SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Carlos André de Brito Lima

Sobre Álgebras de Jordan e Cones Simétricos

BELÉM - PARÁ
2021

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Carlos André de Brito Lima

Sobre Álgebras de Jordan e Cones Simétricos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME) como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática da Universidade Federal do Pará.

Orientadora: Profa. Dra. Joelma Morbach

BELÉM - PARÁ
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D278s de Brito Lima, Carlos Andre.
Sobre Álgebras de Jordan e Cones Simétricos / Carlos Andre de Brito Lima. — 2021.
94 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Joelma Morbach
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Álgebras. 2. Álgebras de Jordan. 3. Cones Simétricos. 4. Domínios de Positividade. I. Título.

CDD 511.33

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

Carlos André de Brito Lima

Sobre Álgebras de Jordan e Cones Simétricos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME) como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática da Universidade Federal do Pará e avaliado pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Joelma Morbach (Orientadora)

PPGME - UFPA

Prof. Dr. Alex Sierra Cardenas (Membro)

PPGME - UFPA

Profa. Dra. Sara Raissa Silva Rodrigues (Membro)

UFAM

DATA DA DEFESA: 01 de Julho de 2021

RESULTADO: Aprovado

A todos os que me deram apoio, que estiveram comigo até nos momentos mais difíceis e me ajudaram a chegar onde estou.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Pará e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática por oferecerem a mim essa oportunidade de formação.

À minha mãe Neide e ao meu pai Carlos (que me adotaram e me resgataram de um lugar onde a Educação ainda é bastante escassa), por todo esforço que fizeram para ajudar e possibilitar a mim a opção de estudar e por todo apoio que me foi dado durante esta trajetória.

Ao meu esposo Felipe Baia, por todo o apoio, companheirismo e toda motivação que me deu durante esse momento extremamente difícil que estamos vivendo.

À minha querida orientadora Joelma Morbach por ter me escolhido como seu orientando, por ter acreditado no meu potencial e, também, por todo o apoio, incentivo e paciência (que não foi pouca).

A alguns amigos, por toda a ajuda que me deram nos momentos mais tensos e por todos os puxões de orelha, que serviram de incentivo para terminar este trabalho, carinhosamente apelidado por mim como dréssertação.

Aos meus professores, que sempre demonstraram acreditar em mim e sempre aconselharam-me a seguir a carreira acadêmica. Em especial, às professoras Nazaré Bezerra, Irene Castro e Tania Begazo, que avaliaram meu Trabalho de Conclusão de Curso da Graduação e me disseram que eu devia fazer um Mestrado.

A todos os mestres, com muito carinho.

" Alguns homens vêem as coisas como são, e dizem 'Por quê?'. Eu sonho com as coisas que nunca foram e digo 'Por que não?' "

George Bernard Shaw.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos dois conceitos que atualmente vem chamando bastante atenção devido suas relevâncias e aplicabilidades. A saber: *Álgebras de Jordan*, que constituem importantes exemplos de álgebras não-associativas e possuem muitas aplicações, não só nas várias áreas da Matemática (Combinatória, Grafos, EDP, etc), como também em Estatística, Computação, dentre outras; e os *Cones Simétricos* (às vezes chamados Domínios de Positividade), que são tipos bastante interessantes de conjuntos que satisfazem algumas propriedades e também tem muita aplicabilidade. De imediato, pode-se imaginar que as duas estruturas não tem relação uma com a outra. Porém, neste trabalho introduziremos os conceitos e resultados necessários para entendermos que existe, sim, uma equivalência biunívoca entre um certo tipo de álgebras de Jordan e um tipo específico de cones simétricos. O resultado que prova esta equivalência, o qual é conhecido como Teorema de Koecher-Vinberg, é um teorema de reconstrução de Álgebras de Jordan reais. Este teorema foi provado independentemente por Max Koecher, em 1957 [26], e Ernest Vinberg, em 1960 [46], e constitui o principal objeto de estudo desta dissertação.

PALAVRAS-CHAVE: Álgebras. Álgebras de Jordan. Cones Simétricos. Domínios de Positividade.

ABSTRACT

In this work, we present two concepts that are currently drawing a lot of attention due to their relevance and applicability: Jordan algebras, which are important examples of non-associative algebras and have many applications, not only in the various areas of Mathematics (Combinatory, Graphs, EDP, etc.), but also in Statistics, Computation, among others; and Symmetrical Cones (nowadays called Positivity Domains), which are very interesting types of sets and also have a lot of applicability. One can immediately imagine that the two structures are unrelated to each other. However, in this work we will introduce the concepts and results necessary to understand that there is, indeed, a one-to-one equivalence between a certain type of Jordan algebras and a specific type of symmetric cones. The result that proves this equivalence, which is known as the Koecher-Vinberg Theorem, is a reconstruction theorem of real Jordan algebras. This theorem was independently proved by Max Koecher, in 1957 [26], and Ernest Vinberg, in 1960 [46], and constitutes the main object of study of this dissertation.

PALAVRAS-CHAVE: Álgebras. Álgebras de Jordan. Cones Simétricos. Domínios de Positividade.

Conteúdo

INTRODUÇÃO

O conceito de Álgebra de Jordan foi originalmente criado por Pascual Jordan, John von Neumann e Eugene Wigner [25], para iluminar um aspecto particular da Física: os observáveis da Mecânica Quântica. Embora tenham surgido na busca para encontrar configurações algébricas alternativas para a Mecânica Quântica, a noção de álgebra de Jordan tem uma longa e rica história na Matemática, tendo atualmente profundas conexões com diversas áreas da mesma, incluindo a Teoria de Lie, Geometria Diferencial, Análise Matemática, Teoria dos Grafos e Combinatória.

Além de estabelecer conexões inesperadas com muitas outras áreas da própria Matemática, as álgebras de Jordan também tem despontado relações e aplicações em muitas outras ciências. A seguir citamos algumas interessantes aplicações e suas referências para consulta.

As aplicações à Estatística são bem numerosas e diversas, dentre as quais destacamos [29], [33], [32] e [35]. Para um estudo detalhado sobre estas álgebras e aplicações à Geometria e outras áreas da Matemática sugerimos as notas de Koecher [27] ou a monografia de Faraut e Koranyi [20]. Em [41] é apresentado um Princípio de Comutação para problemas variacionais em álgebras de Jordan Euclidiana.

Um cone convexo C em um espaço real V de dimensão finita com produto interno é um conjunto convexo que é invariante sob a multiplicação por escalares positivos. Ele abrange todo o espaço se, e somente se, contiver uma base. Como o casco convexo da base é um politopo com interior não-vazio, isso acontece se, e somente se, C tiver interior não-vazio. Veremos que o interior, neste caso, também é um cone convexo. Além disso, um cone convexo aberto coincide com o interior do seu fecho, uma vez que qualquer ponto interior do fecho deve situar-se no interior de algum politopo no cone original. Um cone convexo é considerado próprio se seu fecho, que também é um cone, não contiver subespaços.

Cones simétricos são cones autoduais convexos abertos no espaço euclidiano e que tem um grupo transitivo de simetrias, isto é, operadores invertíveis que levam o cone sobre si mesmo. O domínio do tubo associado a um cone simétrico é um espaço simétrico Hermitiano não-compacto do tipo tubo. Todas as estruturas algébricas e geométricas associadas ao espaço simétrico podem ser expressas naturalmente em termos da álgebra de Jordan. Eles podem ser descritos em termos de estruturas mais complicadas, chamadas de Sistemas Triplos de Jordam, que generalizam álgebras de Jordan sem identidade.

O Teorema de Koecher-Vinberg (provado independentemente por Max Koecher, em 1957, e Ernest

Vinberg, em 1961) fornece uma correspondência um-a-um entre álgebras de Jordan formalmente reais (atualmente chamadas de álgebras de Jordan Euclidianas) sobre um espaço vetorial X e o conjunto de domínios de positividade homogêneos (com relação a uma forma bilinear positiva definida) em X. Nosso objetivo é entender como é construída esta relação entre as álgebras de Jordan formalmente reais e os cones convexos que são abertos, regulares, homogêneos e auto-duais (que são conhecidos atualmente como domínios de positividade).

Em vários trabalhos que envolvem a dualidade entre Álgebras de Jordan e Cones Simétricos são apresentados e utilizados conceitos de Programação Cônica de Segunda Ordem (PCSO), que se aplicam a problemas de otimização. Utilizam-se também características dos cones de Lorentz e de álgebras de Jordan euclidianas. Vários problemas podem ser reformulados através da teoria de PCSO, dentre eles podemos citar problemas de Programação Linear (PL), Problemas de Mínimos Quadrados (PMQ), Programação Quadrática (PQ) e problemas que envolvem soma ou máximos de normas.

Algumas aplicações reais de PCSO incluem Mão mecânica, Arranjos de antenas, Modelação de filtros FIR, Otimização de carteiras de investimento, Problemas de gestão e Problemas de localização de instalações. Destacamos [28], [19], [1], [30] e [44], dentre várias referências, sobre essa formulação nova de programação, cuja utilização é crescente nos problemas de otimização em muitas áreas.

Iniciamos este trabalho apresentando as noções preliminares necessárias para um estudo mais aprofundado sobre álgebras não-associativas e suas características: as definições de matrizes e operadores hermitianos, que nos permitem entender um exemplo muito importante de álgebras de Jordan; a definição de álgebra sobre um corpo; a descrição do processo de Cayley-Dickson; entre outros.

No segundo capítulo, apresentamos as definições de álgebra de Jordan e de álgebra de Jordan Euclidiana, bem como os principais resultados associados a estes conceitos, incluindo algumas demonstrações que consideramos relevantes para a exposição da teoria. Ainda no capítulo 2, estudamos alguns teoremas para que possamos entender a classificação das álgebras de Jordan quanto a excepcionalidade e especialidade.

No terceiro capítulo, fazemos o estudo de Cones Simétricos e de álgebras de Jordan formalmente reais, os quais estão intimamente relacionados. Também apresentamos o conceito de Domínios Simétricos e classificamos as álgebras de Jordan simples formalmente reais de dimensão finita e seus convexos abertos auto-duais regulares correspondentes.

Finalmente, no quarto e último capítulo apresentamos o teorema de Koecher-Vinberg, que se entende como um teorema de reconstrução para álgebras de Jordan reais. Para isso, introduziremos a noção de um domínio de positividade e enunciaremos vários teoremas e proposições que nos permitirão entender como funciona a sua estrutura.

Capítulo 1

ALGUNS CONCEITOS PRELIMINARES

1.1 Matrizes e Operadores Hermitianos

Definição 1.1.1. *Considere $A = [a_{ij}]$ uma matriz complexa de ordem $m \times n$. A matriz obtida substituindo cada elemento de A por seu conjugado é chamada* ***matriz conjugada*** *da matriz A, que denotamos por $\overline{A}$. Dessa forma, $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$.*

Definição 1.1.2. *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz complexa de ordem $m \times n$. Definimos a* ***transposta Hermitiana*** *da matriz A, que denotamos por A^*, como sendo a matriz $A^* = [\overline{a_{ji}}]$ de ordem $n \times m$. Assim, $A^* = (\overline{A})^t$.*

Teorema 1.1.3. *Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes complexas, com ordens compatíveis com as operações. Então,*
(a) $\overline{(A + B)} = \overline{A} + \overline{B}$.
(b) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.
(c) $\overline{\lambda A} = \overline{\lambda}\ \overline{A}$ *para qualquer escalar* $\lambda \in \mathbb{C}$.
(d) $(\overline{A})^t = \overline{(A^t)}$.

Definição 1.1.4. *Dizemos que uma matriz $A = [a_{ij}]$ complexa de ordem n é* ***Hermitiana*** *se $(\overline{A})^t = A$, isto é, se $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ para todos i,j. Geralmente indica-se $A^* = A$ para denotar uma matriz Hermitiana.*

Definição 1.1.5. *Dizemos que uma matriz $A = [a_{ij}]$ complexa de ordem n é* ***anti-Hermitiana*** *se $(\overline{A})^t = -A$, isto é, se $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ para todos i,j. Geralmente indica-se $A^* = -A$ para denotar uma matriz anti-Hermitiana.*

Exemplo 1.1.6. *A matriz complexa* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$ *é Hermitiana.*

A matriz complexa $B = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$ *é anti-Hermitiana.*

Teorema 1.1.7. *Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes complexas de mesma ordem e λ um escalar complexo. Então,*

(a) $(A^*)^* = A$.

(b) $(A + B)^* = A^* + B^*$.

(c) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.

Proposição 1.1.8. *Seja A uma matriz complexa de ordem $m \times n$. As matrizes AA^* e A^*A são Hermitianas.*

Quando a matriz A está escrita em uma base ortonormal, a matriz A^* representa o operador adjunto do operador linear associado à matriz A.

Lembrando que a propriedade fundamental do operador adjunto é dada pela igualdade

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \ \forall \ x, y \in V,$$

onde V é um espaço vetorial com produto interno.

Seja H um espaço de Hilbert. Considere um operador linear contínuo $A : H \to H$. Usando o Teorema da Representação de Riesz, podemos mostrar que existe um único operador linear contínuo $A^* : H \to H$ com a seguinte propriedade:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \ \forall \ x, y \in H.$$

Este operador A^* é chamado **adjunto** de A.

Definição 1.1.9. *Em um espaço vetorial com produto interno V, um* ***operador hermitiano*** *(ou* ***autoadjunto****) é um operador linear A que é o adjunto de si mesmo, ou seja,*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \ \forall \ x, y \in V.$$

1.2 Noções Básicas Sobre Espaços

Sejam M um conjunto não-vazio e d uma métrica em M, dizemos que o par (M, d) é um espaço métrico.

Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $||\cdot||$ uma norma de E. O par $(E, ||\cdot||)$ é um espaço vetorial normado.

Um espaço normado $(E, ||\cdot||)$ pode ser considerado um espaço métrico (E, d), basta definir a seguinte métrica

$$d(x, y) = ||x - y||, \text{ para todo } x, y \in E.$$

Assim, todo espaço normado $(E, ||\cdot||)$ é um espaço métrico (E, d), com d sendo a métrica induzida pela norma $||\cdot||$.

Dentro da Análise Matemática, se uma sequência tem limite diz-se que a sequência é *convergente*. Caso contrário, a sequência é dita *divergente*.

Por outro lado, uma *sequência de Cauchy* é uma sequência na qual a distância entre os termos vai se aproximando de zero. Em outras palavras, uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita de Cauchy se, para qualquer número positivo ϵ, existe um número natural n_0 tal que se n e m são maiores que n_0, a distância entre x_n e x_m é menor do que ϵ. Em linguagem matemática,

$$\forall \ \epsilon > 0, \ \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} : \ \ n, m \geq n_0 \ \ \Rightarrow \ \ |x_n - x_m| < \epsilon.$$

Acontece que toda sequência convergente (no sentido usual) também é uma sequência de Cauchy. No entanto, existem espaços contendo sequências de Cauchy que não são convergentes. Por exemplo, a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ é de Cauchy, mas não é convergente no intervalo $(0, 1)$ (embora o seja em $\mathbb{R}$).

Definição 1.2.1. *Um espaço vetorial normado onde todas as sequências de Cauchy são, também, convergentes chama-se um espaço completo.*

A partir de um espaço métrico qualquer E, é possível construir uma extensão de E que é um espaço métrico completo. Esta extensão é única (no sentido categorial), ou seja, dadas duas completudes de E elas são isométricas.

Definição 1.2.2. *Um espaço vetorial normado E é chamado Espaço de Banach quando for um espaço métrico completo, ou seja, se toda sequência de Cauchy em E é convergente em E.*

Os conjuntos $\mathbb{R}$ dos números Reais e o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos são espaços de Banach onde a norma é o próprio valor absoluto. Qualquer espaço de Hilbert (definição abaixo) é um espaço de Banach.

Já um *espaço de Hilbert* é uma generalização do espaço euclidiano que não precisa estar restrita a um número finito de dimensão.

Definição 1.2.3. *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial com produto interno que também é um espaço de Banach com a norma canônica definida pelo produto interno $|x| = \sqrt{< x, x >}$.*

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial dotado de produto interno, ou seja, com noções de distância e ângulos. Esse espaço obedece uma relação de completude, que garante que os limites existem quando esperados, o que permite e facilita diversas definições da Análise. Os espaços de Hilbert permitem que, de certa maneira, noções intuitivas sejam aplicadas em espaços funcionais. Por exemplo, com eles podemos generalizar os conceitos de séries de Fourier em termos de polinômios ortogonais. Os espaços de Hilbert são de importância crucial para a Mecânica Quântica.

1.3 Noções Básicas Sobre Álgebras

Definição 1.3.1. *Um conjunto A é chamado de álgebra sobre o corpo $\mathbb{K}$ se A possui estrutura de $\mathbb{K}$-espaço vetorial e um produto (uma aplicação bilinear) $(x, y) \mapsto x \cdot y$, para todos $x, y \in A$, que satisfaz*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$$
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,$$
$$\alpha \cdot (x \cdot y) = (\alpha \cdot x) \cdot y = x \cdot (\alpha \cdot y).$$

Chamaremos *álgebra sobre o corpo* $\mathbb{K}$, de $\mathbb{K}$-*álgebra* ou, simplesmente, *álgebra* e denotaremos o produto $x \cdot y$ simplesmente por xy quando não houver ambiguidade.

Definição 1.3.2. *Uma álgebra A é dita:*

*1. **associativa**, se para todos $x, y, z \in A$, vale $(xy)z = x(yz)$. Nesse caso, o conjunto de vetores A com suas operações de soma e produto forma um anel.*

*2. **comutativa**, se para todos $x, y \in A$, vale $xy = yx$.*

*3. **de potências associativas** se a subálgebra gerada por qualquer elemento for associativa.*

*4. **simples**, se não contém ideais bilaterais não-triviais e a operação de multiplicação não é nula (isto é, existe algum a e algum b tais que $ab \neq 0$).*

Definição 1.3.3. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. A forma bilinear f é dita ser uma:*

*1. **forma bilinear simétrica** se $f(u, v) = f(v, u)$ para todos $u, v \in V$.*

*2. **forma bilinear antissimétrica** se $f(u, v) = -f(v, u)$ para todos $u, v \in V$.*

Definição 1.3.4. *Uma forma bilinear simétrica (ou antissimétrica) f é dita ser **uma forma bilinear não-degenerada** se satisfizer a seguinte condição:*

se para todo vetor v vale $f(v, u) = 0$, então $u = 0$.

Definição 1.3.5. *Seja V uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $\eta : V \to \mathbb{K}$ é dita uma **forma quadrática** se:*

1. $\eta(\lambda x) = \lambda^2 \eta(x)$.

2. a função $f(x, y) = \eta(x + y) - \eta(x) - \eta(y)$ é uma forma bilinear de V.

Definição 1.3.6. *Uma álgebra A sobre um corpo $\mathbb{K}$ é chamada **alternativa** se, para todos $x, y \in A$, vale:*

$x^2 y = x(xy)$ (lei alternativa à esquerda).

$yx^2 = (yx)x$ (lei alternativa à direita).

Definição 1.3.7. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo de característica diferente de 2 e A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. A álgebra A é uma **álgebra de composição** se está munida de uma forma quadrática não-degenerada $\eta : A \to \mathbb{K}$ que é multiplicativa, isto é, para quaisquer $x, y \in A$, temos*

$$\eta(xy) = \eta(x)\eta(y).$$

Dizer que a forma η é não-degenerada significa que a forma bilinear simétrica associada

$$\eta(x, y) = \frac{1}{2} \left(\eta(x + y) - \eta(x) - \eta(y)\right)$$

é não-degenerada.

Definição 1.3.8. *Um endomorfismo ρ de um espaço vetorial A é chamado de* ***involução*** *da álgebra A se*

$$\rho(\rho(a)) = a \ \ a \ \rho(ab) = \rho(b)\rho(a)$$

para todos $a, b \in A$.

1.4 O Processo de Cayley-Dickson

Seja A uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$. Suponhamos que A tem um elemento identidade 1, a dimensão de A é m e em A está definida uma involução $a \mapsto \overline{a}$ tal que $a + \overline{a} \in \mathbb{K}$ e $a\overline{a} \in \mathbb{K}$ para todo $a \in A$.

O processo de Cayley-Dickson consiste em construir, a partir de A, uma álgebra (A, α) ($\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$) de dimensão $2m$. A álgebra (A, α) é obtida quando definimos no produto cartesiano $A \times A$ a multiplicação

$$(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4\overline{a_3}, \overline{a_1}a_4 + a_3a_2).$$

O elemento $(1, 0)$ é o elemento identidade em (A, α) e

$$\overline{(a_1, a_2)} = (\overline{a_1}, -a_2)$$

define uma involução em (A, α).

A álgebra (A, α) é associativa se, e somente se, A é associativa e comutativa.

A álgebra (A, α) é alternativa se, e somente se, A é associativa.

Se A é uma álgebra com composição, então (A, α) é uma álgebra com composição se, e somente se, A é associativa.

Temos os seguintes exemplos de álgebras com composição:
(I) $\mathbb{K}$, corpo de característica diferente de 2, $\eta(x) = x^2$.
(II) $K(\mu) = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}v_1$, em que $\mathbb{K}$ é um corpo de característica qualquer,

$$v_1^2 = v_1 + \mu \quad (\mu \in \mathbb{K}, \quad 4\mu + 1 \neq 0), \quad \overline{a + bv_1} = (a + b) - bv_1.$$

(III) $Q(\mu, \beta) = (K(\mu), \beta)$ - álgebra dos quatérnios generalizada.
(IV) $C(\mu, \beta, \gamma) = (Q(\mu, \beta), \gamma)$ - álgebra de Cayley-Dickson.

As álgebras $Q(\mu, \beta)$ e $C(\mu, \beta, \gamma)$ são obtidas a partir de $K(\mu)$ pelo processo de Cayley-Dickson. No caso em que a característica do corpo $\mathbb{K}$ é diferente de 2, $K(\mu)$ também pode ser construída a partir de $\mathbb{K}$ por este processo.
As álgebras do tipo (I) e (I) são comutativas. As do tipo (I), (II) e (III) são associativas. A do tipo (IV) é alternativa.

Ao longo deste trabalho, usamos bastante dois conceitos relacionados aos elementos de uma álgebra. São eles:

Definição 1.4.1. *Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Dados $a, b, c \in A$ definimos, em A,*

1. *o **associador de a, b e c** como $(a, b, c) := (a \cdot b) \cdot c - a \cdot (b \cdot c)$.*
2. *o **comutador de a e b** como $[a, b] := a \cdot b - b \cdot a$.*

Note, então, que uma $\mathbb{K}$-álgebra A é dita **associativa** quando $(a, b, c) = 0$ para todos $a, b, c \in A$. Da mesma forma, A é dita **comutativa** quando $[a, b] = 0$ para todos $a, b \in A$.

Proposição 1.4.2. *Se A é uma álgebra comutativa, então $(a, b, c) = -(c, b, a)$.*

Demonstração: Sejam a, b, c elementos quaisquer de A. Temos que

$$(a, b, c) = (a \cdot b) \cdot c - a \cdot (b \cdot c)$$

$$= -\left(a \cdot (b \cdot c) - (a \cdot b) \cdot c\right)$$

$$= -\left((b \cdot c) \cdot a - c \cdot (a \cdot b)\right)$$

$$= -\left((c \cdot b) \cdot a - c \cdot (b \cdot a)\right)$$

$$= -(c, b, a)$$

■

1.5 Derivação de Uma Álgebra

A *lei de Leibniz*, também conhecida como *regra do produto*, é uma regra que permite determinar a diferenciação de produtos entre funções diferenciáveis.

Pela regra do produto, **a derivada de um produto de duas funções é igual à primeira função multiplicada pela derivada da segunda função mais a segunda função multiplicada pela derivada da primeira função**.

Em linguagem matemática, a regra pode ser apresentada da seguinte maneira:

Proposição 1.5.1. ***(Regra do Produto)*** *Sejam f e g duas funções diferenciáveis. Então,*

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Ou, equivalentemente,

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)]g(x) + f(x)\frac{d}{dx}[g(x)].$$

Definição 1.5.2. *Álgebras diferenciais são álgebras equipadas com uma derivação, a qual é um função unária satisfazendo a lei do produto de Leibniz.*

Capítulo 2

ÁLGEBRAS DE JORDAN

Neste capítulo falaremos um pouco sobre as Álgebras de Jordan (exemplos de álgebras não-associativas) que possuem relação com várias outras áreas da Matemática. Essas álgebras foram introduzidas pelo físico alemão Pascual Jordan em uma tentativa de formular a base da Mecânica Quântica em termos do *produto de Jordan* (falaremos mais à frente sobre esse conceito) em vez do produto associativo usual. Antes disso, vamos entender um pouco de como isso aconteceu.

Uma Breve História

As operações básicas de matrizes ou operadores são: multiplicação por um escalar complexo, adição, multiplicação de matrizes (composição de operadores) e a formação da matriz complexa conjugada transposta (operador adjunto). Mas essas operações de matrizes não são *observáveis*[1]: o múltiplo escalar de uma matriz hermitiana não é uma matriz hermitiana, a não ser que o escalar seja real; o produto de duas matrizes hermitianas não é hermitiano, a não ser que os fatores comutem; e o adjunto em matrizes hermitianas é apenas a identidade.

Em 1932, o físico Ernst Pascual Jordan (Hannover, 18 de outubro de 1902 − Hamburg, 31 de julho de 1980) propôs um programa para descobrir uma nova configuração algébrica para Mecânica Quântica, que estaria livre da dependência de uma estrutura matricial metafísica determinante e invisível, mas ainda iria desfrutar de todos os benefícios algébricos. Jordan queria estudar as propriedades algébricas intrínsecas de matrizes hermitianas para capturá-las em propriedades algébricas formais e ver que outros possíveis sistemas não-matriciais também satisfaziam esses axiomas.

Pascual Jordan criou um tipo de álgebras não-associativas (atualmente denominadas Álgebras de Jordan, em sua homenagem) na tentativa de criar uma álgebra de observáveis para a Mecânica Quântica.

[1]Na Física Quântica, um observável é uma propriedade do estado do sistema que pode ser determinado por uma sequência de operações físicas. Nos sistemas governados pela Mecânica Clássica, qualquer valor observável pode ser demonstrado por uma função de valor real no conjunto de todos os possíveis estados do sistema.

Atualmente, as álgebras de Von Neumann também são empregadas para esse fim. Porém, o tipo de álgebras criado por Jordan acabou tendo conexões com várias áreas da Matemática: já foram aplicadas em Geometria Projetiva, Teoria dos Números, Análise Complexa, Otimização e muitos outros campos da Matemática Pura e Aplicada. Mais tarde surgiram aplicações em Geometria Diferencial: primeiro em certos espaços simétricos e depois uma conexão profunda com domínios simétricos limitados.

2.1 Definição

O primeiro passo para analisar as propriedades algébricas de matrizes ou operadores hermitianos foi identificar as operações observáveis básicas. Após alguns experimentos empíricos, Jordan as representou em termos da semi-multiplicação:

$$x \cdot y = \frac{xy + yx}{2}. \tag{2.1}$$

Chamaremos esse produto (bilinear simétrico) de **Produto de Jordan**.

O próximo passo na investigação empírica das propriedades algébricas desse modelo foi verificar que axiomas ou leis formais cruciais as operações em matrizes hermitianas obedeciam. Jordan descobriu que a lei chave governando a semi-multiplicação, além da sua comutatividade óbvia, era

$$(x^2y)x = x^2(yx) \tag{2.2}$$

A essa igualdade chamaremos **Identidade de Jordan**.

Assim, podemos definir:

Definição 2.1.1. *Uma $\mathbb{K}$-álgebra J é chamada de $\mathbb{K}$-álgebra de Jordan (ou simplesmente Álgebra de Jordan) se seu produto satisfaz:*

1. a condição de comutatividade $xy = yx$ para todos $x, y \in J$ e, também, (1.3)

2. a Identidade de Jordan, uma versão debilitada da associatividade:

$$(x^2y)x = x^2(yx) \text{ para todos } x, y \in J \tag{1.4}$$

A Identidade de Jordan pode ser vista como uma *substituta* da lei associativa. Enquanto isso, o Produto de Jordan não seria mais associativo, mas seria comutativo.

Definição 2.1.2. *Um elemento e da álgebra de Jordan J sobre um corpo $\mathbb{K}$ é chamado de identidade (ou unidade) se, para todo elemento $j \in J$, $ej = je = j$. Se uma álgebra de Jordan J possui elemento identidade, então J é chamada de* ***álgebra unitária****.*

Definição 2.1.3. *Um subespaço vetorial J' de uma álgebra de Jordan J (sobre um corpo $\mathbb{K}$) que é fechado sob a adição, a multiplicação do anel e a multiplicação por escalares e, também, contém o elemento identidade de J é chamado uma subálgebra da $\mathbb{K}$-álgebra J.*

Definição 2.1.4. *Uma Álgebra de Jordan é dita formalmente real se*

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 0.$$

Segundo Jordan, qualquer álgebra que satisfizesse (1.1) e (1.2) e que, adicionalmente, fosse formalmente real era chamado de *r-sistema*. O nome Álgebras de Jordan foi dado anos depois por A. A. Albert.

Em 1934, Pascual Jordan, John Von Neumann e Eugene Wigner [25] classificaram todos os r-sistemas de dimensão finita e mostraram que qualquer um desses sistemas é soma direta de 5 blocos. São eles:
1) matrizes simétricas $Sim_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$
2) matrizes hermitianas sobre os complexos, $Her_n(\mathbb{C})$, $n \geq 3$
3) matrizes hermitianas sobre os quatérnios, $Her_n(\mathbb{H})$, $n \geq 3$
4) a álgebra de Albert (Definição 2.2.3) das matrizes hermitianas sobre os octônios, $Her_3(\mathbb{O})$
5) os fatores spin.

Nos quatro primeiros, a multiplicação é dada por $x \cdot y = \dfrac{xy + yx}{2}$.

As expressões (1.1) e (1.2) implicam que uma Álgebra de Jordan é uma *Álgebra de Potências Associativas* e satisfaz a *generalização da Identidade de Jordan*:

$$(x^m y)x^n = x^m(yx^n) \text{ para todos inteiros positivos } m \text{ e } n.$$

Note que uma álgebra associativa é uma Álgebra de Jordan se, e somente se, ela é comutativa.

2.2 Álgebras de Jordan Especiais e Excepcionais

Definição 2.2.1. *Dizemos que uma álgebra de Jordan J é* ***especial*** *se ela é um subespaço vetorial de uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa A, fechado em relação ao produto de Jordan. As álgebras de Jordan que não são especiais (ou seja, que não são subálgebras de uma álgebra associativa) são chamadas de* ***excepcionais****.*

Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa ou alternativa. No espaço vetorial A, podemos definir uma nova operação de produto, dado pela fórmula $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ para todo $x, y \in A$ (o Produto de Jordan), onde xy denota o produto em A. Ao substituir o produto original de A pelo Produto de Jordan, obtemos uma nova álgebra que será denotada por $A^+ := (A, \cdot)$. Dessa forma, A^+ é uma álgebra de Jordan.

É claro que qualquer subespaço vetorial S de A, fechado em relação ao Produto de Jordan, é uma subálgebra de A^+ e, por consequência, uma álgebra de Jordan. Nesse caso, S é uma álgebra de Jordan especial.

Se A é uma $\mathbb{K}$-álgebra qualquer, podemos determinar duas novas álgebras a partir dela:

$$A \to A^+ = (A, +, \cdot), \text{ onde } \cdot \text{ é o Produto de Jordan (comutativa)}$$
$$A \to A^- = (A, +, [a, b]), \text{ onde } [a, b] = ab - ba \text{ (anticomutativa)}$$

Se A é associativa $\Rightarrow$ A^- é de Lie (A^- e todas suas subálgebras são de Lie).

A^+ é de Jordan (nem todas as subálgebras são de Jordan).

Observamos que a álgebra A^+ pode ser definida, analogamente, para uma $\mathbb{K}$-álgebra de A não necessariamente associativa, mas neste caso a álgebra resultante A^+ não necessariamente será de Jordan.

Concluímos, assim, que dada uma álgebra associativa A, de característica diferente de 2, pode-se construir a Álgebra de Jordan A^+ usando o mesmo espaço vetorial aditivo. As álgebra de Jordan A^+, assim como qualquer uma de suas subálgebras, são *álgebras de Jordan especiais*.

Teorema 2.2.2. *O Teorema de Shirshov-Cohn ([34], Teorema 5.1.3, pg. 200) afirma que qualquer Álgebra de Jordan com dois geradores é especial.*

Definição 2.2.3. *Uma **álgebra de Albert** é uma álgebra de Jordan excepcional de dimensão 27.*

As Álgebras de Albert tem o nome de Abraham Adrian Albert, que foi o pioneiro no estudo de álgebras não associativas, geralmente trabalhando com números reais.

2.3 Exemplos de Álgebra de Jordan

Exemplo 2.3.1. *O exemplo mais simples de Álgebra de Jordan Especial é o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, denotado por $M_n(\mathbb{K})$.*

Exemplo 2.3.2. *O conjunto das matrizes auto-adjuntas reais, complexas ou quatérnicas, com a multiplicação $\dfrac{xy+yx}{2}$ formam uma álgebra de Jordan especial.*

Exemplo 2.3.3. *O conjunto das matrizes auto-adjuntas 3×3 sobre os octônios, novamente com a multiplicação $\dfrac{xy+yx}{2}$, é uma álgebra de Jordan Excepcional de dimensão 27 (Excepcional por que os octônios não são associativos).*

Esse foi o primeiro exemplo de Álgebra de Jordan. Seu grupo de automorfismo é o grupo de Lie excepcional F_4. Desde que sobre o conjunto dos complexos essa é a única álgebra de Jordan excepcional simples (não contém ideiais próprios), a menos de isomorfismo, ela é sempre chamada de "a Àlgebra de Jordan Excepcional".

Exemplo 2.3.4. ***(Álgebras de Jordan Hermitianas)*** *Os exemplos mais importantes de subálgebras de Jordan Especiais são as álgebras de elementos hermitianos (elementos fixos por uma involução) de uma álgebra associativa com involução.*

Seja (A, α) uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa com uma involução $\alpha : A \to A$. Se $\alpha(x) = x$ e $\alpha(y) = y$, segue que $\alpha(xy + yx) = xy + yx$.

O conjunto de todos os elementos fixados pela involução (às vezes chamados elementos hermitianos) forma uma subálgebra de A^+, que é denotada por $H(A, \alpha)$.

Nesse sentido, $H(A, \alpha) = \{x \in A; \alpha(x) = x\}$ denota o subespaço dos elementos hermitianos. $H(A, \alpha)$, equipado com o Produto de Jordan, é uma álgebra de Jordan Especial.

De forma semelhante, se A é uma álgebra alternativa, $H(A, \alpha)$ é uma subálgebra de A^+, e podemos mostrar que também é uma Álgebra de Jordan.

Observação: Se A é uma álgebra associativa, então A^+ é do tipo Hermitiana, ou seja, existe (B,α) tal que $A^+ \cong (B,\alpha)$.

Exemplo 2.3.5. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão n $(2 \leq n \leq \infty)$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, $f : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear simétrica e $J(V,f) = \mathbb{K} \oplus V$.*

Definimos uma multiplicação em $J(V,f)$ da seguinte maneira:

$$(\alpha, x)(\beta, y) := (\alpha\beta + f(x,y), \beta x + \alpha y).$$

*Obtemos uma álgebra de Jordan denominada **Álgebra de Jordan de grau 2** ou **Álgebra de Jordan da forma bilinear simétrica f**.*

Esta álgebra é comutativa e quadrática ($x^2 - t(x)x + \eta(x) = 0$ $\forall x \in A$, $t : A \to \mathbb{K}$ é linear e $\eta : A \to \mathbb{K}$ é quadrática).

Para todo $a = (\alpha, x) \in J(V,f)$, temos que $a^2 - t(a)a + \eta(a) = 0$, onde $t(a) = 2\alpha$ e $\eta(a) = \alpha^2 - f(x,x)$.

Reciprocamente, toda álgebra quadrática comutativa A é uma álgebra de Jordan de grau 2.

Mais precisamente, $A = J(V,g)$, em que $V = \{x \in A; t(x) = 0\}$ e $g(x,y) = xy$ $(x, y \in V)$.

Proposição 2.3.6. *A álgebra $J(V,f)$ é simples quando f é não-degenerada e não é finitamente gerada quando $n = \infty$.*

Proposição 2.3.7. *Se $dimV > 1$ e f é não-degenerada, então a álgebra $J(V,f)$ é simples.*

As proposições acima são exercícios presentes em [52], página 57.

Além disso, a álgebra $J(V,f)$ é *especial*.

Exemplo 2.3.8. *Seja A uma álgebra com involução $\alpha \to A$.*

$$a \mapsto \alpha(a)$$

No Exemplo 2.3.4, foi mencionado que $H(A,\alpha)$ é uma Álgebra de Jordan.

Denotaremos por A_n a álgebra das matrizes $n \times n$ com coeficientes em A.

O operador

$$* : A_n \to A_n$$

$$(a_{ij}) \mapsto (\overline{a_{ji}})$$

é uma involução de A_n.

Para simplificar a notação, denotamos por $H(A_n)$ a álgebra $H(A_n, *)$.

Se a involução $*$ satisfaz $a + a^* \in \mathbb{K}$, $aa^* \in \mathbb{K}$ $(\forall a \in A)$, $H(A_n)$ é uma álgebra de jordan e $n > 3$, então A é necessariamente associativa.

Observação: *Se A é associativa ou alternativa, então A^+ é uma álgebra de Jordan especial.*

- Se A é associativa, a afirmação é trivial.

- Suponhamos que A é alternativa com 1. Considere o homomorfismo

$$L : A \to Hom(A, A)$$
$$a \mapsto L_a : A \to A$$
$$x \mapsto L_a(x) = ax$$

Temos que L é um homomorfismo de A^+ em $Hom(A, A)$.

Mas se $L_a = 0$, temos que

$$a = L_a(1) = 0$$

e isto implica que L é um homomorfismo injetor. Assim, A^+ é isomorfa a uma subálgebra de $Hom(A, A)^+$.

- Se A não tem 1, então usamos a álgebra alternativa (com 1) $A^{\#} = \mathbb{F} \oplus A$ no lugar de A. O produto em $A^{\#}$ é dado por

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, \alpha b + \beta a + ab)$$

■

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com base $\{1, v_1, ..., v_n\}$, $1 \leq n \leq \infty$ e seja $f : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear simétrica.

A *álgebra de Clifford da forma f*, denotada por $Cl(f)$ é a subálgebra da álgebra associativa livre gerada por $\{v_1, ..., v_n\}$ que verifica $v_i v_j + v_j v_i = f(v_i, v_j)$.

A álgebra $Cl(f)$ tem base $\{1, v_{i_1}, ..., v_{i_k}; k \geq 1, i_1 < i_2 < ... < i_k\}$.

A álgebra $J(V, f)$ é especial, pois é isomorfa à subálgebra S de $Cl(f)^+$ com base $\{1, v_1, ..., v_n\}$.

Denotemos por $C = C(\mu, \beta, \gamma)$ uma álgebra de Cayley-Dickson. As álgebras $H(C)$, $H(C_2)$ e $H(C_3)$ são álgebras de Jordan. Como C não é associativa, temos que $H(C_n)$ não é uma álgebra de Jordan para $n > 3$.

As álgebras $H(C)$ e $H(C_2)$ são álgebras especiais, pois são álgebras do tipo $J(V, f)$.

O primeiro exemplo de álgebra de Jordan excepcional, a álgebra $H(C_3)$, foi obtido por Albert em 1934.

Proposição 2.3.9. *Toda álgebra de Albert é excepcional, simples e tem dimensão 27.*

A estrutura de álgebra de Jordan de dimensão finita sobre corpos de característica diferente de 2 foi criada por Albert (1946, 1947, 1950), Kalish (1947) e Jacobson (1949).

2.4 Alguns Teoremas Importantes

Nesta seção iremos estudar alguns teoremas importantes para classificarmos Álgebras de Jordan.

O primeiro deles já foi citado no início deste capítulo. Mesmo assim, não tem problema se o relembrarmos:

Teorema 2.4.1. *Todos os r-sistemas de dimensão finita podem ser escritos como soma direta dos cinco blocos a seguir:*
1) matrizes simétricas $Sim_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$
2) matrizes hermitianas sobre os complexos, $Her_n(\mathbb{C})$, $n \geq 3$.
3) matrizes hermitianas sobre os quatérnios, $Her_n(\mathbb{H})$, $n \geq 3$.
4) a Álgebra de Albert das matrizes hermitianas sobre os octônios, $Her_3(\mathbb{O})$.
5) os fatores spin.

A demonstração do Teorema acima pode ser encontrada em [25] .

Definição 2.4.2. *Seja* J *uma* $\mathbb{K}$*-álgebra de Jordan de dimensão finita.* J *é chamada de simples se 0 e* J *são os únicos ideais de* J *e, além disso,* $J^2 \neq 0$.

Em 1979, Efim Zelmanov [50] classificou álgebras de Jordan simples de dimensões infinitas (e não degeneradas):

Teorema 2.4.3. *Cada álgebra de Jordan simples de dimensão finita é isomorfa a uma álgebra de um dos seguintes tipos:*
1) Hermitiano.
2) de Clifford.
3) de Albert.

Em particular, as únicas álgebras de Jordan simples excepcionais são de álgebras de Albert, que tem dimensão 27.

Definição 2.4.4. *Seja* A *uma álgebra potências associativas. As potências de* $a \in A$ *estão bem definidas por* $a^1 = a, ..., a^{n+1} = a^n a$. *Dizemos que* a *é nilpotente se existe um inteiro positivo* k *tal que* $a^k = 0$.

Definição 2.4.5. *Quando todos os elementos de* A *(de um ideal* I *de* A*) são nilpotentes, dizemos que* A *é uma nilálgebra (*I *é um nilideal).*

Toda álgebra de potências associativas A contém um único nilideal maximal $Nil(A)$ tal que a álgebra quociente $A/Nil(A)$ não contem nilideais não-nulos. Este ideal $Nil(A)$ é denominado o nilradical de A.

Toda álgebra de Jordan J é de potências associativas, logo o radical $Nil(J)$ está bem definido.

Os teoremas a seguir serão enunciados sem demonstração. As respectivas demonstrações podem ser encontradas nas referências citadas.

Teorema 2.4.6. *Seja* J *uma álgebra de Jordan de dimensão finita. O nilradical* $Nil(J)$ *é nilpotente e a álgebra quociente* $J/Nil(J)$ *é isomorfa à uma soma direta finita de álgebras simples.*

O teorema acima pode ser *traduzido* da seguinte forma: é possível ajustar a álgebra J tendo como base o $Nil(J)$ e, por esse ajuste, enxergá-la como uma soma direta finita de álgebras simples.

Nesse sentido, procurando classificar álgebras de Jordan, basta classificarmos as simples. Caso a álgebra J em questão não seja simples, podemos quocientá-la com seu $Nil(J)$ e, pelo Teorema 1.4, esse quociente é isomorfo à uma soma direta finita de álgebras simples.

Teorema 2.4.7. *Seja J uma álgebra de Jordan simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$. Então J é isomorfa a uma das seguintes álgebras:*
- $\mathbb{K}$.
- $J(V, f)$, em que f é não-degenerada.
- $H(A_n)$, $n \geq 3$, em que A é uma álgebra com composição e A é associativa para $n > 3$.

As demonstrações dos dois teoremas acima podem ser encontradas em [24].

A estrutura das álgebras de Jordan simples de qualquer dimensão é dada pelo seguinte teorema, demonstrado por Zel'manov [51] em 1983:

Teorema 2.4.8. *Seja J uma álgebra de Jordan simples. Então J é isomorfa a uma das seguintes álgebras:*
- $J(V, f)$, em que f é não-degenerada.
- A^+, em que A é uma álgebra associativa simples.
- $H(A, *)$, em que A é uma álgebra associativa simples com involução $*$.
- Uma álgebra de Albert.

Definição 2.4.9. *Um subespaço K de uma álgebra de Jordan J é denominado ideal quadrático se, para todo $k \in K$ e $a \in J$ temos*

$$2(ka)k - k^2 a \in K.$$

Todo ideal à direita de A^+ é um ideal quadrático de A^+.

Dizemos que J *satisfaz a condição minimal para ideais quadráticos* se todo conjunto não-vazio de ideais quadráticos de J contém um ideal quadrático minimal.

Um ideal I de J é denominado *quasi-regular* se, para todo $x \in I$, o elemento $1 - x$ tem inverso em $J^\# = \mathbb{K} \oplus J$.

Um ideal à direita I de J é chamado ideal à direita modular se existe $u \in J$ tal que $x - ux \in I$ para todo $x \in J$.

O radical quasi-regular $Rad(J)$ de J é o maior ideal à direita quasi-regular de J e também é a interseção de todos os ideais à direita modulares maximais de J.

Definição 2.4.10. *Uma álgebra A é denominada artiniana (à esquerda) se satisfaz a condição de cadeia descendente para ideais (à esquerda), isto é, se $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ é uma cadeia, então existe $k \geq 1$ tal que $I_n = I_k$ para todo $n \geq k$.*

Toda álgebra de dimensão finita é artiniana.

Teorema 2.4.11. *(Jacobson, [24]; Zhevlakov, [52]) Seja J uma álgebra de Jordan que safisfaz a condição minimal para os ideais quadráticos. Então, temos que:*
i) (Slinko-Zelmanov) o radical $Rad(J)$ é nilpotente e tem dimensão finita.
ii) (Jacobson-Osborn) a álgebra quociente $A/Rad(J)$ é isomorfa a uma soma direta de álgebras de Jordan simples que tem uma das seguintes formas:

- *uma álgebra de Jordan com divisão.*
- *$H(A,*)$, em que A é uma álgebra associativa artiniana com involução $*$.*
- *$J(V,f)$, em que f é não-degenerada.*
- *uma álgebra de Albert.*

Exemplo 2.4.12. *(Exemplo de álgebra de Jordan especial) Seja D uma álgebra de composição com involução i. Seja $D_n = Mat_n(D)$ a álgebra das matrizes quadradas de ordem n com coeficientes em D.*

*Vamos considerar a aplicação $j : D_n \to D_n$, definida por $j(X) = i(X)^t$ (leva a matriz X em uma outra matriz, obtida da anterior aplicando a involução i a cada entrada de X e depois transpondo), é uma involução da álgebra D_n, chamada de **involução padrão em $\mathbf{D_n}$ associada a $\mathbf{i}$**.*

Se D é associativa, então D_n também é associativa. Dessa forma, se D é associativa, então $(H(D_n, j), \cdot)$ é uma álgebra de Jordan especial.

Se D for a álgebra de Cayley-Dickson C (uma álgebra do tipo $C(\mu,\beta,\gamma)$=$(Q(\mu,\beta),\gamma)$, com $\gamma \neq 0$), que não é associativa, mas é alternativa, então a álgebra $(H(C_n, j), \cdot)$ só é de Jordan para $n \leq 3$.

Para $n = 3$, podemos encontrar uma prova disto em ([52], Teorema 1, Página 54).

Também, $(H(C_n, j), \cdot)$ é uma álgebra de Jordan excepcional ([52], Teorema 2, Página 55).

Seja J uma álgebra de Jordan sem unidade. Podemos considerar o conjunto $J^{\#} = J \bigoplus \mathbb{K} \cdot 1$, onde 1 é a unidade de $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K} \cdot 1 = \{\alpha \cdot 1;\ \alpha \in \mathbb{K}\}$.

O produto em $J^{\#}$ é definido por $(x + \alpha 1) \cdot (y + \beta 1) = (xy + \alpha y + \beta x) + \alpha\beta \cdot 1$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $x, y \in J$.

Aqui, chamaremos a álgebra $J^{\#}$ de **álgebra obtida pela adjunção formal de um elemento identidade à álgebra** J.

O elemento 1 é o elemento unidade para a álgebra $J^{\#}$ e J é uma subálgebra de $J^{\#}$.

Temos, também, que $J^{\#}$ é uma álgebra de Jordan ([24], Teorema 6, página 30).

Definição 2.4.13. *Sejam J e J' duas álgebras de Jordan sobre o corpo $\mathbb{K}$. O **Produto de Kronecker** $J \bigotimes_{\mathbb{K}} J'$ é o produto tensorial $J \bigotimes_{\mathbb{K}} J'$ dos espaços vetoriais J e J', onde todos os elementos são somas $\sum x \bigotimes y$, com $x \in J$ e $y \in J'$ e a multiplicação é definida por*
$(x_1 \bigotimes y_1)(x_2 \bigotimes y_2) = (x_1x_2) \bigotimes (y_1y_2)$, onde $x_1, x_2 \in J$ e $y_1, y_2 \in J'$

Se ambas J e J' tem dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, então $dim(J \bigotimes_{\mathbb{K}} J') = dimJ \cdot dimJ'$.

Podemos nos deparar com o caso em que J' é um corpo, geralmente uma extensão K de $\mathbb{K}$. Neste caso,

J' contém unidade. Logo, $J_K := J \bigotimes_{\mathbb{K}} K$ contém J como uma subálgebra sobre $\mathbb{K}$. Além disso, J_K pode ser vista como uma álgebra sobre K, a qual chamaremos de **extensão escalar de J a uma álgebra sobre K**. Por sinal, J_K também é uma álgebra de Jordan.

Definição 2.4.14. *Uma álgebra de Jordan J é chamada de nilpotente se existe um número natural n tal que o produto de quaisquer n elementos da álgebra, com quaisquer distribuição de parênteses, seja igual a 0. O menor número para o qual isso acontece é chamado de* ***índice de nilpotência da álgebra*** *J.*

Para álgebras não-associativas (em particular, para álgebras de Jordan), é necessário que indiquemos a ordem na qual os produtos são tomados, ou seja, a distribuição dos parênteses.

Na álgebra J, definimos (de forma indutiva) uma série de subconjuntos. São eles:
$J^1 = J^{<1>} = J$
$J^n = J^{n-1}J + J^{n-2}J^2 + ... + JJ^{n-1}$
$J^{<n>} = J^{<n-1>}J$

O subconjunto J^n é chamado de **n-ésima potência da álgebra** J.

Segue, da definição de potência, que $J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq ...$, onde todos os elementos desta cadeia são ideais da álgebra J.

Como J é comutativa, a cadeia de subconjuntos $J^{<1>} \supseteq J^{<2>} \supseteq J^{<3>} \supseteq ... \supseteq J^{<n>} \supseteq ...$ também consiste de ideais da álgebra J e é chamada **série central inferior** de J.

Caso exista um número natural s tal que $J^{<s>} = 0$, como $J^{2^s} \subseteq J^{<s>}$ para qualquer $s \geq 1$ ([52], página 82, Proposição 1), então a álgebra J é nilpotente. O mínimo s para o qual isso acontece é chamado **nil-índice de** J.

Seja s o nil-índice da álgebra de Jordan nilpotente J. Definimos o **tipo de nilpotência** de J como sendo a sequência $(n_1, n_2, n_3, ..., n_{s-1})$, onde $n_i = dim\left(J^{<i>}/J^{<i+1>}\right)$.

Proposição 2.4.15. *Para todo índice i, vale que $n_i = dim\left(J^{<i>}/J^{<i+1>}\right) > 0$.*

Demonstração:

Suponha que existe um número natural i, $1 \leq i \leq s-1$, tal que $n_i = 0$.

Dessa forma, $dimJ^{<i>} = dimJ^{<i+1>}$ e, como $J^{<i+1>} \subseteq J^{<i>}$, então $J^{<i+1>} = J^{<i>}$.

Nesse sentido, $J^{<i+2>} = J^{<i+1>}J = J^{<i>}J = J^{<i>}$.

Por indução, $J^{<i>} = J^{<k>}$, para todo $k \in \mathbb{N}, k > i$.

Em particular, para $k = s$, temos que $J^{<i>} = J^{<s>} = 0$. Porém, isso é impossível, já que s é o nil-índice de J.

Dessa forma, por absurdo, a proposição está provada.

■

Definição 2.4.16. *Seja J uma $\mathbb{K}$-álgebra de Jordan de dimensão finita. J é chamada de*

1. ***semisimples****, se J é uma soma direta finita de álgebras simples.*

2. ***simples central****, se J_K é simples para toda extensão K de $\mathbb{K}$.*

3. ***separável****, se J_K é semisimples para toda extensão K de $\mathbb{K}$.*

Pela definição acima, podemos perceber que toda álgebra J simples central é simples e toda álgebra J separável é semisimples.

2.5 Resultados Importantes

Nessa seção, estudaremos alguns resultados importantes para a teoria da estrutura das álgebras de Jordan. Esses resultados serão ferramentas necessárias na classificação álgebrica.

O teorema a seguir (conhecido por "Enlightment Structure Theorem") está presente em [34]. Este teorema reúne as propriedades principais de uma álgebra de Jordan cuja dimensão sobre um corpo arbitrário (de característica diferente de 2) é finita.

Teorema 2.5.1. *([34], Teorema 3.10, Página 79) Seja J uma álgebra de Jordan de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$, de característica diferente de 2. Então,*

1. existe um único ideal nilpotente maximal de J, que chamaremos de radical (ou radical nilpotente) de J, que denotaremos por $Rad(J)$.

2. o quociente $J/Rad(J)$ é uma álgebra de Jordan semisimples. Chamaremos tal álgebra de ***parte semi-simples*** *de J e a denotaremos por J_{ss}.*

3. se J é semisimples, então ela possui um elemento identidade e sua decomposição em álgebras simples é única.

A seguir enunciaremos um teorema conhecido como "*Teorema Principal de Wedderburn*", o qual tem sido provado para várias classes de álgebras. Uma demonstração da seguinte versão para álgebras de Jordan de dimensão finita pode ser encontrada em [43].

Teorema 2.5.2. *Se J é uma álgebra de Jordan de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ tal que J_{ss} é separável, então J contém uma subálgebra C tal que $J = C + Rad(J)$, com $C \cap Rad(J) = 0$ e $C \cong J_{ss}$.*

Em [37], foi provado que quando um corpo tem característica zero, o Teorema de Wedderburn vale para toda álgebra de Jordan de dimensão finita, isto é, não é necessária a condição de J_{ss} ser separável:

Teorema 2.5.3. *Seja J uma álgebra de Jordan de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$, com car$\mathbb{K} = 0$. Existe uma subálgebra C de J tal que $J = C + Rad(J)$, com $C \cap Rad(J) = 0$ e $C \cong J_{ss}$.*

Observa-se que se o corpo for algebricamente fechado, então toda álgebra de Jordan de dimensão finita semisimples é separável ([24], pg. 246). Dessa forma, segue, do Teorema 2.5.1, que J_{ss} é separável e, portanto, pelo Teorema 2.5.2, J admite decomposição $J = J_{ss} \oplus Rad(J)$ como soma direta de subespaços.

O Teorema de Albert ([24], Corolário 2, pg. 204) fornece a classificação completa das álgebras de Jordan simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado:

Teorema 2.5.4. *Seja J uma álgebra de Jordan simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$. Então temos as seguintes possibilidades para J:*
(a) $J = \mathbb{K}$
(b) $J(V, f)$, a álgebra de Jordan de uma forma bilinear simétrica não-degenedara f sobre um espaço vetorial V de dimensão finita tal que dim $V > 1$
(c) $J = (H(D_n, j), \cdot)$, onde (D, i) é uma álgebra de composição de dimensão 1, 2 ou 4 se $n \geq 4$ e de dimensão 1, 2, 4 ou 8 se $n = 3$ e j é a involução padrão de D_n associada a i.

Reciprocamente, as álgebras listadas acima são álgebras de Jordan simples.

Seja J uma $\mathbb{K}$-álgebra de Jordan, podemos associar a ela duas álgebras associativas de transformações lineares. Para isso, considere um elemento $a \in J$ e o operador $L_a : J \to J$, $x \mapsto ax$, definido na Seção 2.3.

Esta aplicação é um endomorfismo do espaço vetorial J e é chamada de *operador de multiplicação à esquerda pelo elemento a*. A subálgebra de endomorfismos do espaço vetorial J gerada por todos os possíveis operadores L_a, onde $a \in J$, é chamada de *álgebra de multiplicação da álgebra J* e será denotada por $\mathfrak{M}(J)$.

Os elementos $S \in \mathfrak{M}(J)$ são da forma $S = \sum L_{a_1} L_{a_2} \cdots L_{a_n}$, com $a_i \in J$.

A segunda álgebra que associaremos a J é o **centróide** $\mathfrak{C}(J)$ de J, o qual é o centralizador de $\mathfrak{M}(J)$ em $Hom_{\mathbb{K}}(J, J)$, ou seja, $\mathfrak{C}(J)$ é o conjunto de aplicações lineares T em J tais que $TS = ST$ para cada $S \in \mathfrak{M}(J)$.

No caso em que J tenha dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, o centróide $\mathfrak{C}(J)$ coincide com o centro de $\mathfrak{M}(J)$, ou seja,

$$\mathfrak{C}(J) = \{S \in \mathfrak{M}(J); \quad TS = ST \text{ para todo } T \in \mathfrak{M}(J)\}.$$

O resultado acima por ser encontrado em [39], Cap II, p.13.

Teorema 2.5.5. *([39], Cap. II, pg. 13) Se J é uma $\mathbb{K}$-álgebra de Jordan simples (de dimensão arbritária), então o centróide $\mathfrak{C}(J)$ de J é um corpo (que contém $\mathbb{K}$). Quando consideramos J como uma álgebra sobre seu centróide, J é simples central.*

Como consequência do Teorema 2.5.5, podemos reduzir o problema de classificação de álgebras de Jordan simples de dimensão finita sobre um corpo arbitrário $\mathbb{K}$ ao problema de classificar álgebras de Jordan simples centrais (de dimensão finita sobre uma extensão do corpo arbitrário $\mathbb{K}$).

Para isso, seja J uma tal álgebra de seja $\overline{\mathbb{K}}$ o fecho algébrico do corpo $\mathbb{K}$. Temos que $J_{\overline{\mathbb{K}}}$ é uma álgebra de Jordan simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e, portanto, $J_{\overline{\mathbb{K}}}$ é uma das álgebras listadas no Teorema 2.5.4.

Usando essa informação para determinar J, obtemos:

Teorema 2.5.6. *([24], V.7 e [39], Cap. IV, p. 36) Seja J uma álgebra de Jordan simples central de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ arbitrário. Temos as seguintes possibilidades para J:*
1. $J = \mathbb{K}$.
2. $J = J(V, f)$, a álgebra de Jordan de uma forma bilinear simétrica não-degenerada f num espaço vetorial V de dimensão finita, com dim$V > 1$.
3. $J = (H(A, *), \cdot)$, onde $(A, *)$ é uma álgebra associativa simples central de dimensão finita, com involução $*$, de grau $n \geq 3$.
4. J é uma álgebra tal que existe uma extensão finita $\mathfrak{K}$ do corpo base $\mathbb{K}$ tal que $J_{\mathfrak{K}} \cong (H((\mathfrak{C}_{\mathfrak{K}})_3, j), \cdot)$, onde $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{K}})_3$ é a álgebra das matrizes 3×3 com elementos numa álgebra de Cayley $\mathfrak{C}$ sobre $\mathfrak{K}$ e j é a involução padrão de $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{K}})_3$ associada com a involução de $\mathfrak{C}$.

No item 3 do teorema acima, a palavra "grau" de $(A, *)$ sobre $\mathbb{K}$ se refere ao menor inteiro n tal que $(A_{\overline{\mathbb{K}}}, *) \cong (D_n, j)$, onde (D, i) é uma álgebra de composição associativa. Para mais informações veja [24], pg. 209.

As únicas álgebras excepcionais na lista são álgebras de Albert de dimensão 27 (de tipo 4), como prova Schafer em [39] (Cap. IV, Teorema 9, pg. 38), que foram determinadas em [40].

2.6 Derivações de Álgebras de Jordan

Os Operadores L_x e R_x

Na Seção 2.3, definimos o operador L_x e comentamos que o estudaríamos mais detalhadamente.

De forma análoga, definiremos por R_x o operador **multiplicação de x pela direita**, dado por

$$R_x(y) = y \cdot x, \text{ onde } x, y \in J,$$

que também é um endomorfismo de J.

Proposição 2.6.1. *Seja J uma álgebra de Jordan. Para todo elemento $x \in J$, os operadores L_x e R_x são iguais.*

Demonstração:

Seja $y \in J$ um elemento qualquer. Temos, pela comutatividade da álgebra, que

$$L_x(y) = x \cdot y = y \cdot x = R_x(y)$$

■

Pelo descrito anteriormente, também temos que $[R_x, R_{x^2}] = 0$.

Podemos entender o comutador de operadores também como um operador. Por exemplo,

$$[R_a, R_b](c) = (R_aR_b - R_bR_a)(c) = R_aR_b(c) - R_bR_a(c).$$

Proposição 2.6.2. $R_{(a,b,c)} = R_{c^{[R_a,R_b]}}$, *onde* $R_{c^{[R_a,R_b]}} = R_{[R_a,R_b](c)}$.

Linearizando[2] a Identidade de Jordan $(a^2b)a - a^2(ba) = 0$, obtemos

$$(ac, b, d) + (ad, b, c) + (cd, b, a) = 0, \text{ para todos } a, b, c, d \in J$$

Ou, equivalentemente,

$$[(ac)b]d - (ac)(bd) + [(ad)b]c - (ad)(bc) + a[(cd)b] - (ab)(cd) = 0$$

$$[(ac)b]d + [(ad)b]c + a[(cd)b] = (ac)(bd) + (ad)(bc) + (ab)(cd).$$

Note que no lado direito da igualdade acima, todas as variáveis aparecem simetricamente.

Levando essa propriedade em conta, obtemos as identidades.

$$[(ac)b]d + [(ad)b]c + a[(cd)b] = [a(cb)]d + [a(cd)]b + [a(bd)]c$$

$$[a(cb)]d + [a(cd)]b + [a(bd)]c = (ac)(bd) + (ad)(bc) + (ab)(cd).$$

As identidades acima são equivalentes às relações de operadores

$$R_cR_bR_d + R_dR_bR_c + R_{cd}R_b = R_cR_{bd} + R_bR_{cd} + R_dR_{cb}$$

$$R_cR_bR_d + R_dR_bR_c + R_{cd}R_b = R_{cb}R_d + R_{cd}R_b + R_{bd}R_c$$

$$[R_{ac}, R_d] + [R_{ad}, R_c] + [R_{cd}, R_a] = 0.$$

Ou seja,

$$R_{ac}R_d + R_{ad}R_c + R_{cd}R_a = R_dR_{ac} + R_cR_{ad} + R_aR_{cd}.$$

A igualdade acima é a mesma coisa que

$$[(ac)b]d - (ac)(bd) + [(ad)b]c - (ad)(bc) + a[(cd)b] - (ab)(cd) = 0$$

$$d[b(ac)] - (db)(ac) + [(da)b]c - (da)(bc) + [(dc)b]a - (dc)(ba) = 0$$

$$R_{b(ac)}(d) - R_{ac}R_b(d) + R_cR_bR_a(d) - R_{bc}R_a(d) + R_aR_bR_c(d) - R_{ba}R_c(d) = 0$$

$$R_{b(ac)}(d) - R_{ac}R_b(d) + R_cR_bR_a(d) - R_{bc}R_a(d) + R_aR_bR_c(d) - R_{ba}R_c(d) = 0$$

$$R_{b(ac)} - R_{ac}R_b + R_cR_bR_a - R_{bc}R_a + R_aR_bR_c - R_{ba}R_c = 0$$

$$R_aR_bR_c + R_cR_bR_a + R_{(ac)b} = R_bR_{ac} + R_aR_{bc} + R_cR_{ba} = R_bR_aR_c + R_cR_aR_b + R_{bc}R_a.$$

Assim,

$$R_aR_bR_c + R_cR_bR_a + R_{(ac)b} = R_bR_aR_c + R_cR_aR_b + R_{(bc)a}$$

[2] O processo de linearização citado acima está presente, e explicado de forma mais técnica, na demonstração da Proposição 1.3.5 em [42].

$$R_aR_bR_c - R_bR_aR_c + R_cR_bR_a - R_cR_aR_b + R_{(ac)b} - R_{a(cb)} = 0$$

$$(R_aR_b - R_bR_a)\cdot R_c + R_c\cdot(R_bR_a - R_aR_b) + R_{(ac)b-a(cb)} = 0$$

$$[R_a, R_b]\cdot R_c + R_c\cdot[R_b, R_a] + R_{(a,c,b)} = 0.$$

Levando em conta que $[a,b] = -[b,a]$, temos que

$$[R_a, R_b]\cdot R_c - R_c\cdot[R_a, R_b] + R_{(a,c,b)} = 0$$

$$[[R_a, R_b], R_c] + R_{(a,c,b)} = 0.$$

Usando a Proposição 1.8, temos que

$$[[R_a, R_b], R_c] + R_{(a,c,b)} = [[R_a, R_b], R_c] + R_{c^{[R_a,R_b]}} = 0.$$

Novamente, usando o fato de que $[a,b] = -[b,a]$, temos que

$$R_{c^{[R_a,R_b]}} = [R_c, [R_a, R_b]]\,. \qquad (*)$$

Lema 2.6.3. *Sejam A uma álgebra e $\mathcal{D} \in End(A)$. Temos que $\mathcal{D}$ é uma derivação da álgebra A se, e somente se, para todo $a \in A$ vale $R_{a^{\mathcal{D}}} = [R_a, \mathcal{D}]$. Isto é,*

$$(ab)^{\mathcal{D}} = a^{\mathcal{D}}b + ab^{\mathcal{D}} \Leftrightarrow R_b\mathcal{D} = \mathcal{D}R_b + R_{b^{\mathcal{D}}}.$$

Em outras palavras,

$$(ab)^{\mathcal{D}} = a^{\mathcal{D}}b + ab^{\mathcal{D}} \Leftrightarrow [R_b, \mathcal{D}] = R_{b^{\mathcal{D}}}.$$

Pela conclusão $(*)$, temos o seguinte corolário para o lema acima:

Corolário 2.6.4. *Seja J uma álgebra de Jordan. Para todos $a, b \in J$, a aplicação $\mathcal{D}_{a,b} = [R_a, R_b]$ é uma derivação de J.*

Capítulo 3

ÁLGEBRAS DE JORDAN FORMALMENTE REAIS E CONES SIMÉTRICOS

Neste capítulo iniciaremos o estudo sobre cones simétricos e os resultados que mostram sua relação com as álgebras de Jordan formalmente reais. Estudaremos várias propriedades sobre esse tipo de cone e, também, citaremos algumas de suas aparições em outras áreas da Matemática. Introduziremos, também, o conceito de um domínio simétrico.

Definição 3.0.5. *Uma álgebra de Jordan J é chamada **unital** se contém uma unidade, isto é, um elemento $e \in J$ tal que $ex = xe = e$ para todo $x \in J$.*

Existem dois operadores lineares fundamentais em uma álgebra de Jordan J. São eles:

1. o operador multiplicação à esquerda $L_a : x \in J \mapsto ax \in J$,
2. a aplicação quadrática $Q_a : A \to A$

$$x \mapsto \{a, x, a\},$$

onde $\{\cdot, \cdot, \cdot\}$ é definido por $\{a, b, c\} = (ab)c + a(bc) - b(ac)$ e é chamado **produto triplo de Jordan**.

Para esses operadores, temos as identidades:

1. $Q_a = 2L_a^2 - L_{a^2}$.
2. $Q_a^2 = Q_{a^2}$.

O operador $\boxdot$, definido por $a \boxdot b = L_{ab} + [L_a, L_b] : A \to A$ (onde $[\cdot, \cdot]$ denota o comutador dos operadores L_a e L_b), é chamado **operador caixa**.

Um elemento $a \in J$ de uma álgebra de Jordan J com identidade e é chamado **invertível** se existe um elemento $a^{-1} \in J$ (que é, necessariamente, único para cada a) tal que $aa^{-1} = e$ e $(a^2)a^{-1} = a$. Isto é equivalente à invertibilidade do operador quadrático Q_a. Ou seja, $a^{-1} = Q_a^{-1}(a)$.

Se o operador multiplicação à esquerda L_a é invertível, então a é invertível e seu inverso é dado por

$$a^{-1} = L_a^{-1}(e).$$

Uma álgebra de Jordan formalmente real J e de dimensão finita é, necessariamente, unital ([12], Proposição 1.1.13). Nesse caso, J contém uma abundância de elementos idempotentes (elementos $j \in J$ que satisfazem $j^2 = j$). Além disso, J é um espaço de Hilbert real com a norma traço $||a||^2$ =traço($a \boxdot a$) para $a \in J$.

Definição 3.0.6. *Chamamos uma álgebra de Jordan J formalmente real de JH-álgebra se ela é, também, um espaço de Hilbert, no qual o produto interno (sempre denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$) é associativo, ou seja, $\langle ab, c \rangle = \langle b, ac \rangle$ para todos $a, b, c \in J$.*

Uma JH-álgebra de dimensão finita é chamada **Euclidiana** em [20]. Na verdade, *as álgebras de Jordan formalmente reais de dimensão finita são exatamente as álgebras de Jordan Euclidianas com identidade.* Este resultado está presente nos textos [11] e [12] de Cho-Ho Chu.

Assim, um *Espaço vetorial Euclidiano* nada mais é do que um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno.

JH-álgebras são exemplos de H^*-álgebras não associativas, que estiveram sendo estudadas por muitos autores e as referências estão detalhadas em [21], página 222.

Daqui adiante, a menos que seja estabelecido o contrário, todos os espaços vetoriais estão definidos sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais.

3.1 Cones Simétricos

Seja V um espaço vetorial. Um cone C em V é um subconjunto não-vazio de V que satisfaz:
i) $C + C \subset C$.
ii) $\alpha C \subset C$, para todo $\alpha > 0$.

Note que um cone é, necessariamente, convexo.

Um cone C é chamado de **cone próprio** se $C \cap -C = \{0\}$.

Definição 3.1.1. *(Ordem Parcial): Seja $C \neq \emptyset$ um conjunto. Uma ordem parcial em C é uma relação $\leq$ em C, com as seguintes propriedades:*
i) (Reflexividade) $x \leq x \; \forall x \in C$
ii) (Antisimetria) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.
iii) (Transitividade) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.
*Além disso, uma **ordem linear** é uma ordem parcial $\leq$ em C que também satisfaz: se $x, y \in C$, então $x \leq y$ ou $y \leq x$.*

A ordem parcial em V, induzida por um cone próprio C, será denotado por $\leq_C$ (ou apenas por $\leq$ caso C esteja subentendido), de modo que $x \leq y$ sempre que $y - x \in C$.

Em contrapartida, se V for munido de uma ordem parcial $\leq$, denotamos por $V_+ = \{v \in V; 0 \leq v\}$ o cone próprio.

Dados um espaço vetoral topológico real V e um subconjunto $E \subset V$, denotamos seu fecho e seu interior, respectivamente, por $\overline{E}$ e $int(E)$.

Se C é um cone em V, então seu fecho $\overline{C}$ também é um cone em V.

Se C é um cone aberto, então temos $int(\overline{C}) = C$. Demonstraremos esse resultado no lema abaixo.

Lema 3.1.2. *Seja C um conjunto convexo aberto de um espaço vetorial topológico real V. Vale que*

$$int(\overline{C}) = C.$$

Demonstração:

Não há nada a provar caso C seja vazio.

Suponhamos que C não seja vazio. Assim, podemos escolher arbitrariamente um elemento $q \in C$. Seja $p \in int\overline{C}$.

Dessa forma, p é um ponto interno de $\overline{C}$, ou seja, toda reta passando por p intersecta $\overline{C}$ em um conjunto contendo um intervalo ao redor de p ([18], pg 410, 413).

Em particular, para a reta ligando p e q, existe $\gamma \in (0, 1)$ tal que $p \pm \gamma(q - p) \in \overline{C}$.

Uma vez que C é aberto e q é ponto interno de C, temos

$$\lambda(p - \gamma(q - p)) + (1 - \lambda)q \in C \text{ para } 0 < \lambda < 1 \quad ([18],\ \text{pg. } 413).$$

Fazendo $\lambda = \dfrac{1}{1+\gamma}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\gamma}(p - \gamma(q-p)) + (1 - \frac{1}{1+\gamma})q &= \frac{p}{1+\gamma} - \frac{\gamma(q-p)}{1+\gamma} + \frac{\gamma}{1+\gamma}q \\ &= \frac{p - \gamma q + \gamma p + \gamma q}{1+\gamma} = \frac{p + \gamma p}{1+\gamma} = \frac{p(1+\gamma)}{1+\gamma} \\ &= p \in C. \end{aligned}$$

■

Dado um cone aberto C tal que $\overline{C} \cap -\overline{C} = \{0\}$, devemos ter $0 \notin C$, uma vez que $x \in C \Rightarrow x \in int\overline{C}$, ou seja, todo ponto de C é um ponto interno de $\overline{C}$.

Seja V um espaço vetorial real equipado com um cone próprio V_+ com a ordem parcial induzida $\leq$. Um elemento $e \in V$ é dito uma **unidade de ordem** se

$$V = \bigcup_{\lambda>0} \{x \in V; -\lambda e \leq x \leq \lambda e\}.$$

Chamamos V de **espaço de unidade de ordem** se ele possui uma unidade de ordem.

O corpo $\mathbb{R}$ dos números reais, com a ordem parcial usual, é um espaço de unidade de ordem e o número 1 é sua unidade de ordem.

Note que um espaço de unidade de ordem V, com unidade de ordem e, é determinado pelo seu cone V_+ de forma que $V = V_+ - V_+$.

De fato, cada $x \in V$, com $-\lambda e \leq x \leq \lambda e$, pode ser escrito como $x = x_1 - x_2$, onde $x_1 = \dfrac{\lambda e + x}{2} \in V_+$ e $x_2 = \dfrac{\lambda e - x}{2} \in V_+$

Uma unidade de ordem $e \in V$ é chamada *arquimediana* se para cada $v \in V$, temos $v \leq 0$ sempre que $\lambda v \leq e$ para todo $\lambda \geq 0$.

Chamamos V de *espaço arquimediano de unidade de ordem* se ele contém uma unidade de ordem arquimediana.

Uma unidade de ordem arquimediana $e \in V$ induz uma norma $||\cdot||_e$ em V, chamada de norma de unidade de ordem, definida por

$$||x||_e = inf\{\lambda > 0; -\lambda e \leq x \leq \lambda e\} \quad (x \in V)$$

que satisfaz $-||x||_e e \leq x \leq ||x||_e e$.

Denotamos por (V, e) o espaço de unidade de ordem V equipado com a unidade arquimediana de ordem e e a norma de unidade de ordem $||\cdot||_e$, onde o subscrito e será omitido caso esteja subentendido.

Dizemos que (V, e) é um espaço arquimediano de unidade de norma completo se a norma $||\cdot||_e$ for completa.

O cone V_+ em (V, e) é fechado na norma de unidade de ordem e a unidade arquimediana de ordem e pertence ao interior $intV_+$ de V_+ ([3], Teorema 2.2.5).

De fato, cada ponto interior $u \in int(V_+)$ é uma unidade de ordem (Lema 3.1.10 mais à frente) e a norma de unidade de ordem correspondente $||\cdot||_u$ é equivalente a $||\cdot||_e$.

Uma transformação linear $T : V \to W$ entre dois espaços de unidade de ordem (V, e) e (W, u) é dita **positiva** se $T(V_+) \subset W_+$. Adicionalmente, dizemos que T é um **funcional linear positivo** se $(W, u) = (\mathbb{R}, 1)$.

O dual V^* de (V, e) é ordenado parcialmente pelo cone dual V_+^*, que consiste de funcionais lineares positivos contínuos de V e é, precisamente, o conjunto

$$-V_+^0 := -\{f \in V^*; |f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in V_+\} = \{f \in V^*; f(x) \geq 0 \quad \forall x \in V_+\} \quad ([3],\ \text{pg. } 30).$$

Lema 3.1.3. *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear positiva entre os espaços arquimedianos de unidade de ordem (V, e) e (W, u). Vale que T é contínua e $||T|| = ||T(e)||_u$.*

Demonstração:

Precisamos mostrar que $sup\{||T_x||_u; -e \leq x \leq e\} < \infty$, onde $\{x \in V; -e \leq x \leq e\}$ é a bola unital fechada de (V, e).

De fato, dado x tal que $-e \leq x \leq e$, temos, pela positividade, que

$$-||T(e)||_u u \leq -T(e) \leq T(x) \leq T(e) \leq ||T(e)||_u u.$$

Isso implica que $||T(x)||_u \leq ||T(e)||_u$

Segue que T é contínuo, com $||T|| \leq ||T(e)||_u$.

Uma vez que $||T|| = sup\{||T(x)||_u; -e \leq x \leq e\} \geq ||T(e)||_u$, temos que

$$||T|| = ||T(e)||_u.$$

■

Uma transformação entre espaços métricos que preserva distâncias é chamada *isometria*.

Definição 3.1.4. ***(Isometria)*** . *Sejam X e Y espaços métricos, com métricas d_x e d_y, respectivamente. A aplicação $f : X \to Y$ é dita uma isometria se, para quaisquer $a, b \in X$, vale $d_y(f(a), f(b)) = d_x(a, b)$.*

Uma isometria é, automaticamente, injetiva.

Proposição 3.1.5. *Seja $T : (V, e) \to (V, e)$ um isomorfismo linear tal que $T(V_+) = V_+$. Então, T é uma isometria se, e somente se, $T(e) = e$.*

Demonstração:

Seja T uma isometria. Pelo Lema 3.1.3,

$$||T(e)|| = ||T|| = 1 = ||T^{-1}|| = ||T^{-1}(e)||,$$

o que implica

$$-e \leq T(e) \leq e$$

e

$$-e \leq T^{-1}(e) \leq e$$

Assim, por positividade, $T(e) = e$.

Reciprocamente, o Lema 3.1.3 implica que $||T|| = ||T(e)|| = ||e|| = 1 = ||T^{-1}(e)|| = ||T^{-1}||$. Dessa forma, T é uma isometria.

$\blacksquare$

Agora iremos introduzir o conceito de cone simétrico de dimensão infinita ([12], p. 105), que é uma generalização natural do de dimensão finita.

Definição 3.1.6. *Seja V um espaço de Hilbert real com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Um cone aberto Ω em V é chamado* ***simétrico*** *se satisfaz as seguintes condições:*
i) (autodualidade) $\Omega = \{v \in V; \langle v, x \rangle > 0 \ \forall \ x \in \overline{\Omega} - \{0\}\}$.
ii) (homogeneidade) Dados $x, y \in \Omega$, existe um isomorfismo linear contínuo $g : V \to V$ tal que $g(x) = y$.

Uma vez que um cone Ω em um espaço de Hilbert V é convexo, seu fecho fraco e fecho normado em V coincidem e são denotados por $\overline{\Omega}$.

Se Ω é aberto, então $\Omega = int(\overline{\Omega})$ (Lema 3.1.2).

Pela autodualidade, o fecho $\overline{\Omega}$ de um cone simétrico Ω é próprio e, tendo o lema 2.1 em vista, também é "autodual" (no sentido que Connes trabalha em [13]), sendo

$$\overline{\Omega} = \{v \in V; \quad \{v, x\} \geq 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}\}.$$

De fato, dado $v \in V$, com $\{v, x\} \geq 0 \ \forall x \in \overline{\Omega}$, temos, escolhendo algum $e \in \Omega$,

$$\{v + \frac{1}{n}e, x\} = \{v, x\} + \frac{1}{n}\{e, x\} \text{ para } x \in \overline{\Omega} - \{0\} \ (n = 1, 2, 3, ...)$$

Consequentemente, $v + \frac{1}{n}e \in \Omega$ para $n = 1, 2, ...$ e para $v \in \overline{\Omega}$.

Para espaços euclidianos de dimensão finita, a definição precedente é a mesma do que a usual para um cone simétrico. Podemos ler isso com detalhe em [20].

Em dimensões finitas, Koecher e Vinberg chegaram ao aclamado resultado que o interior do cone

$$\{x^2; x \in J\}$$

dentro de uma álgebra de Jordan formalmente real J é um cone simétrico. Reciprocamente, todo cone simétrico é desta forma.

Estenderemos este resultado para dimensão infinita na próxima seção. Primeiramente, discutiremos como um cone simétrico se relaciona com a estrutura subjacente de um espaço de Hilbert.

Lema 3.1.7. *Seja V um espaço vetorial real, equipado com a norma $|| \cdot ||$ e parcialmente ordenado pelo fecho $\overline{\Omega}$ de um cone aberto Ω. Cada ponto $e \in \Omega$ é uma unidade de ordem. Além disso, se e é arquimediano, então a norma de unidade de ordem $|| \cdot ||_e$ satisfaz $|| \cdot ||_e \leq c|| \cdot ||$ para algum $c > 0$.*

Demonstração:

Seja $e \in \Omega$. Como Ω é aberto, existe $r > 0$ tal que a bola aberta $e - B(0, r)$ está contida em Ω, onde $B(0, r) = \{x \in V; ||x|| < r\}$.

Seja $v \in V - \{0\}$. Temos que

$$\pm \left(\frac{r}{2||v||} \right) v \in B(0, r)$$

$$e \mp \left(\frac{r}{2||v||} \right) v \in e - B(0, r) \subset \Omega$$

Isto é,

$$-\frac{2||v||}{r} e \leq v \leq \frac{2||v||}{r} e.$$

Sendo assim, temos que e é uma unidade de ordem.

Além disso, se e é arquimediana, isso implica, ainda, que a norma de unidade de ordem $|| \cdot ||_e$ satisfaz $||v||_e \leq \frac{2}{r} v$ para todo $v \in V$.

■

De agora em diante, a norma do produto interno de um espaço de Hilbert V sempre será denotada por $|| \cdot || = \langle \cdot, \cdot \rangle^{\frac{1}{2}}$.

O seguinte resultado revela que um espaço de Hilbert equipado com um cone simétrico é um espaço de ordem de unidade arquimediano completo.

Lema 3.1.8. *Seja V um espaço de Hilbert real parcialmente ordenado pelo fecho $\overline{\Omega}$ de um cone simétrico Ω e seja $e \in \Omega$. Vale que e é uma unidade arquimediana de ordem e a norma de unidade de ordem $|| \cdot ||_e$ é equivalente à norma do produto interno $|| \cdot ||$ de V.*

Demonstração:

Pelo Lema 3.1.7, e é uma unidade de ordem.

Para mostrar que e é arquimediana, seja $\lambda v \leq e$ para todo $\lambda \geq 0$. Pela autodualidade de Ω, temos

$$\langle e - \lambda v, x \rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Daí,

$$\langle e, x \rangle \geq \langle \lambda v, x \rangle,$$

$$\langle e, x \rangle \geq \lambda \langle v, x \rangle \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}$$

Se $x \in \overline{\Omega} - \{0\}$, então $\langle e, x \rangle > 0$.

Assim,

$$\langle v, x \rangle \leq 0 \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Consequentemente, $-v \in \overline{\Omega}$.

Para a segunda afirmação, vamos considerar que o Lema 3.1.7 já implica que $|| \cdot ||_e \leq c|| \cdot ||$ para algum $c > 0$.

Para completarmos a prova, basta mostrarmos que $||v||^2 \leq \langle e, e\rangle ||v||_e^2$.

De fato, temos $||v||_e e \pm v \in \overline{\Omega}$ e, por autodualidade, $\langle ||v||_e e + v, ||v||_e e - v\rangle \geq 0$.

Expandindo o produto interno,
$\langle ||v||_e e + v, ||v||_e e - v\rangle = \langle ||v||_e e, ||v||_e e\rangle + \langle v, ||v||_e e\rangle - \langle v, v\rangle - \langle v, ||v||_e e\rangle = \langle ||v||_e e, ||v||_e e\rangle - \langle v, v\rangle$

Assim,

$$\langle ||v||_e e, ||v||_e e\rangle - \langle v, v\rangle \geq 0,$$

$$\langle ||v||_e e, ||v||_e e\rangle \geq \langle v, v\rangle,$$

$$||v||_e^2 \langle e, e\rangle \geq ||v||^2.$$

■

Seja V um espaço real de Hilbert parcialmente ordenado pelo fecho $\overline{\Omega}$ de um cone simétrico Ω e seja $e \in \Omega$. O lema anterior implica que uma transformação linear $T : V \to V$ é contínua em relação à norma do espaço de Hilbert V se, e somente se, T é contínua em relação à norma de unidade de ordem $||\cdot||_e$.

Posteriormente, denotaremos por $||T||$ e $||T||_e$ a norma de um operador $T : V \to V$ em relação à norma do espaço de Hilbert e em relação à norma de unidade de ordem de V, respectivamente.

Para definições e propriedades de Grupos de Lie Banach e Álgebras de Lie, que são variedades analíticas, recomendo a leitura dos textos [8] e [45].

Seja $L(V)$ a álgebra de Banach dos operadores lineares limitados de V, equipada com a norma de operador de espaço de Hilbert $||\cdot||$ e a involução usual $*$. Então, $L(V)$ é uma álgebra de Lie Banach real com o produto comutador $[S, T] = ST - TS$, para $S, T \in L(V)$.

Denotamos por $GL(V)$ o subgrupo aberto de elementos invertíveis em $L(V)$, que é um grupo real de Lie Banach com álgebra de Lie $L(V)$.

Dados $S, T \in GL(V)$, temos $||S^{-1} - T^{-1}|| \leq ||S^{-1}|| ||S - T|| ||T^{-1}||$.

Consequentemente, o grupo ortogonal $O(V) = \{T \in GL(V); ||T|| = ||T^{-1}|| = 1\}$ de V, consistido de isometrias lineares de V equipado com a topologia norma, é um subgrupo fechado de $GL(V)$ e um grupo real de Lie Banach.

Diferente do caso de dimensão finita, um subgrupo fechado H de um grupo de Lie Banach real G de dimensão infinita não precisa ser um grupo de Lie na topologia relativa ([23], 666-674).

Mesmo assim, H ainda pode ser topologizado com uma topologia τ mais fina para formar um grupo de Lie Banach. Para entender melhor, recomendo a leitura de [45].

De fato, se $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G, então a álgebra de Lie de H é dada por
$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g};\ \exp tX \in H, \forall\ t \in \mathbb{R}\}$ e a aplicação inclusão $(H, \tau) \hookrightarrow G$ é analítica.

De agora em diante, seja Ω um cone simétrico em um espaço de Hilbert real V. O cone aberto Ω é uma variedade de Hilbert real modelada em V, onde o espaço tangente $T_w\Omega$ em $w \in \Omega$ está identificado com V.

As aplicações positivas em $GL(V)$ com inversa positiva, em relação ao cone Ω, formam um subgrupo de $GL(V)$, que denotaremos por $G(\Omega) = \{g \in GL(V); g(\Omega) = \Omega\}$.

Um elemento $g \in GL(V)$ pertence a $G(\Omega)$ se, e somente se, $g(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$. Consequentemente, $g(\Omega)$ é um subgrupo fechado de $GL(V)$ e pode ser topologizado em uma topologia mais fina para um grupo de Lie Banach real com álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \{X \in L(v); \exp tX \in G(\Omega)\ \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Para cada $w \in \Omega$, a aplicação $g \in GL(V) \mapsto g(w) \in V$ é analítica e sua derivada na identidade de $GL(V)$ é a aplicação linear $X \in L(V) \mapsto X(w) \in V$. Uma vez que a aplicação inclusão $G(\Omega) \hookrightarrow GL(V)$ é analítica, a aplicação orbital $g \in G(\Omega) \mapsto g(w) \in \Omega$ é analítica.

Definição 3.1.9. *Um subgrupo de Lie de $G(\Omega)$ é um subgrupo e subvariedade de $G(\Omega)$.*

Por exemplo, o componente conectado G_0 da identidade de $G(\Omega)$ é um subgrupo de Lie de $G(\Omega)$. Este resultado foi apresentado em [8].

O subgrupo $K = G(\Omega) \bigcap O(V)$ de $G(\Omega)$ é fechado na norma e qualquer topologia mais fina de $G(\Omega)$, e também um grupo de Lie Banach real.

Dado $g \in G(\Omega)$, note que seu adjunto g^* em $L(V)$ também pertence a $G(\Omega)$. De fato, para $v \in \Omega$ e $x \in \overline{\Omega} - 0$, temos

$$\langle g^*(v), x\rangle = \langle v, g(x)\rangle > 0$$

e, consequentemente,

$$g^*(v) \in \Omega.$$

Lema 3.1.10. *Seja V um espaço de Hilbert real parcialmente ordenado pelo fecho $\overline{\Omega}$ de um cone simétrico Ω. Seja $e \in \Omega$ tal que $\alpha||\cdot|| \leq ||\cdot||_e \leq \beta||\cdot||$ para alguns $\beta > \alpha > 0$. Vale que*

$$\frac{\alpha}{\beta}e \leq g(e) \leq \frac{\beta}{\alpha}e$$

para todos $g \in K = G(\Omega) \bigcap O(V)$.

Demonstração:

Seja $g \in G(\Omega) \bigcap O(V)$.

Temos que

$$\frac{\alpha}{\beta}||g|| \leq ||g||_e \leq \frac{\beta}{\alpha}||g||, \text{ onde } ||g|| = 1.$$

Pelo Lema 3.1.3, $||g(e)||_e = ||g||_e$, desde que $g(\Omega) \subset \Omega$, e o mesmo vale para g^{-1}.

Segue, então, que

$$\frac{\alpha}{\beta}e \leq g(e) \leq \frac{\beta}{\alpha}e.$$

■

Teorema 3.1.11. *Seja V um espaço de Hilbert real parcialmente ordenado pelo fecho $\overline{\Omega}$ de um cone simétrico Ω. Existe um elemento $w \in \Omega$ tal que $g(w) = w$ para todo $g \in G(\Omega) \bigcap O(V)$.*

Demonstração:

Fixemos uma unidade de ordem $e \in \Omega$ e seja $\alpha || \cdot || \leq || \cdot ||_e \leq \beta || \cdot ||$ para $\beta > \alpha > 0$.

Pelo Lema 3.1.10, a órbita $S = \{g(e); g \in G(\Omega) \bigcap O(V)\}$ está contida no intervalo de ordem

$$\left[\left[\frac{\alpha}{\beta}e, \frac{\beta}{\alpha}e\right]\right] = \{x \in V; \frac{\alpha}{\beta}e \leq x \leq \frac{\beta}{\alpha}e\},$$

o qual é convexo, limitado na norma de unidade de ordem $|| \cdot ||_e$ e, consequentemente, limitado na norma de espaço de Hilbert de V.

O intervalo de ordem acima é claramente fechado na norma de unidade de ordem e, consequentemente, na norma de espaço de Hilbert V.

Segue, então, que o intervalo de $\left[\left[\frac{\alpha}{\beta}e, \frac{\beta}{\alpha}e\right]\right]$ é fracamente compacto em V.

Seja $Q = \overline{co}S$ o casco convexo fechado da órbita S. Temos que $Q \subset \left[\left[\frac{\alpha}{\beta}e, \frac{\beta}{\alpha}e\right]\right]$ é fracamente compacto.

Uma vez que $G(\Omega) \bigcap O(V)$ é um grupo e cada $g \in O(V)$ é contínua em V, vemos que $G(Q) \subset Q$ para toda $g \in G(\Omega) \bigcap O(V)$. Adicionalmente, $G(\Omega) \bigcap O(V)$ é equicontínuo em Q na topologia fraca (definição presente em [18], V. 10.7), isto é, dada qualquer vizinhança fraca N de 0, existe uma vizinhança fraca U de 0 tal que para dois elementos $x, y \in Q$, que satisfaçam $(x - y) \in U$, temos $g(x - y) \in N$ para todo $g \in G(\Omega) \bigcap O(V)$.

Para provar equicontinuidade, primeiro observamos que para qualquer vizinhança fraca de 0 da forma $N_0 = \{v \in V; |\langle v, z\rangle| < \epsilon\}$ para algum $z \in V - \{0\}$, podemos determinar $z_1, z_2 \in \overline{\Omega} - 0$ tais que N_0 contenha o conjunto $\left\{v \in V; |\langle v, z_j\rangle| < \frac{\epsilon}{2}, j = 1, 2\right\}$, que é uma vizinhança fraca de 0 .

De fato, escreva $z = z_1 - z_2$, com $z_1, z_2 \in \overline{\Omega} - \{0\}$, então temos

$$|\langle v, z\rangle| = |\langle v, z_1 - z_2\rangle| = |\langle v, z_1\rangle| - |\langle v, z_2\rangle| \leq |\langle v, z_1\rangle| + |\langle v, z_2\rangle| < \epsilon.$$

Consequentemente, dada qualquer vizinhança fraca N de 0, existem elementos positivos $z_1, z_2, ..., z_n$ em $\overline{\Omega} - 0$ tais que

$$N \supset \{v \in V; |\langle v, z_j\rangle| < \epsilon, j = 1, 2, ..., n\} \text{ para algum } \epsilon > 0.$$

Podemos determinar $c > 1$ tal que $z_j \leq ce$ para $j = 1, ..., n$.

Agora, para cada $g \in G(\omega) \bigcap O(V)$ e $j = 1, ..., n$, temos

$$0 \leq g(z_j) \leq cg(e) \leq \frac{c\beta}{\alpha}e,$$

o que nos dá

$$0 \leq \langle x, g(z_j)\rangle \leq \langle x, \frac{c\beta}{\alpha}e\rangle \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}. \tag{3.1}$$

Agora, escolha $\gamma \in (0,1)$ tal que $\gamma < \dfrac{\epsilon\alpha^2}{c(\beta^2-\alpha^2)\langle e,e\rangle}$.

Sendo assim,

$$U = \left\{ v \in V; \left| \langle \gamma \left(v + \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta} e \right), \frac{c\beta}{\alpha} e \rangle \right| < \epsilon \right\}$$

é uma vizinhança fraca de 0 em V.

Como $\dfrac{\alpha}{\beta} e \leq g(e) \leq \dfrac{\beta}{\alpha} e$ para toda $g \in G(\Omega) \bigcap O(V)$, pelo Lema 3.1.10, temos

$$\frac{\alpha}{\beta}\langle e,e\rangle \leq \langle g(e),e\rangle \leq \frac{\beta}{\alpha}\langle e,e\rangle$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{\gamma(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha\beta}\frac{\alpha}{\beta}\langle e,e\rangle \leq \frac{\gamma(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha\beta}\langle g(e),e\rangle \leq \frac{\gamma(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha\beta}\frac{\beta}{\alpha}\langle e,e\rangle \\
0 &< \frac{\gamma(\beta^2-\alpha^2)}{\beta^2}\frac{\alpha}{\beta}\langle e,e\rangle \leq \frac{\gamma(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha\beta}\langle g(e),e\rangle \leq \frac{\gamma(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha^2}\frac{\beta}{\alpha}\langle e,e\rangle \\
&\leq \frac{\gamma c(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha^2}\frac{\beta}{\alpha}\langle e,e\rangle < \epsilon \text{ para toda } g \in G(\Omega)\cap O(V).
\end{aligned}$$

Sejam $x, y \in Q \subset \left[\left[\frac{\alpha}{\beta}e, \frac{\beta}{\alpha}e\right]\right]$. Temos

$$-\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)e \leq x-y \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)e = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta}e$$

e, em particular,

$$0 \leq (x-y) + \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta}e \leq \frac{x-y}{\gamma} + \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta}e, \text{ onde } \gamma \in (0,1)$$

Consequentemente, $x-y \in \gamma U$ $\left(\text{ou seja, } \dfrac{x-y}{\gamma} \in U\right)$ nos dá

$$\begin{aligned}
0 \leq \langle g\left(\gamma\left(\frac{x-y}{\gamma} + \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta}e\right)\right), z_j\rangle &= \langle \gamma\left(\frac{x-y}{\gamma} + \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta}e\right), g^*(z_j)\rangle \\
&\leq \langle \gamma\left(\frac{x-y}{\gamma} + \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta}e\right), \frac{c\beta}{\alpha}e\rangle < \epsilon \text{ (pela Equação 3.1)}
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$-\frac{\gamma(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha\beta}\langle g(e),z_j\rangle \leq \langle g(x-y),z_j\rangle \leq \epsilon - \frac{\gamma(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha\beta}\langle g(e),z_j\rangle < \epsilon,$$

onde a Equação 3.1 implica

$$\frac{\gamma(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha\beta}\langle g(e),z_j\rangle \leq \frac{\gamma(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha\beta}\langle e, \frac{c\beta}{\alpha}e\rangle < \epsilon$$

e, portanto,

$$|\langle g(x-y),z_j\rangle| < \epsilon \text{ para toda } g \in G(\Omega)\bigcap O(V) \text{ e } j = 1, ...n.$$

Isto prova a equicontinuidade de $G(\Omega)\bigcap O(V)$.

A partir disso, pelo Teorema do Ponto Fixo de Kakutani ([18], V. Teorema 10. 8), o grupo $G(\Omega)\bigcap O(V)$ tem um ponto fixo comum, digamos $w \in Q \subset \left[\left[\frac{\alpha}{\beta}e, \frac{\beta}{\alpha}e\right]\right] \subset \Omega$.

A prova está completa.

■

Note que um operador linear limitado T em um espaço de Hilbert complexo H é hermitiano se, e somente se, $||\exp\, itT|| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ ([7], p. 46).

Se $||\exp\, itT|| \leq M$ para algum $M > 0$ e todo $t \in \mathbb{R}$, então $\exp\, itT$ tem raio espectral

$$\rho(\exp\, itT) = \lim_{n\to\infty} ||(\exp\, itT)^n||^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} ||\exp\, intT||^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} M^{\frac{1}{n}} = 1$$

e se iT é hermitiano, então temos $||\exp\, itT|| = \rho(\exp\, itT) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Isso implica que T é hermitiano e, consequentemente, $T = 0$.

Dado $X \in L(V)$, consideranto sua complexificação

$$X_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$$

no espaço de Hilbert complexo $V_{\mathbb{C}}$ e notando que $\exp\, tX$ é uma isometria em V se, e somente se, $\exp\, tX_{\mathbb{C}}$ é um operador unitário em $V_{\mathbb{C}}$, temos que $||\exp\, tX|| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $X^* = -X$.

Por outro lado, se $X^* = -X$ e se $||\exp\, tX|| \leq M$ para algum $M > 0$ e para todo $t \in \mathbb{R}$, então devemos ter $X = 0$.

A observação acima implica que a álgebra de Lie do grupo de Lie $K = G(\Omega)\bigcap O(V)$ é dada por:

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g}(\Omega);\ \exp\, tX \in G(\Omega) \cap O(V)\ \forall\ t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{X \in \mathfrak{g}(\Omega); X^* = -X\} \subset L(V).$$

Para $X \in \mathfrak{g}(\Omega)$, temos que $\exp\, tX \in G(\Omega)$ e $\exp\, tX^* = (\exp\, tX)^* \in G(\Omega)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $X^* \in \mathfrak{g}(\Omega)$.

Seja $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g}(\Omega); X^* = X\}$. Temos a decomposição em soma direta $\mathfrak{g}(\Omega) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, com colchetes de Lie $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$.

Isso implica que a inclusão $\iota : K \hookrightarrow G(\Omega)$ é uma imersão e sua diferencial na identidade $d_\iota : \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}(\Omega)$ tem uma imagem com um complemento de soma direta $\mathfrak{p}$ em $\mathfrak{g}(\Omega)$ (ver [12], Definição 2.1.16).

Pelo Teorema 3.1.11, existe uma unidade de ordem $w \in \Omega$ que é um ponto fixo do grupo $K = G(\Omega)\bigcap O(V)$.

Dado $X \in \mathfrak{k}$, temos $\exp\, tX \in K$ e

$$w = \exp\, tX(w) = w + tX(w) + \frac{t^2}{2!}X(w) + ... + \frac{t^n}{n!}X(w) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

O que implica $X(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp tX(w) = 0$.

Na verdade, a recíproca também é verdadeira.

Lema 3.1.12. *Seja $w \in \Omega$ um ponto fixo de $K = G(\Omega) \bigcap O(V)$ com álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Então temos*

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g}(\Omega); X(w) = 0\}.$$

Demonstração:

Seja $X \in \mathfrak{g}(\Omega)$ e $X(w) = 0$.

Temos a decomposição $X = X_{\mathfrak{k}} + X_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.

Uma vez que $X_{\mathfrak{k}}(w) = 0$, como notado acima, temos que $X_{\mathfrak{p}}(w) = 0$ e, consequentemente, $\exp tX_{\mathfrak{p}}(w) = w$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Isso implica que $||\exp tX_{\mathfrak{p}}||_w = ||w||_w = 1$ e existe $M > 0$ tal que $||\exp tX_{X_{\mathfrak{p}}}|| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$, uma vez que a norma de unidade de ordem $|| \cdot ||_w$ é equivalente à norma do espaço de Hilbert $|| \cdot ||$.

Por outro lado, $X_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}$ implica que $X_{\mathfrak{p}}^* = X_{\mathfrak{p}}$. Portanto, devemos ter $X_{\mathfrak{p}} = 0$ e $X = X_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}$.

■

Observação 1: O lema acima implica que a álgebra de Lie

$$\mathfrak{k}_w = \{X \in \mathfrak{g}(\Omega);\ \exp tX(w) = w \ \forall\ t \in \mathbb{R}\}$$

do subgrupo de isotropia $K_w = \{g \in G(\Omega); g(w) = w\} \supset K$ coincide com a álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ de K, onde

$$G(\Omega) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{t}_w \oplus p.$$

Consequentemente, análogo ao caso de K, a aplicação inclusão $K_w \hookrightarrow G(\Omega)$ é uma inversão.

A diferencial da aplicação orbital $\rho : g \in G(\Omega) \mapsto g(w) \in \Omega$ na identidade de $G(\Omega)$ é a aplicação avaliação $X \in \ \mapsto X(w) \in V$.

Pela homogeneidade de Ω, podemos identificar a álgebra de Lie $\mathfrak{g}(\Omega) = \mathfrak{k}_w \oplus \mathfrak{p}$ com a álgebra de Lie $\mathfrak{aut}\Omega$ dos corpos analíticos de vetores em Ω que geram subgrupos de um parâmetro de $G(\Omega)$ (para mais detalhes, ver [48], pg. 110).

Isso implica que a aplicação avaliação $X \in \mathfrak{g}(\Omega) \mapsto X(w) \in T_w\Omega = V$ é sobrejetiva.

Segue, então, que a aplicação orbital ρ_w é uma submersão, uma vez que $\mathfrak{k}_w$ é o núcleo da aplicação avaliação, que é complementada em $\mathfrak{g}(\Omega)$.

Em particular, ρ_w é uma aplicação aberta e o componente identidade G_0 também atua transitivamente em Ω, uma vez que Ω é conectado e uma união disjunta de G_0-óbitas abertas.

3.2 A Relação Entre Álgebras de Jordan Formalmente Reais e Cones Simétricos

Uma álgebra de Jordan é uma álgebra que pode não ser associativa, mas é comutativa, sujeita a algumas outras condições que são modeladas após o exemplo típico: considerando qualquer álgebra associativa $(A, \cdot)$, podemos equipá-la com o produto simétrico $x \circ y := \frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x)$ e obter a álgebra de Jordan $(A, \circ)$.

É esta relação que motivou originalmente a noção na discussão da Mecânica Quântica, para o produto simetrizado e, portanto, a estrutura da álgebra de Jordan da álgebra dos observáveis de um sistema de Mecânica Quântica é o que resta quando se ignora os comutadores (outrora tão importantes) e, portanto, os fluxos hamiltonianos em observáveis.

Mais tarde, porém, as álgebras de Jordan foram amplamente estudadas para seu próprio bem.

Mais recentemente, descobriu-se que os Topos de Bohr associados a uma álgebra não-associativa de observáveis realmente enxerga a estrutura subjacente de álgebra de Jordan. Para mais informações, recomendo a pesquisa sobre Topos de Bohr e Poset de Subálgebras comutativas.

Relembrando as Definições

Uma álgebra de Jordan é uma álgebra J comutativa não-associativa que satisfaz a identidade de jordan: $x^2(yx) = x(yx^2)$ para todos $x, y \in J$.

Segue (via um argumento não-trivial) que J é de potências associativas e a Identidade de Jordan pode ser generalizada para $(x^m y)x^n = x^m(yx^n)$ para números naturais $m, n \geq 1$ (e, trivialmente, para $m, n \geq 0$ se a álgebra J tiver um elemento unidade).

Portanto, também podemos, equivalentemente, definir uma álgebra de Jordan como uma álgebra J comutativa de potências associativas tal que para qualquer $x \in J$, os operadores multiplicação por potências x^n $(n > 1)$ comutam todos uns com os outros.

Se $\mathbb{K}$ é um corpo cuja característica não é 2 (ou é qualquer anel comutativo no qual o elemento 2 é invertível), então para qualquer $\mathbb{K}$-álgebra A com produto $\cdot$, associa-se uma $\mathbb{K}$-álgebra de Jordan com o mesmo espaço vetorial subjacente e cujo produto de Jordan $\circ$ é dado por $x \circ y = \dfrac{x \circ y + y \circ x}{2}$.

Tais álgebras são chamadas álgebras de Jordan especiais. Todas as outras são chamadas álgebras de Jordan excepcionais.

Álgebras de Jordan Formalmente Reais e Sua Origem na Física Quântica

As álgebras de Jordan tiveram sua origem no estudo dos fundamentos da teoria quântica. Em 1932, Pascual Jordan tentou isolar alguns axiomas que uma álgebra de observáveis deveria satisfazer.

A frase álgebra sem adornos geralmente sinaliza uma álgebra associativa, mas este não é o tipo de álgebra a que Jordan foi levado. Tanto na Mecânica Clássica quanto na quântica, os observáveis são fechados sob adição e multiplicação por escalares reais. Na mecânica clássica, também podemos multiplicar os observáveis, mas na Mecânica Quântica isso se torna problemático. Afinal, dados dois operadores lineares auto-adjuntos limitados em um espaço de Hilbert complexo, seu produto é auto-adjunto se, e somente se, eles comutam.

No entanto, na Mecânica Quântica ainda é possível elevar um observável a uma potência e obter outro observável. A partir do quadrado e tomando combinações lineares reais, pode-se construir um produto comutativo usando a identidade de polarização:

$$x \circ y := \frac{1}{2}((x-y)^2 - x^2 - y^2) = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

Este, às vezes, é chamado de anticomutador (ou mais precisamente, metade do anticomutador). Observe que é análogo ao comutador mais famoso $[x,y] := xy - yx$ e que os dois juntos recuperam a álgebra completa dos observáveis em: $xy = \frac{1}{2}[x,y] + x \circ y$ para todos x, y.

Uma JLB-álgebra é um espaço de Banach equipado com as estruturas compatíveis de ambas as álgebras de Jordan e as álgebras de Lie. JLB-álgebras são equivalentes a C^*-álgebras exatamente desta maneira, usando $\circ$ e $\bullet := \frac{1}{2}i[-,-]$ como as operações.

Do ponto de vista da quantização de deformação de variedades de Poisson, pode-se ler isso da seguinte forma: a quantização de deformação de uma variedade de Poisson $(X, -, -)$ se divide em duas partes:

1. p colchete de Poisson $[-,-]$ em $C^\infty(X)$ deforma para o comutador
2. a multiplicação pontual em $C^\infty(X)$ se deforma na estrutura da álgebra de Jordan.

Esta perspectiva sobre a quantização de deformação tornando explícito o papel das álgebras de Jordan é mencionada, por exemplo, em [5].

O produto simétrico $\circ$ não é associativo, em geral, mas é associativo em potências: qualquer forma de colocar entre parênteses um produto de cópias do mesmo x observável dá o mesmo resultado. Isto levou Jordan a definir o que agora é chamado de álgebra de Jordan formalmente real.

A hipótese de ser formalmente real gera em J (assim como em qualquer álgebra formalmente real) uma ordem parcial: se escrevermos $x \leq y$ quando o elemento $y - x$ é uma soma de quadrados, temos que $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$.

Assim, em uma álgebra de Jordan formalmente real, podemos falar razoavelmente sobre um observável ser "*maior*" do que outro.

Na verdade, a Identidade de Jordan é uma consequência da definição de álgebra de Jordan formalmente real. Portanto, toda álgebra de Jordan formalmente real é uma álgebra de Jordan (mas não o contrário).

Exemplos

Classificação de Álgebras de Jordan Formalmente Reais

Em 1934, Pascual Jordan publicou um artigo com Von Neumann e Wigner classificando álgebras de Jordan de dimensão finita formalmente reais [25].

Eles começaram definindo um ideal de uma álgebra de Jordan J formalmente real como um subespaço linear $S \subseteq J$ tal que $x \in S$ implica que $x \circ y \in S$ para todo $y \in J$.

Em seguida, eles definiram J como simples quando seus únicos ideais eram $\{0\}$ e o próprio J.

Após isso, eles provaram que qualquer álgebra de Jordan de dimensão finita é uma soma direta de outras álgebras de Jordan simples.

Isso reduziu o problema de classificação das à tarefa de classificar álgebras de Jordan simples formalmente reais de dimensão finita. Existem quatro famílias destas e uma exceção:

1. As matrizes reais $n \times n$ auto-adjuntas, $\mathfrak{h}_n(\mathbb{R})$ com produto $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.
2. As matrizes complexas $n \times n$ auto-adjuntas, $\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$ com produto $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.
3. As matrizes quaterniônicas $n \times n$ auto-adjuntas, $\mathfrak{h}_n(\mathbb{H})$ com produto $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.
4. As matrizes octoniônicas $n \times n$ auto-adjuntas, $\mathfrak{h}_n(\mathbb{O})$ com produto $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, onde $n \leq 3$.
5. O espaço $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ com produto $(x, t) \circ (x', t') = (tx' + t'x, xx' + tt')$

Aqui dizemos que uma matriz quadrada com entradas na *-álgebra A é hermitiana se for igual a sua transposta conjugada. Observe que $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ são todas *-álgebras.

Como os octônios formam uma álgebra alternativa, mas não associativa, não podemos ir além das matrizes 3×3 e obter uma álgebra de Jordan.

As matrizes octoniônicas auto-adjuntas 1×1 são apenas os números reais e as 2×2 são isomorfas ao fator spin $\mathbb{R}^9 \oplus \mathbb{R}$. Por outro lado, as matrizes octoniônicas auto-adjuntas 3×3 formam a álgebra de Albert.

As álgebras de Jordan na quinta família são chamadas de fatores de spin. Esta família tem algumas sobreposições com as outras. Mais notavelmente:

- A álgebra de Jordan de matrizes reais auto-adjuntas 2×2 é isomorfa ao fator spin $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$.
- A álgebra de Jordan de matrizes complexas auto-adjuntas 2×2 é isomorfa ao fator spin $\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}$.
- A álgebra de Jordan de matrizes quaterniônicas auto-adjuntas 2×2 é isomorfa ao fator spin $\mathbb{R}^5 \oplus \mathbb{R}$.
- A álgebra de Jordan de matrizes octoniônicas auto-adjuntas 2×2 é isomorfa ao fator spin $\mathbb{R}^9 \oplus \mathbb{R}$.

Como o fator de spin $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ pode ser identificado com o espaço de Minkowski $(n+1)$-dimensional, isso estabelece uma relação entre os números reais, números complexos, quatérnions e octonions e o espaço de Minkowski em 3,4,6 e 10 dimensões - um padrão que se torna importante na teoria das cordas.

Em 1983, Zelmanov generalizou drasticamente o resultado de Jordan, Von Neumann e Wigner, classificando todas as álgebras de Jordan simples, incluindo as de dimensão infinita.

Álgebras de Jordan Excepcionais

Entre as álgebras de Jordan excepcionais sobre os números reais, há um exemplo notável de dimensão 27: a álgebra de Albert $\mathbb{A}\mathbb{K}$ de matrizes 3×3 auto-adjuntas sobre os octônios com a mesma fórmula acima para o produto em termos de produto da matriz. Observe que os octônios e suas matrizes não formam álgebras associativas, mas apenas álgebras alternativas, portanto, a identidade de Jordan para a álgebra de Albert não é automática (não é válida para todas as álgebras alternativas), mas é uma consequência de circunstâncias mais especiais.

Cones Convexos Homogêneos Autoduais

O formalismo das álgebras de Jordan parece bastante distante da prática real da Física, porque, na teoria quântica, dificilmente pega-se dois observáveis a e b e forma-se seu produto de Jordan $\frac{1}{2}(ab + ba)$. Como sugerido na seção anterior, é melhor pensar nessa operação como derivada do processo de quadratura de um observável, que é algo que realmente é feito. Mas, ainda assim, devemos perguntar: podemos ver a classificação das álgebras de Jordan formalmente reais de dimensão finita e, portanto, o papel especial das álgebras de divisão normatizada, como decorrentes de alguns axiomas mais intimamente ligados à teoria quântica como os físicos geralmente a praticam?

Uma resposta envolve a classificação de Koecher-Vinberg de cones convexos homogêneos autoduais. Considere primeiro o caso da teoria quântica comum. Se um sistema quântico tem o espaço de Hilbert $\mathbb{C}^n$, os observáveis são descritos por matrizes complexas auto-adjuntas $n \times n$: elementos da álgebra de Jordan $\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$. Mas matrizes dessa forma que são não negativas e têm traço 1 também desempenham outro papel. Elas são chamadas de matrizes de densidade e descrevem estados de nosso sistema quântico: não apenas estados puros, mas também estados mistos mais gerais. A ideia é que qualquer matriz de densidade $\rho \in \mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$ nos permite definir os valores esperados dos observáveis $a \in \mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$ via

$$\langle a \rangle = tr(\rho a).$$

A aplicação que envia os observáveis aos seus valores esperados é linear real. O fato de ρ ser não negativo é equivalente a

$$a \geq 0 \Rightarrow \langle a \rangle \geq 0$$

e o fato de ρ ter traço 1 é equivalente a

$$\langle 1 \rangle = 1.$$

Tudo isso se generaliza para uma álgebra de Jordan formalmente real J de dimensão finita arbitrária. Qualquer álgebra assim tem automaticamente um elemento de identidade. Isso nos permite definir um estado em J como um funcional linear $\langle \cdot \rangle : J \to \mathbb{R}$ que é

• não-negativo:

$$a \geq 0 \Rightarrow \langle a \rangle \geq 0$$

• normalizado

$$\langle 1 \rangle = 1.$$

Mas, na verdade, há uma correspondência bijetiva entre funcionais lineares em J e elementos de J. A razão é que toda álgebra de Jordan de dimensão finita tem um traço

$$tr : J \to \mathbb{R}$$

definido de modo que $tr(a)$ seja o traço do operador linear *multiplicação por a*. Tal álgebra de Jordan é, então, formalmente real se, e somente se,

$$\langle a, b \rangle = tr(a \circ b)$$

é um produto interno com valor real.

Então, quando J é uma álgebra de Jordan formalmente real de dimensão finita, qualquer funcional $\langle \cdot \rangle : J \to \mathbb{R}$ pode ser escrito como

$$\langle a \rangle = tr(\rho \circ a)$$

para um elemento único $\rho \in J$.

Por outro lado, cada elemento $\rho \in J$ fornece um funcional linear por esta fórmula. Embora não seja óbvio, é verdade que o funcional linear $\langle \cdot \rangle$ é não-negativo se, e somente se, $\rho \geq 0$ em termos da ordenação em J. Mais obviamente, $\langle \cdot \rangle$ é normalizado se, e somente se, $tr(\rho) = 1$.

Assim, os estados podem ser definidos com certos observáveis: a saber, aqueles observáveis $\rho \in J$, com $\rho \geq 0$ e $tr(\rho) = 1$.

Essas ideias ajudam a motivar um importante teorema de Koecher e Vinberg. A ideia é axiomatizar a situação que acabamos de descrever, de uma forma que não mencione o produto de Jordan em J, mas enfatize:

• o isomorfismo entre J e seu espaço dual.

• o fato de que elementos *positivos* de J formam um cone.

Para encontrar axiomas apropriados, suponha que J seja uma álgebra de Jordan formalmente real de dimensão finita. Então, sete fatos são sempre verdadeiros.

1. O conjunto de observáveis positivos

$$C = \{a \in A; a > 0\}$$

é um cone. Isto é, $a \in C$ implica que todo múltiplo positivo de a também está em C.

2. Esse cone é convexo: se $a, b \in C$ então qualquer combinação linear $xa + (1 - x)b$, com $0 \leq x \leq 1$ também está em C.

3. Esse cone é um conjunto aberto.

4. Ele é regular, o que significa que se a e $-a$ estão ambos no fecho $\overline{C}$, então $a = 0$.

Esta condição pode parecer obscura, mas se notarmos que

$$\overline{C} = \{a \in A; a \geq 0\},$$

vemos que C sendo regular simplesmente significa que $a \geq 0$ e $-a \geq 0 \Rightarrow a = 0$, que é uma suposição perfeitamente plausível.

5. Lembre-se que J tem um produto interno. Isso é o que nos permite identificar funcionais lineares em J com elementos de J. Isso também nos permite definir o cone dual

$$C^* = \{a \in J : \forall b \in A\langle a, b\rangle > 0\}$$

que se pode verificar que é, de fato, um cone.

O quinto fato sobre C é que ele é autodual, ou seja, $C = C^*$.

Isso formaliza o fato de que os estados podem ser identificados com observáveis especiais.

6. C é homogêneo: dados quaisquer dois pontos $a, b \in C$, há uma transformação real-linear $T : A \to A$ mapeando C consigo mesmo de uma forma bijetiva, com a propriedade $Ta = b$. Isso diz que o cone C é altamente simétrico: nenhum ponto de C é "melhor" do que qualquer outro, pelo menos se considerarmos apenas a estrutura linear do espaço A, ignorando o produto de Jordan e o traço.

7. De outro ponto de vista, entretanto, há um ponto muito especial de C, a saber, a identidade 1 de nossa álgebra de Jordan. E isso nos leva ao nosso sétimo e último fato: o cone C é pontiagudo, o que significa que está equipado com um elemento distinto (neste caso, $1 \in C$).

Resumindo: quando J é uma álgebra de Jordan formalmente real de dimensão finita, C é um cone convexo aberto regular auto-dual pontiagudo homogêneo. Todos os elementos $a \in J$ são observáveis positivos, mas certos elementos especiais (nomeadamente, aqueles com $\langle a, 1\rangle = 1$) também podem ser vistos como estados.

Na verdade, há uma categoria de cones convexos abertos auto-duais regulares homogêneos pontiagudos, onde:

• um objeto é um espaço de produto interno real de dimensão finita V equipado com um cone convexo aberto regular autodual pontiagudo homogêneo $C \subset V$
• um morfismo de objeto, digamos (V, C), para outro, digamos (V', C'), é uma aplicação linear $T : V \to V'$ que preserva o produto interno e identifica C em C'.

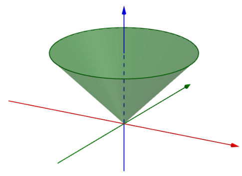

Figura 3.1: Exemplo de cone pontiagudo.

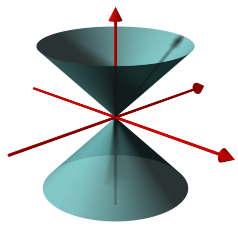

Figura 3.2: Exemplo de cone não pontiagudo.

O trabalho de Koecher e Vinberg, bem explicado em [27], mostra que:

Teorema 3.2.1. *A categoria de cones convexos abertos autoduais regulares homogêneos pontiagudos é equivalente à categoria de álgebras de Jordan formalmente reais de dimensão finita.*

Isso significa que o teorema de Jordan, Von Neumann e Wigner também classifica os cones convexos regulares autoduais homogêneos pontiagudos!

Teorema 3.2.2. *Cada cone convexo aberto regular auto-dual pontiagudo homogêneo é isomorfo a uma soma direta daqueles nesta lista:*
• *o cone de elementos positivos em* $\mathfrak{h}_n(\mathbb{R})$
• *o cone de elementos positivos em* $\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$
• *o cone de elementos positivos em* $\mathfrak{h}_n(\mathbb{H})$
• *o cone de elementos positivos em* $\mathfrak{h}_n(\mathbb{O})$
• *o futuro cone de luz em* $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$

Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, um elemento $T \in \mathfrak{h}_n(\mathbb{K})$ é positivo se, e somente se, o operador correspondente $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tem $\langle v, Tv \rangle > 0$ para todo $v \in \mathbb{K}^n$ não-nulo.

Um truque similar funciona para definir os elementos positivos de $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$, mas não precisamos dos detalhes por aqui.

Dizemos que um elemento $(x, t) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ está no cone de luz futuro se $t > 0$ e $t^2 - x \cdot x > 0$.

Isso, é claro, se ajusta perfeitamente à ideia de que os fatores de spin estão conectados aos espaços-tempos de Minkowski. Finalmente, há uma noção óbvia de soma direta para espaços euclidianos com cones, onde a soma direta de (V, C) e (V', C') é $V \oplus V'$ equipado com o cone

$$C \oplus C' = \{(v, v') \in V \oplus V'; v \in c, v' \in C'\}.$$

Resumindo: as álgebras de Jordan formalmente reais de dimensão finita surgem de forma razoavelmente natural como observáveis a partir de um formalismo onde os observáveis não-negativos formam um cone, desde que insistamos em algumas propriedades desse cone.

Relação com Subálgebras Comutativas

Para toda álgebra associativa A existe sua semilática de subálgebras comutativas, denotada por $ComSub(A)$. Pelo menos para álgebras de Von Neumann A, B sem subfatores de fator de álgebra de Von Neumann tipo I_2, os isomorfismos $ComSub(A) \to ComSub(B)$ correspondem aos isomorfismos entre as álgebras de Jordan correspondentes $A_J \to B_J$.

3.3 Cones Simétricos e Álgebras de Jordan Euclidianas

Deve-se observar desde o início que o estudo de cones simétricos está intimamente relacionado - na verdade, inseparável - ao estudo de um certo tipo de álgebra não associativa sobre o campo real conhecido como álgebra de Jordan euclidiana. Para ser mais específico, há uma correspondência um-a-um entre cones simétricos e álgebras de Jordan euclidianas que serão explicitadas posteriormente.

3.4 Um Exemplo Motivador: Espaço Matricial Real

Para quem não está familiarizado com a noção de um cone simétrico ou álgebra de Jordan euclidiana (o que agora é chamado de cone simétrico na terminologia mais antiga era referido como um domínio de positividade, e o que agora é conhecido como álgebra de Jordan euclidiana era chamado de álgebra de Jordan formalmente real), é útil e inteiramente apropriado pensar em uma álgebra de Jordan euclidiana como a generalização conceitual do espaço da matrizes que consiste em todas as matrizes simétricas reais $m \times m$, caso em que o cone simétrico associado é o cone da matriz de todas as matrizes simétricas $m \times m$ que são definidas positivamente.

Denote por $V = V_m = Sym(m, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as matrizes reais simétricas $m \times m$ equipadas com o produto interno $\langle x, y \rangle = tr(xy)$. Uma vez que o produto de matrizes simétricas não precisa ser simétrico, V não é fechado sob a multiplicação de matrizes. No entanto, o anti-comutador

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx) \qquad (1)$$

é uma operação bem definida em V chamada de Produto de Jordan, em relação à qual V tem a estrutura de uma álgebra real comutativa, mas (para $m > 1$) não associativa. Como um substituto para a associatividade, tem-se a chamada Identidade de Jordan

$$x^2 \cdot (y \cdot x) = (x^2 \cdot y) \cdot x \qquad (2).$$

Em termos da transformação linear $L(x)$ em V definida como multiplicação à esquerda por x (isto é, $L(x)y = x \cdot y$), a identidade 2 é reformulada como a relação de comutação

$$L(x)L(x^2) = L(x^2)L(x). \qquad (3)$$

Pelas propriedades padrão do traço, a transformação linear $L(x)$ em V é auto-adjunta, ou seja,

$$\langle x \cdot y, z\rangle = \langle y, x \cdot z\rangle. \qquad (4)$$

Em seguida, denote por $\Omega = \Omega_m = Pos(m, \mathbb{R})$ o subconjunto de V de matrizes que são definidas positivamente. Temos que Ω é um cone convexo aberto em V que é autodual no sentido de que $\Omega = \{x \in V;$ $\langle x, y\rangle > 0 \ \forall \ y \neq 0$ no fecho de $\Omega\}$. Observe que $\Omega = Pos(m, \mathbb{R})$ também pode ser caracterizado como o componente conectado da matriz ϵ identidade $m \times m$ no conjunto de elementos invertíveis de V.

Finalmente, trazemos a teoria de grupo. Seja $G = GL_+(m, \mathbb{R})$ o grupo linear geral real (conectado) que consiste em todas as matrizes reais $m \times m$ com determinante positivo. Então, cada g de G atua quadraticamente em V por $g \cdot x = gxg^t$ e esta ação é transitiva em Ω. Assim, o grupo de rotação $m \times m$ $K = SO(m) = \{g \in G; gg^t = \epsilon$ e $detg = 1\}$ é o subgrupo de isotropia de ϵ (ou seja, um elemento g de G encontra-se em K se e somente se $g \cdot \epsilon = \epsilon$) e a aplicação $gK \mapsto x = g \cdot \epsilon$ identifica o espaço homogêneo (simétrico) G/K com o cone Ω.

Em símbolos,

$$\Omega \cong G/K = GL_+(m, \mathbb{R})/SO(m)$$

e dizemos que Ω é homogêneo sob a ação de G.

3.5 A Teoria Geral

De posse do exemplo acima, fazemos as seguintes definições.

1. Uma álgebra de Jordan sobre um corpo K é uma álgebra comutativa (mas em geral não associativa) V com identidade ϵ que satisfaz a propriedade 2. Quando K é o corpo real e a álgebra de Jordan está equipada com um produto interno em relação no qual vale a propriedade 4 , então se diz que a álgebra de Jordan é Euclidiana.

2. Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno de dimensão finita. Um cone simétrico em V é um cone convexo aberto não vazio em V que é autodual e homogêneo sob o automorfismo grupo $G = G(\Omega)$, consistindo em todas as transformações lineares invertíveis de V que preservam O.

3. Uma álgebra de Jordan é simples se não tem ideais não triviais, e um cone simétrico é irredutível se não é o produto direto de dois ou mais cones simétricos.

Assim, $V_m = Sym(m, \mathbb{R})$ e $\Omega = \Omega_m = Pos(m, \mathbb{R})$ são exemplos prototípicos de uma álgebra de Jordan Euclidiana simples e um cone simétrico irredutível, respectivamente. De fato, como o seguinte resultado estrutural atesta, em geral um cone simétrico está relacionado a uma álgebra de Jordan euclidiana exatamente da mesma maneira que $Pos(m, \mathbb{R})$ está relacionado a $Sym(m, \mathbb{R})$.

3.6 A Correspondência Entre Ω e V

1. Se Ω é um cone simétrico, então o espaço ambiente V carrega a estrutura de uma álgebra de Jordan Euclidiana, e Ω é o componente conectado da identidade e no conjunto de elementos invertíveis de V. Por outro lado, se V é uma álgebra de Jordan euclidiana, então o componente conectado da identidade no conjunto de elementos invertíveis de V é um cone simétrico.

2. Um cone simétrico é irredutível se, e somente se, a álgebra de Jordan euclidiana associada for simples.

3. Uma álgebra de Jordan euclidiana se decompõe como uma soma direta de ideais simples, e um cone simétrico se decompõe como uma soma direta de cones simétricos irredutíveis.

Em suma, as propriedades 1, 2 e 3 reduzem o estudo de cones simétricos ao estudo de álgebras de Jordan euclidianas simples.

3.7 Classificação

As álgebras de Jordan Euclidianas simples foram classificadas por Jordan, von Neumann e Wigner. O conceito de álgebras de Jordan tem suas raízes no trabalho de Jordan, von Neumann e Wigner na década de 1930 sobre o formalismo da Mecânica Quântica em que as quantidades observáveis são representadas por operadores Hermitianos.

Declaramos a classificação em termos dos cones simétricos correspondentes: a menos de isomorfismo, os cones simétricos irredutíveis dividem-se em quatro famílias dos chamados cones clássicos juntamente com um outro cone que se diz ser excepcional. As primeiras três famílias de cones simétricos clássicos são os cones de matriz $Pos(m, \mathbb{R})$, definidos acima, os cones $Pos(m, \mathbb{C})$ de todas as matrizes hermitianas $m \times m$ complexas que são definidas-positivas e os cones $pos(m, \mathbb{H})$ de todas as matrizes hermitianas $m \times m$ quaterniônicas que são definidas positivamente. A quarta família de cones clássicos consiste nos cones de Lorentz $A_n = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2 > 0 \text{ e } x_1 > 0\}$, também chamados de cones de luz dianteiros. O cone excepcional é um cone de dimensão 27 de matrizes 3x3 "definidas positivas" sobre a álgebra de Cayley.

O importante do conceito de cone simétrico, portanto, reside na capacidade de estudar todos os cones clássicos simultaneamente sem recorrer à classificação acima, e ao mesmo tempo incluir o cone excepcional, cujo estudo pode ser extremamente complicado no contexto de sua definição como matrizes sobre a álgebra de Cayley.

3.8 Álgebra Linear

Os conceitos familiares de álgebra linear que se aplicam ao espaço matricial $Sym(m, \mathbb{R})$ e ao cone matricial $Pos(m, \mathbb{R})$ estendem-se ao contexto geral. Aqui estão alguns exemplos.

1. Os conceitos de polinômio mínimo, traço e determinante de uma matriz são generalizados para o contexto de uma álgebra de Jordan.

2. O teorema espectral para uma matriz simétrica generaliza para elementos de uma álgebra de Jordan Euclidiana, e o conceito de uma resolução da matriz de identidade (ou seja, um conjunto de projeções ortogonais e_1 ... e_r que somam a matriz de identidade) generaliza para o que é chamado de quadro de Jordan. O número de elementos r em um quadro de Jordan é a classificação da álgebra ou cone de Jordan. Portanto, a classificação de $Sym(m, \mathbb{R})$ é m.

3. A decomposição polar em uma álgebra de Jordan simples V é uma generalização da diagonalização de uma matriz simétrica por uma matriz ortogonal. Ou seja, se alguém fixa um quadro de Jordan e_1 ... e_r, então, qualquer elemento x em V decompõe-se como $x = k \cdot (\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_r e_r)$, onde k em K é o subgrupo de isotropia de ϵ em G, e os números reais $\lambda_1, ..., \lambda_r$ são os autovalores de x. A classificação de x é o número de autovalores diferentes de zero e x é regular se sua classificação for r.

4. A decomposição da Peirce em relação a um quadro de Jordan, quando especializada para o caso de $Sym(m, \mathbb{R})$, é a base usual das unidades da matriz E_{ij} para $1 \leq i \leq j \leq m$.

5. A decomposição de Gauss para um elemento de um cone simétrico reduz no caso de uma matriz simétrica positiva-definida x à decomposição $x = ll^t$ com l triangular inferior.

6. Ao estabelecer a decomposição de Gauss para álgebras de Jordan euclidianas, também se introduz uma generalização da noção dos principais menores de uma matriz.

3.9 A Estrutura Riemanniana

Seja $G = G(\Omega)$ e seja K o subgrupo de isotropia de ϵ. Então K é compacto máximo em G, e $\Omega \cong G/K$ é um espaço simétrico Riemanniano (daí a terminologia "cone simétrico").

Porque um simétrico é um exemplo de um espaço simétrico Riemanniano não compacto, tem-se disponível a teoria geral, devido a Harish-Chandra e Helgason, da análise harmônica em espaços simétricos Riemannianos. No entanto, por causa da interação da teoria dos grupos com a estrutura de Jordan, para cones simétricos, pode-se descrever muito da análise harmônica em detalhes surpreendentemente finos e sem recorrer à estrutura de grupos de Lie semi-simples ou à teoria geral de espaços simétricos não compactos.

Em particular, a rica estrutura geométrica e algébrica de um cone simétrico suporta generalizações não comutativas de muitos dos construtos explícitos da análise clássica, incluindo funções especiais como a função gama, funções de Bessel, funções hipergeométricas e polinômios ortogonais; Série de Taylor e Laurent; vários kernels integrais e transformações integrais; e espaços de Hardy e Bergman.

3.10 Domínios Simétricos

Seja Ω um cone simétrico irredutível e V a álgebra de Jordan euclidiana simples ambiente. Então, o domínio complexo $T_\Omega = V + i\Omega$ na complexificação $V^\Omega = V + iV$ de V é chamado de domínio de tubo sobre Ω. No caso clássico em que $V = Sym(1, \mathbb{R})$ é apenas a reta real, Ω é o intervalo $(0, \infty)$ e $T_\Omega = \{z \in \mathbb{C}; Imz > 0\}$ é o semiplano superior ordinário H em $\mathbb{C}$, o grupo linear especial 2×2 $SL(2, \mathbb{R})$ atua transitivamente por transformações fracionárias lineares em H, o grupo especial ortogonal $SO(2)$ é o grupo de isotropia do ponto i em H, e $H \cong SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ tem a estrutura de um espaço simétrico Riemanniano. O caso geral dá origem ao mesmo tipo de estrutura. Pois se Ω é qualquer cone simétrico, então o grupo $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\mathfrak{F})$ dos automorfismos biolomórficos de T_Ω atua transitivamente em T_Ω, o grupo de isotropia $\mathfrak{K}$ do ponto $i\epsilon$ em T_Ω é compacto máximo em $\mathfrak{G}$, e $T_\Omega \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ é um espaço simétrico Riemanniano.

Por esse motivo, T_Ω é conhecido como domínio de tubo simétrico. Em analogia ao caso clássico, também se refere a T_Ω como o semiplano superior generalizado em $V^{\mathbb{C}}$. Por exemplo, quando $V = Sym(m, \mathbb{R})$, o domínio T_Ω surge na teoria dos números e é comumente referido como o semiplano superior de Siegel.

Como no caso clássico em que a transformada de Cayley mapeia o semiplano H biolomorficamente no disco unitário $\{w \in \mathbb{C}; |w| < 1\}$, em geral existe um domínio complexo limitado D em $V^{\mathbb{C}}$, chamado de disco unitário generalizado em $V^{\mathbb{C}}$, e uma transformada de Cayley generalizada que mapeia o domínio de tubo $T_\Omega = V + i\Omega$ biolomorficamente em D.

Quando um espaço simétrico Riemanniano possui estrutura complexa, como no caso de T_Ω, ele é denominado espaço simétrico Hermitiano. Assim, D é uma realização limitada e T_Ω uma realização não-limitada do espaço simétrico de Hermit $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$, e ambos T_Ω e D são referidos como domínios simétricos. Em geral, percebendo um espaço simétrico hermitiano como um domínio simétrico dessa forma, formulamos uma alternativa algébrica de Jordan para o desenvolvimento teórico de Lie mais tradicional. Em geral, um espaço simétrico Hermitiano pode sempre ser realizado como um domínio complexo limitado em $\mathbb{C}^k$ para algum k, mas nem todos os espaços simétricos Hermitianos podem ser considerados como domínios tubulares. Aqueles que podem ser considerados desta forma são chamados de *tipo tubo*. Para espaços simétricos hermitianos que não são do tipo tubo, pode-se introduzir uma noção algébrica mais geral do que uma álgebra de Jordan, chamada de sistema triplo de Jordan, em termos do qual se obtém uma realização ilimitada mais complicada do que um meio-espaço, chamada de *Siegel domínio do tipo II*. No entanto, como apenas os domínios do tipo de tubo são tratados neste trabalho, nenhuma dessas construções mais complicadas é necessária. A análise complexa ocorre principalmente no próprio $V^{\mathbb{C}}$ ou em um domínio simétrico em $V^{\mathbb{C}}$.

Capítulo 4

DOMÍNIOS DE POSITIVIDADE E O TEOREMA DE KOECHER-VINBERG

Na álgebra de operadores, o teorema de Koecher-Vinberg é um teorema de reconstrução para álgebras de Jordan reais. Foi provado independentemente por Max Koecher em 1957 e Ernest Vinberg em 1961. Ele fornece uma correspondência um-a-um entre álgebras de Jordan formalmente reais e os chamados domínios de positividade. Assim, ele vincula visões teóricas de ordem convexa e algébrica de operadores em espaços de estado de sistemas físicos.

Um cone convexo C é chamado de *regular* se $a = 0$ sempre que a e $-a$ estão no fecho $\overline{C}$.

Um cone convexo C em um espaço vetorial A com um produto interno tem um cone dual

$$C^* = \{a \in A; \;\; \forall \;\; b \in C, \langle a, b \rangle > 0\}.$$

O cone é denominado autodual quando $C = C^*$ e homogêneo quando a quaisquer dois pontos $a, b \in C$ há uma transformação linear real $T : A \to A$ que se restringe a uma bijeção $C \to C$ e satisfaz $T(a) = b$.

O Teorema de Koecher-Vinberg agora afirma que essas propriedades caracterizam precisamente os cones positivos das álgebras de Jordan. Segundo o teorema, há uma correspondência um-para-um entre álgebras de Jordan formalmente reais e cones convexos que são:

- abertos;
- regulares;
- homogêneos;
- auto-duais.

Os cones convexos que satisfazem essas quatro propriedades são chamados de *Domínios de Positividade* ou *Cones Simétricos*. O domínio de positividade associado a uma álgebra de Jordan real A é o interior do cone "positivo" $A_+ = \{a^2;\, a \in A\}$.

4.1 Algumas Noções e Notações

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo comutativo e X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Vamos assumir que a dimensão de X sobre $\mathbb{K}$ é finita e denotá-la por n. Assim, $dim_{\mathbb{K}}X := n$.

Os elementos de X serão denotados por $a, b, ..., x, y, z$ e os elementos do corpo $\mathbb{K}$ serão denotados por $\alpha, \beta, ..., \xi, \omega$.

Uma aplicação $l : X \to \mathbb{K}$ é chamada de forma linear no espaço X se vale $l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$ para todos $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. O conjunto X^* de todas as formas lineares de X é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de forma natural, uma vez que $(\alpha l_1 + \beta l_2)(x) = \alpha l_1(x) + \beta l_2(x)$. A dimensão de X^* sobre $\mathbb{K}$ é igual à dimensão n de X sobre $\mathbb{K}$. Chamamos X^* de espaço dual de X.

É bem sabido que todo subespaço $n-1$ dimensional de X é dado por uma equação $l(x) = 0$ para uma forma linear não trivial adequada l. Por *hiperplano de* X queremos dizer cada subconjunto de X dado por uma equação $l(x) = \alpha$ para uma forma linear não-trivial fixa l de X^* e α em $\mathbb{K}$.

Para cada transformação linear A de X, isto é, para cada endomorfismo $A : X \to X$ de um espaço vetorial X, o **determinante de** A e o *traço de* A são bem definidos. De fato, seja $u_1, ..., u_n$ uma base de X. Então a transformação linear A possui uma representação por uma matriz $B = (\beta_{kl})$ dada como segue:

$$A\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (\beta_{kl}\xi_l)\, u_k$$

Então colocamos $detA := detB := det(\beta_{kl})$ e $tr(A) := tr(B) := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \beta_{kk}$.

É facilmente verificado que o determinante $detA$ e o traço $tr(A)$ não dependem da escolha da base. Chamamos a matriz B de *representação de* A em relação à base $u_1, ..., u_n$. A transformação linear A tem o núcleo $\{0\}$ se, e somente se, $detA = 0$. Neste caso, A é bijetivo e a transformação inversa será denotada por A^{-1}.

Uma aplicação $\sigma : X \times X \to K$ é uma forma bilinear simétrica se
(FBS.1) $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ $x, y \in X$
(FBS.2) $\sigma(x, \alpha y + \beta z) = \alpha\sigma(x, y) + \beta\sigma(x, z)$, $x, y, z \in X$ e $\alpha, \beta \in K$
σ é chamada *não-singular* se $\sigma(x, y) = 0$ para todo $y \in X$ implica $x = 0$.

Sejam $\sigma(x, y)$ uma forma bilinear não-singular em X fixada e $a \in X$. Pela definição $a^* : X \to \mathbb{K}$, $a^*(x) := \sigma(a, x)$, temos a forma linear a^* em X. Obviamente, a aplicação $\varphi : X \to X^*$, $a \mapsto a^*$, é um homomorfismo de espaços vetoriais. O núcleo de φ, denotado por $ker\varphi$, consiste de todos os $a \in X$ tais que $\sigma(a,x) = 0$. Uma vez que σ é não-singular, segue que $a = 0$. Logo, a aplicação σ é injetiva. Já que X e X^* tem a mesma dimensão finita, segue que σ é um isomorfismo. Consequentemente, dada uma forma linear $l \in X^*$, existe um único vetor $l^* \in X$ tal que $l(x) = \sigma(l^*, x)$, com $x \in X$.

Observe que $a^{**} = a$ e $l^{**} = l$ para todo $a \in X$ e $l \in X^*$.

Sejam A uma transformação linear de X e $a \in X$. A aplicação $X \to \mathbb{K}, x \mapsto \sigma(a, Ax)$, é uma forma linear. Consequentemente, existe um único vetor $\overline{a} \in X$ tal que $\sigma(a, Ax) = \sigma(\overline{a}, x)$, com $x \in X$. Obviamente, a aplicação $A^* : X \to X, a \mapsto \overline{a}$, é um endomorfismo de X. Chamamos A^* de *transformação adjunta de A (com relação a σ)*, portanto $\sigma(y, Ax) = \sigma(A^*y, x)$, para $x, y \in X$.

Dadas transformações lineares A, B de X, temos $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$ e $(A^*)^* = A$.

Sejam $\xi_1, ..., \xi_n$ e $\eta_1, ..., \eta_n$ os coeficientes de x e y em relação à base $u_1, ..., u_n$, respectivamente. A forma bilinear σ é representada pela matriz simétrica $S = (\sigma_{kl}) = (\sigma(u_k, u_l))$ como segue:

$$\sigma(x, y) = \sum_{k,l=1}^{n} \xi_k \sigma_{kl} \eta_l.$$

Seja A uma transformação linear de X representada pela matriz B em relação à base $u_1, ..., u_n$. Então, a matriz representação de A^* é dada por

$$B^* = S^{-1} B^t S,$$

onde B^t denota a transposta da matriz B. Consequentemente, temos $detA^* = detA$ e $tr(A^*) = tr(A)$.

Uma transformação linear A é chamada de *autoadjunta* se $A^* = A$. Tendo em vista que

$$\sigma(x, Ay) = \sigma(A^*x, y) = \sigma(y, A^*x),$$

a forma bilinear $\sigma_A(x, y) := \sigma(x, Ay)$ é simétrica se, e somente se, $A^* = A$. Por outro lado, seja $\tau(x, y)$ uma forma bilinear simétrica arbitrária em X.

Dado $x \in X$, existe um único $\tilde{x} \in X$ satisfazendo $\tau(x, y) = \sigma(\tilde{x}, y)$, $y \in X$, e $A : X \to X$, $x \mapsto \tilde{x}$ é uma transformação linear. Segue que $\tau(x, y) = \sigma(Ax, y)$, $x, y \in X$.

Como τ é simétrica, A é autoadjunta. Resumindo, existe uma correspondência bijetiva entre as transformações lineares auto-adjuntas de X e as formas bilineares simétricas em X.

Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o corpo dos números reais. Usando um isomorfismo entre X e $\mathbb{R}^n$, o espaço vetorial X possui uma topologia natural. Em relação à essa topologia, as aplicações

$$X \to X, x \mapsto \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$X \to \mathbb{R}, x \mapsto l(x), l \in X^*$$

$$X \times X \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sigma(x, y),$$

são contínuas. Essa topologia natural em X pode ser dada por uma norma arbitrária em X, isto é, uma aplicação $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, que tenha as seguintes propriedades:

$$|x| > 0, \text{ para } x \in X, x \neq 0, |0| = 0,$$

$$|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ e } x \in X,$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \text{ com } x, y \in X$$

Seja $Hom(X, X)$ o conjunto de todas as transformações lineares de X. Temos que $Hom(X, X)$ também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão n^2 e, portanto, tem-se uma topologia natural em $Hom(X, X)$. Por outro lado, podemos definir uma norma em $Hom(X, X)$ como segue:

Para $W \in Hom(X, X)$,

$$|W| := sup \left\{ \frac{|Wx|}{|x|}; 0 \neq x \in X \right\} = sup \{|Wx|; x \in X, |x| = 1\}$$

com $X \neq \{0\}$, $|\cdot|$ torna-se uma norma em $Hom(X, X)$, satisfazendo

$$|W_1 W_2| \leq |W_1| \cdot |W_2|, \text{ com } W_1, W_2 \in Hom(X, X).$$

Essa norma também define uma topologia natural em $Hom(X, X)$. Especialmente, o conjunto

$$\{W \in Hom(X, X); |W| \leq \gamma\}$$

é compacto em $Hom(X, X)$.

Denote por $GL(X)$ o grupo linear geral de X, isto é, o grupo de todos $W \in Hom(X, X)$ tais que $detW \neq 0$. Temos que $GL(X)$ é um subconjunto aberto de $Hom(X, X)$ e é um grupo topológico localmente compacto com relação à topologia induzida.

Vimos que o conjunto $\{W \in Hom(X, X); |W| \leq \gamma\}$ é compacto em $Hom(X, X)$. O conjunto

$$\{W \in GL(X); |W| \leq \gamma\}, \text{ com } \gamma > 0,$$

é não-compacto em $GL(X)$.

Agora, consideremos o conjunto

$$K := \{W \in GL(X); |W| \leq \gamma_1, |W^{-1}| \leq \gamma_2\}.$$

Uma vez que a aplicação $W \mapsto |detW|$ é contínua e $|W^{-1}| \leq \gamma_2\}$, o valor absoluto do determinante de W^{-1} é limitado. Tendo em vista que

$$1 = |detW| \cdot |W^{-1}| \leq \gamma_3 |detW|,$$

segue que K é fechado em $GL(X)$. Por outro lado, K está contido na interseção de $GL(X)$ com o conjunto compacto $\{W \in Hom(X, X); |W| \leq \gamma_1\}$. Consequentemente, K é compacto em $GL(X)$.

Definição 4.1.1. *Uma transformação linear autoadjunta A de X é dita positiva definida se $\sigma(Ax, x) > 0$ para todo $x \in X$, com $x \neq 0$. Além disso, A é dita positiva semidefinida se $\sigma(Ax, x) \geq 0$ para todo $x \in X$.*

A forma bilinear fixada σ é dita *positiva definida* se a transformação identidade é positiva definida, ou seja, se $\sigma(x, x) > 0$ para todo $x \in X$, com $x \neq 0$.

Uma forma bilinear positiva σ define um *elemento de volume* no espaço vetorial X. De fato, sejam $\tau_1, ..., \tau_n$ as componentes do ponto $t \in X$ com relação à alguma base $u_1, ..., u_n$ e seja $S = (\sigma_{kl})$ a matriz da forma bilinear σ. Temos que

$$dt = |detS|^{-\frac{1}{2}} d\tau_1 ... d\tau_n.$$

Perceba que elemento de volume dt independe da escolha da base.

Se G é um subconjunto compacto e relativo de X e $f : \overline{G} \to G$ é contínua, temos a integral (de Riemann)

$$\int_G f(t)\, dt.$$

Como é bem conhecido, essa noção pode ser estendida para incluir funções que satisfaçam certas condições de crescimento em domínios abertos ilimitados.

As noções diferenciáveis, real-analíticas, racionais, polinomiais, etc., podem ser definidas em coordenadas assim que uma base é dada e são independentes da escolha da base.

4.2 A Noção de um Domínio de Positividade

Pelo resto deste capítulo, seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão n. Assumiremos que $|x|$ é uma norma em X, a qual, portanto, define uma topologia natural em X. Além disso, seja $\sigma(x, y)$ uma forma bilinear simétrica não-singular em X.

Definição 4.2.1. *Um subconjunto Y de X é chamado de domínio de positividade (em relação a σ) se os seguintes axiomas são cumpridos:*
(P.0) Y é aberto e não-vazio.
(P.1) Dados $a, b \in Y$, temos que $\sigma(a, b) > 0$.
(P.2) Se $x \in X$, então $\sigma(a, x) > 0$ para todo $a \in \overline{Y}$, com $a \neq 0$, implica $x \in Y$.
$\overline{Y}$ representa o fecho e ∂Y representa a fronteira de Y na topologia natural em X. Estes três axiomas são independentes.

Uma vez que a forma bilinear $\sigma(x, y)$ é contínua, conclui-se que $\sigma(x, y) \geq 0$ para $x, y \in \overline{Y}$.

Mais precisamente, temos

Teorema 4.2.2. *Dados um domínio de positividade Y e $x \in X$, vale o seguinte:*
(a) $x \in Y$ é equivalente a $\sigma(a, x) > 0$ para todo $0 \neq a \in \overline{Y}$.
(b) $x \in \overline{Y}$ é equivalente a $\sigma(a, x) > 0$ para todo $0 \neq a \in Y$.

Demonstração:

(a) Dado $x \in Y$, temos $\sigma(a,x) \geq 0$ para $a \in \overline{Y}$.

Para $a \neq 0$ fixado, a aplicação $x \mapsto \sigma(a,x)$ é uma forma linear não-trivial em X. Consequentemente, a aplicação é aberta. Assim, a imagem do conjunto aberto Y é aberta em $\mathbb{R}$ e, portanto, $\sigma(a,x) > 0$ para todo $x \in Y$.

A recíproca é (P.2).

(b) Em virtude da continuidade, segue de (P.1) que $x \in \overline{Y}$ implica $\sigma(a,x) > 0$ para todo $0 \neq a \in Y$.

Reciprocamente, seja $\sigma(a,x) \geq 0$ para todo $a \in Y$. Então, $\sigma(a,x) \geq 0$ também vale para todo $a \in \overline{Y}$. Para $a \neq 0$ e fixado $b \in Y$, temos $\sigma(a,b) > 0$ por (a). Consequentemente, para $\mu > 0$, temos

$$\sigma(a, x + \mu b) = \sigma(a,x) + \mu\sigma(a,b) > 0.$$

Isso é verdade para cada $a \in \overline{Y}$, com $a \neq 0$. Portanto, (P.2) implica $x + \mu b \in Y$. Fazendo $\mu \to 0$, obtemos $x \in \overline{Y}$.

■

Segue, diretamente deste teorema, que o fecho aberto de Y é o próprio Y, isto é, $\overline{Y}^{\circ} = Y$.

Teorema 4.2.3. *Seja Y um domínio de positividade. Temos que*
(a) Se $x \in \overline{Y}$ e $y \in Y$, então $x + y \in Y$
(b) Se $x \in Y$ e $\lambda > 0$, então $\lambda x \in Y$.
(c) Dado $0 \neq a \in \partial Y$, existe $0 \neq b \in \partial Y$ que satisfaz $\sigma(a,b) = 0$
(d) Se $a \in \overline{Y}$ e $-a \in \overline{Y}$, então $a = 0$.
(e) H é um plano suporte de Y se, e somente se, $H = \{x \in X; \sigma(a,x) = 0\}$ para algum $0 \neq a \in \overline{Y}$.

Demonstração:

(a) Dado $0 \neq a \in \overline{Y}$, temos que $\sigma(a,x) \geq 0$ e $\sigma(a,y) > 0$, pelo Teorema 4.2.2. Consequentemente, $\sigma(a, x+y) = \sigma(a,x) + \sigma(a,y) > 0$ e, portanto, $x + y \in Y$.

(b) Basta usar o Teorema 4.2.2, afirmação (a).

(c) Temos $\sigma(a,b) \geq 0$ para todo $b \in \overline{Y}$, com $b \neq 0$. Se $\sigma(a,b) > 0$ para todo $b \in \overline{Y}$, com $b \neq 0$, então $a \in Y$ por (P.2). Consequentemente, existe $b \in \overline{Y}, b \neq 0$, que satisfaz $\sigma(a,b) = 0$. O Teorema 4.2.2 a) mostra que $b \notin Y$, assim $b \in \partial Y$.

(d) Por suposição, temos $\sigma(a,x) \geq 0$ e $-\sigma(a,x) \geq 0$. Sendo assim, $\sigma(a,x) = 0$ para todo $x \in Y$. Como Y é aberto, existem n vetores linearmente independentes em Y, e, consequentemente, $\sigma(a,x) = 0$ para todo $x \in X$. Como σ é não-singular, segue que $a = 0$.

(e) Seja $a \in X$, $a \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $H = \{x \in X; \sigma(a,x) - \lambda = 0\}$ é um plano suporte de Y. Conclui-se que todo $x \in \overline{Y}$ satisfaz $\sigma(a,x) - \lambda \geq 0$. Para $x = 0$, obtemos $\lambda \leq 0$ Para $x = \mu y$, $\mu > 0$, $y \in \overline{Y}$, temos

$\sigma(a, y) - \frac{1}{\mu}\lambda \geq 0$. Fazendo $\mu \to \infty$, temos que $\sigma(a, y) \geq 0$ para todo $y \in \overline{Y}$. Como H é um plano suporte, seque que $\lambda = 0$. Agora aplicamos o Teorema 4.2.2(b) e obtemos que $a \in \overline{Y}$.

Reciprocamente, dado $0 \neq a \in \overline{Y}$, pelo Teorema 4.2.2(a), temos que $\sigma(a, x) > 0$ vale para todo $x \in Y$. Tendo em vista que $0 \in \overline{Y}$ e $\sigma(a, 0) = 0$, o hiperplano $H := \{x \in X;\, \sigma(a, x) = 0\}$ é um plano suporte de Y.

■

Em Geometria, um hiperplano pode ser um espaço vetorial, transformação afim ou o subespaço de dimensão $n-1$. Denomina-se **hiperplano** em X (por exemplo, $X = \mathbb{R}^n$) um conjunto de elementos tal que $H = \{x \in X;\, p^T \cdot x = b\}$, sendo p um vetor não-nulo normal (perpendicular) a H e que pertence a X, e b pertence ao conjunto dos números reais. Um hiperplano é um espaço vetorial se $b = 0$. Em particular, num espaço tridimensional, um hiperplano é um plano habitual. Num espaço bidimensional, um hiperplano é uma reta. Num espaço unidimensional, um hiperplano é um ponto.

Definição 4.2.4. *Um hiperplano H em X é chamado de plano de suporte de um conjunto $A \subset X$ se H pode ser descrito por uma equação $\sigma(a, x) - \lambda = 0$ para algum $a \in X$, com $a \neq 0$, tal que $\sigma(a, x) - \lambda \geq 0$ vale para todo $x \in A$ e $\sigma(a, x) - \lambda = 0$ para pelo menos um $x \in \overline{A}$.*

As afirmações (a) e (b) do Teorema 4.2.3 implicam que Y é um cone convexo. Isto é,

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in Y \text{ e } \beta x \in Y \text{ para todos } x, y \in Y, \text{ com } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ e } \beta > 0.$$

Além disso, segue do Teorema 4.2.3(d) que Y é um cone convexo próprio, isto é, Y não contém um subespaço de X de dimensão 1.

Domínios de positividade são *maximais* no seguinte sentido: se $Y_1 \subset Y_2$ são dois domínios de positividade em relação à mesma forma bilinear, então $Y_1 = Y_2$. De fato, seja $0 \neq y_1 \in \overline{Y_1}$ e $y_2 \in Y_2$. Tendo em vista que $Y_1 \subset Y_2$, temos que $0 \neq y_1 \in \overline{Y_2}$ e, consequentemente, $\sigma(y_1, y_2) > 0$, pelo Teorema 4.2.2(a) para Y_2. O axioma (P.2) para Y_1 nos dá $y_2 \in Y_1$ e, consequentemente, $Y_2 \subset Y_1$. Sendo assim, $Y_1 = Y_2$.

O lema a seguir é fácil de provar e é bastante útil.

Lema 4.2.5. *Dado qualquer conjunto compacto K em Y, existe um número positivo $\varrho = \varrho(K)$ tal que $\sigma(a, y) \geq \varrho(K) \cdot |y|$ para todo $a \in K$ e $y \in \overline{Y}$.*

Demonstração:

O conjunto

$$K' := \{(a, y);\ a \in K, y \in \overline{Y}, |y| = 1\}$$

é compacto em $\overline{Y} \times \overline{Y}$.

Como $\sigma(a, y)$ é contínua, existe $(a_0, y_0) \in K'$ tal que $\sigma(a, y) \geq \sigma(a_0, y_0) > 0$ para $(a, y) \in K'$.

Defina $\varrho(K) := \sigma(a_0, y_0)$, então obtemos $\sigma(a, y) \geq \varrho(K)0$ para $a \in K$, $y \in \overline{Y}$ e $|y| = 1$.

Por homogeneidade, temos que $\sigma(a, y) \geq \varrho(K) \cdot |y|$ para $a \in K$ e $0 \neq y \in \overline{Y}$.

Para $y = 0$ a afirmação é óbvia, já que $|y| = 0$ neste caso.

$\blacksquare$

Se K contém apenas um único ponto $a \in Y$, então definimos $\varrho(K) := \varrho(a)$ e temos $\sigma(a, y) \geq \varrho(a) \cdot y$ para $y \in \overline{Y}$.

Lembrando que uma *ordenação* "$\geq$" no conjunto X satisfaz:

(0) $$x \geq x \text{ para todo } x \in X$$

(1) $$x \geq y,\ y \geq z \Rightarrow x \geq z,$$

(2) $$x \geq y,\ y \geq x \Rightarrow x = y$$

Pelo Teorema 4.2.3, a definição

$$x \geq y \Leftrightarrow x - y \in \overline{Y}$$

nos dá uma ordenação.

Além disso, essa ordenação é compatível com a estrutura de espaço vetorial, isto é, temos

(3) $$x \geq y \text{ e } \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \geq \lambda y,$$

(4) $$x \geq y \text{ e } a \in X \Rightarrow a + x \geq a + y.$$

A forma bilinear $\sigma(a, x)$ é monótona:

(5) $$a \geq 0,\ x \geq y \Rightarrow \sigma(a, x) \geq \sigma(a, y)$$

e "$\geq$" é uma *ordenação arquimediana*:

(6) $$\text{Dados } a \in Y \text{ e } x \in X, \text{ existe } \lambda > 0 \text{ tal que } \lambda a \geq x.$$

Uma vez que o conjunto $\{x \in X;\ |x| = 1\}$ é compacto, temos $|\sigma(a, x)| \leq \kappa \cdot |a| \cdot |x|$ para todo $a \in Y$, $x \in X$ (Desigualdade de Schwarz) com um certo κ positivo. Por outro lado, temos que $\sigma(a, b) \geq \varrho(a) \cdot |b|$, para $b \in \overline{Y}$ (Lema 3.1). Seja $b \in Y$ e $\lambda > 0$. Então,

$$\sigma(b, \lambda a - x) = \lambda\sigma(a, b) - \sigma(b, x) \geq \lambda\varrho(a) \cdot |b| - \kappa \cdot |b| \cdot |x| \geq |b| \cdot (\lambda\varrho(a) - \kappa|x|).$$

Para todo λ, $\lambda > \kappa \cdot |x|/\varrho(a)$, temos $\sigma(b, \lambda a - x) \geq 0$. Daí, o Teorema 4.2.2(b) fornece $\lambda a - x \geq 0$.

(7) $$\text{Dados } a_1, ..., a_m \in Y, \text{ existe } d \in Y \text{ tal que } a_\mu \geq d, \text{ para } 1 \leq \mu \leq m.$$

De fato, seja c um elemento fixo de Y e seja $\lambda_\mu > 0$ tal que $\lambda_\mu a_\mu \geq c$ para $1 \leq \mu \leq m$. Consequentemente, a Afirmação (7) vale para $d := min\left\{\frac{1}{\lambda_1}, ..., \frac{1}{\lambda_m}\right\} \cdot c$.

(8) $$\text{Existe um número } \gamma_1 \text{ positivo tal que } x \geq y \geq 0 \text{ implica } |x| \geq \gamma_1 \cdot |y|.$$

Para verificarmos isso, seja $d \in Y$. Temos (por (5), pela Desigualdade de Schwarz e pelo Lema 3.1) que

$$\kappa \cdot |x| \cdot |d| \geq \sigma(d, x) \geq \sigma(d, y) \geq \varrho(d) \cdot |y|.$$

Afirmação está provada para $\gamma_1 := \dfrac{\varrho(d)}{\kappa \cdot |d|}$.

(9) Dados $a, b \in Y$, $a \leq b$, o conjunto $\{x \in X;\ a \leq x \leq b\}$ é um subconjunto compacto de Y.

De fato, esse conjunto é fechado em X e, por (8), limitado. Portanto, o conjunto é compacto em X. Tendo em vista que $y \geq a \geq 0$, o conjunto está contido em Y.

(10) Dados $x, y \in \overline{Y}$, com $y \neq 0$, existe $\alpha \geq 0$ tal que $x - \alpha y \in \partial Y$.

Se $x \in \partial Y$, basta tomarmos $\alpha = 0$. Sejam $x \in Y$ e $x \geq x - \beta y \geq 0$, $\beta \geq 0$. Então, por (8),

$$|x| \geq \gamma_1 |x - \beta y| \geq \gamma \cdot (\beta |y| - |x|).$$

Portanto, o conjunto de possíveis β é limitado. Uma vez que $\overline{Y}$ é fechado, existe $\alpha \geq 0$ tal que $x - \alpha y \in \overline{Y}$ e $x - \beta y \notin \overline{Y}$ para $\beta > \alpha$. Como Y é aberto, concluímos que $x - \alpha y \in \partial Y$.

(11) Se $n > 1$, temos $\{y_1 + y_2;\ y_1, y_2 \in \partial Y\} = \overline{Y}$.

A inclusão $\{y_1 + y_2;\ y_1, y_2 \in \partial Y\} \subset \overline{Y}$ segue de $y_1 + y_2 \geq y_1 + 0 \geq 0$ devido a (4).

Como $n > 1$, existem (pelo menos) dois vetores linearmente independentes em Y. Portanto, $\partial Y \neq 0$ é uma consequência de (10). Dado $x \in \overline{Y}$, escolha $0 \neq y \in \partial Y$ e $\alpha \geq 0$ com $x - \alpha y \in \partial Y$. A afirmação segue do fato de que

$$x = (x - \alpha y) + \alpha y \text{ e } \alpha y \in \partial Y.$$

Além da ordenação "$\geq$", apresentamos a relação "$>$" por

$$x > y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

As afirmações (1) e (3) até (8) continuam válidas se substituirmos "$\geq$" por "$>$". Deve-se ter em mente que $x > y$ **não** é equivalente a $x \geq y$ e $x \neq y$.

4.3 Os Automorfismos de um Domínio de Positividade

Uma transformação $W : X \to X$ é chamada de *automorfismo* (linear) do domínio de positividade Y se $W\overline{Y} = \overline{Y}$.

Como Y é aberto e não-vazio, ele contém uma base de X. Sendo assim, a transformação linear W é não-singular, ou seja, $detW \neq 0$.

Os elementos de $GL(X)$ são homomorfismos de X.

Tendo em vista que $\overline{Y}^{\circ} = Y$, a transformação linear $W : X \to X$ é um automorfismo de Y se, e somente se $WY = Y$.

Como $\det W \neq 0$, o conjunto de todos os automorfismos de Y é o grupo (multiplicativo) $\Sigma(Y)$, um subgrupo de $GL(X)$, chamado de *grupo de automorfismos* de Y.

Uma vez que Y é um cone, a aplicação $x \mapsto \lambda x$, com $\lambda > 0$, pertence a $\Sigma(Y)$.

Considerando a forma bilinear $\sigma(x, y)$, temos a transformação adjunta W^* de W.

Lema 4.3.1. *Se $W \in \Sigma(Y)$, então $W^* \in \Sigma(Y)$.*

Demonstração:

Sejam $a \in \overline{Y}$ e $y \in Y$. Temos que $Wy \in Y$ e, portanto, $\sigma(W^*a, y) = \sigma(a, Wy) \geq 0$.

O Teorema 3.1(b) implica que $W^*a \in \overline{Y}$ou $W^*\overline{Y} \subset \overline{Y}$. Consequentemente, $W^*\overline{Y} = \overline{Y}$.

■

Sabendo que $(W_1W_2)^* = W_2^*W_1^*$, a aplicação

$$\Sigma(Y) \to \Sigma(Y), W \mapsto W^*,$$

é um antiautomorfismo[1].

O conjunto $\Sigma(Y)$ é um subgrupo de $GL(X)$ e, consequentemente, um grupo topológico. A aplicação $W \mapsto W^*$ é um homeomorfismo. Temos que $\Sigma(Y)$ é um conjunto fechado da topologia induzida em $GL(X)$.

De fato, seja $A \in GL(X)$, $A = \lim_{\mu \to \infty} W_\mu$, com $W_\mu \in \Sigma(Y)$. Como $detA \neq 0$, segue também que

$$\lim_{\mu \to \infty} W_\mu^{-1} = A^{-1}.$$

Temos que $W_\mu\overline{Y} = \overline{Y}$ e $W_\mu^{-1}(\overline{Y}) = \overline{Y}$.

Consequentemente, $A\overline{Y} \subset \overline{Y}, A^{-1}\overline{Y} \subset \overline{Y}$ ou $A\overline{Y} = \overline{Y}$.

Isso implica que $A \in \Sigma(Y)$.

Agora, lembraremos o conceito de um grupo de transformação.

Sejam Y um espaço topológico e Σ um grupo topológico, dizemos que Σ é o *grupo de transformação em* Y se

(T.1) Dados $W \in \Sigma$ e $x \in Y$, então $Wx \in Y$.

(T.2) A aplicação $\Sigma \times Y \to Y$, $(W, x) \mapsto Wx$ é contínua.

Além disso, Σ é chamado de *grupo próprio de transformação* se

(T.3) A aplicação $\Phi : \Sigma \times Y \to Y \times Y$, $(W, x) \mapsto (x, Wx)$ é própria, isto é, a imagem inversa de cada subconjunto fechado também é um conjunto fechado.

Como Φ pode ser escrita como a composição $(W, x) \mapsto (x, W, x) \mapsto (x, Wx)$, ela é contínua.

Teorema 4.3.2. *Dado um domínio de positividade Y, o grupo de automorfismo $\Sigma(Y)$ é um grupo próprio de transformação em Y.*

[1]Um **antihomomorfismo** é um tipo de função (definida sobre conjuntos com multiplicação) que inverte a ordem da multiplicação. Um **antiautomorfismo** é um anti-homomorfismo que tem um inverso como um antihomomorfismo; este coincide com ele sendo uma bijeção de um objeto sobre si mesmo.

Demonstração:

Apenas precisamos provar que para todo subconjunto compacto K de $Y \times Y$, a imagem inversa $\Phi^{-1}(K)$ é um compacto em $\Sigma \times Y$.

Seja K um subconjunto compacto de $Y \times Y$. Vamos assumir que K tem a forma $K = K_1 \times K_2$, onde K_1 e K_2 são subconjuntos compactos de Y, porque todo subconjunto compacto de $Y \times Y$ está contido em um conjunto compacto deste tipo.

Como Φ é contínua, a imagem inversa $\Phi^{-1}(K_1 \times K_2)$ é fechada em $\Sigma \times Y$. Sendo assim, o teorema está provado se conseguirmos determinar um subconjunto compacto M de $\Sigma(Y)$ tal que

(12) $$\Phi^{-1}(K_1 \times K_2) \subset M \times K_1.$$

Seja $M = M(K_1, K_2) := \{W \in \Sigma(Y);\ WK_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$. Sendo assim, (12) está satisfeita.

De fato, dado $(W, x) \in \Phi^{-1}(K_1 \times K_2)$, então $\Phi(W, x) = (x, Wx) \in K_1 \times K_2$.

Daqui, $x \in K_1$ e $Wx \in K_2$. Portanto, temos que $Wx \in WK_1 \cap K_2$ e $(W, x) \in M \times K_1$.

Agora mostraremos que M é compacto.

Dado $W \in M$, existe $x_W \in K_1$ tal que $Wx_W \in K_2$. Para $y \in Y$, aplicamos o Lema 3.1 e obtemos

$$\sigma(Wx_W, y) = \sigma(x_W, W^*y) \geq \varrho(K_1) \cdot |W^*y|.$$

A desigualdade de Schwarz $\sigma(a, b) \leq \kappa \cdot |a| \cdot |b|$ implica

$$\sigma(Wx_W, y) \leq \kappa \cdot |Wx_W| \cdot |y| \leq \gamma_1 \cdot |y|,$$

pois $Wx_w \in K_2$ e $|x|$ é limitada, já que $x \in K_2$.

Resumindo, temos $|W^*y| \leq \gamma_2 \cdot |y|$, para $y \in Y$.

Como Y é aberto e, consequentemente, contém uma base de X, conclui-se que

$$|W^*x| \leq \gamma_3 \cdot |x| \text{ para } x \in X.$$

Pela definição da norma $|W|$, obtemos

$$|W^*| \leq \gamma_3.$$

Como $W \mapsto W^*$ é um homeomorfismo, também tem-se

(13) $$W \in M(K_1, K_2) \Rightarrow |W| \leq \gamma_4.$$

A definição de $M(K_1, K_2)$ implica

$$W \in M(K_1, K_2) \Rightarrow W^{-1} \in M(K_2, K_1).$$

De (13), segue que

$$W \in M(K_1, K_2) \Rightarrow |W| \leq \gamma_4, |W^{-1}| \leq \gamma_5.$$

Note que γ_i depende apenas de K_1 e K_2.

Já sabemos que $M(K_1, K_2)$ está contido em um subconjunto compacto de $GL(X)$ e $M(K_1, K_2)$ é fechado em $GL(X)$. Uma vez que $M(K_1, K_2) \subset \Sigma(Y)$ e $\Sigma(Y)$ é fechado em $GL(X)$, o conjunto $M(K_1, K_2)$ é fechado em $\Sigma(Y)$ e, consequentemente, compacto.

$\blacksquare$

Corolário 4.3.3. *Dado $a \in Y$, temos que $\{W \in \Sigma(Y); Wa = a\}$ é um subgrupo compacto de $\Sigma(Y)$.*

Demonstração:

Façamos $K_1 = K_2 = \{a\}$, então $\Phi^{-1}(K_1 \times K_2) = \{(W, a); Wa = a\}$.

$\blacksquare$

Lema 4.3.4. *Dado um domínio de positividade Y (em relação a σ), as seguintes afirmações são equivalente:*
(i) Y é um domínio de positividade em relação a τ
(ii) Existe um $W \in \Sigma(Y)$ autoadjunto tal que $\tau(x, y) = \sigma(W_x, y)$.

Demonstração:

Suponhamos que Y é um domínio de positividade em relação a σ. Vamos mostrar que existe um $W \in \Sigma(Y)$ autoadjunto tal que $\tau(x, y) = \sigma(W_x, y)$.

De fato, como τ é simétrica, existe um operador linear autoadjunto W tal que $\tau(x, y) = \sigma(Wx, y)$. Dados $y \in \overline{Y}$, com $y \neq 0$ e $x \in Y$, vale que $\sigma(Wx, y) > 0$.

Pelo Teorema 4.2.2, $Wx \in Y$ e $WY \subset Y$.

Trocando τ e σ, obtemos $W^{-1}Y \subset Y$ e $W \in \Sigma(Y)$.

Reciprocamente, se existe um $W \in \Sigma(Y)$ autoadjunto tal que $\tau(x, y) = \sigma(W_x, y)$, mostraremos que Y é um domínio de positividade. Com efeito, aplicamos a definição e também $WY = Y$ e $W\overline{Y} = \overline{Y}$.

$\blacksquare$

4.4 Normas de um Domínio de Positividade

Seja Y um domínio de positividade fixo (em relação a $\sigma(x, y)$). Uma funçao $\varphi : \overline{Y} \to \mathbb{R}$ é dita uma *norma* em Y se
(N.1) φ é analítica-real e positiva em Y, contínua em $\overline{Y}$.
(N.2) $\varphi(y) = 0$ para $y \in \partial Y$.
(N.3) $\varphi(Wy) = |detW| \cdot \varphi(y)$ para $W \in \Sigma(Y)$ e $y \in Y$.

Como as aplicações do tipo $x \mapsto \lambda x$, com $\lambda > 0$, pertencem a $\Sigma(Y)$, temos $\varphi(\lambda y) = \lambda^n \cdot \varphi(y)$.

Provaremos que existe uma norma em Y.

Consideremos a integral de dimensão n

$$\tilde{\omega}(y) := \int_Y e^{-\sigma(y,t)} dt, \quad y \in Y$$

O Lema 4.2.5 mostra que, para um subconjunto compacto $K \subset Y$, vale

$$\int_Y e^{-\sigma(y,t)} dt \leq \int_Y e^{\varrho(K)\cdot|t|} dt, \quad y \in K.$$

Tendo em vista que

$$\int_Y e^{\varrho(K)\cdot|t|} dt \leq \int_X e^{\varrho(K)\cdot|t|} dt < \infty, \quad y \in K$$

a integral para $\tilde{\omega}(y)$ é uniformemente e absolutamente convergente para $y \in K$. Consequentemente, $\tilde{\omega}(y)$ é analítica-real e positiva em Y.

Na integral

$$\tilde{\omega}(Wy) = \int_Y e^{-\sigma(y,W^*t)} dt, \quad W \in \Sigma(Y),$$

substituímos $t = W^{*-1}x$. Dessa forma, $dt = |detW^{*-1}|dx = |detW|^{-1}$ e isso nos dá

$$\tilde{\omega}(Wy) = |detW|^{-1} \cdot \tilde{\omega}(y). \tag{14}$$

Teorema 4.4.1. *Dada uma constante positiva ω_0, a função*

$$\omega : \overline{Y} \to \mathbb{R}, \ \ \omega(y) := \begin{cases} \dfrac{\omega_0}{\tilde{\omega}(y)} & \textit{para} \quad y \in Y \\ 0 & \textit{para} \quad y \in \partial Y \end{cases}$$

é uma norma em Y, que satisfaz

$$\omega(a) > \omega(b), \ \ \textit{para } a > b > 0.$$

Demonstração:

A continuidade de $\omega(y)$ só precisa ser provada para ∂Y. Portanto, precisamos mostrar que $\tilde{\omega}(y)$ tende ao infinito se $y \in Y$ tende para um ponto $a \in \partial Y$

Dividiremos a dimensão n (da integral) em dois casos.

$n = 1$: Seja $X = \mathbb{R}$, $\sigma(x, y) = \sigma \cdot x \cdot y$, $\sigma > 0$.

Então, temos $Y =]0, \infty[$, $\partial Y = \{0\}$ e

$$\tilde{\omega}(y) = \int_0^\infty e^{-\sigma \cdot y \cdot t} dt = \frac{1}{y} \int_0^\infty e^{-\sigma \cdot t} dt.$$

Sendo assim, a afirmação é verdadeira.

$n > 1$: Existe $0 \neq b \in \partial Y$ tal que $\sigma(a, b) = 0$. De fato, para $a = 0$, podemos pegar qualquer $b \in \partial Y \backslash \{0\}$, e para $a \neq 0$, aplicamos o Teorema 4.2.3(c). Agora escolhemos um conjunto compacto K_0 com $K_0^\circ \neq \emptyset$ (contido em alguma vizinhança de b) tal que

(i) $K_0 \subset Y$,

(ii) $0 < \sigma(a,t) < \dfrac{1}{2}$ para $t \in K_0$.

Seja $K_\lambda := K_0 + \lambda b = \{x \in X;\, x - \lambda b \in K_0\}$. Então, temos

(i) $K_\lambda \subset Y$ para $\lambda > 0$,

(ii) $0 < \sigma(a,t) < \dfrac{1}{2}$ para $t \in K_\lambda$

(iii) vol $K_\lambda =$ vol $K_0 > 0$.

Dado $\gamma > 0$, existe uma união disjunta K de uma quantidade finita de conjuntos K_λ, $\lambda > 0$, tal que

$$0 < \sigma(a,t) < \frac{1}{2} \quad \text{para } t \in K, \qquad \text{vol } K > \gamma,$$

K é compacto. Deste modo, existe uma vizinhança aberta U de a que satisfaz

$$\sigma(y,t) < 1 \text{ para } y \in U \text{ e } t \in K.$$

Consequentemente temos, para $y \in U \cap Y$

$$\tilde{\omega}(y) = \int_Y e^{-\sigma(y,t)} dt \geq \frac{1}{e} \int_K dt > \frac{\gamma}{e}.$$

Portanto, $\tilde{\omega}(y) \to \infty$ quando $y \to a$, $y \in Y$.

Finalmente, por (5), temos

$$\tilde{\omega}(a) < \tilde{\omega}(b) \text{ para } a > b > 0.$$

O Teorema foi provado completamente.

■

4.5 Exemplos

(A) Produtos Diretos

Sejam X_α, $1 \leq \alpha \leq k$, espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Sejam $\sigma_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ formas bilineares simétricas não-singulares em X_α e seja Y_α domínios de positividade em X_α (em relação a σ_α). Fazemos

$$\begin{aligned} X &:= X_1 \oplus X_2 \oplus ... \oplus X_k \\ &= \{x = x_1 + x_2 + ... + x_k;\, x_\alpha \in X_\alpha, \alpha = 1, ..., k\}, \\ \sigma(x,y) &:= \sigma_1(x_1,y_1) + \sigma_2(x_2,y_2) + ... + \sigma_k(x_k,y_k) \text{ para } x, y \in X, \\ Y &:= \{y = y_1 + y_2 + ... + y_k;\, y_\alpha \in Y_\alpha, \alpha = 1, ..., k\}. \end{aligned}$$

Sendo assim, Y é um domínio de positividade (em relação a σ) em X.

Considerando a norma $\omega(y)$, temos

$$\omega(y) = \omega_0 \cdot \left(\int_Y e^{-\sigma(y,t)} dt \right)^{-1} = \omega_0 \cdot \prod_{\alpha=1}^{k} \left(\int_{Y_\alpha} e^{-\sigma_\alpha(y_\alpha,t_\alpha)} dt_\alpha \right)^{-1}$$
$$= \gamma \cdot \prod_{\alpha=1}^{k} \omega_\alpha(y_\alpha)$$

para alguma constante $\gamma > 0$.

Em particular, se iniciarmos com os domínios

$$X_\alpha = \mathbb{R},\ Y_\alpha = \{y \in \mathbb{R};\ y > 0\},\ \sigma_\alpha(x,y) = x \cdot y,$$

o produto deles em $\mathbb{R}^k$ acaba sendo o domínio de positividade

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^k;\ y_\alpha > 0,\ \alpha = 1, ...k\},\ \sigma(x,y) = \sum_{\alpha=1}^{k} x_\alpha y_\alpha.$$

(B) Formas Quadráticas Positivas-Definidas

Sejam X o conjunto de todas as matrizes reais simétricas de ordem $m \times m$, $x = (\xi_{\nu\mu}) = (\xi_{\mu\nu})$, $n = \dfrac{m(m_1)}{2}$ e

$$\sigma(x,y) = tr(xy) = \sum_{\nu,\mu=1}^{m} \xi_{\nu\mu}\eta_{\mu\nu},\ |x| = \sqrt{\sigma(x,x)}.$$

Uma matriz $r = (\varrho_{\nu\mu})$ de ordem $m \times m$ define uma transformação linear $W(r)$ em X por

$$x \mapsto W(r)x := rxr^t,$$

onde r^t representa a matriz transposta de r.

Pode-se verificar que

(15) $W(r_1r_2) = W(r_1)W(r_2)$

(16) $W^*(r) = W(r^t)$

Segue, de (15), que $\psi := |\det\ W(r)|$ satisfaz

(17) $\psi(r_1r_2) = \psi(r_1)\psi(r_2)$.

Um teorema bem conhecido estabelece que toda função contínua $\psi(r)$ que satisfaz (3) e $\psi(r) > 0$ para $\det r \neq 0$ é uma potência de $|\det\ r|$. Daremos uma prova simples para esse teorema na seção posterior, na hipótese de que $\psi(r)$ é diferenciável.

Sendo assim, temos $\psi(r) = |\det\ r|^\varrho$. Uma vez que os elementos de $W(r)$ são polinômios quadráticos na componente r, conclui-se que

$$\phi(\lambda r) = |\det\ W(\lambda r)| = |\det\ \lambda^2 W(r)| = \lambda^{2n}|\det\ W(r)| = \lambda^{2n}\psi(r),$$

e, consequentemente, $\varrho = \dfrac{2n}{m} = m + 1$, isto é,

(18) $|\det\ W(r)| = |\det\ r|^{m+1}$.

Uma matriz $y = (\eta_{\nu\mu}) \in X$ é chamada *positiva definida* se a forma quadrática

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{m} \eta_{\nu\mu}\xi_\nu\xi_\mu$$

é positiva definida, o que é equivalente à propriedade de que todos os autovalores de y são positivos.

Agora, fazemos $Y := \{x \in X;\ y \text{ é positiva definida}\}$.

Temos r matriz real $m \times m$, $\det r \neq 0 \Rightarrow W(r) \in \Sigma(Y)$.

Provaremos que Y é um domínio de positividade em relação a σ. De fato, Y é aberto em X. Para demonstrar (P.1) e (P.2), aplicaremos o seguinte lema bem conhecido:

Lema 4.5.1. *Dado $x \in X$, existe uma matrix real r, com $\det r \neq 0$, tal que $W(r)x$ é uma matriz diagonal.*

Sejam $x, y \in X$, $x = W(r)d$, $d = (\delta_{\nu\mu} d_\mu)$ uma matriz diagonal e $y = W^{*-1}(r)a$.

Obtemos

$$\sigma(x, y) = \sigma(d, a) = \sum_{\nu=1}^{m} d_\nu a_{\nu\nu}$$

Para $x, y \in Y$, temos $a, d \in Y$ e, portanto, $\sigma(x, y) > 0$, pois as entradas da diagonal de uma matriz positiva definida são positivas.

Seja $x \in X$ e $\sigma(x, y) > 0$ para todo $0 \neq y \in \overline{Y}$. Obtemos

$$\sum_{\nu=1}^{m} d_\nu a_{\nu\nu} \text{ para } 0 \neq a \in \overline{Y},$$

e, consequentemente, $d_\nu > 0$ e $d \in Y$. Assim, $x \in Y$.

Agora, consideremos uma norma em Y: por definição, temos,

$$\varphi(Wy) = |\det W| \cdot \varphi(y).$$

Para $W = W(r)$, obtemos

$$\varphi(ryr^t) = |\det r|^{m+1} \cdot \varphi(y).$$

Escolhendo r tal que ryr^t é a matriz identidade, temos $\det y \cdot (\det(r))^2 = 1$. Consequentemente, obtemos

$$\varphi(y) = \varphi_0 \cdot |\det r|^{-(m+1)} = \varphi_0 \cdot (\det y)^{\frac{m+1}{2}}.$$

Toda norma em Y é, portanto, dada por

$$\varphi_0 \cdot (\det y)^{\frac{m+1}{2}}.$$

(C) O Cone Circular

Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\sigma(x, u)$ uma forma bilinear positiva-definida em X. Fixa-se um ponto $c \in X$ tal que $\sigma(c, c) = 1$. Fazendo

$$\mu(x, y) := 2\sigma(c, x) \cdot \sigma(c, y) - \sigma(x, y)$$

obtemos uma nova forma bilinear μ em X.

A forma bilinear μ também é não-singular, uma vez que

$$0 = \mu(a,x) = 2\sigma(c,a) \cdot (c,x) - \sigma(a,x)$$

para todo $x \in X$ implica que $2\sigma(c,a)c = 2$. Consequentemente, $2\sigma(c,a) = \sigma(c,a)$ e $\sigma(c,a0 = 0$. Portanto, temos $0 = \mu(a,a) = -\sigma(a,a)$ e $a = 0$.

$Y = \{y \in X;\ \mu(c,y) > 0,\ \mu(y,y) > 0\}$ é aberto e não vazio (já que $c \in Y$).

Fixando uma base ortogonal em relação a σ, a qual contenha c, pode-se provar que Y é um domínio de positividade em relação a σ.

Usando essa base, podemos determinar uma transformação linear $T \in Hom(X,X)$ autoadjunta e ortogonal (em relação a σ) tal que

$$\mu(x,y) = \sigma(Tx,y) = \sigma(x,Ty) \text{ e } Tc = c.$$

A definição de Y implica que $TY = Y$ e, consequentemente, $T \in \Sigma(Y)$. Portanto, pelo Lema 4.3.4, o conjunto Y também é um domínio de positividade em relação à forma bilinear $\mu(x,y)$.

A norma especial ω em Y (definida no Teorema 4.4.1) pode ser computada como

$$\omega(y) = \gamma_0 \cdot [\mu(y,y)]^{n/2}.$$

4.6 Operadores Diferenciais

Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão n. Lembre-se que, dados um subconjunto D de X e uma aplicação $f : D \to X$ (função com valor vetorial) resp. $f : D \to \mathbb{R}$ (função com valor escalar), temos as noções de aplicação "racional", "analítica real", "diferenciável", etc. para f.

Para um intervalo I e uma função $F : I \to X$, seja

$$F'(\tau) = \frac{d}{d\tau}F(\tau) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F(\tau+\epsilon) - F(\tau)}{\epsilon} \quad (\in X),$$

na hipótese de que o limite existe.

Para continuamente diferenciável

$$f : D \to X \text{ resp. } f : D \to \mathbb{R}$$

e $u \in X$, definimos o operador Δ_x^u por

$$\Delta_x^u f(x) := \frac{d}{d\tau} f(x+\tau u)\Big|_{\tau=0}.$$

Fixando uma base de X, obtemos

$$\Delta_x^u = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial \epsilon_\nu} \omega_\nu$$

se $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ (respectivamente $\omega_1, ..., \omega_n$) são as cordenadas de x (respectivamente u) em relação à essa base.

Consequentemente, dado x, então $\Delta_x^u f(x)$ é linear em u. A fórmula de Taylor diz que

$$f(x + \tau u) = f(x) + \tau \cdot a + O(\tau^2),$$

para f contínua diferenciável duas vezes. Aqui, e no que segue, O denota o símbolo de Landau.

Aplicando o operador Δ_x^u, obtemos $\Delta_x^u f(x) = a$, ou $f(x + \tau u) = f(x) + \tau \cdot \Delta_x^u f(x) + O(\tau^2)$.

Agora, seja f com valor vetorial e g de valor escalar (ou vetorial). Então, temos

$$g(f(x + \tau u)) = g(f(x) + \tau \cdot \Delta_x^u f(x) + O(\tau^2))$$

$$= g(f(x) + \tau \cdot \Delta_{f(x)}^a g(f(x)) + O(\tau^2)), \qquad a = \Delta_x^u f(x),$$

e, consequentemente,

(19) $$\Delta_x^u (f(x)) = \Delta_{f(x)}^a g(f(x)),\ a = \Delta_x^u f(x).$$

Como $\Delta_x^u f(x)$ é linear em u, a aplicação $u \mapsto \Delta_x^u f(x)$ (para um x fixo) é uma transformação linear em X. Denotando essa transformação por $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$, obtemos

$$\Delta_x^u f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} u.$$

Para funções de valores vetoriais f e g, seque de (19) que

(20) $$\frac{\partial g(f(x))}{\partial x} = \frac{\partial g(f(x))}{\partial f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x}.$$

Para funções de valores escalares f e g, temos a regra do produto

$$\Delta_x^u f(x) g(x) = f(x) \Delta_x^u g(x) + g(x) \Delta_x^u f(x).$$

Agora, seja $\sigma(x, y)$ uma forma bilinear simétrica não-singular em X. Vimos que, dado uma função g de valor escalar, a aplicação $X \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \Delta_x^u g(x)$ é linear. Consequentemente, ela é uma forma linear em X, a qual denotaremos por $\dfrac{\partial g(x)}{\partial x}$. Por definição, temos $\Delta_x^u g(x) = \dfrac{\partial g(x)}{\partial x} u$.

Para essa forma linear, existe um único vetor $\left(\dfrac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^* \in X$ tal que

$$\Delta_x^u g(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} u = \sigma\left(\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^*, u\right).$$

Chamamos $\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)$ de *gradiente de g em relação à σ*. Se g é uma função de valor escalar e f é de valor vetorial, então (1) nos dá:

$$\sigma\left(\left(\frac{\partial g(f(x))}{\partial x}\right)^*, u\right) = \Delta_x^u g(f(x)) = \Delta_{f(x)}^a g(f(x)) = \sigma\left(\left(\frac{\partial g(f(x))}{\partial f(x)}\right)^*, a\right)$$

$$= \sigma\left(\left(\frac{\partial g(f(x))}{\partial f(x)}\right)^*, \frac{\partial f(x)}{\partial x} u\right)$$

e, consequentemente,

$$\left(\frac{\partial g(f(x))}{\partial x}\right)^* = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)^* \left(\frac{\partial g(f(x))}{\partial f(x)}\right)^*.$$

Seja f uma função de valor escalar diferenciável duas vezes consecutivamente (definida em um domínio). Então,

$$\tau(u,v) = \Delta_x^u \Delta_x^v f(x)$$

é uma forma bilinear simétrica em X, a qual depende de $x \in X$ e f. Consequentemente, existe uma transformação linear $H(x)$ autoadjunta tal que $\Delta_x^u \Delta_x^v f(x) = \sigma(H(x)u, v)$.

Obtemos

$$\Delta_x^u f(x) = \sigma\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^*, v\right),$$

$$\Delta_x^u \Delta_x^v f(x) = \sigma\left(\Delta_x^u \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^*, v\right) = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* u, v\right)$$

e, consequentemente,

$$H(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^*.$$

Usando a fórmula de Taylor para $\varphi(\tau) = f(x + \tau u)$, obtemos

$$f(x+\tau u) = f(x) + \tau \frac{d}{d\lambda}\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=0} + \frac{1}{2}\tau^2 \frac{d^2}{d\lambda^2}\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=\theta}, \qquad 0 \leq \theta \leq \tau,$$

desde que todo o segmento de linha de x a u pertença ao domínio.

Consequentemente, temos

$$f(x+\tau u) = f(x) + \tau \Delta_x^u f(x) + \frac{1}{2}\tau^2 \sigma(H(x+\theta u)u, u) \qquad \leq \theta \leq \tau.$$

Seja $f(x)$ uma função diferenciável de valor escalar ou vetorial e suponha que para todo $\tau > 0$, $f(\tau x) = \tau^\kappa f(x)$, com algum $\kappa \in \mathbb{R}$. Disso,

$$\Delta_x^x f(x) = \frac{d}{d\tau} f(\tau x)\Big|_{\tau=1} = \kappa f(x)$$

e, consequentemente, temos

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} x = \kappa \cdot f(x).$$

Vejamos agora uma aplicação.

Seja X o conjunto de todas as matrizes reais de ordem $m \times m$. Temos que X é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão $n = m^2$. Fazendo $\sigma(x,y) = tr(xy)$, obtemos uma forma bilinear simétrica não-singular em X.

Em relação à essa forma bilinear, temos as identidades

$$\sigma(xy, z) = \sigma(x, yz) = \sigma(zx, y), \text{ para } x, y, z \in X.$$

Agora consideremos uma função $\psi : X \to \mathbb{R}$ que satisfaça:

(a) $\psi(x) > 0$ para $x \in X$, com $\det x \neq 0$.

(b) $\psi(x)$ é diferenciável em X.

(c) $\psi(xy) = \psi(x) \cdot \psi(y)$ para $x, y \in X$.

Dado $u \in C$, então $\Delta_x^u \log\, \psi(x)$ é uma forma linear em u e, consequentemente, existe uma matriz $x^{\#} \in X$ tal que

$$\sigma(u, x^{\#}) = \Delta_x^u \log\, \psi(x).$$

Aplicando Δ_x^u em (c) e usando a fórmula (20), obtemos

$$\sigma(u, x^{\#}) = \Delta_x^u \log\, \psi(xy) = \Delta_{xy}^a \log\, \psi(xy), \text{ com } a = \Delta_x^y xy = uy.$$

$$\Delta_{xy}^{uy} \log\, \psi(xy) = \sigma(uy, (xy)^{\#}) = \sigma(u, y(xy)^{\#}).$$

Portanto, obtemos

(21) $$x^{\#} = y(xy)^{\#}.$$

Aplicando Δ_y^u a (c), o mesmo argumento nos dá

(22) $$y^{\#} = (xy)^{\#} x.$$

Em (21), fazemos $y = x^{-1}$ e, em (22), subtituimos x por x^{-1} e fazemos $y = x$. Se e denota a matriz unidade e $c = e^{\#}$, então

$$x^{\#} = x^{-1} \cdot c, x^{\#} = c \cdot x^{-1}.$$

Consequentemente, temos $x^{-1} \cdot c = c \cdot x^{-1}$ e, portanto, $yc = cy$ para todo $y \in X$.

Segue daí que

$$c = \lambda \cdot e \text{ e } x^{\#} = \lambda x^{-1}.$$

Agora consideremos $\Delta_x^u \log\, x$ para $\log\, x > 0$ e obtemos

$$\det\, (x + \tau x) = \det\, [x(e + \tau x^{-1} u)] = \det\, x \cdot \det\, (e + \tau x^{-1} u)$$

$$= (\det\, x) \cdot (1 + \tau tr(x^{-1} u) + O(\tau^2)).$$

Portanto, temos

$$\Delta_x^u \log\, \det\; = tr(x^{-1} u) = \sigma(u, x^{-1})$$

e

$$\Delta_x^u \frac{\psi(x)}{(\det\, x)^{\lambda}} = 0 \text{ para todos } u, x.$$

Sendo assim, obtemos $\psi(x) = \kappa (\det\, x)^{\lambda}$ para alguma constante κ.

Dessa forma, (c) implica $\psi(x) = |\det\, x|^{\lambda}$.

O caso $\det\, x < 0$ é tratado similarmente.

Toda solução de (a)-(c) é, portanto, uma potência do valor absoluto do determinante de x.

4.7 Um Elemento de Linha Invariável

Seja Y um domínio de positividade com relação a $\sigma(x,y)$ e seja $\omega(y)$ uma norma especial em Y (ver Teorema 4.4.1):

$$\omega(y)=\frac{\omega_0}{\tilde\omega(y)},\qquad \tilde\omega(y)=\int_Y e^{-\sigma(y,t)}dt.$$

Dados $y\in Y$, $u,v\in X$, fazemos:

$$\tau_y(u,v):=\frac{1}{2\tilde\omega^2(y)}\int_Y\int_Y e^{-\sigma(y,t_1+t_2)}\sigma(u,t_1-t_2)\sigma(v,t_1-t_2)dt_2dt_1.$$

Usando o Lema 4.2.5, temos que a integral dupla acima é absolutamente convergente, $\tau_y(u,v)$ é uma forma bilinear simétrica em X e $\tau_y(u,u)$ é positiva para $u\neq 0$.

Dado $W\in\Sigma(Y)$, temos

$$\tau_{W_y}(W_u,Wv)=\frac{|\det W|^2}{2\tilde\omega^2(y)}\int_Y\int_Y e^{-\sigma(y,W^*(t_1+t_2))}\cdot\sigma(u,W^*(t_1-t_2))\sigma(v,W^*(t_1-t_2))dt_2dt_1.$$

As substituições $t_1=W^{*^{-1}}x_1$, $t_2=W^{*^{-1}}x_2$, $dt_1dt_2=|\det W|^{-2}dx_1dx_2$, portanto, nos dão

(23) $$\tau_{W_y}(W_u,W_v)=\tau_y(u,v).$$

Existe outra maneira de obtermos $\tau_y(u,v)$. Temos

$$\Delta_y^v\tilde\omega(y)=-\int_Y e^{-\sigma(y,t)}\sigma(v,t)dt$$

$$\Delta_y^u\Delta_y^v\tilde\omega(y)=\int_Y e^{-\sigma(y,t)}\sigma(u,t)\sigma(v,t)dt$$

$$\Delta_y^u\Delta_y^v\log\,\tilde\omega(y)=\Delta_y^u\frac{1}{\tilde\omega(y)}\Delta_y^v\tilde\omega(y)=\frac{1}{\tilde\omega^2}(\tilde\omega\Delta_y^u\Delta_y^v\tilde\omega-\Delta_y^u\tilde\omega\cdot\Delta_y^v\tilde\omega),$$

e, portanto,

$$\Delta_y^u\Delta_y^v\log\,\tilde\omega(y)=\frac{1}{\tilde\omega^2}\left(\int_Y\int_Y e^{-\sigma(y,t_1)-\sigma(y,t_2)}\sigma(u,t_2)\sigma(v,t_2)dt_2dt_1-\int_Y\int_Y e^{-\sigma(y,t_1)-\sigma(y,t_2)}\sigma(u,t_1)\sigma(v,t_2)dt_2dt_1\right).$$

Por simetrização, obtemos

$$\begin{aligned}2\tilde\omega^2\Delta_y^u\Delta_y^v\log\,\tilde\omega(y) &= \int_Y\int_Y e^{-\sigma(y,t_1+t_2)}[\sigma(u,t_1)\sigma(v,t_1)+\sigma(u,t_2)\sigma(v,t_2)-\sigma(u,t_1)\sigma(v,t_2)-\sigma(v,t_1)\sigma(u,t_2)]dt_2dt_1\\ &= \int_Y\int_Y e^{-\sigma(y,t_1+t_2)}\sigma(u,t_1-t_2)\sigma(v,t_1-t_2)dt_2dt_1\end{aligned}$$

e, consequentemente,

(24) $$\tau_y(u,v)=\Delta_y^u\Delta_y^v\log\,\tilde\omega(y)=-\Delta_y^u\Delta_y^v\log\,\omega(y).$$

Seja $H(y):=-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\log\,\omega(y)}{\partial y}\right)^*$, para $y\in Y$. Sabemos que

(25) $$\tau_y(u,v)=\sigma(H(y)u,v).$$

Como $\tau_y(u,v)$ é positiva-definida,

(26) $$H(y) \text{ é positiva definida.}$$

A equação (23) implica

(27) $$W^*H(Wy)W = H(y),\ W \in \Sigma(Y).$$

Seja $y = y(\tau)$ uma curva em Y e defina

$$ds = \sqrt{\sigma(H(y)y, y)}d\tau.$$

Dessa forma, obtemos um elemento de linha positivo-definido ds, o qual é invariante em relação às aplicações

$$Y \to Y, \quad y \mapsto Wy, \quad W \in \Sigma(Y).$$

4.8 A Aplicação $y \mapsto y^{\#}$

Começando com um domínio de positividade Y e uma norma especial ω (ver Teorema 4.4.1), sabemos que $\Delta_y^u \log\, \omega(y)$, $y \in Y$, é uma forma linear em u, portanto da forma $\sigma(y^{\#}, u)$, com $y^{\#} \in X$, isto é,

$$y^{\#} := \left(\frac{\partial}{\partial y}\log\, \omega(y)\right)^* \qquad y \in Y.$$

Uma vez que $\omega(y)$ é analítica-real, a aplicação $Y \to X$, $y \mapsto y^{\#}$ é analítica-real.

Lema 4.8.1. *As seguintes afirmações valem:*
(a) Se $W \in \Sigma(Y)$, então $(Wy)^{\#} = W^{*-1}y^{\#}$ para todo $y \in Y$.
(b) A aplicação $Y \to X$, $y \mapsto y^{\#}$ é contínua e aberta.

Demonstração:

(a) Temos $y^{\#} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\log\, \omega(Wy)\right)^* = \left(\frac{\partial Wy}{\partial y}\right)^* \left(\frac{\partial \log\, \omega(Wy)}{\partial Wy}\right)^* = W^*(Wy)^{\#}$

(b) A equação (4) na seção anterior mostra que a transformação linear dada por

$$H(y) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \log\, \omega(y)}{\partial y}\right)^*$$

é positiva definida.

Consequentemente, o determinante $\det H(y)$ é diferente de 0. Tendo em vista que

$$-H(y) = \frac{\partial y^{\#}}{\partial y},$$

então a aplicação $y \mapsto y^{\#}$ é aberta.

■

Uma vez que a aplicação $y \mapsto \lambda y$, $\lambda > 0$, pertence a $\Sigma(Y)$, segue que

(28) $$(\lambda y)^{\#} = \frac{1}{\lambda}y^{\#}.$$

Aplicando a fórmula de Taylor em log $\omega(y)$, para $x, x+u \in Y$ temos

$$\log\, \omega(x+u) = \log\, \omega(x) + \Delta_x^u \log\, \omega(x) + \frac{1}{2}\Delta_z^u \Delta_z^u \log\, \omega(z)\Big|_{z=x+\theta u},$$

ou

$$\log\, \omega(x+u) = \omega(x) + \sigma(x^\#, u) - \tfrac{1}{2}\sigma(H(x+\theta u)u, u),\ 0 \le \theta \le 1. \tag{29}$$

Uma vez que $H(x)$ é positiva definida, segue que

$$\log\, \omega(b) < \log\, \omega(a) + \sigma(a^\#, b-a),\ \text{com } a, b \in Y \text{ e } a \neq b,$$

ou

$$\frac{\omega(b)}{\omega(a)} < e^{\sigma(a^\#, b-a)},\ a, b \in Y,\ a \neq b. \tag{30}$$

Dado $a \in Y$, $N_a := \{y \in Y;\, \omega(y) = \omega(a)\}$ é chamada *superfície da norma* através de a.

Tendo em vista que $\omega(\lambda y) = \lambda^n \omega(y)$, vemos que

(SN. 1) Para $y \in Y$, existe um único $\lambda > 0$ tal que $\lambda y \in N_a$.

(SN. 2) N_a é conectado.

Dois pontos arbitrários $y, z \in N_a$ podem ser conectador pela curva

$$\tau \mapsto \sqrt[n]{\frac{\omega(y)}{\omega(y+\tau(z-y))}} \cdot (y + \tau(x-y)), \qquad 0 \le \tau \le 1$$

Agora demonstramos

Teorema 4.8.2. *A aplicação $Y \to Y$, $y \mapsto y^\#$ é um homomorfismo.*

Teorema 4.8.3. *As seguintes afirmações são válidas:*

(a) Cada superfície da norma N_a é convexa em relação à origem.

(b) Cada $y \in N_a$, $y \neq a$, satisfaz $\sigma(a^\#, y-a) > 0$ e $\sigma(a^\#, y-a) = 0$ define o plano suporte único para N_a em a.

(c) $\omega(y)$ tem um único máximo nesse hiperplano. Ele é alcançado em a.

Se $n = 1$, calcula-se $\sigma(x, y) = \sigma \cdot x \cdot y$, $\sigma \neq 0$, $Y = \{y \in \mathbb{R};\, y/\sigma > 0\}$, $y^\# = |y|/\sigma$ e $N_a = \{a\}$. Portanto, as afirmações são óbvias nesse caso.

Dividiremos as demonstrações entre várias proposições e assumiremos $n > 1$.

Proposição 4.8.4. *Cada $y \in N_a$, $y \neq a$, satisfaz $\sigma(a^\#, y-a) > 0$.*

Demonstração:

Por (30), temos $\omega(y) = \omega(a)$, $y \neq a$

$$1 < e^{\sigma(a^\#, y-a)},$$

portanto $\sigma(a^{\#}, y-a) > 0$.

$\blacksquare$

Proposição 4.8.5. *Dado $x \in X$, então $\sigma(x, y-a) \geq 0$ para todo $y \in N_a$ implica que $x \in \overline{Y}$.*

Demonstração:

Para cada $b \in Y$, o elemento

$$y = \sqrt[n]{\frac{\omega(a)}{\omega(b)}}b$$

pertence a N_a, portanto

$$\sqrt[n]{\frac{\omega(a)}{\omega(b)}}\sigma(x,b) \geq \sigma(x,a),$$

ou

$$\sigma(x,b) \geq \sqrt[n]{\frac{\omega(b)}{\omega(a)}}\sigma(x,a).$$

Como $b \to u \in \partial Y$, temos $\sigma(x,u) \geq 0$ para $u \in \partial Y$, já que $\omega(u) = 0$.

Uma vez que Y é um cone convexo, para $y \in Y$ existem dois pontos $u_1, u_2 \in \partial Y$ tais que $y = u_1 + u_2$ (de acordo com a equação (11)).

Consequentemente, $\sigma(x,y) \geq 0$ para $y \in Y$. Pelo Teorema 4.2.2, $x \in \overline{Y}$.

$\blacksquare$

Proposição 4.8.6. *Se $y \in Y$, então $y^{\#} \in Y$.*

Demonstração:

Na Proposição 4.8.5, subtituimos $x = a^{\#}$. Assim, usando a Proposição 4.8.4, conclui-se $a^{\#} \in \overline{Y}$, para $a \in Y$.

Uma vez que $y \mapsto y^{\#}$ é uma aplicação aberta, a imagem de Y através de $y \mapsto y^{\#}$ é aberta e, consequentemente, contida em $\overline{Y}^{\circ} = Y$.

$\blacksquare$

Proposição 4.8.7. *Se $x \in X$, com $x \neq 0$ e $b \in Y$, então $\sigma(x, y-a) \geq 0$ para todo $y \in N_a$ e $\sigma(x, y-a) = 0$ implica $\omega(b) \leq \omega(a)$.*

Demonstração:

Pela Proposição 4.8.5, temos que $x \in \overline{Y}$. Sendo assim, pelo Teorema 4.2.2(a), $\sigma(x,a) > 0$.

Uma vez que $y = \sqrt[n]{\frac{\omega(a)}{\omega(b)}}b$ pertence a N_a, segue que

$$\sigma(x,a) = \sigma(x,b) = \sqrt[n]{\frac{\omega(a)}{\omega(b)}}\sigma(x,y) \geq \sqrt[n]{\frac{\omega(a)}{\omega(b)}}\sigma(x,a)$$

e $\omega(b) \leq \omega(a)$.

$\blacksquare$

Em posse desses resultados, podemos finalmente partir para a demonstração do Teorema 4.8.3.

Demonstração:

Seja $H_x = \{y \in X;\ \sigma(x, y-a) = 0\}$ o plano suporte para N_a e $\mu(x) = \sup\{\omega(y);\ y \in H_x\}$. Pela Proposição 4.8.7, temos que $\mu(x) = \omega(a)$.

Seja $u \in X$ e $\sigma(x,u) = 0$. Para λ suficientemente pequeno, o vetor $b = a + \lambda u$ pertence a Y e H_x. Pela Proposição 4.8.7, temos que $\omega(a+\lambda u) \leq \omega(a)$ e, por (29), seque que

$$\log \omega(a) \geq \log \omega(a+\lambda u) = \log \omega(a) + \lambda\sigma(a^{\#}, u) + O(\lambda^2),$$

e, consequentemente,

$$0 \geq \lambda\sigma(a^{\#}, u) + O(\lambda^2).$$

Dividindo por $|\lambda|$, obtemos

$$\pm\sigma(a^{\#}, u) \leq O(\lambda) \text{ e } \sigma(a^{\#}, u) = 0.$$

Dessa forma, mostramos que

$$u \in X, \quad \sigma(x,u) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma(a^{\#}, u) = 0$$

e, consequentemente, $x = \lambda a^{\#}$, com $\lambda \neq 0$.

O hiperplano $H_{a^{\#}}$ é, portanto, o único plano suporte em a e (b) está provada.

Pela Proposição 4.8.4, valem $H_{a^{\#}} \cap N_a = \{a\}$ e $N_a \subset H^+_{a^{\#}} := \{y;\ \sigma(a^{\#}, y-a) \geq 0\}$.

Tendo em vista que $\sigma(a^{\#}, 0-a) = -\sigma(a^{\#}, a) < 0$, temos que $0 \notin H^+_{a^{\#}}$. Isso significa que N_a é convexo em relação à origem. Portanto, (a) foi provada.

Seja $y \in Y \cap H_{a^{\#}}$, $y \neq a$. Sabendo que $\sqrt[n]{\frac{\omega(a)}{\omega(y)}}y \in N_a$ e usando (b), segue que

$$\sigma\left(a^{\#}, \sqrt[n]{\frac{\omega(a)}{\omega(y)}}y - a\right) > 0, \quad \sigma(a^{\#}, y-a) = 0,$$

e, consequentemente

$$\left(\sqrt[n]{\frac{\omega(a)}{\omega(y)}} - 1\right)\sigma(a^{\#}, a) > 0,$$

e isto é (c).

$\blacksquare$

Proposição 4.8.8. *A aplicação $Y \to Y$, $y \mapsto y^{\#}$ é sobrejetiva.*

Demonstração:

Consideremos $\omega(y)$ no hiperplano $H = \{y \in X;\, \sigma(b,y) = 1\}$ para algum $b \in Y$. Pelo Lema 4.2.5, para $y \in \overline{Y} \cap H$, temos

$$1 = \sigma(b,y) \geq \varrho(b) \cdot |y|.$$

Portanto, $H \cap \overline{Y}$ é compacto.

Seja $a \in \overline{Y} \cap H$ que satisfaça $\omega(a) = \sup\{\omega(y);\, y \in H \cap \overline{Y}\}$.

Tendo em vista que $\omega(w) = 0$ para $x \in \partial Y$, segue que $a \in Y$.

Seja agora $z \in N_a$, então temos

$$y = \frac{1}{\sigma(b,z)} z \in H \cap Y$$

e, portanto,

$$\omega(a) \geq \omega(y) = \frac{1}{\sigma^n(b,z)}\omega(z) = \frac{1}{\sigma^n(b,z)}\omega(a).$$

Consequentemente, vale que $\sigma(b,z) \geq 1 = \sigma(b,a)$, ou seja, $\sigma(b, z-a) \geq 0$ para $z \in N_a$.

Portanto, $\sigma(b, z-a) = 0$ define um plano suporte para N_a e, pelo Teorema 4.8.3(b) e por (28), existe $\lambda > 0$ tal que $a^{\#} = \lambda b$ ou $b = (\lambda a)^{\#}$.

■

Proposição 4.8.9. *A aplicação $Y \to Y$, $y \mapsto y^{\#}$ é injetiva.*

Demonstração:

Sejam $a, b \in Y$ tais que $a^{\#} = b^{\#}$. Por (30), temos

$$\frac{\omega(b)}{\omega(a)} \leq e^{\sigma(a^{\#}, b-a)} = e^{-\sigma(b^{\#}, a-b)} \leq \frac{\omega(b)}{\omega(a)}.$$

Portanto, $\dfrac{\omega(b)}{\omega(a)} = e^{\sigma(a^{\#}, b-a)}$ e, consequentemente, $a = b$, por (30).

■

Sendo assim, para demonstrarmos o Teorema 4.8.2, basta combinarmos as Proposições 4.8.6, 4.8.8 e 4.8.9, assim como o Lema 4.8.1.

Tendo em vista que $(\lambda y)^{\#} = \frac{1}{\lambda} y^{\#}$ (devido a (28)), a Equação Diferencial de Euler nos dá

$$\frac{\partial y^{\#}}{\partial y} y = -y^{\#},$$

e segue que

(31) $$y^{\#} = H(y)y, \; y \in Y.$$

Agora conclui-se que

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\log\,(\omega(y)\omega(y^{\#}))\right)^* \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial y}\log\,\omega(y)\right)^* + \left(\frac{\partial}{\partial y}\log\,\omega(y^{\#})\right)^*$$

$$
\begin{aligned}
&= y^{\#} + \left(\frac{\partial y^{\#}}{\partial y}\right)^{*} \left(\frac{\partial}{\partial y^{\#}} \log \omega(y^{\#})\right)^{*} \\
&= y^{\#} - H(y) y^{\#\#},
\end{aligned}
$$

pois $H(y)$ é autoadjunta.

Sendo assim, (31) implica

$$
\left(\frac{\partial}{\partial y}\log\,(\omega(y)\omega(y^{\#}))\right)^{*} = H(y)(y - y^{\#\#}),\ y \in Y. \tag{32}
$$

Lema 4.8.10. *As quatro afirmações a seguir são equivalentes:*

(A) $y^{\#\#} = y$ *para todo* $y \in Y$.

(B) $\omega(y)\omega(y^{\#})$ *é constante em* Y.

(C) $H(y)H(y\#) =Id$ *para todo* $y \in Y$.

(D) O elemento de linha $ds = \sqrt{\sigma(H(y)y, y)}dt$ *é invariante em relação à aplicação* $Y \to Y$, $y \mapsto y^{\#}$.

Demonstração:

"$(A) \Leftrightarrow (B)$": Usa-se (5) e det $H(y) \neq 0$.

"$(C) \Leftrightarrow (A)$": (A) é equivalente a

$$
Id = \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial y^{\#\#}}{\partial y} = \frac{\partial y^{\#\#}}{\partial y^{\#}} \frac{\partial y^{\#}}{\partial y} = H(y^{\#})H(y).
$$

"$(C) \Leftrightarrow (D)$": Seja $y = y(\tau)$ uma curva em Y. Então, temos

$$
\frac{d}{dt} y^{\#} = \frac{\partial y^{\#}}{\partial y} y = -H(y)y
$$

e, consequentemente, (D) é equivalente a

$$
H(y)H(y^{\#})H(y) = H(y).
$$

Tendo em vista que det $H(y) \neq 0$, isso é equivalente a (C).

■

Teorema 4.8.11. *Se a forma bilinear* σ *é positiva definida, então a aplicação* $Y \to Y$, $y \mapsto y^{\#}$, *tem exatamente um ponto fixo.*

Demonstração:

Assumiremos que $\sigma(x, x) > 0$ para $0 \neq x \in X$.

Então,

$$
|x| := \sqrt{\sigma(x, x)}
$$

fornece uma norma em X, a qual é real-analítica para $x \neq 0$.

Agora consideremos o ínfimo de $|y|$, para $y \in N_a$. Uma vez que a norma ω desaparece na fronteira de Y, o conjunto N_a é fechado em X. Portanto, a distância até a origem, medida por $|x|$, é positiva e existe $b \in N_a$ tal que

$$|b| = \inf\{|y|;\ y \in N_a\}$$

O hiperplano H tangente a N_a em b é ortogonal a b, então $\sigma(b, y-b) = 0$ para todo $y \in H$.

Por outro lado, pelo Teorema 4.8.3(b), $\sigma(b^{\#}, y-b) = 0$ para todo $y \in H$, pois H é o plano suporte em b.

Isso mostra que b e $b^{\#}$ são elementos de Y linearmente dependentes, portanto $b^{\#} = \beta b$ para algum $\beta > 0$.

Agora $c := \sqrt{\beta} b$ fornece $c^{\#} = c$, devido a (28).

Em relação à unicidade, seja $v \in Y$ tal que $v^{\#} = \lambda v$ para algum $\lambda > 0$. O plano suporte de N_v em v é dado pela equação $\sigma(v, y-v) = 0$.

Seja $z \in N_v$, $z \neq v$. Então, pelo Teorema 4.8.3(b), a origem e z estão em lados diferentes do plano suporte. Isso mostra que $|z| > |v|$ e, portanto, $|\cdot|$ alcança seu valor mínimo (para N_v) em v.

A homogeneidade mostra, agora, que v é um múltiplo de b.

4.9 Domínios de Positividade Homogêneos

Um domínio de positividade Y em relação à σ é chamado *homogêneo* se, para todos dois pontos $a, b \in Y$, existe $W \in \Sigma(Y)$ tais que $b = Wa$, isto é, se o grupo $\Sigma(Y)$ atua transitivamente em Y.

Agora assumiremos que Y é homogêneo.

Considere uma função $\varphi(y)$ tal que $\varphi(Wy) = |\det W| \cdot \varphi(y)$ para $W \in \Sigma(Y)$. O quociente $\varphi(y)/\omega(y)$, com ω sendo uma norma especial em Y do Teorema 4.4.1, é invariante sobre as aplicações $y \mapsto Wy$, $W \in \Sigma(Y)$ e, consequentemente, o quociente é constante. Dessa forma, temos que $\varphi(y) = \gamma \cdot \omega(y)$.

Em particular, podemos afirmar que *duas normas em um domínio de positividade homogêneo apenas diferem por um fator constante.*

Agora consideremos

$$\varphi(y) := \frac{1}{\omega(y^{\#})}.$$

Do Lema 4.8.1, para $W \in \Sigma(Y)$, segue que

$$\varphi(Wy) = \frac{1}{\omega((Wy)^{\#})} = \frac{1}{\omega(W^{*-1}y^{\#})} = \frac{|\det W|}{\omega(y^{\#})} = |\det W| \cdot \varphi(y).$$

Consequentemente, $\omega(y) \cdot \omega(y^{\#})$ é constante e, pelo Lema 4.8.10, obtemos

Teorema 4.9.1. *Seja Y um domínio de positividade homogêneo. Vale que:*
(a) $\omega(y) \cdot \omega(y^{\#})$ é constante em Y.
(b) $y^{\#\#} = y$ para todo $y \in Y$.
(c) $H(y)H(y^{\#})$ =Id para todo $y \in Y$.
(d) O elemento de linha ds é invariante sobre a aplicação $Y \to Y$, $y \mapsto y^{\#}$.

A definição da norma especial $\omega(y)$ no Teorema 4.4.1 envolve um fator ω_0, o qual pode ser escolhido arbitrariamente. No caso de domínios de positividade homogêneos, podemos fixar nossa escolha de ω_0. As definições de $y^{\#}$ e $H(y)$ não dependem de ω_0.

Tendo em vista que

$$\omega(y) \cdot \omega(y^{\#}) = \omega_0^2 / [\tilde{\omega}(y) \cdot \tilde{\omega}(y^{\#})] = \omega_0^2 \cdot \text{uma constante},$$

determinamos ω_0 de tal maneira que

$$\omega(y) \cdot \omega(y^{\#}) = 1 \qquad \text{para todo } y \in Y.$$

Teorema 4.9.2. *Seja Y um domínio de positividade homogêneo com relação à σ positiva definida. Então:*
(a) para o ponto fixo c da involução $Y \to Y$, $y \mapsto y^{\#}$, temos que $H(c)$ =Id.
(b) $y \in Y$ implica $H(y) \in \Sigma(Y)$.
(c) $u > v > 0$ implica $y^{\#} > u^{\#} > 0$.

Demonstração:

(a) Pelo Teorema 4.8.11, a involução $Y \to Y$, $y \mapsto y^{\#}$, tem um único ponto fixo c. Temos, portanto, pelo Teorema 4.9.1(c), $H^2(c) = Id$.

Pela equação (26), a transformação linear $H(c)$ é positiva definida e, por hipótese, a forma bilinear σ é positiva definida. Portanto, da Álgebra Linear, $H(c)$ é a identidade.

(b) Na equação (27) da seção 3.1.8, provamos que

$$W^* H(Wy) W = H(y) \text{ para } W \in \Sigma(Y) \text{ e } y \in Y.$$

Uma vez que $\Sigma(Y)$ age transitivamente sobre Y, para $y \in Y$ fixo, determinamos uma transformação $W \in \Sigma(Y)$ tal que $Wy = c$. Assim, $H(y) = W^* W$. Pelo Lema 4.3.1, temos que $W^* \in \Sigma(Y)$ e, portanto, $H(y) \in \Sigma(Y)$.

(c) Uma vez que $y \mapsto y^{\#}$ é real analítica em Y, para um pequeno $x \in X$ e $a \in Y$, obtemos

$$(a+x)^{\#} = a^{\#} + \frac{\partial y^{\#}}{\partial y}\Big|_{y=a} x + O(|x|^2)$$

ou

$$(a+x)^{\#} = a^{\#} - H(a)x + O(|x|^2). \tag{33}$$

Para terminar a demonstração deste item, antes vamos demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 4.9.3. *Dados $a, x \in Y$, existe um $\epsilon > 0$ tal que, para $\tau_2 > \tau_1$ e $|\tau_\nu| < \epsilon$, temos*

$$(a + \tau_1 x)^{\#} > (a + \tau_2 x)^{\#}.$$

Demonstração:

Da equação (33), conclui-se, para um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, que

$$(a + \tau_\nu x)^{\#} = a^{\#} - \tau_\nu H(a)x + O(\epsilon^2)$$

e, portanto,

$$(a + \tau_1 x)^{\#} - (a + \tau_2 x)^{\#} = (\tau_2 - \tau_1)H(a)x + O(\epsilon^2).$$

Tendo em vista que $H(a) \in \Sigma(Y)$, temos

$$(a + \tau_1 x)^{\#} - (a + \tau_2 x)^{\#} \in Y \text{ para } \tau_2 > \tau_1 \text{ e } |\tau_\nu| < \epsilon.$$

Isso, de fato, prova a proposição.

■

Agora sejam $u > v > 0$. A curva

$$y(\tau) = v + \tau(u - v), \qquad 0 \leq \tau \leq 1,$$

em Y pode ser coberta pelas imagens-y de um número finito de subconjuntos (relativamente) abertos U_ν do intervalo [0,1] tais que

$$y^{\#}(\tau_1) > y^{\#}(\tau_2) \text{ para } \tau_2 > \tau_1 \text{ e } \tau_1, \tau_2 \in U_\nu.$$

Consequentemente, segue que $v^{\#} = y^{\#}(0) > y^{\#}(1) = u$.

■

A noção de um domínio de positividade foi introduzida em 1957 em [26] e as noções básicas foram fornecidas neste capítulo. Existe um manuscrito de E. Artin, H. Braun e M. Koecher que nunca foi publicado, munido de várias notas de aulas sobre o assunto. A ênfase é colocada em obter tantos resultados quanto possível no caso geral de domínios não necessariamente homogêneos de positividade. O.S. Rothaus [38] e E.B. Vinberg [46] estudaram domínios homogêneos de positividade do ponto de vista de espaços homogêneos e grupos de Lie.

Na linguagem usada hoje, um domínio de positividade é um cone convexo aberto próprio autodual. Geralmente, o dual de um cone convexo aberto Y é o conjunto

$$Y^* := \{l \in X^*;\;\; l(y) > 0 \text{ para todo } y \in Y\}.$$

Aqui, X^* é identificado com X por meio da forma sigma. Vinberg [47] provou que a maioria das propriedades elementares também são válidas para cones convexos abertos próprios. Ele também notou que para cada cone Z, o cone $Z \times Z$ é um domínio de positividade. Parece, entretanto, que os domínios de positividade com respeito a uma forma bilinear definida positiva são os mais interessantes.

Uma introdução recente a esses domínios de positividade homogêneos está contida em [20]. Vinberg [47] construiu e, até certo ponto, classificou cones próprios convexos abertos homogêneos arbitrários. Seu ponto de partida foi a observação de que o normalizador do componente de identidade do grupo de automorfismo de tal cone é um grupo algébrico real (com o mesmo componente de identidade). Isso lhe permitiu usar seu teorema sobre uma "decomposição polar" (compacto x triangular) de grupos algébricos reais para estabelecer uma correspondência entre os cones em questão e certas álgebras simétricas à esquerda ("clãs"), que por sua vez tornavam a classificação possível.

Mais tarde, Dorfmeister [16], [15], [14] conseguiu dar uma descrição algébrica precisa e a classificação desses cones, que novamente envolveram álgebras de Jordan de uma maneira essencial (ver o artigo [17]).

No que diz respeito às aplicações em análise, o artigo de Gindikin [22] deve ser mencionado. Uma coleção de resultados clássicos e recentes está contida em [20]. Nos últimos anos, tem havido muito trabalho em aplicações de domínios de positividade para estatísticas. Isso começou antes mesmo da introdução de álgebras de Jordan e domínios de positividade com o trabalho clássico de Wishart [49] no cone de matrizes simétricas positivas-definidas.

Entre as contribuições recentes é valido mencionar Neher [36], [35], Casalis [9], Casalis e Letac [10], Letac e Massam [29], Massam e Neher [33], [32] e Bernadac [6].

Sejam X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita e $|x|$ uma norma em X. Generalizando a noção de um domínio de positividade, consideremos um par (Y, ω), que tenha as seguintes propriedades:

(D.1) $Y \neq 0$ é um subconjunto aberto e conectado de X que satisfazer $\lambda y \in Y$ para todo $\lambda > 0$ e todo $y \in Y$

(D.2) $\omega : \overline{Y} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que:

(a) $\omega(y)$ é real-analítica e positiva em Y.

(b) $\omega(y)$ é contínua em $\overline{Y}$ e desaparece na fronteira ∂Y.

(c) $\omega(\lambda y) = \lambda^n \omega(y)$, para $\lambda > 0$ e $y \in Y$.

(d) A forma bilinear $\Delta_y^u \Delta_y^v$ log$\omega(y)$ em X é não-singular para todo $y \in Y$.

A forma bilinear $\Delta_y^u \Delta_y^v$ log$\omega(y)$ é simétrica não-singular para todo $y \in Y$. Sendo assim, existe uma transformação linear autoadjunta (em relação a σ) $H(y)$ tal que

$$\sigma(H(y)u, v) = -\Delta_y^u \Delta_y^v \log\omega(y).$$

Seja $\Sigma = \Sigma(Y, \omega)$ o grupo de todas as transformações lineares $W : X \to X$ tais que

$$WY = Y, \quad \omega(Wy) = |\det W| \cdot \omega(y) \text{ para } y \in Y.$$

Definição 4.9.4. *O domínio Y é chamado de ω-domínio se satisfizer os axiomas (D.1), (D.2) e (D.3) Para todo $y \in Y$, a aplicação $H(y)$ pertence a Σ.*

Para definirmos $H(y)$, precisamos da forma bilinear $\sigma(x, y)$ e, consequentemente, do ponto arbitrário $c \in Y$. Se quisermos indicar a escolha do ponto c, escrevemos (Y, ω, c) para o ω-domínio. Dizemos que a forma bilinear $\sigma(x, y)$ é associada com o domínio (Y, ω, c).

Para uma álgebra de Jordan semisimples J, temos o ω-domínio (Y_J, ω_J, c_J). Definimos essa tripla por

$$\Omega(A) := (Y_J, \omega_J, c_J).$$

Seja J uma álgebra de Jordan semisimples sobre $\mathbb{R}$ e seja $P(x) = 2L^2(x) - L(x^2)$ sua representação quadrática. Fazendo

$$c = c_J = \text{ elemento unidade de J,}$$

$$\omega(y) = \omega_J(y) = \sqrt{|\det P(y)|},$$

$$X_J = \{x \in J;\ \det P(x) \neq 0\} \text{ e}$$

$$Y = Y_J = \text{ o componente conectado de } c_J \text{ em } X_J,$$

obtemos a tripla (Y, ω, c).

Teorema 4.9.5. *(Teorema 12, [27], pg. 118) Seja J uma álgebra de Jordan. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) J é formalmente real.

(b) A forma bilinear $\tau(x, y) = trL(x \cdot y)$ é positiva definida.

(c) Existe uma forma bilinear positiva definida $\sigma(x, y)$ que satisfaz

$$\sigma(x, y \cdot z) = \sigma(x \cdot y, z).$$

Teorema 4.9.6. *(Teorema 14, [27], pg. 119) O ω-domínio $\Omega(J)$ de uma álgebra de Jordan formalmente real J é um domínio de positividade homogêneo (com relação a forma bilinear τ em J) com norma $\omega(y) = \gamma \cdot \sqrt{|det\ P(y)|}$.*

Munidos de tudo isso, podemos finalmente enunciar (e entender):

Teorema 4.9.7. *(Teorema 15, [27], pg. 120) A aplicação $J \mapsto \Omega(J)$ é uma bijeção entre o conjunto de álgebras de Jordan formalmente reais (atualmente chamadas de álgebras de Jordan Euclidianas) sobre um espaço vetorial X e o conjunto de domínios de positividade homogêneos (com relação a uma forma bilinear positiva definida) em X.*

Bibliografia

[1] A Jordan-algebraic approach to potential-reduction algorithms, Technical Report, Departmente of Mathematics, University of Notre Dame, Notre Dame, 1998.

[2] ALBERT, A.; A Structure Theory for Jordan Algebras. Ann. of Math., Vol. 48, n. 3 , p. 546-567, 1947.

[3] ASIMOW, L.; ELLIS, A. J.; Convexity Theory and its applications in functional analysis. Academic Press. London. 1980.

[4] AUYANG, S.; How is Quantum Field Theory Possible. [S.l.]: Oxford University Press. 1995.

[5] BATES, S.; WEINSTEINS, A.; Lectures on the geometry of quantization; pg. 80.

[6] BERNADAC, E.; Random continued fractions and inverse Gaussian distribution on a symmetric cone; J. Theoret. Prob. 8, 221-259; 1995.

[7] BONSALL, F. F.; DUNCAN, J.; Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras; Cambridge Univ. Press; 1971.

[8] BOURBAKI, N.; Lie Groups and Lie Algebras; Springer-Verlag, Berlin; 1989.

[9] CASALIS, M.; Les familles exponentielles a variance quadratique homogene sont les lois de Wishart sur une cone symetrique; C. R. Acad. Sci. Paris 312, 537-540; 1991.

[10] CASALIS, M.; LETAC, G.; The Lukacs-Olkin-Rubin characterization of Wishart distributions on symmetric cones. Ann. Statist. 24, 763-786; 1996.

[11] CHU, C. H.; Infinite Dimensional Jordan Algebras and Symmetric Cones. MSC. 2017.

[12] CHU, C. H.; Jordan Structures in Geometry and Analysis. Cambridge Tracts in Math. 190. Cambridge Univ. Press, Cambridge. 2012.

[13] CONNES, A.; Caracterisation des espaces vectoriels ordonnes sous jacents aux algebres de von Neumann; Ann. Inst. Fourier 24; 1974.

[14] DORFMEISTER, J.; Algebraic description of homogeneous cones; Trans. Amer. Math. Soc. 255, 61-89; 1979.

[15] DORFMEISTER, J.; Inductive construction of homogeneous cones; Trans. Amer. Math. Soc. 252; 321-349; 1979.

[16] DORFMEISTER, J.; Zur Konstruktion homogener Kegel. Math. Ann. 216, 79-96; 1975.

[17] DORFMEISTER, J.; KOECHER, M.; Regulare Kegel. Jahresber. Deutsche Math-Verein. 81, 109-151; 1979.

[18] DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J. T.; Linear operators; Wiley Classics Library Edition; New York. 1988.

[19] FAYBUSOVICH, L.; Euclidean Jordan Algebras and interior-point algorithms, Positivity 1. 331-357. 1997.

[20] FARAUT, J.; KORANYI, A. Analysis On Symmetric Cones. Oxford University Press. London and New York. 1994.

[21] GARCIA, M. C.; PALACIOS, A. R.; Non-associative normed algebras, Vol. 1, Encyclop. Math. Appl. 154, Cambridge Univ. Press. Cambridge. 2014.

[22] GINDIKIN, S.; Analysis on homogeneous domains; Russian Math. Surveys 19 (4), 1-89; 1964.

[23] HARRIS, L. A.; KAUP, W.; Linear algebraic groups in infinite dimensions; Illinois J. Math. 21; 1977.

[24] JACOBSON, N.; Structure and Representation of Jordan Algebras. AMS Coloq. Publi. 39, AMS, Providence. Rhode Island. 1968.

[25] JORDAN, P.; NEUMANN, J. VON; WIGNER, E.; On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. Ann. Math. 35. 29-64. 1934.

[26] KOECHER, M.; Positivitatsbereiche im $\mathbb{R}^n$; Ammer. J. Math, 575-596; 1957

[27] KOECHER, M.; The Minnesota Notes on Jordan Algebras and Their Applications; Springer; 1999.

[28] FAYBUSOVICH, L.; Linear Systems in Jordan Algebras and primal-dual interior-point algorithms, J. Comput. Appl. Math. 86 (1997), 149-175.

[29] LETAC, G.; MASSAM, H.; Craig-Sakamoto's theorem for the Wishart distribution on symmetris cones; Ann. Inst. Stat. Math. 47, 785-799; 1995.

[30] LOBO, M. S.; VANDENBERGHE, L.; BOYD, S.; LEBRET, H.; Second-Order Cone Programming, SIAM (Julho de 1997)

[31] MARTIN, M. E.; Deformações e isotopias de álgebras de Jordan. IME-USP. São Paulo. 2013.

[32] MASSAM, H.; NEHER, E.; Estimation and testing for lattice conditional independence models on Euclidean Jordan algebras; Ann. Statist. 26, 1051-1082; 1998.

[33] MASSAM, H.; NEHER, E.; On transformations and determinantes of Wishart variables on symmetric cones; J. Theoret. Prob. 10, 867-902; 1997.

[34] MCCRIMMON, K.; A Taste of Jordan Algebras. Springer. New York. 2004.

[35] NEHER, E.; A statistical model for Euclidean Jordan algebras.

[36] NEHER, E.; Transformation groups of the Andersson-Perlman cone; J. Lie Theory 9, 203-213; 1999.

[37] PENICO, A. J.; The Wedderburn Principal Theorem for Jordan Algebras. Transactions of the American Society Vol. 70. No. 3. 404-420. 1951.

[38] ROTHAUS, O. S.; Domains of Positivity. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 24. 189-235. 1960.

[39] SCHAFER, R.D.; An Introduction to Nonassociative Algebras. Department of Mathematics at Oklahoma State University. Oklahoma. 1961.

[40] SCHAFER, R.D.; The exceptional simple Jordan algebras. Amer. J. Math. vol. 70. 82-94. 1948.

[41] SOSSA, D.; Euclidean Jordan algebras and variational problems under conic constraints. Commutative Algebra [math.AC]. Université d'Avignon; Universidad de Chile, 2014.

[42] STORI, F. T. S; Álgebras com Identidades Polinomiais. Maringá-PR. 2011.

[43] TAFT, E. J.; Invariant Wedderburn factors. Illinois J. Math vol. 1 pp. 565-573. 1957.

[44] TREVISOLI, D. S.; EHRHARDT, M. A. D.; Estudo e Avaliação de problemas Associados a Cones de Segunda Ordem; DMA-IAMECC-UNICAMP

[45] UPMEIER, H.; Symmetric Banach Manifolds and Jordan C^*-algebras (North Holland Math. Studies 104); North Holland, Amsterdam; 1985.

[46] VINBERG, E. B.; Homogeneous Cones; Sov. Math. Dokl. 1, 787-790. 1960.

[47] VINBERG, E. B.; The theory of convex homogeneous cones. Trans. Moscow Math. Soc 12, 340-403. 1963.

[48] WILKIN, D. R.; Infinite-dimensional homogeneous manifolds; Proc. Royal Irish Acad. 94A, 105-118. 1994.

[49] WISHART, J.; The generalized product moment distribuition in samples from a normal multivariative population; Biometrika 20A, 32-52. 1928.

[50] ZELMANOV, E.; Primary Jordan Algebras. Algebra and Logic 18. 1979.

[51] ZELMANOV, E. I.; On Prime Jordan Algebras II. Sib. Math. J. 24: 73-85. 1983.

[52] ZHEVLAKOV, K.A.; SLIN'KO, A.M.; SHESTAKOV, I.P.; SHIRSHOV, A.I.; Rings that are Nearly Associative. Academic Press. New York. 1982.