

Universidade Federal do Pará - UFPA  
Instituto de Ciências Exatas e Naturais  
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Romário Silva Duarte

# **Estabilidade numérica qualitativa para equação de Black-Scholes**

Brasil

25 de abril de 2019

Universidade Federal do Pará - UFPA  
Instituto de Ciências Exatas e Naturais  
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Romário Silva Duarte

## **Estabilidade numérica qualitativa para equação de Black-Scholes**

Dissertação de mestrado apresentado à Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo

Brasil

25 de abril de 2019

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD**  
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará**  
**Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

S586e Silva Duarte, Romário  
Estabilidade numérica qualitativa para equação de Black-Scholes / Romário Silva Duarte. — 2019.  
66 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo  
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em  
Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais,  
Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. NSFD. 2. Estabilidade Qualitativa. 3. Malha Deslocada.  
4. Energia. I. Título.

CDD 515.353

---

Universidade Federal do Pará – UFPA  
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística  
Programa de Pós-Graduação  
Romário Silva Duarte

## Estabilidade numérica qualitativa para equação de Black-Scholes

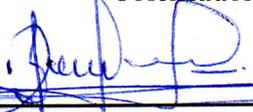
Dissertação de mestrado apresentado à Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Resultado: **APROVADO** Belém, 25 de abril de 2019



---

**Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo**  
PPGME/PDM/UFPA  
Orientador



---

**Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior**  
PDM - UFPA



---

**Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**  
PDM - UFPA



---

**Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro**  
PDM - UFPA

Brasil  
2019

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,  
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

# Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

Ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará, seu corpo docente, direção e administração por ter me proporcionado um ambiente agradável e criativo que me levaram a conclusão deste trabalho.

Ao meu orientador, pela oportunidade e apoio na elaboração deste trabalho.

A toda minha família que são a minha base; em especial, os meus pais, Joana Silva Duarte e José Ailton Duarte e irmãos Renê Silva Duarte e Rayane Silva Duarte, a minha madrinha Francisca Noronha e meu primo e melhor amigo Winicius Noronha pelo amor, incentivo e apoio sem os quais não seria possível prosseguir.

Em especial, a minha namorada e amiga Renata Adriele Ferreira Melo, pelo amor e apoio incondicional.

A todos os amigos que conheci no Instituto de Ciências Exatas e Naturais que também participam desta jornada em busca de conhecimento. Em especial, aos meus amigos Igor Pinheiro, André Barros, Mayara Silvia e Jefferson Macedo.

Também, a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Por fim, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“Às vezes, a ciência é muito mais arte do que ciência.  
(Rick Sanchez, Rick and Morty, 2013)*

# Resumo

Os métodos não-usuais de diferenças finitas (NSFD) foram desenvolvidos por Mickens nos anos 2000, portanto são novas técnicas para análise numérica de equações diferenciais parciais. Com efeito, vários artigos usam essas técnicas para replicar numericamente informações sobre as soluções analíticas de uma EDP, o que chamamos de estabilidade qualitativa. Trabalhamos neste artigo da mesma forma, utilizando a NSFD para analisar a equação de Black-Scholes e encontramos no domínio numérico o fato da energia cinética deste modelo ter um decaimento exponencial. Além disso, fazemos essa análise na malha usual e também na malha deslocada.

**Palavras-chaves:** NSFD.estabilidade qualitativa.malha deslocada. energia

# Abstract

The non-standard finite difference methods (NSFD) was developed by Mickens in the years 2000, so they are new techniques for numerical analysis of partial differential equations. In fact, several articles use these techniques to replicate numerically informations about the analytical solutions of an PDE, which we call qualitative stability. We work in this article in the same way, using the NSFD to study the Black-Scholes equation and find in the numerical domain the fact that the kinetic energy of this model has an exponential decay. In addition, we do this analysis in the usual grid and also in the Staggered Grid.

**Key-words:**NSFD.Numerical. Qualitative Stability. Staggered Grid.Energy

# Résumé

Les méthodes de différence finie non-usuales(NSFD) on été développé par Mickens dans les années 2000, donc ce sont des nouvelles techniques pour l'analyse numérique des équations différentielles partielles. En effet, plusieurs articles utilisent de ces techniques pour retrouver, dans le domaine numérique, des informations sur les solutions d'une EDP, ce que nous appellons la stabilité qualitative. Nous travaillons dans cet article pareillement, en utilisant le NSFD pour analyser l'équation de Black-Scholes et on retrouve dans le domaine numérique le fait de l'Énergie Cinétique de ce modèle avoir une décroissance exponentielle. En plus, nous faisons cette analyse sur la maille usual et aussi la maille déplacée.

**Mots-clés** : NSFD.numerique. stabilité qualitative.maille déplacée.Energie

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>EDP'S E ENERGIA DE SOLUÇÕES</b>	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS NÃO-USUAL</b>	<b>20</b>
<b>3.1</b>	<b>Exemplo de NSFD para uma Equação Diferencial Ordinária não-linear</b>	<b>22</b>
<b>4</b>	<b>EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES</b>	<b>25</b>
<b>5</b>	<b>ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES</b>	<b>31</b>
<b>5.1</b>	<b>Aproximação do termo <math>xu_x</math> em malha usual</b>	<b>33</b>
<b>5.2</b>	<b>Aproximação do termo <math>xu_x</math> em malha deslocada</b>	<b>37</b>
5.2.1	Malha Descolcada	38
5.2.2	Malha deslocada para Equação de Black-Scholes	40
5.2.3	Condições de contorno Explícitas	42
5.2.4	Condições de contorno implícita	46
<b>5.3</b>	<b>Método NSFD para Equação de Black-Scholes</b>	<b>50</b>
<b>5.4</b>	<b>Simulações numéricas para a Equação de Black-Scholes</b>	<b>58</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>65</b>

# 1 Introdução

Neste trabalho faremos a análise de estabilidade qualitativa no contexto numérico para a seguinte equação:

$$u_\tau(x, \tau) - \frac{\sigma^2(\tau)x^2}{2}u_{xx}(x, \tau) - r(\tau)xu_x(x, \tau) + r(\tau)u(x, \tau) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq T$$

Tal equação é conhecida como **Modelo de Black-Scholes** e tem sua importância na precificação de ativos financeiros no mercado de opções. Neste modelo,  $u(x, \tau)$  representa o valor do ativo financeiro na data de vencimento em função do preço do ativo representado pela variável  $x$  e do tempo de expiração do contrato representado pela variável  $\tau$ . Os parâmetros  $\sigma(\tau)$  e  $r(\tau)$  são funções não identicamente nulas e positivas que representam a volatilidade do ativo e a taxa de juros respectivamente (BLACK, 1973; BLOSS DIETMAR ERNST, 2013; PFUTZENREUTER, 2008). Não analisaremos a solução desta equação, no entanto, vamos estudar o comportamento de sua energia cinética, o qual indica o comportamento assintótico da solução.

As técnicas utilizadas neste texto são baseadas no artigo de Anguelov et al (ANGUELOV J. K. DJOKO, 2007), no qual os autores estudam a equação de Burgues dada por:

$$u_t - v u_{xx} + u u_x = f, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T$$

A qual é estudada sobre as condições de contorno de Dirichlet, ou seja:

$$u(x, 0) = u(x, T) = 0$$

As dificuldades na análise desta equação se encontram na parcela  $u u_x$ , pois este termo é não linear e faz com que métodos numéricos usuais apresentem instabilidades. A maneira que os autores encontraram para contornar este problema consiste em aproximar este termo usando um método conhecido como **Método de Diferenças Finitas Não-Usual**. Tal método está presente nos trabalhos de Mickens (MICKENS, 2000; MICKENS, 2005) e consiste em aproximações não locais de termos não lineares.

Primeiramente, ao fazer o balanceamento de energia toda a equação é multiplicada por  $u$  e integrada no domínio espacial, de onde,

$$\int_0^1 u u_t dx - v \int_0^1 u u_{xx} dx + \int_0^1 u u_x dx = \int_0^1 u f dx$$

Ao resolver as integrais vamos obter a equação da energia para este problema que é dada por:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |u(x, t)|^2 dx + v \int_0^1 |u_x(x, t)|^2 dx = \int_0^1 f(t)u(x, t) dx$$

Assim, a energia cinética do sistema é da seguinte forma:

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u(x, t)|^2 dx$$

Com isso, os autores provam que a energia cinética da equação de Burgues tem decaimento exponencial e produzem um esquema numérico que preserve tal decaimento, isto é, que seja qualitativamente estável com respeito ao decaimento exponencial da energia cinética.

Além disso, resolvendo as integrais obtém-se:

$$\int_0^1 uu_x u dx = 0$$

Esta expressão é fundamental na estabilidade do método, pois ela é a chave para produzir uma aproximação para o termo não-linear  $uu_x$ . Com efeito, de acordo com Mickens, termos não lineares podem ter aproximações não locais da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u^2(t_k) &\approx \alpha_1 u_k u_{k+1} + \alpha_2 u_k \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} + \alpha_3 u_{k-1} u_k \\ u^3(t_k) &\approx \beta_1 u_k^2 u_{k+1} + \beta_2 \frac{u_{k-1}^2 u_{k+1}^2}{u_k} + \beta_3 u_{k-1} u_k u_{k+1} \end{aligned}$$

Onde, os coeficientes devem verificar a condição de consistência de Mickens:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 1 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 1 \end{aligned}$$

Assim, uma aproximação numérica para o termo  $uu_x$  é dada da seguinte forma (ANGUELOV, 2003):

$$\gamma_i = (\alpha_1 u_{i+1} \alpha_2 u_i + \alpha_3 u_{i-1}) \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + (\beta_1 u_{i+1} \beta_2 u_i + \beta_3 u_{i-1}) \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \approx u(x_i) u_x(x_i)$$

Tal aproximação deve reproduzir numericamente propriedades da solução analítica, mais precisamente:

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i u_i = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 uu_x u dx = 0$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^N [(\alpha_1 u_{i+1} \alpha_2 u_i + \alpha_3 u_{i-1}) \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + (\beta_1 u_{i+1} \beta_2 u_i + \beta_3 u_{i-1}) \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}] u_i = 0$$

Esta igualdade junto com as condições de consistências de Mickens recai em um sistema linear o qual tem como solução os coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$  e  $\beta_3$ , gerando assim uma aproximação não local para o termo  $uu_x$  da equação de Burgues que tornam o sistema qualitativamente estável com respeito ao decaimento exponencial.

A função encontrada por Anguelov et al ([ANGUELOV J. K. DJOKO, 2007](#)) que aproxima o termo  $uu_x$  é a seguinte:

$$\gamma_i(u) = (pu_{i+1} + qu_i + (\frac{1}{3} - q)u_{i-1}) \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + ((\frac{1}{3} - q)u_{i+1} + qu_i + (\frac{1}{3} - p)u_{i-1}) (\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x})$$

Onde  $p, q \in R$ .

A partir desta aproximação é proposto um esquema numérico que preserva o decaimento exponencial do modelo contínuo, o qual é dado por:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - v \frac{u_{i+1}^{n+\theta} - 2u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta}}{\Delta x^2} + \gamma_i(u^{n+\theta}) = f_i^{n+\theta}$$

$$1 \leq i \leq N$$

$$u_i^0 = u^0(ih), \quad 1 \leq i \leq N + 1$$

Onde,  $u^{n+\theta} = \theta u^{n+1} - (1 - \theta)u^n$  e  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Através do balancemaneto de energia podemos provar que a equação de Black-Scholes também possui a propriedade da energia cinética ter decaimento exponencial, portanto o objetivo deste trabalho é utilizar a mesma técnica, através de diferenças finitas não-usuais, para obter um esquema numérico que preserve o decaimento exponencial da energia cinética para Black-Scholes.

O modelo de Black-Scholes é uma equação linear, no entanto, ao fazer o balanceamento de energia, tal qual feito para equação de Burgues, o termo  $xu_x$  aparece como chave para garantir o decaimento exponencial da energia. Assim utilizaremos as aproximações não locais de Mickens para aproximar este termo e garantir a estabilidade qualitativa.

Apesar de diversos trabalhos estudarem este modelo numericamente ([HEIDER, 2009](#); [COMPANY E. NAVARRO, 2008](#); [MOSNEAGU, 2010](#); [FERNANDES, 2009](#)) todos eles analisam a solução do modelo obtida através de uma substituição de variáveis, em seguida estuda-se o comportamento da solução e do erro. Em nosso caso, estudaremos numericamente uma característica particular deste modelo que consiste no decaimento exponencial da energia cinética.

Além disso, o modelo de Black-Scholes é uma equação de difusão-convecção, por isso tem comportamento similar as equações derivadas de Navier-Stokes, assim, devido a importância técnica e teórica, vamos produzir esquemas numéricos tanto para malha usual quanto para malha deslocada.

Nosso trabalho está dividido em cinco capítulos. Nos três primeiros mostramos a importância do modelo de Black-Scholes e apresentamos os principais resultados que formam a base dos nossos estudos. Por último, analisamos a energia da Equação de Black-Scholes para o caso contínuo e discreto.

No segundo capítulo, fazemos um breve resumo da importância do estudo da energia de equações diferenciais parciais, focando no método de energia e como este pode nos indicar o comportamento assintótico da solução.

No terceiro capítulo falamos sobre o método de diferenças finitas não usuais, sua definição e utilidade no estudo de equações diferenciais.

No quarto capítulo desenvolveremos a equação de Black-Scholes e através do método de energia vamos provar que a energia cinética deste modelo tem decaimento exponencial.

No último capítulo, produziremos um método de diferenças finitas não usual que preserva este decaimento tanto em malha usual quanto em malha deslocada e apresentaremos algumas simulações numéricas.

---

## 2 EDP's e energia de soluções

No capítulo anterior, destacamos que o modelo de Black-Scholes consistia de uma Equação Diferencial Parcial (EDP) e que o estudo de suas propriedades tem importância para o mercado financeiro. De maneira geral, EDP's são ferramentas importantes na modelagem de fenômenos naturais, pois suas soluções indicam como esses fenômenos se comportam. Neste sentido, o modelo de Black-Scholes fornece uma solução que indica o comportamento do preço das opções no decorrer do tempo. Portanto, toda análise sobre a solução desta equação tem importância para o mercado financeiro.

Neste trabalho não vamos analisar a solução da equação de Black-Scholes diretamente, em vez disso, vamos estudar a energia desta equação. Porém, como veremos mais adiante, estaremos estudando a solução indiretamente, pois a energia de uma EDP está ligada ao comportamento de sua solução.

Para facilitar a compreensão do conceito de energia, utilizaremos a equação da onda, dada por:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (2.1)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (2.3)$$

Esta equação descreve como uma onda se propaga, mais especificamente, (2.1)-(2.3) pode modelar, por exemplo, o deslocamento transversal de uma corda sob tensão viajando a uma velocidade constante. Na literatura a energia de sistemas como (2.1)-(2.3) é definida da seguinte forma (OLIVEIRA, 2014):

**Definição 2.1** (*Energia Cinética*) A energia cinética associada ao modelo (2.1)-(2.3) é dada por:

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx \quad (2.4)$$

**Definição 2.2** (*Energia Potencial*) A energia potencial associada ao modelo (2.1)-(2.3) é dada por:

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx \quad (2.5)$$

**Definição 2.3** (*Energia Total*) A energia total associada ao modelo (2.1)-(2.3) é dada por:

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx \quad (2.6)$$

O balanceamento de energia consiste em multiplicar 2.1 por um termo adequado e em seguida integrar no domínio do espaço, dessa forma obteremos termos semelhantes a 2.4 e 2.5.

De fato, multiplicando 2.1 por  $u_t$  e integrando em  $(0, L)$  teremos:

$$\int_0^L u_{tt} u_t dx - \int_0^L u_{xx} u_t dx = 0 \quad (2.7)$$

Fazendo cada integral separadamente, obtemos:

$$\int_0^L u_{tt} u_t dx = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{d(u_t)^2}{dt} dx = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L (u_t)^2 dx \quad (2.8)$$

$$\int_0^L u_{xx} u_t dx = (u_x u_t)_0^L - \int_0^L u_x u_{xt} dx = - \int_0^L \frac{1}{2} \frac{d(u_x)^2}{dt} dx = - \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} (u_x)^2 dx \quad (2.9)$$

Assim, substituindo 2.8 e 2.9 em 2.7 podemos concluir que

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L (u_t)^2 dx + \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} (u_x)^2 dx = 0 \quad (2.10)$$

A igualdade 2.10 é a igualdade de energia para o sistema (2.1)-(2.3). Consequentemente, usando 2.10 e as definições de energia dadas em 2.4, 2.5 e 2.6 temos:

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0$$

O que nos indica que a energia para o sistema (2.1)-(2.3) é constante, ou seja, podemos identificar que o modelo está em movimento retilíneo uniforme (MRU). Fisicamente este resultado é condizente, pois como explicado anteriormente, esta equação modela o deslocamento transversal de uma corda sob tensão constante e viajando a uma velocidade constante, portanto, é natural que o modelo esteja em MRU já que não consideramos nenhuma força de atrito.

De maneira geral, os estudos sobre a energia são feitos através da equação de Euler-Lagrange, a qual surgiu da necessidade de minimizar um funcional (CAMPOS, 2017). Com efeito, seja  $S$  um funcional e  $u : [x_0, L] \times [t_0, T] \mapsto R$  uma função que minimizar este

funcional. Então se for possível definir um funcional  $\mathcal{L} : (x, t, u, u_x, u_t) \mapsto R$  de modo que possamos fazer:

$$S(u(t)) = \int_{x_0}^L \int_{t_0}^T \mathcal{L}(x, t, u(x, t), u_x, u_t) dx dt \quad (2.11)$$

Então  $\mathcal{L}$  satisfaz a seguinte igualdade:

$$\mathcal{L}_u - D_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = 0 \quad (2.12)$$

Onde  $D_x$  e  $D_t$  são as derivadas totais. Esta expressão é conhecida como **Equação de Euler-Lagrange** e  $\mathcal{L}$  é conhecida como **Função de Lagrange**. Note que esta equação é condição necessária para que  $u(x, t)$  minimize  $S$ , porém não é condição suficiente.

Em um contexto de equações diferenciais parciais, podemos considerar o funcional  $S$  como a "energia do sistema", uma vez que trabalhando sobre os espaços  $H_0^1$  chamados **espaços de Sobolev**, as soluções das equações diferenciais devem minimizar o funcional de energia.

Nesse sentido, o objetivo do balanceamento de energia é encontrar o funcional  $S$  através da própria equação diferencial. Este processo é feito através da multiplicação de termos que envolvam as derivadas da solução e integrando toda a equação em relação a variável do espaço. Fazendo manipulações deste tipo encontraremos:

$$\int_{x_0}^L \mathcal{E}(x, t, u, u_t, u_x) dx = 0 \quad (2.13)$$

para algum funcional  $\mathcal{E}(x, t, u, u_t, u_x)$ .

As igualdades como 2.13 obtidas através desses processos são conhecidas como **igualdade de energia**. Se de fato tal igualdade representar a energia do sistema, então necessariamente deve verificar a equação de Lagrange 2.13.

O sistema (2.1)-(2.3) é um caso particular do sistema:

$$u_{tt} - u_{xx} = f \quad (2.14)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (2.15)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (2.16)$$

onde  $f \in L^2(\Omega)$ .

Este é a equação da onda em uma dimensão, a qual tem solução e esta verifica:

$$\int_0^L (u_t)^2 dx + \int_0^L (u_x)^2 dx = \int_0^L |f u_t|^2 dx \quad (2.17)$$

A expressão 2.17 é a igualdade de energia para a equação da onda em uma dimensão. Percebe-se que a diferença desta equação para a obtida no sistema (2.1)-(2.3), é o termo  $\int_0^L |f u_t|^2 dx$ . De fato, este termo indica a variação da energia para este sistema e dependendo da função  $f$ , o sistema pode ganhar ou perder energia.

Para exemplificar vamos tomar a seguinte equação:

$$u_{tt} - u_{xx} = -\alpha u_t, \quad x \in (0, L), \quad t \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \quad (2.18)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.19)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (2.20)$$

Este modelo descreve o deslocamento transversal de uma corda sob tensão e que viaja em uma velocidade constante, porém, diferente da anterior temos o termo  $-\alpha u_t$ , vamos mostrar que este termo faz com que a energia do sistema diminua, ou seja, fisicamente este termo representa o atrito ao qual a corda está sujeita.

De fato, multiplicando 2.18 por  $u_t$ , integrando em  $(0, L)$  e usando 2.8 e 2.9, temos:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L (u_t)^2 dx + \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} (u_x)^2 dx = -\alpha \int_0^L (u_t)^2 dx \quad (2.21)$$

Esta é a igualdade de energia para o sistema (2.18)-(2.20).

Pela definição de energia dada em 2.6 e usando 2.21 podemos escrever:

$$\frac{dE}{dt} = -\alpha \int_0^L (u_t)^2 dx \quad (2.22)$$

Ou seja,

$$\frac{dE}{dt} \leq 0$$

O que nos indica que a energia total do sistema (2.18)-(2.20) é decrescente.

Fisicamente este resultado é verificado, pois como dito anteriormente, o sistema (2.18)-(2.20) modela o deslocamento transversal de uma corda sob tensão, que viaja a uma velocidade constante e considerando que esta corda está sujeita a atrito, de onde a energia deve sofrer perdas.

Normalmente as nas igualdades de energia das EDP's aparecem expressões do tipo:

$$\int_{x_0}^L \frac{1}{2} \frac{d(e(t)^2)}{dt} dx - \int_{x_0}^L F(u) dx = 0 \quad (2.23)$$

Note que se considerarmos o lado esquerdo de 2.23 como o integrando em relação a  $t$  de 2.11, então:

$$S(u(t)) = \int_{t_0}^T \int_{x_0}^L \frac{1}{2} \frac{d(e(t)^2)}{dt} dx dt - \int_{t_0}^T \int_{x_0}^L F(u) dx dt$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \left( \int_{x_0}^L e(t)^2 dx \right) - \int_{t_0}^T \int_{x_0}^L F(u) dx dt = 0 \quad (2.24)$$

de onde o primeiro termo vai representar a energia cinética do sistema e o segundo a energia potencial.

Neste trabalho vamos estudar a energia cinética da Equação de Black-Scholes a qual apresenta igualdade de energia tipo 2.24. Definindo Energia Cinética desta equação, provaremos então que esta tem decaimento exponencial. Em seguida produziremos um método numérico que resolve a equação de Black-Scholes preservando este decaimento exponencial. Veremos os detalhes destes processos nos próximos capítulos.

### 3 Método de diferenças finitas não-usual

O modelo que este trabalho estuda, utilizado para analisar os preços no mercado de opções, consiste em uma Equação Diferencial Parcial (EDP), conhecida como Equação de Black-Scholes. Estamos interessados em estudar esta equação numericamente, assim, vamos apresentar neste capítulo um método numérico utilizado para resolver EDP's através da técnica de Diferenças Finitas. Tal método é conhecido como Método de Diferenças Finitas Não-Usual.

O Método de Diferenças Finitas Não-Usual ou Non-Standard Finite Difference Method (NSFD), é usado para produzir esquemas de diferenças finitas para uma classe de equações diferenciais parciais e ordinárias. Tais métodos foram introduzidos por Mickens em 1980 e são métodos eficientes que preservam propriedades importantes das soluções exatas de equações diferenciais (MICKENS, 2000; MICKENS, 2005).

O desenvolvimento desses métodos se deram através de regras estabelecidas de maneira empírica por Mickens. Assim, um método que obedece a essas regras é denominado de NSFD. Em particular, podemos definir NSFD utilizando as seguintes regras fornecidas por Mickens (ANGUELOV, 2001; PATIDAR, 2016):

**Definição 3.1** *Um esquema numérico é chamado de Método de Diferenças Finitas Não-Usual (NSFD), se pelo menos uma das seguintes condições são atendidas:*

*i) Nas derivadas discretas de primeira ordem que aparecem na equação o denominador tradicional  $h$  é substituído por uma função não-negativa,  $\phi(h)$  com a seguinte propriedade:*

$$\phi(h) = h + O(h) \text{ com } h \rightarrow 0$$

*ii) Termos não-lineares da equação são aproximados de uma maneira não local, isto é, por uma função adequada de vários pontos da malha.*

O item *ii)* desta definição é particularmente importante para este trabalho, pois é a partir dele que construiremos o método NSFD que usaremos para analisar a energia da equação de Black-Scholes. Portanto, para exemplificá-lo, considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad y(t_0) = y_0 \tag{3.1}$$

A função  $y \equiv y : [t_0, T) \rightarrow R$  é desconhecida,  $y_0 \in R$  e  $f : R \rightarrow R$  são dadas. Assumimos que  $t_0$  e  $T$  são finitos e que o problema tem solução única.

Para aproximar 3.1 numericamente substituímos o intervalo contínuo  $[t_0, T)$  por uma malha de pontos discretos  $\{t_k = t_0 + kh; k \geq 0\}$ , onde o parâmetro  $h > 0$  é denominado *passo*. Chamamos  $y_k$  para a aproximação da solução  $y(t_k)$  no ponto  $t_k$  e portanto  $y_k \equiv y(t_k)$ .

Além disso, como estamos interessados em reproduzir numericamente propriedades específicas da solução de uma equação diferencial, então faz-se necessário a seguinte definição (ANGUELOV J. K. DJOKO, 2007):

**Definição 3.2** *Assumindo que a solução de uma equação diferencial satisfaz uma determinada propriedade  $\mathcal{P}$ . Um esquema numérico é dito **qualitativamente estável** ou ( $\mathcal{P}$ -estável), se para todo passo o conjunto de soluções produzidas pelo esquema numérico satisfaz a propriedade  $\mathcal{P}$ .*

Assim, para produzir um esquema para 3.1, não usual e que seja qualitativamente estável com respeito a uma dada propriedade, Mickens sugere várias formas para aproximar os termos não-lineares do lado direito desta equação. Por exemplo,

$$y^2(t_k) \approx y_k y_{k+1}, y_k \frac{y_{k-1} + y_{k+1}}{2}, y_{k-1} y_k$$

$$y^3(t_k) \approx y_k^2 y_{k+1}, \frac{y_{k-1}^2 y_{k+1}^2}{y_k}, y_{k-1} y_k y_{k+1}$$

De maneira geral, todas as combinações lineares das expressões acima com a soma de coeficientes iguais a 1, aproxima-se de  $y^2$  e  $y^3$ , sendo o erro de ordem  $O(h)$  para  $y(t)$  suficientemente suave (ANGUELOV, 2003). Ou seja, podemos ter as seguintes aproximações:

$$y^2(t_k) \approx \alpha_1 y_k y_{k+1} + \alpha_2 y_k \frac{y_{k-1} + y_{k+1}}{2} + \alpha_3 y_{k-1} y_k$$

$$y^3(t_k) \approx \beta_1 y_k^2 y_{k+1} + \beta_2 \frac{y_{k-1}^2 y_{k+1}^2}{y_k} + \beta_3 y_{k-1} y_k y_{k+1}$$

Onde,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \tag{3.2}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$$

As condições 3.2 são chamadas de **condições de consistência** para o método NSFD.

Desta forma, a função  $f$  na equação 3.1, pode ser aproximada por uma expressão que contém certos parâmetros livres e estes parâmetros são determinados de tal forma que o método garanta que uma certa propriedade seja reproduzida numericamente, isto é, que o esquema seja qualitativamente estável.

### 3.1 Exemplo de NSFD para uma Equação Diferencial Ordinária não-linear

Afim de exemplificar a teoria dos Métodos de Diferenças Finitas Não-Usuais, vamos produzir um NSFD para a seguinte equação:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\lambda}y^2, \quad \lambda > 0 \quad (3.3)$$

Esta equação tem como solução:

$$y(t) = \frac{1}{t\lambda + C}$$

onde,  $C \in R$  é uma constante.

De posse da solução de 3.3, pode-se facilmente considerar que

**Lema 3.1** Para todo  $t \in [1, \infty]$ , temos:

$$0 \leq y(t) \leq 1 \quad (3.4)$$

Além disso, a equação 3.3 nos permite enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 3.1** A solução da equação 3.3 é decrescente quando  $t > 0$ , isto é,

$$0 \leq y(t_2) \leq y(t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2$$

Assim, vamos construir um esquema numérico de diferenças finitas não-usual que seja qualitativamente estável com respeito ao teorema 3.1. Para isso, tomamos a seguinte aproximação para o termo não-linear que aparece em 3.3:

$$y^2 = \alpha_1 y_k^2 + \alpha_2 y_k y_{k+1}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in R$$

Usando a condição de consistência de Mickens dada em 3.2, podemos reescrever esta aproximação da seguinte maneira:

$$y^2 = ay_k^2 + (1 - a)y_k y_{k+1}, \quad a \in R$$

Portanto um NSFD para o exemplo 3.3 pode ser dado por:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = -\frac{1}{\lambda}(ay_k^2 + (1 - a)y_k y_{k+1}), \quad a \in R \quad (3.5)$$

Demonstrar que este esquema é qualitativamente estável com respeito ao teorema 3.1 equivale a demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema 3.2** *Desde que  $a \leq 0$  e  $t \in [1, \infty]$ , então as soluções numéricas obtidas através do esquema 3.4, verificam:*

$$y_{k+1} \leq y_k, \quad \forall k \geq 1$$

De fato, usando 3.5, podemos escrever:

$$y_{k+1} = \frac{(\lambda - ah y_k)y_k}{(\lambda + h(1 - a)y_k)}, \quad a \in R$$

Assim,

$$y_{k+1} = F(y_k, h), \quad F(y_k, h) = \frac{(\lambda - ah y_k)y_k}{(\lambda + h(1 - a)y_k)}, \quad a \in R$$

Para demonstrar o teorema 3.2, vamos usar a equação 3.3, de onde,

$$\frac{dy}{dt} \leq 0$$

Note que para  $h$  suficientemente pequeno temos  $F(y; h) \approx y$ , nessas condições, devemos verificar que

$$\frac{dF}{dt} \approx \frac{dy}{dt} \leq 0$$

De fato, esta condição simplificada equivale a

$$\frac{\lambda^2 y'(t) - 2\lambda ah y'(t)y(t) - ah^2(1 - a)y^2(t)y'(t)}{[\lambda + h(y(t)(1 - a))]^2} \leq 0$$

Da equação 3.3 temos que  $y'(t) \leq 0$ , também de posse do lema 3.1 temos  $y(t) \geq 0$ . Assim, para que isso aconteça basta que:

$$a \leq 0$$

Daí, a solução aproximada que resulta do esquema 3.5 será decrescente. Provando assim o teorema 3.2.

Com isso, temos uma classe de esquemas de diferenças finitas para 3.3 que é qualitativamente estável quanto ao teorema 3.1.

Afim de compararmos o método NSFD 3.5, com os métodos de diferenças finitas usuais, tomamos o esquema numérico de diferenças finitas conhecido como Euler Explícito para a equação 3.3:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = -\frac{1}{\lambda} y_k^2, \quad t \in [1, \infty], \quad y_0 = \frac{1}{\lambda} \quad (3.6)$$

A figura 1 mostra uma simulação numérica que compara os esquemas 3.5 (NSFD) e o 3.6 (Euler Explícito) para a Equação 3.3. Nesta caso, tomamos  $t \in [1, 2]$ ,  $h = 0,01$  e  $\lambda = 0,001$ . Note que o esquema de Euler Explícito não reproduz o decrescimento da solução numérica. No entanto, para as mesmas condições o esquema NSFD obtido com  $a = -4$  conserva para o modelo numérico o decrescimento da solução do modelo analítico. Ou seja, o esquema 3.5 é qualitativamente estável com respeito ao decrescimento da solução exposto no teorema 3.1.

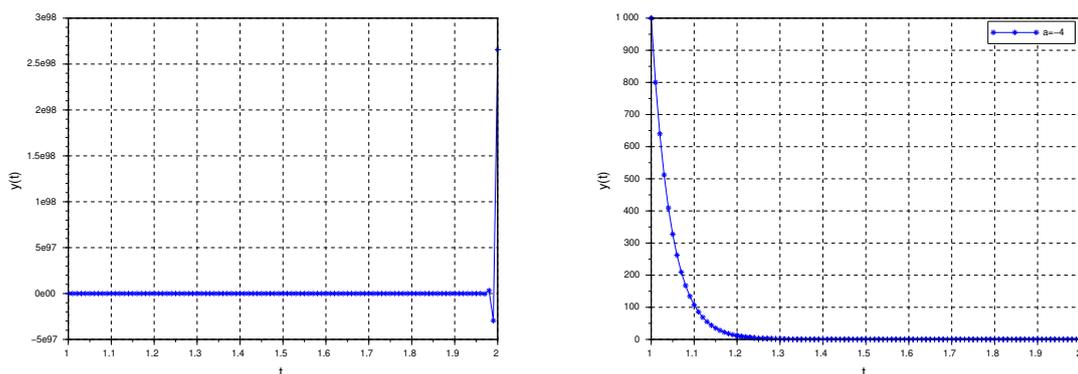


Figura 1 – Simulações numéricas para a equação 3.3 usando os métodos de Euler Explícito (figura da esquerda) e NSFD (figura da direita) com  $h=0,01$  e  $\lambda = 0,001$  e  $a=-4$

## 4 Equação de Black-Scholes

Nos capítulos anteriores introduzimos um modelo utilizado para analisar o preço de uma operação financeira denominada opção, tal modelo consistia em uma equação diferencial parcial denominada Equação de Black-Scholes; em seguida, mostramos que o estudo da energia de uma equação diferencial pode ser muito útil para analisar o comportamento de suas soluções e apresentamos um método de diferenças finitas não usual que nos permite estudar numericamente propriedades específicas de equações diferenciais.

Assim, neste capítulo, usaremos a técnica de diferenças finitas não usual (NSFD) para estudar a energia da equação de Black-Scholes. Com isso, daremos condições suficientes para que a energia cinética dessa equação tenha um decaimento exponencial. Indiretamente, este resultado vai indicar que a solução da equação também vai decair exponencialmente, ou seja, sob essas condições o valor da opção tende a diminuir rapidamente.

Na literatura a **Equação de Black-Scholes** é dada da seguinte forma:

$$u_t(x, t) + \frac{\sigma(t)^2 x^2}{2} u_{xx}(x, t) + r(t) x u_x(x, t) - r(t) u(x, t) = 0$$

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T$$

Trata-se de uma equação de difusão-reação-convecção onde  $\sigma(t) > 0$  e  $r(t) > 0$ , mais precisamente estas funções representam a **volatilidade do ativo** e a **taxa de juros** respectivamente. Neste trabalho, estamos interessados em produzir esquemas NSFD os quais preservem propriedades relacionadas a energia desta equação.

A equação de Black-Scholes resulta em uma estimativa de preço para uma opção do tipo europeia, as quais são transações financeiras com datas pré-determinadas. Portanto, devido a sua utilização, é importante que a equação de Black-Scholes seja analisada com referência ao tempo que falta para que as operações financeiras expirem (BLACK, 1973; BLOSS DIETMAR ERNST, 2013; PFUTZENREUTER, 2008). Metemáticamente, isto significa fazer a seguinte mudança de variável:

$$\tau = T - t$$

Onde  $T$  é o tempo final (data de exercício da operação financeira),  $t$  é data presente e  $\tau$  é o tempo de expiração, isto é, o tempo que falta para que o proprietário da opção possa exercê-la.

O principal efeito desta mudança na equação está na parcela onde aparece a derivada com relação ao tempo, pois de acordo com a regra da cadeia temos:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{du}{d\tau} \frac{d(T-t)}{dt} = -\frac{du}{d\tau} \implies u_t = -u_\tau$$

Portanto, a equação de Black-Scholes pode ser escrita da seguinte maneira:

$$u_\tau(x, \tau) - \frac{\sigma(\tau)^2 x^2}{2} u_{xx}(x, \tau) - r(\tau) x u_x(x, \tau) + r(\tau) u(x, \tau) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq \tau \leq T \quad (4.1)$$

Em malha usual, trataremos esta equação sob as condições de contorno de Dirichlet, isto é:

$$u(0, \tau) = u_0 = 0 \text{ e } u(L, \tau) = u_n = 0$$

Além disso, o espaço no qual trabalharemos será o Espaço de Lebesgue  $L^2(0, L)$ , equipado com estrutura de Hilbert com o seguinte produto interno e norma associada:

$$\langle v, w \rangle = \int_0^L v(x)w(x)dx \text{ e } \|v\|_0^2 = \int_0^L |v(x)|^2 dx$$

Com efeito, provaremos que a equação de Black-Scholes verifica o seguinte teorema:

**Teorema 4.1** *Seja a energia da equação de Black-Scholes dada por:*

$$E(u(\tau)) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx \quad (4.2)$$

Então,

i) *Se  $\sigma^2(\tau) \leq r(\tau), \forall \tau > 0$ , então  $E(u(\tau))$  obedece a lei de dissipação de energia, isto é,*

$$E(u(\tau)) \leq E(u(0)), \quad \forall \tau \geq 0 \quad (4.3)$$

ii) *Se  $\sigma^2(\tau) < r(\tau)$  e considerando  $\sigma^2(t)$  e  $r(t)$  funções limitadas em  $(0, T)$ , então a energia definida por 4.2 tem decaimento exponencial. Ou seja, existe  $M > 0$  tal que:*

$$E(u(\tau)) \leq e^{-M\tau} E(u^0) \quad \forall \tau \geq 0$$

Onde,  $M = \inf_{\tau \geq 0} (r(\tau) - \sigma(\tau)^2)$ .

Prova.:

Multiplicando a equação 4.1 por  $u(x, \tau)$  e integrando no intervalo dado teremos:

$$\int_0^L u_\tau u dx - \frac{\sigma(\tau)^2}{2} \int_0^L x^2 u_{xx} u dx - r(\tau) \int_0^L x u_x u dx + r(\tau) \int_0^L u^2 dx = 0 \quad (4.4)$$

Tratando cada parcela individualmente, segue:

$$\int_0^L u_\tau u dx = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^L u^2 dx \quad (4.5)$$

De fato, para  $L^2(0, L)$  com estrutura de Hilbert vale a seguinte propriedade para o produto interno associado:

$$\frac{d}{d\tau} \langle u, u \rangle = \langle u_\tau, u \rangle + \langle u, u_\tau \rangle \implies \frac{d}{d\tau} \langle u, u \rangle = 2 \langle u_\tau, u \rangle \implies \langle u_\tau, u \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \langle u, u \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u\|_0^2$$

Note que,

$$\langle u_\tau, u \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u\|_0^2 \iff \int_0^L u_\tau u dx = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^L u^2 dx$$

Também em 4.4 temos:

$$\int_0^L x^2 u_{xx} u dx = -2 \int_0^L x u_x u dx - \int_0^L x^2 u_x^2 dx \quad (4.6)$$

De fato, usando integração por partes obtem-se:

$$\int_0^L x^2 u_{xx} u dx = x^2 u u_x \Big|_0^L - 2 \int_0^L x u_x u dx - \int_0^L x^2 u_x^2 dx$$

Aplicando as condições de contorno,  $u_0 = u_n = 0$ , nessa última igualdade então verificamos 4.6.

Além disso, em 4.4 verifica-se:

$$\int_0^L x u_x u dx = -\frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx \quad (4.7)$$

Também usando integração por partes temos:

$$\int_0^L x u_x u dx = x u^2 \Big|_0^L - \int_0^L u^2 dx - \int_0^L x u_x u dx$$

Então, aplicando as condições de contorno de Dirichlet, têm-se 4.7.

Note que podemos substituir 4.7 em 4.6 e obteremos a seguinte identidade:

$$\int_0^L x^2 u_{xx} u dx = \int_0^L u^2 dx - \int_0^L x^2 u_x^2 dx \quad (4.8)$$

Assim, substituindo 4.5 , 4.7 e 4.8 em 4.4 teremos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u\|_0^2 - \frac{\sigma(\tau)^2}{2} \left( \int_0^L u^2 dx - \int_0^L x^2 u_x^2 dx \right) - r(\tau) \left( -\frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx \right) + r(\tau) \int_0^L u^2 dx = 0 \\ \Rightarrow & \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u\|_0^2 - \frac{\sigma(\tau)^2}{2} \int_0^L u^2 dx + \frac{\sigma(\tau)^2}{2} \int_0^L x^2 u_x^2 dx + \frac{r(\tau)}{2} \int_0^L u^2 dx + r(\tau) \int_0^L u^2 dx = 0 \\ \Rightarrow & \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u\|_0^2 = \frac{\sigma(\tau)^2}{2} \int_0^L u^2 dx - \frac{\sigma(\tau)^2}{2} \int_0^L x^2 u_x^2 dx - \frac{r(\tau)}{2} \int_0^L u^2 dx - r(\tau) \int_0^L u^2 dx \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u\|_0^2 = -\frac{\sigma(\tau)^2}{2} \int_0^L x^2 u_x^2 dx + \frac{1}{2} (\sigma(\tau)^2 - r(\tau)) \int_0^L u^2 dx - \frac{r(\tau)}{2} \int_0^L u^2 dx \quad (4.9)$$

Esta expressão é a igualdade de energia para Equação de Black-Scholes e como dito no capítulo 2, o termo do lado esquerdo da igualdade vai ser a energia cinética da equação 4.1. De onde,

$$E(u(\tau)) = \frac{1}{2} \|u\|_0^2$$

Então,

$$\frac{d}{d\tau} \frac{1}{2} \|u\|_0^2 = \frac{d(E(u(\tau)))}{d\tau}$$

Logo, 4.9 fica:

$$\frac{d(E(u(\tau)))}{d\tau} = -\frac{\sigma(\tau)^2}{2} \int_0^L x^2 u_x^2 dx + \frac{1}{2} (\sigma(\tau)^2 - r(\tau)) \int_0^L u^2 dx - \frac{r(\tau)}{2} \int_0^L u^2 dx \quad (4.10)$$

Ou seja, para  $\sigma(\tau)^2 \leq r(\tau)$  temos:

$$\frac{d(E(u(\tau)))}{d\tau} < 0$$

Portanto, a energia de 4.1, definida em 4.2 é decrescente, o que prova 4.3, isto é,

$$E(u(\tau)) \leq E(u(0)) , \quad \forall \tau > 0$$

Finalizando a prova de i).

Para demonstrar ii), vamos fazer uso da desigualdade de Gronwall, a qual nos garante que para  $t \geq 0$ ,

$$\frac{dz}{dt} \leq az + b \Rightarrow z(t) \leq \begin{cases} e^{at}z_0 + \frac{b}{a}(e^{at} - 1) & \text{se } a \neq 0 \\ z_0 + bt & \text{se } a = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Note que de 4.10, temos:

$$\frac{d(E(u(\tau)))}{d\tau} = -\frac{\sigma(\tau)^2}{2} \int_0^L x^2 u_x^2 dx + \frac{1}{2}(\sigma(\tau)^2 - r(\tau)) \int_0^L u^2 dx - \frac{r(\tau)}{2} \int_0^L u^2 dx dx$$

Como  $r(\tau) > 0$ , então:

$$\frac{d(E(u(\tau)))}{d\tau} \leq \frac{1}{2}(\sigma(\tau)^2 - r(\tau)) \int_0^L u^2 dx dx$$

Além disso, a energia é definida da seguinte forma:

$$E(u(\tau)) = \frac{1}{2} \|u(x, \tau)\|_0^2 = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx$$

De onde,

$$\frac{d(E(u(\tau)))}{d\tau} \leq (\sigma(\tau)^2 - r(\tau))E(u(\tau))$$

Portanto, sabendo que  $\sigma(\tau)^2 < r(\tau)$  e usando 4.11, temos:

$$E(u(\tau)) \leq e^{(\sigma(\tau)^2 - r(\tau))\tau} E(u^0), \quad \forall \tau \geq 0 \quad (4.12)$$

Como tomamos  $\sigma^2(t)$  e  $r(t)$  limitadas, então:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau) - r(\tau) &\leq \sup_{\tau \geq 0}(\sigma^2(\tau) - r(\tau)) \leq \sup_{\tau \geq 0}(\sigma^2(\tau)) + \sup_{\tau \geq 0}(-r(\tau)) = \sup_{\tau \geq 0}(\sigma^2(\tau)) - \inf_{\tau \geq 0}(r(\tau)) < \infty \\ r(t) - \sigma^2(\tau) &\leq \sup_{\tau \geq 0}(r(\tau) - \sigma^2(\tau)) \leq \sup_{\tau \geq 0}(r(\tau)) + \sup_{\tau \geq 0}(-\sigma^2(\tau)) = \sup_{\tau \geq 0}(r(\tau)) - \inf_{\tau \geq 0}(\sigma^2(\tau)) < \infty \end{aligned}$$

Portanto, deve existir  $K > 0$ , tal que:

$$|\sigma^2(\tau) - r(\tau)| < K$$

Então de 4.12, podemos escrever:

$$E(u(\tau)) \leq e^{(\sigma^2(\tau)-r(\tau))\tau} E(u^0) \leq e^{\sup_{\tau \geq 0} [\sigma^2(\tau)-r(\tau)]\tau} E(u^0)$$

Assim,

$$E(u(\tau)) \leq e^{-M\tau} E(u^0) \quad (4.13)$$

Onde,  $M = \inf_{\tau \geq 0} (r(t) - \sigma^2(t))$ .

Note que

$$\sigma^2(t) < r(t) \Rightarrow r(t) - \sigma^2(t) > 0 \Rightarrow M = \inf_{\tau \geq 0} (r(t) - \sigma^2(t)) \geq 0$$

Ou seja,

$$-M = -\inf_{\tau \geq 0} (r(t) - \sigma^2(t)) = \sup_{\tau \geq 0} (\sigma^2(t) - r(t)) \leq 0 \quad (4.14)$$

provando assim (ii).

Portanto, este resultado nos sugere que se considerarmos  $\sigma(\tau)$  e  $r(\tau)$  constantes, então quando a volatilidade do ativo for menor que a raiz quadrada da taxa de juros a opção tende a ter um valor cada vez menor quanto mais longe estiver da data de exercício da mesma.

O teorema 4.1, também evidencia um fato importante do modelo de Black-Scholes que é a influência da volatilidade do ativo no preço da opção. Este comportamento é esperado, pois neste modelo a volatilidade cumpre o papel de coeficiente de difusibilidade (BLACK, 1973). Por outro lado, esta propriedade também nos indica uma relação interessante entre a taxa de juros e a volatilidade, relação essa que pode influenciar o comportamento do preço da opção. Assim, estamos obtendo características importantes do modelo de Black-Scholes indiretamente através do estudo da Energia Cinética da equação que o caracteriza, o que reforça a importância deste estudo.

Nosso objetivo agora é produzir uma classe de esquemas NSFD de modo que estes esquemas sejam qualitativamente estáveis com respeito ao teorema 4.1, isto é, que reproduza esta propriedade numericamente.

## 5 Análise numérica da Equação de Black-Scholes

Neste capítulo vamos inserir as bases para que possamos analisar a equação 4.1 no domínio discreto. Para isso, tomaremos  $(t_k)_k$  uma subdivisão do intervalo  $(0, T)$  e  $(x_i)_i$  uma subdivisão do intervalo  $(0, L)$ , onde  $t_k = k\Delta t$  e  $x_i = i\Delta x$ ; os incrementos  $\Delta t$  e  $\Delta x$  são chamados de passo. Além disso, vamos denotar  $u_i^n$  o valor da função  $u$  no tempo  $t_n$  e no ponto  $x_i$ , isto é,  $u(x_i, t_n) \equiv u_i^n$  (FERNANDES, 2009; RAVIART, 1988).

Com efeito, para tratar esse resultado em um contexto numérico é necessário que trabalhemos em um espaço de dimensão finita, isto é, vamos aproximar o espaço  $L^2(0, L)$ , o qual estavamos trabalhando, pelo seguinte espaço:

$$l_N^2 = \{u = (u_i)_{i=0}^N, u_i \in R\}$$

Para efeitos de notação chamaremos esse espaço de  $l^2$ . Assim, para  $u = (u_i) \in l^2$  e  $v = (v_i) \in l^2$  introduzimos o seguintes produto escalar e norma:

$$(u, v)_{l^2} = h \sum_{i=0}^N u_i v_i, \quad \|u\|_{l^2}^2 = h \sum_{i=0}^N |u_i|^2$$

Note que, 4.7 é uma igualdade chave para o balanço de energia feito na demonstração do teorema 4.1 e tem o termo  $xu_x$  que aparece na equação de Black-Scholes. Estamos interessados em encontrar funções que aproximem o termo  $xu_x$ , para tanto vamos usar 4.7 e produziremos aproximações para este termo que dependam de parâmetros livres, conforme feito no capítulo anterior, e que produzam um esquema numérico qualitativamente estável com respeito ao teorema 4.1.

Com efeito, usando a notação de produto interno e norma podemos escrever a igualdade 4.7 da seguinte forma:

$$\langle xu_x, u \rangle = -\frac{1}{2} \langle u, u \rangle$$

Em um contexto de dimensão finita, isto é, aproximando o espaço  $L^2(0, L)$  por  $l^2$  temos que essa igualdade fica:

$$(xu_x, u)_{l^2} = -\frac{1}{2} (u, u)_{l^2} \tag{5.1}$$

Escrevendo os produtos internos temos:

$$\sum_{i=0}^N (xu_x)_i u_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^N u_i^2 \quad (5.2)$$

A estratégia deste trabalho, conforme feito no capítulo anterior, é substituir o termo  $xu_x$  por uma classe de funções com parâmetros livres, de modo que a manipulação dos parâmetros preservem a estabilidade qualitativa para determinadas propriedades da forma analítica, mais especificamente a propriedade 4.1. Por enquanto, vamos admitir que tais aproximações existem e vamos denotá las por  $\gamma$ . Portanto,  $\gamma_i : l^2 \rightarrow R$ , são funções que verificam:

$$\sum_{i=0}^N \gamma_i u_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^N u_i^2 \quad (5.3)$$

Além disso, vamos introduzir os seguintes operadores de diferenças finitas:

$$D_i^+ w = \frac{1}{h}(w_{i+1} - w_i), \quad D_i^- w = \frac{1}{h}(w_i - w_{i-1}), \quad D_i^0 w = \frac{1}{2h}(w_{i+1} - w_{i-1}), \quad \forall w \in l^2 \quad (5.4)$$

Chamados respectivamente de operador de diferença finita avançado, operador de diferença finita atrasado e operador de diferença finita central.

Destacamos as seguintes propriedades destes operadores:

$$\begin{aligned} D_{i-1}^+ &= D_i^- \\ D_{i+1}^- &= D_i^+ \\ 2D_i^0 &= D_i^+ + D_i^- \\ D_i^+ D_i^- w &= D_i^- D_i^+ w = \frac{1}{h^2}[w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}], \quad \forall w \in l^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Através destes operadores vamos produzir um esquema de diferenças finitas para a equação 4.1, que utilizará a aproximação  $\gamma_i$  para o termo  $xu_x$ , em seguida mostraremos que este esquema é qualitativamente estável com respeito a propriedade 4.1. Para tanto, vamos utilizar o seguinte lema:

**Lema 5.1** *Seja  $u = (u_i) \in l^2$  e  $w = (w_i) \in l^2$ ; temos que*

$$\sum_{i=1}^{N-1} w_i D_i^+ u = -\sum_{i=1}^{N-1} u_i D_i^- w + \frac{1}{h}[w_{N-1} u_N - w_0 u_1] \quad (5.6)$$

Em particular, se  $u_0 = u_N = 0$ , teremos:

$$\sum_{i=1}^{N-1} w_i D_i^+ = \sum_{i=1}^{N-1} u_i D_i^- w \quad (5.7)$$

Também adotaremos a seguinte notação para indicar o método de diferenças finitas que estamos utilizando:

$$u_i^{n+\theta} = \theta u_i^{n+1} + (1 - \theta) u_i^n, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad (5.8)$$

Este método é conhecido como **método theta** e nos permite, através da variação de  $\theta$ , trabalhar com métodos de diferenças finitas distintos; permitindo assim uma análise mais ampla dos resultados.

Portanto, para que possamos desenvolver um esquema numérico para 4.1, primeiro é necessário que aproximemos o termo  $xu_x$  numericamente, vamos fazer isso tanto em malha usual quanto em malha deslocada.

## 5.1 Aproximação do termo $xu_x$ em malha usual

Para reproduzir 4.1 numericamente em malha usual é essencial que as condições de contorno de Dirichlet que foram impostas a equação 4.1 sejam também garantidas numericamente. Isso significa trabalharmos sobre o seguinte subespaço de  $l^2$ :

$$V_{0,N} = \{v \in l^2; v_n = v_0 = 0\}$$

Com efeito, vamos escolher a função  $\gamma : V_{0,N} \rightarrow R$  que aproxima o termo  $xu_x$  em 4.1, isto é,

$$\sum_{i=0}^N (xu_x)_i u_i = \sum_{i=0}^N \gamma_i(x) u_i \quad (5.9)$$

Esta técnica está presente nos trabalhos de Mickens, nos quais são escolhidas funções do tipo:

$$\gamma_i = \begin{cases} (\alpha_1 x_{i+1} + \alpha_2 x_i + \alpha_3 x_{i-1}) \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + (\beta_1 x_{i+1} + \beta_2 x_i + \beta_3 x_{i-1}) \frac{u_i - u_{i-1}}{h} & , i = 1, \dots, N-1 \\ 0 & , i = 0 \text{ e } i = N \end{cases} \quad (5.10)$$

Note que tomamos  $\gamma_0 = \gamma_N = 0$  por mera formalidade, pois como estamos trabalhando com as condições de fronteira de Dirichlet então em 5.9 as extremidades do somatório do lado direito serão nulas.

**Teorema 5.1** *Uma aproximação numérica para o termo  $(xu_x)_i$  na equação de Black-Scholes em malha usual e condições de contorno de Dirichlet que verifica 5.3, pode ser dada por:*

$$\gamma_i = \left(\frac{i}{2} + q - s + \frac{1}{2}\right)(u_{i+1} - u_i) + \left(\frac{i}{2} + q - s\right)(u_i - u_{i-1})$$

Onde,  $q, s \in \mathbb{R}$ .

Prova do teorema 5.1:

Tomando  $x_i = hi$ , para  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ , então 5.10 fica:

$$\gamma_i(x) = (\alpha_1 h(i+1) + \alpha_2 i h + \alpha_3 h(i-1)) \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + (\beta_1 h(i+1) + \beta_2 i h + \beta_3 h(i-1)) \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

Ou seja,

$$\gamma_i = (i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_1 - \alpha_3)(u_{i+1} - u_i) + (i(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + \beta_1 - \beta_3)(u_i - u_{i-1})$$

Para facilitar os cálculos vamos usar as seguintes notações:

$$K_i = i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_1 - \alpha_3$$

$$Q_i = i(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + \beta_1 - \beta_3$$

Assim, a função fica,

$$\gamma_i = K_i(u_{i+1} - u_i) + Q_i(u_i - u_{i-1})$$

Substituindo esta última igualdade em 5.9 e levando em consideração as condições de fronteira do lado direito, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{N-1} (K_i(u_{i+1} - u_i) + Q_i(u_i - u_{i-1}))u_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} u_i^2 = 0 \quad (5.11)$$

Com isso, devemos determinar os coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$  e  $\beta_3$ , que compõe  $K_i$  e  $Q_i$  de modo que esta igualdade seja verificada.

Assim, desenvolvendo os produtos e agrupando os termos semelhantes em 5.11, temos:

$$\sum_{i=1}^{N-1} (K_i u_{i+1} u_i + (Q_i - K_i + \frac{1}{2}) u_i^2 - Q_i u_{i-1} u_i) = 0 \quad (5.12)$$

Podemos manipular os índices do somatório e aplicar as condições de contorno de Dirichlet, de modo que

$$\sum_{i=1}^{N-1} Q_i u_{i-1} u_i = \sum_{i=0}^{N-2} Q_{i+1} u_i u_{i+1} = \sum_{i=1}^{N-1} Q_{i+1} u_i u_{i+1}$$

Assim, 5.12 se torna:

$$\sum_{i=1}^{N-1} (K_i - Q_{i+1}) u_{i+1} u_i + (Q_i - K_i + \frac{1}{2}) u_i^2 = 0 \quad (5.13)$$

Daí impomos:

$$\begin{aligned} K_i - Q_{i+1} &= 0 \\ Q_i - K_i + \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Note que

$$Q_{i+1} = Q_i + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$$

Portanto podemos reescrever o sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} K_i - Q_i - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) &= 0 \\ Q_i - K_i + \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} K_i - Q_i &= \frac{1}{2} \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_1 - \alpha_3 - i(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) - \beta_1 + \beta_3 &= \frac{1}{2} \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Além disso, a partir da condição de consistência de Mickens temos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$$

A segunda equação do sistema junto com a condição de consistência nos mostram que

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{1}{2} \quad (5.14)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{2} \quad (5.15)$$

Portanto, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 & - \alpha_3 & - \beta_1 & & + \beta_3 & = \frac{1}{2} \\ \alpha_1 & + \alpha_2 & + \alpha_3 & + \beta_1 & + \beta_2 & + \beta_3 & = 1 \\ & & & & \beta_1 & + \beta_2 & + \beta_3 & = \frac{1}{2} \\ \alpha_1 & + \alpha_2 & + \alpha_3 & & & & & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

A partir da primeira equação temos:

$$\alpha_1 = \alpha_3 + \beta_1 - \beta_3 + \frac{1}{2} \quad (5.16)$$

Isolando  $\alpha_2$  na quarta equação e substituindo  $\alpha_1$  por 5.16 tem-se:

$$\alpha_2 = -2\alpha_3 - \beta_1 + \beta_3 \quad (5.17)$$

E da terceira equação obtemos:

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \beta_1 - \beta_3 \quad (5.18)$$

Assim, para  $p, q, s \in R$  temos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= p + q - s + \frac{1}{2} \\ \alpha_2 &= -2p - q + s \\ \alpha_3 &= p \\ \beta_1 &= q \\ \beta_2 &= \frac{1}{2} - q - s \\ \beta_3 &= s \end{aligned}$$

Portanto, uma aproximação para a função  $\gamma_i$  pode ser dada por:

$$\gamma_i = K_i(u_{i+1} - u_i) + Q_i(u_i - u_{i-1})$$

Onde,

$$K_i = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)i + \alpha_1 - \alpha_3 \quad Q_i = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)i + \beta_1 - \beta_3$$

Ou seja, para  $q, s \in R$  temos:

$$\gamma_i = \left(\frac{i}{2} + q - s + \frac{1}{2}\right)(u_{i+1} - u_i) + \left(\frac{i}{2} + q - s\right)(u_i - u_{i-1}) \quad (5.19)$$

Assim, construímos uma aproximação para o termo  $xu_x$  que verifica:

$$\sum_{i=0}^N \gamma_i u_i^{n+\theta} = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (u_i^{n+\theta})^2$$

Como os extremos nas condições de contorno de Dirichlet são zero e definimos a função  $\gamma_i$  também com extremos zero, então também vale:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i u_i^{n+\theta} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+\theta})^2$$

## 5.2 Aproximação do termo $xu_x$ em malha deslocada

Nesta seção vamos tratar a Equação de Black-Scholes em uma malha deslocada. A malha deslocada ou *Staggered Grid*, tem importância no estudo das equações de Navier-

Stokes, as quais modelam o escoamento de fluídos. No entanto, apesar da Equação de Black-Scholes não modelar um fluido, a mesma é uma equação de difusão e se comporta de forma semelhante a um fluído. Portanto, em termos técnicos é pertinente que investiguemos seu comportamento em uma malha deste tipo.

### 5.2.1 Malha Descolacada

A malha deslocada se diferencia da usual por não armazenar as incógnitas que simbolizam a pressão e o momento em um mesmo ponto. Em vez disso, a malha deixa de ser um conjunto de pontos e passa a ser um conjunto de células para as quais a pressão fica armazenada no centro de cada célula e o momento nas extremidades (FORTUNA, 2000).

De maneira prática, a malha deslocada muda a maneira como a grade é construída, ou seja, em vez de tomar

$$u(x_i, t_n) = u(x_0 + i\Delta x, t_0 + n\Delta t)$$

tomaremos,

$$u(x_i, t_n) = u(x_0 + (i - \frac{1}{2})\Delta x, t_0 + n\Delta t)$$

A dificuldade encontrada para esta nova malha é definir as condições de contorno, uma vez que os chamados **pontos fantasmas**  $u(x_0, t) = u_0^n$  e  $u(x_N, t) = u_N^n$ , não fazem parte do domínio contínuo do problema.

Para sanar esta dificuldade usa-se interpolação linear. Ou seja, vamos usar um polinômio que interpole os pontos  $(x_0, u_0^r)$  e  $(x_1, u_1^r)$ . Nos trabalhos de Oishi et al (OISHI JIN Y. YUAN, 2014) é escolhido o seguinte polinômio:

$$P_1(x) = \frac{1}{\Delta x}((x - x_0)u_1^r - (x - x_1)u_0^r) \quad (5.20)$$

Como estamos trabalhando sobre as condições de contorno de Dirichlet, então  $u(0, t) = 0$ . Portanto,  $P_1(0) = 0$ . De onde, 5.20 nos dá:

$$0 = \frac{1}{\Delta x}((-x_0)u_1^r - (-x_1)u_0^r)$$

Fazendo  $x_i = (i - \frac{1}{2})\Delta x$ , temos:

$$0 = \frac{1}{\Delta x}(\frac{\Delta x}{2}u_1^r - (-\frac{\Delta x}{2})u_0^r) \Rightarrow \frac{u_1^r}{2} + \frac{u_0^r}{2} = 0$$

Ou seja,

$$u_0^r = -u_1^r \quad (5.21)$$

Do mesmo modo, podemos encontrar a condição  $u(x_N, t) \equiv u_N^r$  que é dada da seguinte forma:

$$u_N^r = -u_{N-1}^r \quad (5.22)$$

Assim, temos uma maneira de encontrar as condições de contorno para a malha deslocada. Além disso, as igualdades 5.21 e 5.22 são verificadas para  $r = 1, \dots, T$  qualquer. Daí teremos dois tipos de condição de contorno que são caracterizadas pela posição  $r$  que tomaremos  $u_1^r$  e  $u_{N-1}^r$  em 5.21 e 5.22, respectivamente. Desta forma, temos as condições de **contorno implícitas**, para as quais tomamos  $u_1^r$  e  $u_{N-1}^r$  no mesmo nível  $r$  que estamos querendo calcular a nossa nova condição de contorno, isto é,

$$u_0^n = -u_1^n, \quad u_N^n = -u_{N-1}^n, \quad u_0^{n+1} = -u_1^{n+1} \text{ e } u_N^{n+1} = -u_{N-1}^{n+1} \quad (5.23)$$

e as condições de **contorno explícitas**, para as quais tomamos  $u_1^r$  e  $u_{N-1}^r$  no nível  $r - 1$ , ou seja,

$$u_0^n = -u_1^n, \quad u_N^n = -u_{N-1}^n, \quad u_0^{n+1} = -u_1^n \text{ e } u_N^{n+1} = -u_{N-1}^n \quad (5.24)$$

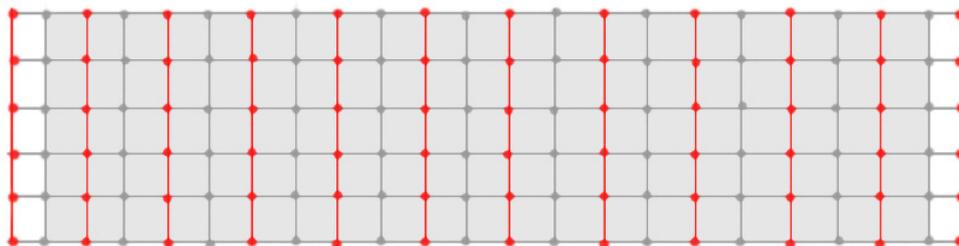


Figura 2 – Esquema para a malha deslocada, no qual os pontos em cinza simbolizam a malha usual, os pontos em vermelho simbolizam a malha deslocada e a região cinza o domínio contínuo do problema. Note que os pontos nos quais calcularemos a solução numérica mudam e os extremos esquerdo e direito da malha também mudam. Consequentemente, os extremos da malha deslocada não fazem parte do domínio contínuo, daí são chamados de pontos fantasmas. Além disso, os extremos são as condições de contorno e como os mesmos não fazem parte do domínio contínuo, precisamos calculá los através de interpolação linear.

### 5.2.2 Malha deslocada para Equação de Black-Scholes

Conforme dito na seção anterior, a principal mudança da malha deslocada para a usual está nas condições de contorno. Além disso, para a malha usual desenvolvemos uma aproximação para o termo  $xu_x$ . No entanto, para o cálculo desta aproximação em malha usual foi necessário aplicar as condições de contorno. Portanto, para as novas condições teremos que calcular uma nova aproximação  $\gamma_i$  para o termo  $xu_x$ .

Vamos repetir o procedimento da seção 4.2 para a malha usual no qual encontramos funções  $\gamma$  que aproximam o termo  $xu_x$  na equação de Black-Scholes. No entanto, diferente da aproximação anterior, vamos tomar funções  $\gamma_i : l_2 \rightarrow R$  que aproximam o termo  $xu_x$  em 4.1 dadas da seguinte forma:

$$\gamma_i = \begin{cases} (\alpha_1 x_{i+1} + \alpha_2 x_i + \alpha_3 x_{i-1}) \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + (\beta_1 x_{i+1} + \beta_2 x_i + \beta_3 x_{i-1}) \frac{u_i - u_{i-1}}{h} & , 1 \leq i \leq N-1 \\ \frac{\alpha_2 x_0 (u_1 - u_0)}{h} & , i = 0 \\ \frac{\beta_2 x_N (u_N - u_{N-1})}{h} & , i = N \end{cases}$$

Para a malha deslocada vamos substituir  $x_i = (i - \frac{1}{2})\Delta x$ . Com isso,

$$\gamma_i = \begin{cases} (i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3}{2})(u_{i+1} - u_i) + (i(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + \frac{\beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3}{2})(u_i - u_{i-1}) \\ -\frac{\alpha_2}{2}(u_1 - u_0) \\ \frac{(2N-1)\beta_2}{2}(u_N - u_{N-1}) \end{cases} \quad (5.25)$$

Note que diferente da malha usual tivemos que definir os "extremos" da função  $\gamma_i$  diferente de zero. De fato, como mencionado na seção 5.1, quando estávamos trabalhando com a malha usual e sobre as condições de contorno de Dirichlet, os extremos desta função não influenciavam pois os extremos da solução seriam iguais a zero. Porém, para a malha deslocada já não estamos sobre as condições de contorno de Dirichlet, assim é necessário que estes extremos sejam definidos de maneira que a função  $\gamma$  aproxime o termo  $xu_x$ . Para tal, escolhamos uma aproximação de diferenças finitas avançada e multiplicamos por um dos coeficientes que queremos calcular.

Como no caso contínuo, tais funções devem verificar:

$$\sum_{i=0}^N \gamma_i u_i^{n+\theta} = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (u_i^{n+\theta})^2$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i u_i^{n+\theta} + \left(-\frac{\alpha_2}{2}\right)(u_1^{n+\theta} - u_0^{n+\theta})u_0^{n+\theta} + \frac{(2N-1)\beta_2}{2}(u_N^{n+\theta} - u_{N-1}^{n+\theta})u_N^{n+\theta} = \\
= & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+\theta})^2 - \frac{(u_0^{n+\theta})^2}{2} - \frac{(u_N^{n+\theta})^2}{2}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Desenvolvendo os somatórios de 5.26 da mesma maneira que na seção 5.1, chegaremos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{\alpha_2}{2}\right)(u_1^{n+\theta} - u_0^{n+\theta})u_0^{n+\theta} + \frac{(2N-1)\beta_2}{2}(u_N^{n+\theta} - u_{N-1}^{n+\theta})u_N^{n+\theta} + \frac{(u_0^{n+\theta})^2}{2} + \frac{(u_N^{n+\theta})^2}{2} + \\
+ & \sum_{i=1}^{N-1} [K_i u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} + P_i (u_i^{n+\theta})^2 - Q_i u_{i-1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta}] = 0
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Onde,

$$K_i = i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3}{2} \tag{5.28}$$

$$Q_i = i(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + \frac{\beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3}{2} \tag{5.29}$$

$$P_i = Q_i - K_i + \frac{1}{2} \tag{5.30}$$

Vamos manipular os índices da última parcela do somatório de 5.27, da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{N-1} Q_i u_{i-1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} = \sum_{i=0}^{N-2} Q_{i+1} u_i^{n+\theta} u_{i+1}^{n+\theta}$$

Daí teremos:

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{\alpha_2}{2}\right)(u_1^{n+\theta} - u_0^{n+\theta})u_0^{n+\theta} + \frac{(2N-1)\beta_2}{2}(u_N^{n+\theta} - u_{N-1}^{n+\theta})u_N^{n+\theta} + \frac{(u_0^{n+\theta})^2}{2} + \frac{(u_N^{n+\theta})^2}{2} + \\
+ & K_{N-1} u_N^{n+\theta} u_{N-1}^{n+\theta} + P_{N-1} (u_{N-1}^{n+\theta})^2 - Q_1 u_0^{n+\theta} u_1^{n+\theta} + \\
+ & \sum_{i=1}^{N-2} [K_i u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} + P_i (u_i^{n+\theta})^2 - Q_{i+1} u_i^{n+\theta} u_{i+1}^{n+\theta}] = 0
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\alpha_2}{2}\right)(u_1^{n+\theta} - u_0^{n+\theta})u_0^{n+\theta} + \frac{(2N-1)\beta_2}{2}(u_N^{n+\theta} - u_{N-1}^{n+\theta})u_N^{n+\theta} + \frac{(u_0^{n+\theta})^2}{2} + \frac{(u_N^{n+\theta})^2}{2} + \\ & K_{N-1}u_N^{n+\theta}u_{N-1}^{n+\theta} + P_{N-1}(u_{N-1}^{n+\theta})^2 - Q_1u_0^{n+\theta}u_1^{n+\theta} + \sum_{i=1}^{N-2} [(K_i - Q_{i+1})u_{i+1}^{n+\theta}u_i^{n+\theta} + P_i(u_i^{n+\theta})^2] = 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

Note que as condições de contorno estão fora do somatório e como existem dois tipos de condição de contorno quando estamos trabalhando em malha deslocada, então vamos analisá-las separadamente e desenvolver funções  $\gamma_i$  que aproximam o termo  $xu_x$  para cada uma dessas condições.

### 5.2.3 Condições de contorno Explícitas

Para as condições de contorno explícita vamos usar as igualdades 5.24 para encontrar  $u_0^{n+\theta}$  e  $u_N^{n+\theta}$  em 5.31, isto é,

$$u_0^{n+\theta} = \theta u_0^{n+1} + (1-\theta)u_0^n = -\theta u_1^n - (1-\theta)u_1^n = -u_1^n$$

Ou seja,

$$u_0^{n+\theta} = -u_1^n \quad (5.32)$$

Do mesmo modo para  $u_N^{n+\theta}$ , temos:

$$u_N^{n+\theta} = \theta u_N^{n+1} + (1-\theta)u_N^n = -\theta u_{N-1}^n - (1-\theta)u_{N-1}^n = -u_{N-1}^n$$

De onde,

$$u_N^{n+\theta} = -u_{N-1}^n \quad (5.33)$$

**Teorema 5.2** *Uma aproximação numérica para o termo  $(xu_x)_i$  na equação de Black-Scholes em malha deslocada e condições de contorno de explícita que verifica 5.9, utilizando as aproximações não locais de Mickens, só é possível se dividirmos  $[0, L]$  em  $N = 1$  subintervalos.*

Prova do teorema 5.2:

Aplicando 5.32 e 5.33 em 5.31 teremos:

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{\alpha_2}{2}\right)(u_1^{n+\theta} + u_1^n)(-u_1^n) + \frac{(2N-1)\beta_2}{2}(-u_{N-1}^n - u_{N-1}^{n+\theta})(-u_{N-1}^n) + \frac{(u_1^n)^2}{2} + \frac{(u_{N-1}^n)^2}{2} + \\
& + K_{N-1}(-u_{N-1}^n)u_{N-1}^{n+\theta} + P_{N-1}(u_{N-1}^{n+\theta})^2 - Q_1(-u_1^n)u_1^{n+\theta} + \\
& + \sum_{i=1}^{N-2} [(K_i - Q_{i+1})u_{i+1}^{n+\theta}u_i^{n+\theta} + P_i(u_i^{n+\theta})^2] = 0
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Aplicando a propriedade distributiva vamos obter:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\alpha_2}{2}\right)(u_1^{n+\theta}u_1^n + (u_1^n)^2) + \frac{(2N-1)\beta_2}{2}((u_{N-1}^n)^2 + u_{N-1}^{n+\theta}u_{N-1}^n) + \frac{(u_1^n)^2}{2} + \frac{(u_{N-1}^n)^2}{2} - \\
& - K_{N-1}(u_{N-1}^n)u_{N-1}^{n+\theta} + P_{N-1}(u_{N-1}^{n+\theta})^2 + Q_1(u_1^n)u_1^{n+\theta} + \sum_{i=1}^{N-2} [(K_i - Q_{i+1})u_{i+1}^{n+\theta}u_i^{n+\theta} + P_i(u_i^{n+\theta})^2] = 0
\end{aligned}$$

Daí, agrupando os termos semelhantes esta igualdade se torna:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\alpha_2}{2} + Q_1\right)(u_1^{n+\theta}u_1^n) + \left(\frac{(2N-1)\beta_2}{2} - K_{N-1}\right)(u_{N-1}^{n+\theta}u_{N-1}^n) + \left(\frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2}\right)(u_1^n)^2 + \\
& + \left(\frac{(2N-1)\beta_2}{2} + \frac{1}{2}\right)(u_{N-1}^n)^2 + P_{N-1}(u_{N-1}^{n+\theta})^2 + \\
& + \sum_{i=1}^{N-2} [(K_i - Q_{i+1})u_{i+1}^{n+\theta}u_i^{n+\theta} + P_i(u_i^{n+\theta})^2] = 0
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Para verificar esta igualdade podemos impor,

$$\frac{\alpha_2}{2} + Q_1 = 0 \tag{5.36}$$

$$\frac{(2N-1)\beta_2}{2} - K_{N-1} = 0 \tag{5.37}$$

$$\frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2} = 0 \tag{5.38}$$

$$\frac{(2N-1)\beta_2}{2} + \frac{1}{2} = 0 \tag{5.39}$$

$$P_{N-1} = 0 \tag{5.40}$$

$$K_i - Q_{i+1} = 0 \quad i = 1, \dots, N-2 \tag{5.41}$$

$$P_i = 0 \quad i = 1, \dots, N-2 \tag{5.42}$$

Note que a definição 5.30 nos mostra que

$$P_{N-1} = Q_{N-1} - K_{N-1} + \frac{1}{2}$$

Usando esta igualdade, as equações 5.36, 5.37, 5.38 e 5.40 nos indicam que

$$Q_1 = -\frac{1}{2} \quad (5.43)$$

$$Q_{N-1} = -1 \quad (5.44)$$

Daí temos um novo sistema

$$Q_1 = -\frac{1}{2} \quad (5.45)$$

$$\frac{(2N-1)\beta_2}{2} - K_{N-1} = 0 \quad (5.46)$$

$$\frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2} = 0 \quad (5.47)$$

$$\frac{(2N-1)\beta_2}{2} + \frac{1}{2} = 0 \quad (5.48)$$

$$Q_{N-1} = -1 \quad (5.49)$$

$$K_i - Q_{i+1} = 0 \quad i = 1, \dots, N-2 \quad (5.50)$$

$$P_i = 0 \quad i = 1, \dots, N-2 \quad (5.51)$$

Note que da definição 5.30, temos:

$$Q_{i+1} = Q_i + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \quad (5.52)$$

Assim, usando a definição 5.29 e 5.52, as duas últimas equações do sistema se tornam:

$$K_i - Q_i - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 0 \quad i = 1, \dots, N-2$$

$$Q_i - K_i + \frac{1}{2} = 0 \quad i = 1, \dots, N-2$$

De onde podemos resumir essas duas equações nas seguintes equações:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3}{2} - \left( \frac{\beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

(5.53)

Além disso, a condição de consistência de Mickens é dada por :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$$

e usando 5.53, podemos considerar:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{2} \quad (5.54)$$

Portanto, substituindo as duas últimas equações do sistema (5.45)-(5.51) por 5.53 e considerando 5.54 para garantir a consistência, teremos:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{1}{2} \\ \frac{(2N-1)\beta_2}{2} - K_{N-1} &= 0 \\ \frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2} &= 0 \\ \frac{(2N-1)\beta_2}{2} + \frac{1}{2} &= 0 \\ Q_{N-1} &= -1 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= \frac{1}{2} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3}{2} - \left(\frac{\beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Substituindo as definições 5.29 e 5.30 , este sistema se torna:

$$\begin{aligned}
(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + \frac{\beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3}{2} &= -\frac{1}{2} \\
\frac{(2N-1)\beta_2}{2} - ((N-1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3}{2}) &= 0 \\
\frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2} &= 0 \\
\frac{(2N-1)\beta_2}{2} + \frac{1}{2} &= 0 \\
(N-1)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + \frac{\beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3}{2} &= -1 \\
\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= \frac{1}{2} \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \frac{1}{2} \\
\frac{\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3}{2} - \left(\frac{\beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3}{2}\right) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Organizando, temos o seguinte sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{rcccccc}
& & & \beta_1 & - & \beta_2 & - & 3\beta_3 & = & -2 \\
-\frac{N}{2}\alpha_1 & + & (1 - \frac{N}{2})\alpha_2 & + & (2 - \frac{N}{2})\alpha_3 & & + & (\frac{2N-1}{2})\beta_2 & = & 0 \\
& & \alpha_2 & & & & & & = & -1 \\
& & & & & & & \beta_2 & = & \frac{-1}{2N-1} \\
& & & \beta_1 & - & \beta_2 & - & 3\beta_3 & = & -1 - N \\
\alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & & & & = & \frac{1}{2} \\
& & & \beta_1 & + & \beta_2 & + & \beta_3 & = & \frac{1}{2} \\
\alpha_1 & - & \alpha_2 & - & 3\alpha_3 & - & \beta_1 & + & \beta_2 & + & 3\beta_3 & = & 1
\end{array} \right.$$

A primeira e a quinta equação deste sistema mostra que

$$N = 1$$

Porém  $N$  é o número de subintervalos que a malha possui no eixo  $x$ , então é interessante que tomemos  $N \geq 2$ . Assim, para condição de contorno explícita em malha deslocada um esquema numérico para Equação de Black-Scholes qualitativamente estável com respeito ao decaimento exponencial, seria muito limitado. Pois tal esquema exigiria que a malha não tivesse subintervalos no eixo do  $x$ . Portanto, não vamos considerar tal condição de contorno em nossos resultados.

#### 5.2.4 Condições de contorno implícita

Para as condições de contorno implícitas, vamos usar a igualdades 5.23 para encontrar os termos  $u_0^{n+\theta}$  e  $u_N^{n+\theta}$  que são as condições de contorno para a malha deslocada.

Ou seja,

$$u_0^{n+\theta} = \theta u_0^{n+1} + (1 - \theta)u_0^n = -\theta u_1^{n+1} - (1 - \theta)u_1^n = -u_1^{n+\theta}$$

Daí,

$$u_0^{n+\theta} = -u_1^{n+\theta} \quad (5.55)$$

Do mesmo modo,

$$u_N^{n+\theta} = \theta u_N^{n+1} + (1 - \theta)u_N^n = -\theta u_{N-1}^{n+1} - (1 - \theta)u_{N-1}^n = -u_{N-1}^{n+\theta}$$

Daí,

$$u_N^{n+\theta} = -u_{N-1}^{n+\theta} \quad (5.56)$$

**Teorema 5.3** *Uma aproximação numérica para o termo  $(xu_x)_i$  na equação de Black-Scholes em malha deslocada e condições de contorno de implícita que verifica 5.9, pode ser dada por:*

$$\gamma_i = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{i-1-2p}{4} \right) (u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta}) + \\ \left( \frac{16i(2N-1) + 8(1-7N) + 6(8N+1) + p(48N-16(4N-1)) + 18-56N+16p(1-3N)}{32(2N-1)} \right) (u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta}) \\ -\frac{p}{2}(u_1 - u_0), \quad i = 0 \\ \frac{(2N-1)(N-3-2p)}{4(2N-1)}(u_N - u_{N-1}), \quad i = N \end{array} \right.$$

Onde,  $p \in \mathbb{R}$ .

Prova do teorema 5.3:

Aplicando 5.55 e 5.56 em 5.31 teremos:

$$\begin{aligned} & (P_{N-1} - K_{N-1} + (2N-1)\beta_2 + \frac{1}{2})(u_{N-1}^{n+\theta})^2 + (Q_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2})(u_1^{n+\theta})^2 + \\ & + \sum_{i=1}^{N-2} [(K_i - Q_{i+1})(u_i^{n+\theta}u_{i+1}^{n+\theta}) + (P_i)(u_i^{n+\theta})^2] = 0 \end{aligned}$$

(5.57)

De onde, vamos impor:

$$\begin{aligned} P_{N-1} - K_{N-1} + (2N - 1)\beta_2 + \frac{1}{2} &= 0 \\ Q_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2} &= 0 \\ K_i - Q_{i+1} &= 0 \quad i = 1, \dots, N - 2 \\ P_i &= 0 \quad i = 1, \dots, N - 2 \end{aligned}$$

Já vimos que as duas últimas equações de sistema nos dão:

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3}{2} - \left( \frac{\beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3}{2} \right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(5.58)

Além disso, a partir da condição de consistência de Mickens, temos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{2} \quad (5.59)$$

Portanto usando 5.58 e 5.59 o sistema fica:

$$\begin{aligned} P_{N-1} - K_{N-1} + (2N - 1)\beta_2 + \frac{1}{2} &= 0 \\ Q_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2} &= 0 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= \frac{1}{2} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3}{2} - \left( \frac{\beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3}{2} \right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Substituindo as definições dadas em 5.29, 5.30, 5.31 e fazendo operações de multiplicação por escalar e soma de linhas no sistema, chegamos ao seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha_1 + 3\alpha_3 + (2N-1)\beta_3 = \frac{N-1}{2} \\ + 2\alpha_2 + \beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3 = -2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{2} \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Resolvendo este sistema teremos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1-8p}{8} \\ \alpha_2 &= p \\ \alpha_3 &= \frac{3}{8} \\ \beta_1 &= \frac{8(1-7N) + 6(8N+1) + p(48N-16(4N-1))}{16(2N-1)} \\ \beta_2 &= \frac{N-3-2p}{2(2N-1)} \\ \beta_3 &= \frac{8N+1+8Np}{8(2N-1)} \end{aligned}$$

Onde,  $p \in \mathbb{R}$ .

Portanto, conseguimos construir uma aproximação  $\gamma_i$  do termo  $xu_x$  que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\gamma_i = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{i-1-2p}{4} \right) (u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta}) + \\ \left( \frac{16i(2N-1) + 8(1-7N) + 6(8N+1) + p(48N-16(4N-1)) + 18 - 56N + 16p(1-3N)}{32(2N-1)} \right) (u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta}) \\ -\frac{p}{2} (u_1 - u_0), \quad i = 0 \\ \frac{(2N-1)(N-3-2p)}{4(2N-1)} (u_N - u_{N-1}), \quad i = N \end{array} \right. \quad (5.60)$$

É importante notar que 5.60 apresenta uma dependência de  $N$  que é o número de subintervalos no eixo do  $x$ , tal dependência se deve ao fato da malha deslocada afetar justamente as condições de contorno e a constante  $N$  tem uma ligação direta com a fronteira numérica do problema.

Assim, temos uma função que aproxima o termo  $xu_x$  que para a malha deslocada e verifica:

$$\sum_{i=0}^N \gamma_i u_i^{n+\theta} = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (u_i^{n+\theta})^2$$

No entanto, para provar uma propriedade em termos numéricos semelhante a 4.1, temos que tirar os extremos do somatório, com isso teremos:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i u_i^{n+\theta} + (\gamma_0 u_0^{n+\theta})(u_0^{n+\theta}) + (\gamma_N u_N^{n+\theta})(u_0^{n+\theta}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+\theta})^2 - \frac{(u_0^{n+\theta})^2}{2} - \frac{(u_N^{n+\theta})^2}{2}$$

Substituindo os extremos  $\gamma_0$  e  $\gamma_N$  de acordo com 5.60, teremos:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i u_i^{n+\theta} - \frac{p}{2} (u_1^{n+\theta} - u_0^{n+\theta})(u_0^{n+\theta}) + \frac{(2N-1)(N-3-2p)}{4(2N-1)} (u_N^{n+\theta} - u_{N-1}^{n+\theta})(u_N^{n+\theta}) = \\ & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+\theta})^2 - \frac{(u_0^{n+\theta})^2}{2} - \frac{(u_N^{n+\theta})^2}{2} \end{aligned}$$

Aplicando as condições de contorno implícitas 5.55 e 5.56, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i u_i^{n+\theta} + p(u_1^{n+\theta})^2 + \frac{(N-3-2p)}{2} (u_{N-1}^{n+\theta})^2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+\theta})^2 - \frac{(u_1^{n+\theta})^2}{2} - \frac{(u_{N-1}^{n+\theta})^2}{2}$$

Agrupando os termos semelhantes, teremos:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i u_i^{n+\theta} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+\theta})^2 - (p + \frac{1}{2})(u_1^{n+\theta})^2 + \frac{(2+2p-N)}{2} (u_{N-1}^{n+\theta})^2 \quad (5.61)$$

Essa igualdade será usada mais adiante para provar uma propriedade que será o equivalente numérico para a propriedade 4.1.

### 5.3 Método NSFD para Equação de Black-Scholes

Nesta secção vamos desenvolver um método de diferenças finitas não-usual, ou seja, sugerimos a seguinte forma discreta para a equação 4.1:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta\tau} - \frac{(\sigma^{n+\theta})^2}{2} D_i^+ D_i^- u^{n+\theta} - r^{n+\theta} \gamma_i(x; u_i^{n+\theta}, u_i^{n+\theta}, u_{i-1}^{n+\theta}) + r^{n+\theta} u_i^{n+\theta} = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1$$

$$u_i^0 = u_i^T = 0$$

(5.62)

Note que para  $\theta = 0$ , temos o método de Euler Explícito,  $\theta = 1$  temos o método de Euler Implícito e  $\theta = \frac{1}{2}$  tem-se o método de Crank- Nicolson.

Nosso objetivo é mostrar que esse esquema é qualitativamente estável com respeito ao teorema 4.1, o qual analisa a energia da Equação de Black-Scholes dada da seguinte forma:

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^L (u^2) dx = \frac{1}{2} \|u\|^2$$

Como esta é uma norma para  $L^2(0, L)$  e para as aproximações em malha usual e malha deslocada dos termos  $xu_x$ , aproximamos este espaço de  $l^2$ , conforme dito na seção anterior, então é natural que a energia para os esquemas numéricos sejam dadas por:

$$E(u^n) = \frac{1}{2} \|u^n\|_{l^2}^2 = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=0}^N (u_i^n)^2$$

No entanto, o esquema 5.62 analisa a solução numérica para  $1 \leq i \leq N - 1$ , então vamos excluir os extremos deste somatório para que possamos analisar a energia do nosso esquema numérico tanto para malha usual quanto para malha deslocada. Tal mudança não afeta a malha usual para nosso problema, pois neste caso estamos sobre as condições de contorno de Dirichlet, de onde os extremos são iguais a zero. De maneira mais formal, estaremos trabalhando sobre um subespaço de  $l_N^2$ , ou seja,

$$l_{N-1}^2 = \{\mathbf{u} = (u_i)_{i=1}^{N-1}, u_i \in R\} \subset l_N^2 = \{\mathbf{u} = (u_i)_{i=0}^N, u_i \in R\}$$

Para o qual vamos definir o seguinte produto interno e norma:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{l_{N-1}^2} = h \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i, \quad \|\mathbf{u}\|_{l_{N-1}^2}^2 = h \sum_{i=1}^{N-1} |u_i|^2$$

Afim de não carregar a notação desnecessariamente, vamos manter a representação desse espaço por  $l^2$ . De onde, naturalmente também podemos definir a energia cinética da seguinte forma:

$$E(u^n) = \frac{1}{2} \|u^n\|_{l^2}^2 = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^n)^2$$

O efeito prático desta mudança será percebido quando formos analisar mais adiante a Energia Cinética do esquema 5.62, pois sempre teremos que trabalhar separadamente

os extremos dos somatórios onde temos aproximações numéricas para as derivadas no domínio espacial, afim de garantir a estabilidade qualitativa do esquema numérico.

Assim, em termos de dimensão finita, a propriedade 4.1 pode ser enunciada da seguinte maneira.

**Teorema 5.4** *Seja a energia do esquema numérico 5.61 dada por:*

$$E(u^{n+\theta}) = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+\theta})^2 \quad (5.63)$$

Então,

i) *Se  $\theta \geq \frac{1}{2}$  e  $r^n > 0, n = 1, \dots, N$  então  $E(u_i^{n+\theta})$  é decrescente, isto é,*

$$E(u^{n+\theta}) \leq E(u^0), \quad \forall n \geq 0 \quad (5.64)$$

ii) *Além disso, se  $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(\sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}$  forem limitadas, então:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(u^{n+\theta}) = 0 \quad (5.65)$$

*Particularmente, para malha deslocada e condições de contorno implícita, i) e ii) são válidos se  $N \geq 2 + 2p$ , onde  $p \geq 0$  é o parâmetro livre da aproximação  $\gamma_i$  do termo  $xu_x$ , dada em 5.60.*

Prova.:

Primeiramente vamos analisar os termos onde aproximamos as derivadas no domínio espacial separadamente, ou seja, vamos demonstrar dois lemas.

**Lema 5.2** *Tanto para malha usual com as condições de contorno de Dirichlet, quanto para malha deslocada com condições de contorno implícita, temos:*

$$\sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} \leq 0$$

Prova do lema 5.2:

De fato, a partir do Lema 5.1, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} &= \sum_{i=1}^{N-1} u_i^{n+\theta} D_i^+(D_i^-(u_i^{n+\theta})) = \\ &= - \sum_{i=1}^{N-1} (D_i^-(u_i^{n+\theta}))(D_i^-(u_i^{n+\theta})) + \frac{1}{\Delta x} (u_{N-1}^{n+\theta} D_N^-(u^{n+\theta}) - u_0^{n+\theta} D_1^-(u^{n+\theta})) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} = - \sum_{i=1}^{N-1} (D_i^-(u_i^{n+\theta}))^2 + \frac{1}{\Delta x} (u_{N-1}^{n+\theta} D_N^-(u^{n+\theta}) - u_0^{n+\theta} D_1^-(u^{n+\theta}))$$

Ou ainda,

$$\sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} = - \sum_{i=1}^{N-1} (D_i^-(u_i^{n+\theta}))^2 + \frac{1}{\Delta x} (u_{N-1}^{n+\theta} (\frac{u_N^{n+\theta} - u_{N-1}^{n+\theta}}{\Delta x}) - u_0^{n+\theta} (\frac{u_1^{n+\theta} - u_0^{n+\theta}}{\Delta x}))$$

Então para a malha usual vale as condições de contorno de Dirichlet, temos:

$$\sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} = - \sum_{i=1}^{N-1} (D_i^-(u_i^{n+\theta}))^2 - (\frac{u_{N-1}^{n+\theta}}{\Delta x})^2 \quad (5.66)$$

Por outro lado, para a malha deslocada procedemos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} &= \sum_{i=1}^{N-1} (\frac{u_{i+1}^{n+\theta} - 2u_i^{n+\theta} + u_{i-1}^{n+\theta}}{(\Delta x)^2}) u_i^{n+\theta} \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} - 2(u_i^{n+\theta})^2 + u_{i-1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta}}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{u_N^{n+\theta} u_{N-1}^{n+\theta} - (u_{N-1}^{n+\theta})^2}{(\Delta x)^2} + \sum_{i=1}^{N-2} (\frac{u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} - (u_i^{n+\theta})^2}{(\Delta x)^2}) + \\ &+ \frac{u_1^{n+\theta} u_0^{n+\theta} - (u_1^{n+\theta})^2}{(\Delta x)^2} + \sum_{i=2}^{N-1} (\frac{u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} - (u_i^{n+\theta})^2}{(\Delta x)^2}) \end{aligned}$$

Aplicando as condições de contorno implícitas, para a malha deslocada temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} &= \frac{-2(u_{N-1}^{n+\theta})^2}{(\Delta x)^2} + \sum_{i=1}^{N-2} (\frac{u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} - (u_i^{n+\theta})^2}{(\Delta x)^2}) + \\ &+ \frac{-2(u_1^{n+\theta})^2}{(\Delta x)^2} + \sum_{i=2}^{N-1} (\frac{u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} - (u_i^{n+\theta})^2}{(\Delta x)^2}) \end{aligned}$$

Manipulando o índice do segundo somatório, esta igualdade se torna:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} &= \frac{-2(u_{N-1}^{n+\theta})^2}{(\Delta x)^2} + \sum_{i=1}^{N-2} (\frac{u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} - (u_i^{n+\theta})^2}{(\Delta x)^2}) + \\ &+ \frac{-2(u_1^{n+\theta})^2}{(\Delta x)^2} + \sum_{i=1}^{N-2} (\frac{u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} - (u_{i+1}^{n+\theta})^2}{(\Delta x)^2}) \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} &= \frac{-2[(u_{N-1}^{n+\theta})^2 + (u_1^{n+\theta})^2]}{(\Delta x)^2} - \sum_{i=1}^{N-2} \frac{(u_{i+1}^{n+\theta})^2 - 2(u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta}) + (u_i^{n+\theta})^2}{(\Delta x)^2} \\
 &= \frac{-2[(u_{N-1}^{n+\theta})^2 + (u_1^{n+\theta})^2]}{(\Delta x)^2} - \sum_{i=1}^{N-2} \left[ \frac{u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta}}{(\Delta x)} \right]^2 \\
 &= \frac{-2[(u_{N-1}^{n+\theta})^2 + (u_1^{n+\theta})^2]}{(\Delta x)^2} - \sum_{i=1}^{N-2} (D_i^+(u^{n+\theta}))^2
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} = \frac{-2[(u_{N-1}^{n+\theta})^2 + (u_1^{n+\theta})^2]}{(\Delta x)^2} - \sum_{i=1}^{N-2} (D_i^+(u^{n+\theta}))^2 \quad (5.67)$$

Segue de 5.66 e 5.67 que tanto na malha usual quanto na malha deslocada, teremos:

$$\sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} \leq 0$$

**Lema 5.3** Para malha usual e condições de contorno de Dirichlet temos que

$$\Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (\gamma_i(x) u_i^{n+1}) \leq 0 \quad (5.68)$$

para malha deslocada e condições de contorno implícita se  $N \geq 2 + 2p$ , então também vale 5.68

Prova do lema 5.3:

Note que de acordo com a aproximação  $\gamma_i$  para o termo  $xu_x$  em malha usual e condições de contorno de Dirichlet feita na seção 5.1, temos que

$$\Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (\gamma_i(x) u_i^{n+1}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+\theta})^2$$

portanto, vale 5.68.

Por outro lado, para a malha deslocada e condições de contorno implícita, a aproximação  $\gamma_i$  para o termo  $xu_x$  feita na seção 5.2 resulta em 5.61, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i u_i^{n+\theta} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+\theta})^2 - (p + \frac{1}{2})(u_1^{n+\theta})^2 + \frac{(2 + 2p - N)}{2} (u_{N-1}^{n+\theta})^2$$

Portanto, desde que  $N \geq 2 + 2p$ , onde  $p \geq 0$  teremos 5.68.

Prova do teorema 5.4:

Multiplicando a equação 5.62 por  $\Delta x u_i^{n+\theta}$  e fazendo a soma de  $i = 1$  até  $N - 1$  temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x}{\Delta \tau} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+1} - u_i^n) u_i^{n+\theta} - \frac{\Delta x (\sigma^{n+\theta})^2}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} - \\ & - r^{n+\theta} \Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (\gamma_i(x) u_i^{n+\theta}) + r^{n+\theta} \Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+\theta})^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.69)$$

Vamos fazer uso da seguinte identidade:

$$2(u - v, u)_{l^2} = \|u\|_{l^2}^2 - \|v\|_{l^2}^2 + \|u - v\|_{l^2}^2$$

Com isso, a primeira parcela de 5.69 se torna:

$$\frac{\Delta x}{\Delta \tau} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+1} - u_i^n) u_i^{n+\theta} = \frac{1}{2\Delta \tau} \left[ \Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+1})^2 - \Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^n)^2 \right] + \frac{\Delta x (2\theta - 1)}{2\Delta \tau} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+1} - u_i^n)^2$$

Ou seja, vamos escrever 5.69 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta \tau} \left[ \Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+1})^2 - \Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^n)^2 \right] + \frac{\Delta x (2\theta - 1)}{2\Delta \tau} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+1} - u_i^n)^2 - \\ & - \frac{\Delta x \sigma^2}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} - r \Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (\gamma_i(x) u_i^{n+\theta}) + r \Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+\theta})^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.70)$$

Substituindo 5.70 em 5.67, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta \tau} \left[ \Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+1})^2 - \Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^n)^2 \right] + \frac{\Delta x (2\theta - 1)}{2\Delta \tau} \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+1} - u_i^n)^2 - \\ & - \frac{\Delta x (\sigma^{n+\theta})^2}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} - r \Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (\gamma_i(x) u_i^{n+\theta}) + r^{n+\theta} \Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (u_i^{n+\theta})^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.71)$$

Conforme foi definido, a energia para o esquema 5.62 é dada por:

$$E(u^n) = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{N-1} |u_i^n|^2 = \frac{\|u^n\|_{l^2}^2}{2}$$

Assim, escrevendo  $E(u^n)$  em 5.71 teremos:

$$\begin{aligned} \frac{E(u^{n+1}) - E(u^n)}{\Delta \tau} + \frac{2\theta - 1}{2\Delta \tau} \|u^{n+1} - u^n\|_{l^2}^2 - \frac{\Delta x (\sigma^{n+\theta})^2}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} - \\ - r \Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (\gamma_i(x) u_i^{n+\theta}) + r^{n+\theta} \|u^{n+\theta}\|_{l^2}^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.72)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{E(u^{n+1}) - E(u^n)}{\Delta \tau} = -\frac{2\theta - 1}{2\Delta \tau} \|u^{n+1} - u^n\|_{l^2}^2 + \frac{\Delta x (\sigma^{n+\theta})^2}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (D_i^+ D_i^-(u_i^{n+\theta})) u_i^{n+\theta} + \\ + r \Delta x \sum_{i=1}^{N-1} (\gamma_i(x) u_i^{n+\theta}) - r^{n+\theta} \|u^{n+\theta}\|_{l^2}^2 \end{aligned} \quad (5.73)$$

Usando os lemas 5.2 e 5.3, teremos:

$$\frac{E(u^{n+1}) - E(u^n)}{\Delta \tau} \leq -\frac{2\theta - 1}{2\Delta \tau} \|u^{n+1} - u^n\|_{l^2}^2 - r^{n+\theta} \|u^{n+\theta}\|_{l^2}^2 \quad (5.74)$$

Portanto, como  $r^{n+\theta} > 0$ , então:

$$E(u^{n+1}) - E(u^n) \leq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|u^{n+1} - u^n\|_{l^2}^2$$

Daí, para  $\theta \geq \frac{1}{2}$  teremos

$$E(u^{n+1}) \leq E(u^n), \quad \forall n \geq 1$$

O que prova a primeira parte da propriedade. Além disso, este resultado nos garante que a energia do esquema 5.62 é decrescente e positiva, portanto é convergente.

Por outro lado, para  $\theta \geq \frac{1}{2}$ , 5.74 nos mostra que

$$\frac{E(u^{n+1}) - E(u^n)}{\Delta\tau} + r\|u^{n+\theta}\|_{l^2}^2 \leq 0, \quad \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1 \quad (5.75)$$

Assim, fazendo  $n \rightarrow \infty$  em 5.75 teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r\|u^{n+\theta}\|_{l^2}^2 \leq 0$$

Como  $r^{n+\theta} > 0$ , então só podemos ter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u^{n+\theta}\|_{l^2}^2 \leq 0$$

O que implica,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u^{n+\theta}\|_{l^2}^2 = 0, \quad \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$$

Ou ainda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u^{n+\theta}\|_{l^2} = 0, \quad \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1 \quad (5.76)$$

Portanto, usando 5.74 para  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ , podemos concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u^{n+1} - u^n\|_{l^2} = 0 \quad (5.77)$$

Assim,

$$\|u^n\|_{l^2} = \|u^n + \theta u^n - \theta u^n + \theta u^{n+1} - \theta u^{n+1}\|_{l^2} \leq \|(\theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n) + \theta(u^n - u^{n+1})\|_{l^2}$$

Ou seja,

$$\|u^n\|_{l^2} \leq \|u^{n+\theta}\|_{l^2} + \theta\|u^n - u^{n+1}\|_{l^2}, \quad \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$$

Finalmente, fazendo  $n \rightarrow \infty$  nesta última desigualdade e usando 5.76 e 5.77, concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u^n\|_{l^2} = 0$$

Portanto, da definição de Energia dada em 5.63, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(u^n) = 0$$

## 5.4 Simulações numéricas para a Equação de Black-Scholes

Vamos apresentar e analisar alguns resultados obtidos através de simulações numéricas para os teoremas desta seção. Ou seja, vamos resolver numericamente o seguinte esquema numérico que foi proposto para a Equação de Black-Scholes:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta\tau} - \frac{\sigma^2}{2} D_i^+ D_i^- u^{n+\theta} - r\gamma_i(x; u_i^{n+\theta}, u_i^{n+\theta}, u_{i-1}^{n+\theta}) + ru_i^{n+\theta} &= 0, \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ u_i^0 &= u_N^0 = 0 \\ i &= [1, 2, \dots, N_x] \\ n &= [1, 2, \dots, N_\tau] \end{aligned}$$

Substituindo a função  $\gamma_i$  e o operador  $D_i^+ D_i^-$  dado em 5.6, esta equação se torna um sistema linear da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a(u^n; \sigma^n, r^n, \theta) u_{i-1}^{n+1} + b(u^n; \sigma^n, r^n, \theta) u_i^{n+1} + c(u^n; \sigma^n, r^n, \theta) u_{i+1}^{n+1} &= d(u^n; \sigma^n, r^n, \theta) \\ i &= [1, 2, \dots, N_x] \\ n &= [1, 2, \dots, N_\tau] \\ \theta &\in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{aligned}$$

(5.78)

Que pode ser expresso na forma de Matrizes, ou seja,

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & a_{N_x-2} & b_{N_x-2} & c_{N_x-2} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{N_x-1} & b_{N_x-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N_x-2}^{n+1} \\ u_{N_x-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^{n+1} \\ d_2^{n+1} \\ \vdots \\ d_{N_x-2}^{n+1} \\ d_{N_x-1}^{n+1} \end{bmatrix}$$

Tais sistemas são chamados de **Sistemas Tridiagonais**. Para resolve-los usamos o método conhecido como **TDMA** (Tridiagonal Matrix Method)([THOMAS, 1949](#)). A vantagem de usar este método para resolver sistemas tridiagonais é que o mesmo apresenta um gasto menor de memória, pois armazena-se somente os três vetores que formam as diagonais, em vez de toda a matriz.

Note que o sistema 5.78 muda para cada  $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$  escolhido, para as simulações deste trabalho usamos  $\theta = 1$  e  $\theta = \frac{1}{2}$  que correspondem ao método de Euler Implícito e Crank-Nicolson, respectivamente. Na literatura este são os métodos mais utilizados.

Afim de comparar a eficiência do método NSFD, vamos comparar nossos resultados com os seguintes métodos:

$$\gamma_i = x_i D_i^0(u) = x_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \quad (\text{Método A}) \quad (5.79)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{2} D_i^0(x \otimes u) = \frac{x_{i+1}u_{i+1} - x_{i-1}u_{i-1}}{\Delta x} \quad (\text{Método B})$$

Além disso, a chave do método NSFD para ser qualitativamente estável com respeito ao decaimento exponencial, está na aproximação  $\gamma_i$  para o termo  $xu_x$  dada pelas fórmulas 5.19 e 5.60, as quais devem verificar:

$$\sum_{i=0}^N \gamma_i(x; u_i^n, u_{i+1}^n, u_{i-1}^n)u_i^n + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (u_i^n)^2 = 0 \quad (5.80)$$

A igualdade 5.80 é chamada de **Quantidade** ou **Quantificador**. Nossos experimentos vão reforçar o quanto esta igualdade é essencial para a estabilidade qualitativa do método.

Para os modelos em malha usual usamos a seguinte condição inicial:

$$u(x, 0) = \text{sen}\left(\frac{x\pi}{L}\right) \quad (5.81)$$

E para os modelos em malha deslocada usamos a condição de *Payoff*, pois esta é muito utilizada na literatura para a análise da equação de Black-Scholes, tal condição é dada por:

$$u(x, 0) = \max(x - K, 0) \quad (5.82)$$

Onde  $K$  é o valor de *Strike* da opção. Em nossos experimentos usamos  $K = \frac{1}{2}$ .

Todos os modelos apresentados neste trabalho foram feitos no software livre Scilab pelos autores.

As figuras (3)-(6) mostram simulações numéricas para a Energia Cinética da equação de Black-Scholes para vários casos. Em cada uma delas variamos parâmetros diferentes envolvidos na equação como os passos na malha, a volatilidade do ativo ( $\sigma$ ), etc e mostramos a influência desses parâmetros no decaimento exponencial da energia.

Nas figuras 7 e 8 analisamos o quantificador dado por 5.80 em malha usual para os métodos A e B respectivamente. Estes resultados mostram que estes métodos não verificam a igualdade 5.80, de onde não fazem parte dos métodos NSFD que desenvolvemos e garantimos a estabilidade qualitativa para o decaimento exponencial. Assim, tais métodos

não garantem que a energia cinética tenha um decaimento exponencial. Exemplos da instabilidade dos métodos A e B podem ser vistos na figura 10, na qual mostramos que modelos obtidos com estes métodos não decaem exponencialmente, enquanto que o método NSFD apresenta o decaimento exponencial sob as mesmas condições.

A figura 9 mostra como o quantificador se comporta no método NSFD, isto é, a igualdade 5.80 é verificada numericamente. Observamos que nestas figuras as variações que os gráficos apresentam são ruídos numéricos decorrentes de multiplicações de números muito pequenos feitas pelo computador.

Para coeficientes dependentes do tempo em malha usual a figura 11 nos mostra que sob as condições do teorema 5.4 o método NSFD garante o decaimento exponencial e o quantificador apresenta o comportamento esperado. No sentido contrário, a figura 12 nos mostra uma situação onde desconsideramos as condições do teorema 5.4, mais especificamente, tomamos uma função que não é limitada ( $r(\tau) = \frac{1}{\tau}$ ) para o coeficiente que representa a taxa de juros do modelo. Nessas condições, a Energia Cinética da equação de Black-Scholes não apresenta o decaimento exponencial. Além disso, esta figura mostra que os pontos onde a Energia apresentou a instabilidade numérica coincidem com os pontos onde o quantificador também apresentou instabilidade, mostrando assim que o quantificador é determinante para a estabilidade qualitativa do método NSFD que desenvolvemos para esta equação.

Nas figuras 13 e 14 apresentamos modelos para a malha deslocada e observamos que o método apresenta o decaimento exponencial e o quantificador apresenta o comportamento esperado.

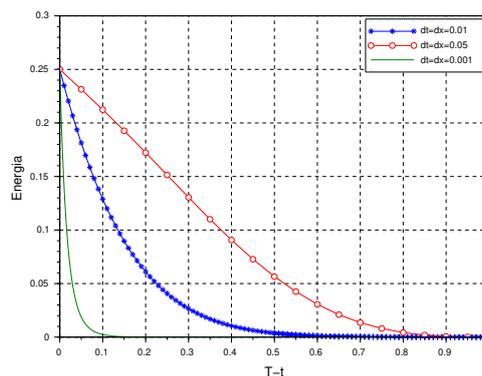


Figura 3 – Energia para Equação de Black Scholes com diferentes passos,  $\theta = 1$   $q = s = 1$ ,  $\sigma = 0.1$  e  $r = 0.05$ .

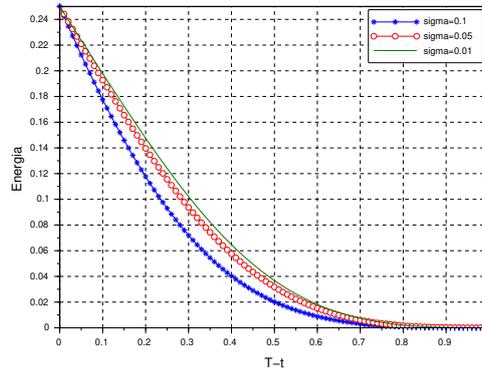


Figura 4 – Energia para Equação de Black Scholes com diferentes volatidades,  $\theta = 1$ ,  $q = s = 1, r = 0.02$  e  $dx = dt = 0.01$ .

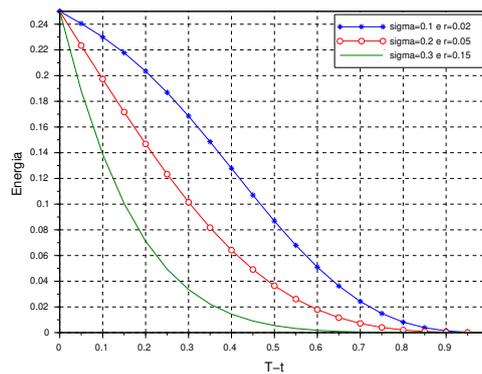


Figura 5 – Energia para Equação de Black Scholes com diferentes  $\sigma$  e  $r$ ;  $\theta = 1$   $q = s = 1$  e  $dx = dt = 0.05$  (respeitando a condição de que  $\sigma^2 < r$ ).

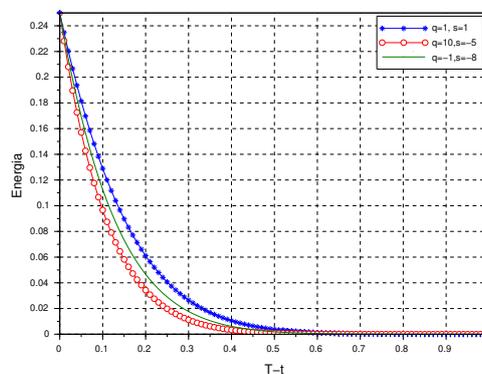


Figura 6 – Energia para Equação de Black Scholes com diferentes parâmetros  $q$  e  $s$  com  $r = 0.05$ ;  $\theta = 0.1$  e  $dx = dt = 0.01$ .

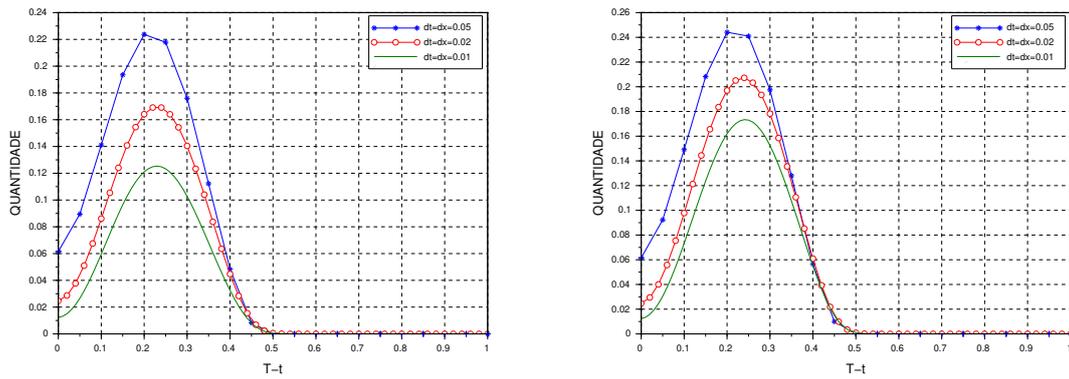


Figura 7 – Comparação da Quantidade para o método A com  $\theta = 1$ (Euler Implícito, figura da esquerda) e  $\theta = \frac{1}{2}$  (Crank-Nicolson figura da direita); usando os seguintes parâmetros:  $r = 0.02$  e  $\sigma = 0.1$ .

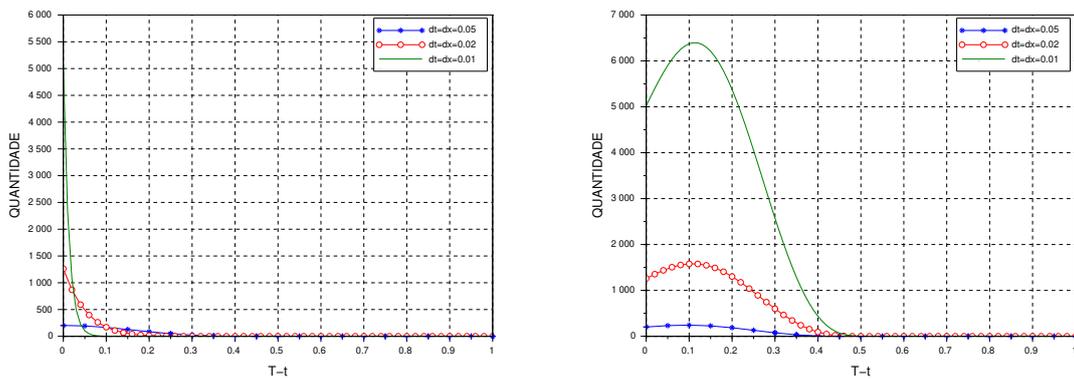


Figura 8 – Comparação da Quantidade para o método B com  $\theta = 1$ (Euler Implícito, figura da esquerda) e  $\theta = \frac{1}{2}$  (Crank-Nicolson figura da direita); usando os seguintes parâmetros:  $r = 0.02$  e  $\sigma = 0.1$ .

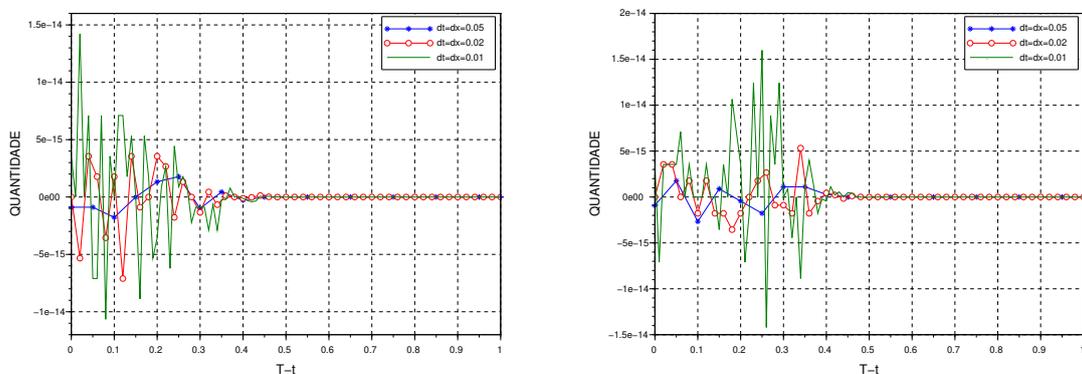


Figura 9 – Comparação da Quantidade para o método NSFD com  $\theta = 1$ (Euler Implícito, figura da esquerda) e  $\theta = \frac{1}{2}$ (Crank-Nicolson, figura da direita); usando os seguintes parâmetros:  $r = 0.02$  e  $\sigma = 0.1$ .

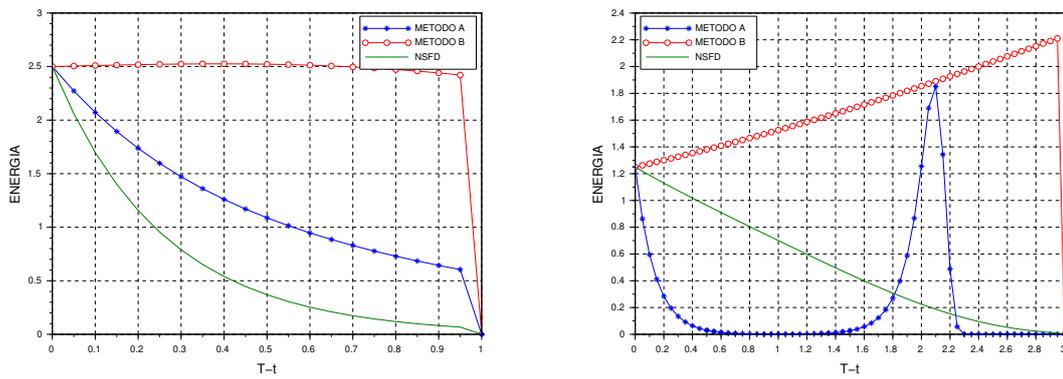


Figura 10 – Comparação das Energias obtidas através dos métodos A, B e NSFD com  $\theta = 1$ (Euler Implícito, figura da esquerda) e  $\theta = \frac{1}{2}$ (Crank-Nicolson, figura da direita); usando os seguintes parâmetros:  $r = 0.02, \sigma = 0$  e  $x_N = 5$ .

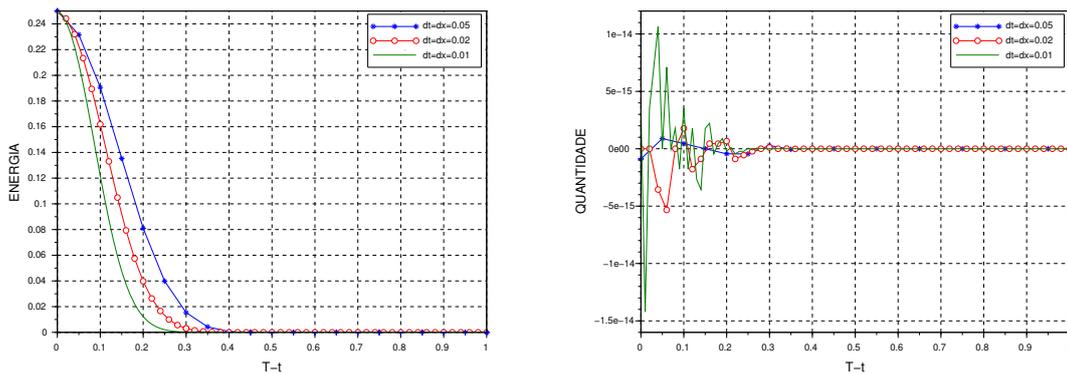


Figura 11 – NSFD para a Equação de Black Scholes com coeficientes dependente do tempo e usando os seguintes parâmetros:  $p = q = 1, \sigma(t) = t^2, r(t) = \text{sen}(t)$  e  $x_N = 1$ .

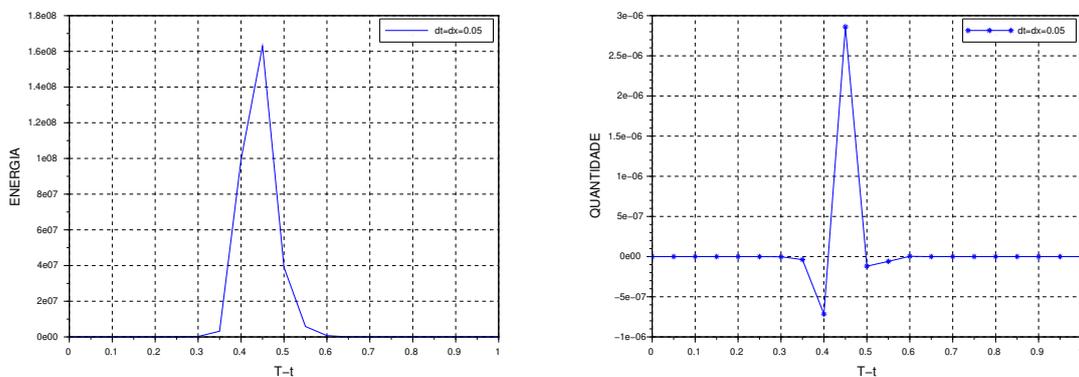


Figura 12 – NSFD para a Equação de Black Scholes com coeficientes dependente do tempo e usando os seguintes parâmetros:  $p = q = 1, \sigma(t) = t^2, r(t) = \frac{1}{t}$  e  $x_N = 1$ .

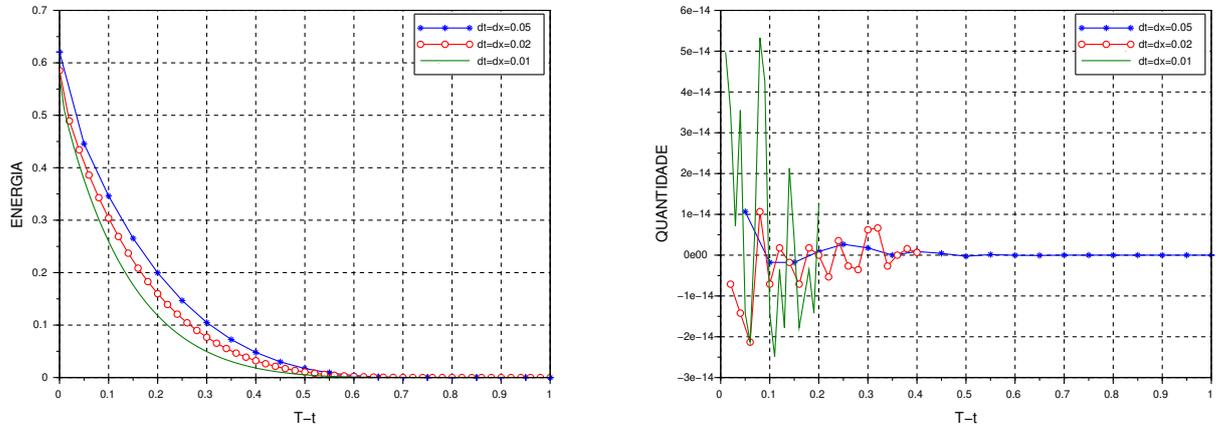


Figura 13 – Modelos obtidos para Equação de Black-Scholes em malha deslocada e condição de contorno implícita com o método de Euler Implícito( $\theta = 1$ ) com os seguintes parâmetros:  $\sigma = 0.1$ ,  $r = 0.02$ ,  $x \in [0, 2]$ ,  $t \in [0, 1]$  e  $p = 1$ .

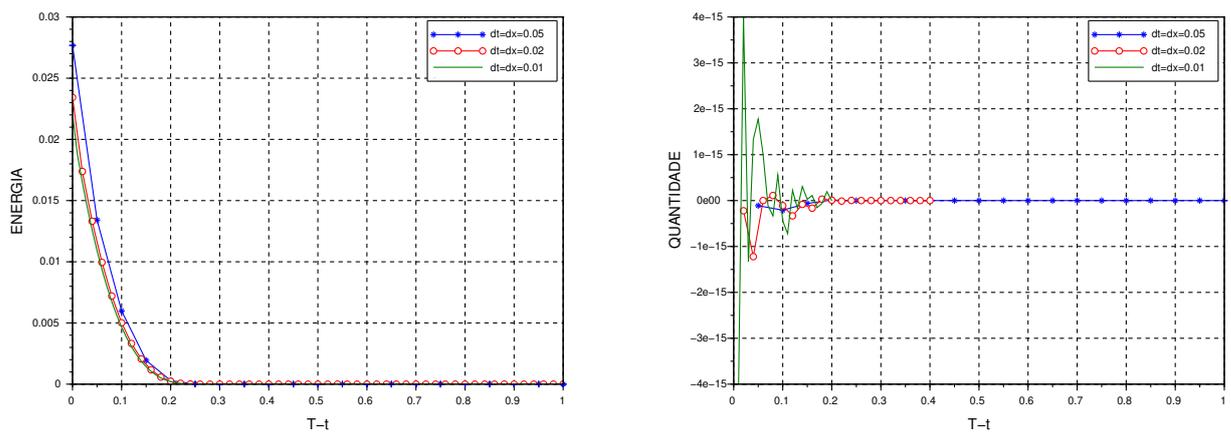


Figura 14 – Modelos obtidos para Equação de Black-Scholes em malha deslocada e condição de contorno implícita com o método de Crank-Nicolson( $\theta = \frac{1}{2}$ ) e os seguintes parâmetros:  $\sigma = 0.1$ ,  $r = 0.02$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, 1]$  e  $p = 1$ .

# Referências

- ANGUELOV J. K. DJOKO, J. M. S. L. R. Energy properties preserving schemes for burgues' equation. Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com)[on line], 2007. Citado 3 vezes nas páginas 11, 13 e 21.
- ANGUELOV, J. M.-S. L. R. Contributions to the mathematics of the nonstandard finite difference method and applications. John Wiley & Sons Inc. Numerical Methods Partial Differential Equations, 2001. Citado na página 20.
- ANGUELOV, J. M. S. L. R. Nonstandard finite difference method by non-local approximation. Elsevier-Mathematics and Computers in Simulation (www.elsevier.com/locate/matcom)[on line], 2003. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 21.
- BLACK, M. S. F. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 1973. Citado 3 vezes nas páginas 11, 25 e 30.
- BLOSS DIETMAR ERNST, J. H. L. R. M. *Derivativos: Guia prático para investidores novatos e experientes*. [S.l.]: Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 25.
- CAMPOS, C. A. de L. *Algumas Aplicações de Cálculo Variacional: da Braquistócrona a Desigualdade de Hardy-Sorbolev*. thesis — Universidade Estadual de Campinas, 2017. Citado na página 16.
- COMPANY E. NAVARRO, J. R. P. E. P. R. Numerical solution of linear and nonlinear black-scholes option pricing equations. Elsevier, 2008. Citado na página 14.
- FERNANDES, M. M. *Diferenças Finitas na Valoração de Opções Europeias e Americanas*. thesis — Universidade Técnica de Lisboa - Instituto Superior Técnico, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 31.
- FORTUNA, A. de O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*. [S.l.]: Edusp-São Paulo, 2000. Citado na página 38.
- HEIDER, P. Numerical methods for non-linear black-scholes equations. Routledge, 2009. Citado na página 14.
- MICKENS, R. E. *Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*. [S.l.]: World Scientific, Singapore, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 20.
- MICKENS, R. E. *Advances in the Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*. [S.l.]: World Scientific, Singapore, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 20.
- MOSNEAGU, G. D. A.-M. Numerical approximation of black-scholes equation. Department of Mathematics "Al.I. Cuza" University- Romania, 2010. Citado na página 14.
- OISHI JIN Y. YUAN, J. A. C. D. E. S. C. M. Stability analysis of crank-nicolson and euler schemes for time-dependent diffusion equations. Springer Science [on line], 2014. Citado na página 38.

OLIVEIRA, M. R. *Existência, unicidade e decaimento exponencial da solução da equação da onda com amortecimento friccional*. thesis — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2014. Citado na página 15.

PATIDAR, K. C. Nonstandard finite difference methods: recent trends and further developments. *Journal of Difference Equations and Applications*, 2016. Citado na página 20.

PFUTZENREUTER, E. *Investindo no mercado de opções*. [S.l.]: Novatec Editora Ltda. São Paulo, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 25.

RAVIART, J. M. T. P. A. *Introdction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. [S.l.]: Masson, Paris, 1988. Citado na página 31.

ROEGER, L.-I. W. General nonstandard finite-difference schemes for differential equations with three fixed-points. *Elsevier-Computers and Mathematics with Applications*, 2009. Nenhuma citação no texto.

THOMAS, L. H. *Elliptic problems in linear differential equations over a network*. Columbia University, New York, 1949. Citado na página 58.