c \text{ tal que } |u(x)| \leq c \ \ q.t.p. \text{ em } \Omega\}.$$

Um elemento de $L^\infty(\Omega)$ é dito uma *função essencialmente limitada*. E para cada $u \in L^\infty(\Omega)$, definimos

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess = \inf\{c; |u(x)| \leq c \ \ q.t.p. \text{ em } \Omega\}.$$

Definição A.4. Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Chamaremos de suporte de u o conjunto

$$supp\, u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Definição A.5. Designamos por $C_0(\Omega)$ o espaço das funções contínuas sobre Ω e que têm suporte compacto e por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que têm suporte compacto e que possuem em Ω derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Definição A.6. Para $1 \leq p < +\infty$. Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u(x)|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω, este é chamado de *espaço das funções localmente integráveis*.

Teorema A.1 (Teorema da Convergência Monótona)**.** Seja (f_n) uma sequência não-decrescente de funções em $M^+(X, \mathcal{X})$, que converge para f, então

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [26], página 31.

Lema A.1 (Lema de Fatou)**.** Se (f_n) pertence a $M^+(X, \mathcal{X})$, então

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int fn d\mu.$$

Demonstração. Ver [26], página 33.

Teorema A.2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que converge em quase todo ponto para uma função mensurável f. Se existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ em quase todo ponto, então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [26] página 44.

Seja $1 < p < +\infty$. Dizemos que q é expoente conjugado de p se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Teorema A.3 (Desigualdade de Hölder)**.** Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $p \geq 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e $\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$.

Demonstração. Ver [26] página 56.

Teorema A.4. (Vainberg) Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e seja $f \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tais que

(i) $(f_{n_k})(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω.

(ii) $|(f_{n_k})(x)| \leq h(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω.

Demonstração. Ver [13], página 94, Teorema 4.9.

Teorema A.5. Seja $N \geq 3$. Então

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$$

esta imersão nunca é compacta. Veja [19], [21].

Salientamos que a continuidade da imersão acima é expressa explicitamente por desigualdades da forma

$$\|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}.$$

Teorema A.6. (Fórmula de Green) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, limitado e suave. Seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Então,

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \upsilon} v d\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

em que $\upsilon = \upsilon(x)$ é o vetor normal externo de $\partial\Omega$, $\dfrac{\partial u}{\partial \upsilon}(x) = \nabla u(x).\upsilon(x)$ e σ é a medida da superfície sobre $\partial\Omega$. Ver [18], página 628, Teorema 3.

Apêndice B

Teorema do Passo da Montanha

Apresentaremos algumas definições e alguns resultados de teoria dos Pontos Críticos, além disso, enunciaremos e provaremos o Lema de deformação e o Teorema do Passo da Montanha.

Definição B.1. Sejam X e Y dois espaços normados tais que $Y \subset X$. Diz-se que Y *está imerso continuamente em* X, ou que a *imersão* $Y \hookrightarrow X$ é *contínua*, quando a aplicação $i : Y \to X$ tal que $i(x) = x$ é uma aplicação contínua.

Definição B.2. Sejam X e Y dois espaços normados tais que $Y \subset X$. Diz-se que Y *está imerso compactamente em* X, ou que a *imersão* $Y \hookrightarrow X$ é *compacta*, quando a aplicação $i : Y \to X$ tal que $i(x) = x$ é uma aplicação compacta.

Definição B.3. Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, dizemos que I possui *Derivada de Fréchet* no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T \in X'$ tal que

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Tv}{\|v\|} = 0.$$

A derivada de Fréchet no ponto u, quando existe, é única. Vamos denotá-la simplesmente por $I'(v)$.

Definição B.4. Se Ω é um conjunto aberto em X, dizemos que I é de *classe* C^1 *em* Ω ou que $I \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ quando a derivada de Fréchet de I existe em todo ponto $u \in \Omega$ e a aplicação $I' : \Omega \to X'$ é contínua.

Definição B.5. Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, dizemos que I possui

Derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T_0 \in X'$ tal que

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - T_0 v}{t} = 0, \quad \text{para todo} \quad v \in X.$$

A derivada de Gateaux no ponto u, quando existe, é única. Vamos denotá-la simplesmente por $I'_G(u)$.

Sejam X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional. Se a derivada de Fréchet $I'(u)$ em $u \in X$ existe, então a derivada de Gateaux $I'_G(u)$ em $u \in X$ existe e $I'(u) = I'_G(u)$. Isto é, todo funcional Fréchet diferenciável é também Gateaux diferenciável.

Proposição B.1. Considere um funcional $I : \Omega \to \mathbb{R}$, onde Ω é subconjunto aberto de um espaço de Banach X. Se I tem derivada de Gateaux contínua sobre Ω, então $I \in C^1(\Omega)$.

Demonstração. Sejam $u + h$ e $u \in \Omega$ e como I possui derivada de Gateaux sobre Ω, então pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$I(u+h) - I(u) = I'_G(u + \theta h)h.$$

Note que

$$I(u+h) - I(u) - I'_G(u)h = I'_G(u+\theta h)h - I'_G(u)h$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|h\|}\left[I(u+h) - I(u) - I'_G(u)h\right] &= \frac{1}{\|h\|}\left[I'_G(u+\theta h)h - I'_G(u)h\right] \\ &= \left[I'_G(u+\theta h) - I'_G(u)\right]\frac{h}{\|h\|}. \end{aligned}$$

Deste modo

$$\left\| \frac{1}{\|h\|}\left[I(u+h) - I(u) - I'_G(u)h\right] \right\| = \left\| I'_G(u+\theta h) - I'_G(u) \right\|.$$

Uma vez que a derivada de Gateaux é contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|v\| < \delta$, segue-se

$$\|I'_G(u+\theta h) - I'_G(u)\| < \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{1}{\|h\|}\left[I(u+h) - I(u) - I'_G(u)h\right] = 0.$$

Deste modo, concluímos que a derivada de Fréchet existe e é igual a derivada de Gateaux. Portanto a derivada de Fréchet é contínua sobre Ω, ou seja, $I \in C^1(\Omega)$. ■

Definição B.6. Seja X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Dizemos que $(u_n) \subset X$ é uma *Sequência Palais-Smale* no nível c, denotada por $(PS)_c$ quando

$$I(u_n) \to c \;\text{ e }\; I'(u_n) \to 0.$$

E dizemos que I *verifica a condição Palais-Smale*, quando toda sequência $(PS)_c$, para $c \in \mathbb{R}$, admite uma subsequência que converge em X, isto é, se

$$I(u_n) \to c \;\text{ e }\; I'(u_n) \to 0,$$

então existem uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ e $u_0 \in X$ tal que

$$u_{n_k} \to u_0 \quad \text{em} \quad X.$$

Definição B.7. Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e

$$\widetilde{X} = \{u \in X; I'(u) \neq 0\}$$

o conjunto dos pontos regulares de I. Dizemos que a função $\varphi : X \to \widetilde{X}$ *é um campo pseudo-gradiente para* I quando φ é lipschitziana e

(a) $\|\varphi(u)\|_X \leq \|I'(u)\|_{X'}$ e

(b) $I'(u)\varphi(u) \geq \|I'(u)\|^2_{X'}$.

Agora vamos enunciar e demonstrar o Lema de Deformação. Para isso, assumiremos que dado um funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, sempre existirá um campo pseudo-gradiente para I, veja [21].

Lema B.1 (Lema de Deformação)**.** Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Se

$$\|I'(u)\| \geq 4\varepsilon,$$

para todo $u \in I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$, então existe $\eta \in C(X,X)$ tal que

(i) $\eta(u) = (u)$, para todo $u \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$,

(ii) $\eta(I^{-1}(]-\infty, c+\varepsilon[)) \subset I^{-1}(]-\infty, c-\varepsilon[)$.

Demonstração. Definimos a função $\psi : X \to \mathbb{R}$ do seguinte modo

$$\psi(u) = \frac{dist(u, X \setminus A)}{[dist(u, X \setminus A) + dist(u, B)]}.$$

onde

$$A := I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \text{ e } B := I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]).$$

Vamos verificar que

$$[dist(u, X \setminus A) + dist(u, B)] > 0$$

para mostrarmos, que de fato, ψ está bem definida. Supomos, por contradição, que existe $u \in X$ tal que

$$[dist(u, X \setminus A) + dist(u, B)] = 0.$$

Uma vez que $dist(u, B) = 0$ e B é fechado, então $u \in B$, ou seja,

$$c - \varepsilon \leq I(u) \leq c + \varepsilon. \tag{B.1}$$

Por outro lado, $dist(u, X \setminus A) = 0$ implica que $u \in \overline{X \setminus A}$. Logo, existe uma sequência $(u_n) \subset X \setminus A$ tal que $u_n \to u$ em X, isto é,

$$I(u_n) < c - 2\varepsilon \text{ ou } I(u_n) > c - 2\varepsilon.$$

Pela continuidade do funcional I, passando o limite de $n \to \infty$, obtemos

$$I(u) \leq c - 2\varepsilon \text{ ou } I(u) \geq c - 2\varepsilon,$$

o que contradiz (B.1). Portanto, ψ está bem definida.

Além disso, a função ψ é contínua e localmente lipschtziana pois a função distância é lipschtziana. Também, observamos que $\psi = 1$ em B e $\psi = 0$ em $X \setminus A$.

Seja $\varphi : X \to \widetilde{X}$ um campo pseudo-gradiente para o funcional I e definamos

$$W(u) := \begin{cases} -\psi \dfrac{\varphi(u)}{\|\varphi(u)\|_X}, & \text{se } u \in A \\ 0, & \text{se } u \in X \setminus A. \end{cases}$$

W é localmente lipschtziana e $\|W(u)\| \leq 1$, para todo $u \in X$. Logo, o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma(t,u) &= W(\sigma(t,u)) \\ \sigma(0,u) &= u, \end{aligned}$$

possui uma única solução $\sigma(.,u)$, definida em $\mathbb{R}$ com $\sigma \in C(\mathbb{R} \times X, X)$, para cada $u \in X$. Consideremos agora, a função η definida em X da seguinte forma:

$$\eta(u) := \sigma(1,u).$$

Notemos que $\sigma(t,u)$ é constante para cada $u \in X \setminus A$, pois $W = 0$ para todo $u \in X \setminus A$. Uma vez que $\sigma(0,u) = u$, concluímos que η satisfaz **(i)**.

Agora vamos mostrar **(ii)**. Para isso, primeiramente notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) &= I'(\sigma(t,u))\frac{d}{dt}\sigma(t,u) \\ &= I'(\sigma(t,u))W(\sigma(t,u)) = 0, \end{aligned} \tag{B.2}$$

para todo $\sigma(t,u) \in X \setminus A$. Por outro lado, notamos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) &= I'(\sigma(t,u))\frac{d}{dt}\sigma(t,u) \\ &= I'(\sigma(t,u))W(\sigma(t,u)) \\ &= -I'(\sigma(t,u))\varphi\sigma(t,u))\frac{\psi(\sigma(t,u))}{\|\varphi(\sigma(t,u))\|_{X'}}. \end{aligned}$$

para todo $\sigma(t,u) \in A$. Desde de que φ é um campo pseudo-gradiente, pelo item (b) da Definição

B.7, temos

$$\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) \leq -\psi(\sigma(t,u))\frac{\|I'(\sigma(t,u))\|_{X'}^2}{\|\varphi(\sigma(t,u))\|_X} \leq 0. \tag{B.3}$$

De (B.2) e (B.3), concluímos que $I(\sigma(t,u))$ é não-crescente.

Considerando $u \in I^{-1}(]-\infty, c+\varepsilon)$, se existir $\bar{t} \in [0,1]$ tal que $I(\sigma(\bar{t},u)) < c-\varepsilon$, então

$$I(\sigma(1,u)) \leq I(\sigma(\bar{t},u)) < c-\varepsilon$$

e assim **(ii)** ocorre.

Agora se $u \in I^{-1}(]-\infty, c+\varepsilon)$ e se $c-\varepsilon \leq I(\sigma(t,u))$, para todo $t \in [0,1]$, temos

$$c-\varepsilon \leq I(\sigma(t,u))c+\varepsilon, \quad \text{para todo} \quad t \in [0,1].$$

E essas desigualdades nos mostram que $\sigma(t,u) \in B$ e que $\psi(\sigma(t,u)) = 1$ para todo $t \in [0,1]$.

Assim, da equação (B.3), obtemos

$$\begin{aligned}
I(\eta(u)) &= I(\sigma(1,u)) \\
&= I(u) + \int_0^1 \frac{d}{dt}I(\sigma(t,u))dt \\
&\leq I(u) - \int_0^1 \psi(\sigma(t,u))\frac{\|I'(\sigma(t,u))\|_{X'}^2}{\|\varphi(\sigma(t,u))\|_X}dt \\
&= I(u) - \int_0^1 \frac{\|I'(\sigma(t,u))\|_{X'}^2}{\|\varphi(\sigma(t,u))\|_X}dt.
\end{aligned}$$

Pelo ítem (a) da Definição B.7, temos

$$I(\eta(u)) \leq c+\varepsilon - \frac{1}{2}\int_0^1 \|I'(\sigma(t,u))\|\, dt.$$

Da hipótese de que $\|I'(u)\| \geq 4\varepsilon$ para todo $u \in I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$,encontramos

$$I(\eta(u)) \leq c+\varepsilon-2\varepsilon = c-\varepsilon$$

e **(ii)** também é satisfeita. ∎

A seguir, apresentaremos a versão do Teorema do Passo da Montanha, devido a Willem [21], sem a condição Palais-Smale.

Teorema B.1 (Teorema do Passo da Montanha - M. Willem)**.** Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que:

(I) Existem $\alpha, \rho > 0$ tais que

$$I(u) \geq \alpha > 0 \quad \text{para todo} \quad u \in X; \|u\| = \rho \tag{B.4}$$

(II) E existe $e \in X$ tal que $\|e\| > \rho$ e

$$I(e) < 0. \tag{B.5}$$

Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in X$ tal que

(a) $c - 2\varepsilon \leq I(u_\varepsilon) \leq c + 2\varepsilon$

(b) $\|I'(u_\varepsilon)\| < 4\varepsilon$.

onde

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{[0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que c é finito. Com efeito, desde que

$$\gamma(0) \in B_\rho(0), \ \gamma(1) = e \in X \backslash \overline{B_\rho(0)}$$

e $\gamma([0,1])$ é conexo, temos

$$\gamma([0,1]) \cap \partial B_\rho(0) \neq 0.$$

Logo, da hipótese (I), temos

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha,$$

o que implica em $c \geq \alpha > 0$, isto é, c é um número real positivo.

Suponha agora, por contradição, que para algum $\varepsilon > 0$ as condições (a) e (b) não ocorram, ou seja, que ocorra

(c) $c - 2\varepsilon < I(u) < c + 2\varepsilon, \ \forall u \in X.$

(d) $\|I'(u)\| \geq \varepsilon, \ \ \forall u \in X$.

Podemos notar que essas propriedades continuam válidas para todo $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Uma vez que $c > 0$, diminuindo ε se necessário, temos

$$I(e) \leq I(0) = 0 < c - 2\varepsilon. \tag{B.6}$$

Em vista dos itens $(c), (d)$ e do Lema de Deformação, existe $\eta \in C(X, X)$ tal que

(i) $\eta(u) = (u)$, para todo $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$,

(ii) $\eta(I^{-1}(] - \infty, c + \varepsilon[)) \subset I^{-1}(] - \infty, c - \varepsilon[)$.

Segue da definição de c que existe $\overline{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I(\overline{\gamma}(t)) \leq c + \varepsilon.$$

Agora, consideremos $\widehat{\gamma} : [0, 1] \to X$, definida por $\widehat{\gamma}(t) = \eta(\overline{\gamma}(t))$. Podemos observar que

$$\widehat{\gamma}(0) = \eta(\overline{\gamma}(0)) = \eta(0)$$

e

$$\widehat{\gamma}(e) = \eta(\overline{\gamma}(1)) = \eta(e).$$

Por (B.6), temos $0, e \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + \varepsilon])$. Do Lema da Deformação, $\eta(0) = 0$ e $\eta(e) = e$. Portanto,

$$\widehat{\gamma}(0) = 0$$

e

$$\widehat{\gamma}(1) = e,$$

mostrando que $\widehat{\gamma} \in \Gamma$. Novamente, pelo Lema da Deformação, para todo $t \in [0, 1]$, encontramos

$$\widehat{\gamma}(t) = \eta(\overline{\gamma}(t)) \in I^{-1}(] - \infty, c - \varepsilon[).$$

E desse modo

$$c \geq \max_{t \in [0,1]} I(\widehat{\gamma}(t)) \geq c - \varepsilon,$$

o que é absurdo, provando assim o teorema. ■

Agora, apresentamos a primeira versão do Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti e Rabinowitz, veja [3].

Teorema B.2 (Teorema do Passo da Montanha - Ambrosetti-Rabinowitz)**.** Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que:

(I) Existem $\alpha, \rho > 0$ tais que

$$I(u) \geq \alpha > 0 \quad \text{para todo} \quad u \in X; \|u\| = \rho \tag{B.7}$$

(II) Existe $e \in X$ tal que $\|e\| > \rho$ e

$$I(e) < 0. \tag{B.8}$$

Seja

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{[0,1]} I(\gamma(t))$$

em que

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

(III) I satisfaz a condição Palais-Smale no nível c.

Então c é um valor crítico de I, isto é, existe $u \in X$ tal que

$$I(u) = c > 0 \quad \text{e} \quad I'(u) = 0.$$

Demonstração. Para $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ no teorema anterior, existe um sequência (u_n) em X tal que

$$I(u_n) \to c$$

e

$$I'(u_n) \to 0.$$

Como I satisfaz a condição $(PS)_c$, existem $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in X$ tal que

$$u_{n_j} \to \quad \text{em} \quad X.$$

Da continuidade de I e I', temos

$$I(u) = c > 0 \ \text{ e } \ I'(u) = 0.$$

Portanto, c é um valor crítico do funcional I. ■

Apêndice C

Propriedades do Espaço E

Nesse Apêndice, demonstramos algumas propriedades do subespaço onde buscamos por solução do problema penalizado (1.9).

Lema C.1. E é um subespaço de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Para mostrarmos que E é um subespaço, tomamos $u, v \in E$, é imediato que $\lambda v \in E$. Além disso, pela definição de E, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 < \infty \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2 < \infty.$$

Como

$$(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2 \geq 0 \Rightarrow 2uv \leq u^2 + v^2,$$

podemos concluir também que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)2uv \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2 < \infty$$

e assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u+v)^2 < \infty.$$

Portanto, $u + v \in E$. ■

Lema C.2. A expressão

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx \tag{C.1}$$

define uma norma em E associada ao seguinte produto interno

$$(\cdot,\cdot):(u,v)\mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\cdot\nabla v+V(x)uv)dx. \tag{C.2}$$

Demonstração. Vamos verificar que (C.2) é um produto interno em E. As propriedades que o produto interno deve satisfazer são: *linearidade*, *simetria* e *positividade*. Dados $u,v,w\in E$ e $a,b\in\mathbb{R}$, temos

$$(au+by,w)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}(\nabla(au+by)\cdot\nabla w+V(x)(au+by)w)dx$$

em que $\nabla(au+by)=a\nabla u+b\nabla y$ e $V(x)(au+by)w=aV(x)uw+bV(x)vw$.
Assim

$$\begin{aligned}(au+by,w) &= \int\limits_{\mathbb{R}^N}((a\nabla u+b\nabla y)\cdot\nabla w+aV(x)uw+bV(x)vw)dx\\ &= a\int\limits_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\cdot\nabla w+V(x)uw)dx+b\int\limits_{\mathbb{R}^N}(\nabla y\cdot\nabla w+V(x)yw)dx\\ &= a(u,w)+b(v,w).\end{aligned}$$

A simetria do produto interno de E é consequência da simetria em $\mathbb{R}$ e da simetria do produto interno natural de $\mathbb{R}^N$. Agora, vamos mostrar que a operação é positiva. Seja $u\in E$, temos

$$(u,u)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla u+V(x)u^2)dx.$$

Por hipótese, $V(x)\geq 0$ (hipótese (V_1)) e temos $\nabla u\nabla u=|\nabla u|^2\geq 0$, logo $(u,u)\geq 0$. Agora se $(u,u)=0$, devemos ter

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx\leq\int\limits_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla u+V(x)u^2)dx=0,$$

e assim, concluímos que $u=0$. Portanto, mostramos que (C.1) como definida, de fato, é uma norma em E. ■

Lema C.3. O espaço E é um espaço de Banach

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em E. Por imersões contínuas

$$E \hookrightarrow D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Em particular, (u_n) é uma sequência de Cauchy em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e da completude de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, existe $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\begin{aligned} u_n \to u \qquad & \text{em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ \text{e} \quad u_n(x) \to u(x) \quad & \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Usando que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n^2 dx < C,$$

juntamente com o Lema de Fatou, implica

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n|^2 dx \leq C.$$

Daí, resulta que $u \in E$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $n, m > n_0$, teremos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_m - u_n|^2 dx < \varepsilon.$$

Fixando $m > n_0$ e aplicando novamente o Lema de Fatou, deduzimos que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_m - u|^2 dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_m - u_n|^2 dx \leq \varepsilon,$$

de onde concluímos que

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_m - u|^2 dx = 0$$

e segue que $\|u_n - u\| \to 0$. Portanto, $u_n \to u$ em E. ∎

Apêndice D

Regularidade do funcional, $J : E \longmapsto \mathbb{R}$, associado ao Problema Penalizado

Neste apêndice, iremos mostrar a regularidade do funcional J associado ao problema penalizado dado em (1.10).

Lema D.1. O funcional $J : E \longmapsto \mathbb{R}$ definido em (1.10) é tal que $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ e sua derivada de Gateaux é dada pela equação (1.11).

Demonstração. Para tanto, considere os funcionais $J_1, J_2, J_3 : E \to \mathbb{R}$ definidos por

$$J_1(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, J_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \text{ e } J_3(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx.$$

Dessa forma podemos escrever $J = \frac{1}{2} J_1 + \frac{1}{2} J_2 - J_3$ e, portanto, vamos mostrar que $J_i \in C^1(E, \mathbb{R})$ para todo $i = 1, 2, 3$. Começamos com o funcional

$$J_1(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx.$$

Com a finalidade de calcularmos a derivada deste funcional, calculamos o seguinte limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{J_1(u + tv) - J_1(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla(u - tv)|^2 - |\nabla u|^2}{t} dx.$$

Vemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{|\nabla(u-tv)|^2-|u|^2}{t} &= \frac{\nabla(u-tv)\nabla(u-tv)-|\nabla u|^2}{t}\\
&= \frac{1}{t}\left(2t\nabla u\nabla v+t^2|\nabla v|^2\right).
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
J_1'(u)v=\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla u-t\nabla v|^2-|\nabla u|^2}{t}dx=2\int\limits_{R^N}\nabla u\nabla v dx,
$$

que define uma aplicação linear.

Afirmamos agora que J_1 tem derivada de Gateaux contínua. De fato, seja (u_n) uma sequência em E tal que $u_n \to u$ em E. Dado $v \in E$, temos

$$
\begin{aligned}
|J_1'(u_n)v-J_1'(u)v| &= 2\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_n-\nabla u)\nabla v dx\right|\\
&\leq 2\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n-\nabla u||\nabla v|dx.
\end{aligned}
$$

Observamos que $|\nabla u_n-\nabla u|\in L^2(\mathbb{R}^N)$, pois

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n-\nabla u|^2dx\leq 2^2\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2+|\nabla u|^2)dx=4\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2dx+4\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx.
$$

Da Desigualdade de Hölder, segue que

$$
2\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n-\nabla u||\nabla v|dx\leq 2\left\|\nabla u_n-\nabla u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\left\|\nabla v\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.
$$

Assim sendo,

$$
|J_1'(u_n)v-J_1'(u)v|\leq 2\left\|\nabla u_n-\nabla u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\left\|\nabla v\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \tag{D.1}
$$

Como $u_n \to u$ em E, segue que

$$
\left\|\nabla u_n-\nabla u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\to 0.
$$

Assim,

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx \to 0.$$

Portanto, pela equação (D.1), temos

$$\|J_1'(u_n) - J_1'(u)\| \leq 2\,\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0,$$

mostrando que $J_1'(u_n) \to J_1'(u)$.

Agora faremos a análise para o funcional

$$J_2(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx.$$

Consideremos a função $h_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h_2(s) = V(x)|u + stv|^2.$$

Note que h é diferenciável em $(0,1)$ e é contínua em $[0,1]$ com

$$h_2'(s) = 2V(x)|u + stv|tv,$$

$$h_2(1) = V(x)|u + tv|^2 \text{ e } h_2(0) = V(x)|u|^2.$$

Pelo Teorema do Valor Médio existe $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$\frac{V(x)|u + tv|^2 - V(x)|u|^2}{t} = 2V(x)(u + \alpha tv)v.$$

Aplicando o limite quando $t \to 0$ na igualdade anterior,

$$\lim_{t\to 0} \frac{V(x)|u + tv|^2 - V(x)|u|^2}{t} = \lim_{t\to 0}[2V(x)(u + \alpha tv)v] = 2V(x)uv.$$

Além disso, para $|\alpha t| < 1$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{V(x)|u+tv|^2 - V(x)|u|^2}{t} \right| &= |2V(x)(u+\alpha tv)v| \\ &= 2V(x)|u+\alpha tv||v| \\ &\leq 4V(x)(|u||v| + |\alpha t||v|^2) \\ &\leq 4V(x)(|u||v| + |v|^2). \end{aligned}$$

E $4V(x)(|u||v| + |v|^2) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pela definição da derivada de Gateaux e usando o Teorema da Convergência Dominada,

$$J_2'(u)v = \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)|u+tv|^2 - V(x)|u|^2}{t} dx = 2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x)uvdx$$

que define uma aplicação linear e contínua.

Por último, falta apenas analisar o funcional

$$J_3(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx.$$

Temos

$$\frac{J_3(u+tv) - J_3(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(u+tv) - G(u)}{t} dx.$$

Para $x \in \mathbb{R}^N$ fixo, G é uma função real. Assim, o Teorema do Valor Médio garante a existência de $\theta \in \mathbb{R}$ satisfazendo $0 < \theta < 1$, tal que

$$\frac{G(x,u(x)+tv(x)) - G(x,u(x))}{t} = g(x,u(x)+\theta tv(x))v(x),$$

de modo que,

$$\frac{J_3(u+tv) - J_3(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u+\theta tv)vdx. \tag{D.2}$$

Vamos mostrar que a integral em (D.2) é finita. Para isso, notamos que

$$\begin{aligned}
|g(x,u+\theta tv)v| &\leq c_0|u+\theta tv|^{2^*-1}|v| \\
&\leq c_0(|u|+|v|)^{2^*-1}|v| \\
&\leq c_0 2^{2^*-1}(|u|^{2^*-1}+|v|^{2^*-1})|v| \\
&\leq C(|u|^{2^*-1}|v|+|v|^{2^*}).
\end{aligned} \tag{D.3}$$

Afirmamos que

$$|u|^{2^*-1}|v|+|v|^{2^*} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

De fato, como $u, v \in E$, temos $u, v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, implicando que $|u|^{2^*}, |v|^{2^*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Como $|v| \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $|u|^{2^*-1} \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$, a desigualdade de Hölder garante que $|u|^{2^*-1}|v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pois $\dfrac{2^*}{2^*-1}$ é o expoente conjugado de 2^*, concluindo a prova de nossa afirmação.

Decorre então do Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{J_3(u+tv)-J_3(u)}{t} &= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{t\to 0} g(x,u+\theta tv)v dx. \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v dx,
\end{aligned}$$

que define uma aplicação linear contínua.

Para completar a demonstração, mostraremos que a derivada de Gateaux do funcional J_3 é contínua. Suponhamos que $u_n \to u$ em E. Então, a menos de subsequência,

$$u_n \to u \;\text{ em }\; L^{2^*}(\mathbb{R}^N),$$

$$u_n(x) \to u(x) \;\; q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^N$$

e existe $w \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|u_n(x)| \leq w(x) \;\; q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

A desigualdade de Hölder implica

$$
\begin{aligned}
|J_3'(u_n)v - J_3'(u)v| &= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} (g(x,u_n) - g(x,u))v dx \right| \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} |(g(x,u_n) - g(x,u))||v| dx \\
&\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |(g(x,u_n) - g(x,u))|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}}.
\end{aligned} \tag{D.4}
$$

Do Teorema de Vainberg, existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $h \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_{n_j} \to u(x) \ q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^N$$

e

$$|u_{n_j}| \leq h(x) \ q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} |g(x,u_n) - g(x,u)| = 0$ $q.t.p.$ em $\mathbb{R}^N$ e

$$
\begin{aligned}
|g(x,u_{n_j}) - g(x,u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} &\leq (|g(x,u_{n_j})| + |g(x,u)|)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&\leq (c_0|u_{n_j}|^{2^*-1} + c_0|u|^{2^*-1})^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&= C(|u_{n_j}|^{2^*-1} + |u|^{2^*-1})^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&\leq C(|h(x)|^{2^*-1} + |u|^{2^*-1}) \in L^1(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |g(x,u_{n_j}) - g(x,u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \to 0,$$

de modo que

$$\left\| J_3'(u_{n_j}) - J_3'(u) \right\| \leq C \left\| g(x,u_{n_j}) - g(x,u) \right\|_{L^{\frac{2^*-1}{2^*}}(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

E isso mostra que o funcional J_3 é de classe C^1. ■

Referências

[1] A.A. Pankov, *Periodic nonlinear Schrödinger equation with application to photonic crystals,* Milan J. Math. 73 (2005) 259-287.

[2] A.A. Pankov, K. Pflüger *On a semilinear Schrödinger equation with periodic potential,* Nonlinear Anal. 33 (1998) 593-609.

[3] A. Ambrosetti, and P. Rabinowitz, *Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[4] A. Ambrosetti, V. Felli, A. Malchiodi, *Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity,* J. Eur. Math. Soc. 7 (2005) 117-144.

[5] A. Ambrosetti, Z-Q. Wang, *Nonlinear Schrödinger equations with vanishing and decaying potentials* Differential Integral Equations 18 (2005) 1321-1332.

[6] C.O. Alves, D.C. de Morais Filho, M.A.S. Souto, *Radially symmetric solutions for a class of critical exponent elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$, Electron. J. Differential Equations 7 (1996) 1-12.

[7] C.O. Alves, G.M. Figueiredo, M. Yang, *Existence of solutions for a nonlinear Choquard equation with potential vanishing at infinity*. Adv. Nonlinear Anal. 2015, 5, 1-15.

[8] C.O. Alves and Marco A.S. Souto, *Existence of solutions for a class of elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$ *with vanishing potentials*, Journal of Differential Equations, vol. 252, nº 10, pág. 5555-5568, 2012.

[9] C.O. Alves, P.C. Carrião, O.H. Miyagaki, *Nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem with critical growth,* J. Math. Anal. Appl. 260 (2001) 133-146.

[10] D.G. Costa, *On a class of elliptic systems in* $\mathbb{R}^N$, Electron. J. Differential Equations 1994 (7) (1994) 1-14.

[11] G.G. dos Santos, G.M. Figueiredo, R.G Nascimento, *Existence and behavior of positive solution for a problem with discontinuous nonlinearity in $\mathbb{R}^N$ via a nonsmooth penalization*. Z. Angew. Math. Phys. 71, 71 (2020).

[12] H. Berestycki, P.L. Lions, *Nonlinear scalar field equations, I: Existence of a ground state,* Arch. Ration. Mech. Anal. 82 (1983) 313-346.

[13] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer Science & Business Media, 2010.

[14] J.F.L. Aires, A.S Souto, *Existence of solutions for a quasilinear Schrödinger equation with vanishing potentials.* J. Math. Anal. Appl. 416, 924-946 (2014)

[15] J.F.L. Aires, M.A.S. Souto, *Equation with positive coefficient in the quasilinear term and vanishing potential, Topological Methods in Nonlinear Analysis* V. 46, No. 2, 2015, 813-833 DOI: 10.12775/TMNA.2015.069

[16] J. A. Cardoso, D. S. dos Prazeres, U. B. Severo, *Fractional Schrodinger equations involving potential vanishing at infinity and supercritical exponents*, Z. Angew. Math. Phys. (2020) 71:129, 2020

[17] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger,* Ind. Univ. Math. J. 20 (1971), 1077-1092.

[18] L. C. Evans, *Partial Differential Equations, American Mathematical Society*, 1998.

[19] M. Badiale, E. Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*, Springer, 2010.

[20] M. del Pino, P. Felmer, *Local mountain pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains,* Calc. Var. 4 (1996) 121-137.

[21] M. Willem *Minimax theorems.* [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1997.

[22] W.D. Bastos, O.H. Miyagaki, R.S. Vieira, *Existence of solutions for a class of degenerate quasilinear elliptic equation in RN with vanishing potentials, Boundary Value Problems* 92 (2013), doi:10.1186/1687-2770-2013-92.

[23] W. Kryszewski, A. Szulkin, *Generalized linking theorem with an application to semilinear Schrödinger equation,* Res. Rep. Math. Stockholm Univ. 7 (1996) 1-27.

[24] O.H. Miyagaki, *On a class of semilinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^N$ *with critical growth,* Nonlinear Anal. 29 (1997) 773-781.

[25] P.H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations,* Z. Angew. Math. Phys. 43 (1992) 270-291.

[26] R. G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure,* Wiley Online Library, 1995.

[27] T. Bartsch, Z.-Q. Wang, *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on* $\mathbb{R}^N$*,* Comm. Partial Differential Equations 20 (1995) 1725-1741.

[28] V. Benci, C.R. Grisanti, A.M. Micheletti, *Existence of solutions for the nonlinear Schrödinger equation with* $V(\infty) = 0$*, in: Progr. Nonlinear Differential Equations* Appl., vol. 66, 2005, pp. 53-65.

[29] V. Coti-Zelati, P.H. Rabinowitz, *Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on* $\mathbb{R}^N$*,* Comm. Pure Appl. Math. 45 (10) (1992) 1217-1269.

[30] X.P. Zhu, J. Yang, *On the existence of nontrivial solution of a quasilinear elliptic boundary value problem for unbounded domains,* Acta Math. Sci. 7 (1987) 341-359.

[31] X.P. Zhu, J. Yang, *The quasilinear elliptic equation on unbounded domain involving critical Sobolev exponent,* J. Partial Differ. Equ. 2 (1989) 53-64.