UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Um Problema Elíptico Semilinear Envolvendo Condição de Fronteira Não-Linear e Potencial Mudando de Sinal

Renan Rodrigues de Souza

BELÉM-PA
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Renan Rodrigues de Souza

Um Problema Elíptico Semilinear Envolvendo Condição de Fronteira Não-Linear e Potencial Mudando de Sinal

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora:Profª Drª Amanda Suellen Sena Corrêa Leão

BELÉM-PA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S719p Souza, Renan Rodrigues de
Um problema elíptico semilinear envolvendo condição de fronteira não-linear e potencial mudando de sinal / Renan Rodrigues de Souza. — 2019.
54 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Amanda Suellen Sena Corrêa Leão
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Equação Elíptica Semilinear, Variedade de Nehari. I. Título.

CDD 515.353

Universidade Federal do Pará - UFPA

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Programa de Pós-Graduação

Renan Rodrigues de Souza

Um Problema Elíptico Semilinear Envolvendo Condição de Fronteira Não-Linear e Potencial Mudando de Sinal

Dissertação de mestrado apresentado à Universidade Federal do Pará Como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Resultado: Aprovado Belém, 31 de maio de 2019.

Amanda Suellen Sena Corrêa Leão

Profª. Drª Amanda Suellen Sena Corrêa Leão
Orientadora
PPGME-UFPA

Elany da Silva Maciel

Profª. Drª Elany da Silva Maciel
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO TOCANTIS-CAMETÁ-UFPA

Gelson Conceição G. dos Santos

Prof. Dr Gelson Conceição Gonçalves dos Santos
PPGME-PDM-UFPA

Brasil

AGRADECIMENTOS

A Deus pela misericórdia e pelo levantar de cada dia, por ter me dado força de vontade para concluir essa jornada.

À minha mãe Rosita Rodrigues Teixeira.

Aos meus amigos que estiveram sempre comigo dando força e apoio que foram cruciais para que eu conseguisse terminar.

À minha orientadora professora Amanda Corrêa, pela paciência e apoio, por ter se disposto a me fazer acreditar em mim e na minha capacidade.

Aos professores da banca examinadora pelas correções e sugestões e a todos os demais professores e à coordenação deste programa que de alguma forma contribuíram para a conclusão desta pós-graduação.

À Universidade Federal do Pará.

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Se eu vi mais, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes”.

Isaac Newton

RESUMO

Neste trabalho, vamos estudar a multiplicidade de soluções não negativas e não triviais para um problema elíptico semilinear envolvendo condição de fronteira não linear e potencial mudança de sinal. Com o auxílio da Variedade de Nehari, provaremos que o problema elíptico semilinear:

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda f(x)|u|^{q-2}u \quad em \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} &= g(x)|u|^{p-2}u \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

possui pelo menos duas soluções não negativas não triviais para λ suficientemente pequeno, onde $1 < q < 2 < p < \frac{2(N-1)}{N-2}$, $\lambda > 0$, Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, $\frac{\partial}{\partial v}$ é a derivada normal exterior e $f, g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas que mudam de sinal em $\overline{\Omega}$.

Palavras-chave: Problema Elíptico Semilinear; Condição de Fronteira Não Linear; Variedade de Nehari.

ABSTRACT

In this study, we will study the multiplicity of nontrivial nonnegative solutions for a semilinear elliptic problem involving nonlinear boundary condition and sign-changing potential. With the help of the Nehari manifold, we will prove the semilinear elliptic problem:

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda f(x)|u|^{q-2}u \quad em \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} &= g(x)|u|^{p-2}u \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

has at least two nontrivial nonnegative solutions for λ is sufficiently small, where $1 < q < 2 < p < \frac{2(N-1)}{N-2}$, $\lambda > 0$, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ with smooth boundary, $\frac{\partial}{\partial v}$ is the normal derivate and $f, g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ are continuous functions which change sign in $\overline{\Omega}$.

Keywords: Elliptic Semilinar Problem; Nonlinear Boundary Condition; Nehari Manifold.

Índice de Notações

$\overline{\Omega}$, $|\Omega|$ e $\partial\Omega$ são, respectivamente, o fecho, a medida e a fronteira do conjunto Ω.

$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R};\ \text{u é mensurável e} \displaystyle\int_\Omega |u|^2\, dx < \infty \right\}$

$\|u\|_2 = \left(\displaystyle\int_\Omega |u|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma usual em $L^2(\Omega)$.

$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ para } i = 1, \cdots, n \right\}$

$\langle u, v \rangle = \displaystyle\int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv)\, dx$ é o produto interno usual em $H^1(\Omega)$.

$\|u\| = \left(\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma usual em $H^1(\Omega)$.

$\|u\|_{H_0^1} = \left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma usual em $H_0^1(\Omega)$

$u_n \to u$ convergência forte (em norma)

$u_n \rightharpoonup u$ convergência fraca

Sumário

Introdução

Neste trabalho, apresentaremos os resultados encontrados no artigo de Tsung-Fang Wu [19] sobre a existência e multiplicidade de soluções não negativas e não triviais para o problema

$$(P)\begin{cases} -\Delta u+u &= \lambda f(x)|u|^{q-2}u \quad em \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} &= g(x)|u|^{p-2}u \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $1 < q < 2 < p < \frac{2(N-1)}{N-2}$, $\lambda > 0$, Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave, $\frac{\partial}{\partial v}$ é a derivada normal exterior e $f, g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas que mudam de sinal em $\overline{\Omega}$. Associado ao problema (P), vamos considerar o funcional energia J_λ definido em $H^1(\Omega)$,

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u|^q\,dx - \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds.$$

onde ds é a medida na fronteira e $\|u\|_{H^1}^2 = \displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\,dx$.

O fato de o número de soluções do problema (P) ser afetado pela condição de fronteira não linear tem sido o foco de uma grande quantidade de pesquisas nos últimos anos. Alguns pesquisadores como Garcia-Azorero, Peral e Rossi [9] investigaram o problema a seguir:

$$(Q)\begin{cases} -\Delta u+u &= \lambda |u|^{q-2}u \quad em \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} &= |u|^{p-2}u \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

esse problema é um caso particular de (P) pois $f \equiv g \equiv 1$. Eles descreveram que existe números positivos β_1, β_2 com $\beta_1 < \beta_2$ tal que o problema (Q) admite pelo menos duas soluções positivas para $\lambda \in (0, \beta_1)$ e que não existe solução positiva para $\lambda > \beta_2$.

O propósito desse trabalho é considerar a multiplicidade de soluções não negativas e não-triviais para o problema (P) com potencial mudando de sinal. Para tal propósito descreveremos o seguinte teorema, que será demonstrado ao longo deste trabalho:

Teorema 0.1. *Existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda \in (0, \lambda_0)$, o problema (P) tem pelo menos duas soluções não negativas não-triviais.*

Outro ponto importante que descreveremos é a existência de um problema auxiliar similar ao problema (P), problema este que foi investigado por Ambrosetti-Brezis-Cerami [2] descrito abaixo:

$$(R)\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda f(x)|u|^{q-2}u \quad em \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $1 < q < 2 < p \leq \frac{2N}{N-2}$. Eles provaram que existe $\lambda_0 > 0$ tal que (R) admite pelo menos duas soluções positivas para $\lambda \in (0, \lambda_0)$, possui uma solução positiva para $\lambda = \lambda_0$, e uma não positiva para $\lambda > \lambda_0$.

Nosso trabalho será estruturado da seguinte maneira:

No capítulo 1, vamos descrever o funcional linear J_λ associado ao problema (P), mostrando que está bem definido, introduziremos a Variededade de Nehari e provaremos alguns lemas que serão essenciais para demonstrar os teoremas principais.

No capítulo 2, descreveremos o problema auxiliar e relacionaremos ele com o problema principal para chegar a demonstração do Teorema 0.1.

No capítulo 3, vamos demonstrar o Teorema 0.1 fazendo uso de outros dois teoremas cruciais para conclusão do objetivo deste trabalho.

No apêndice A, mostraremos que o funcional associado ao problema (P) é de classe C^1 e enunciaremos os principais resultados utilizados durante nosso estudo.

Capítulo 1

Notações e Preliminares

Neste capítulo, vamos descrever e mostrar que o funcional linear associado ao seguinte problema elíptico semilinear:

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda f(x)|u|^{q-2}u \quad em \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} &= g(x)|u|^{p-2}u \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $1 < q < 2 < p < \frac{2(N-1)}{N-2}$, $\lambda > 0$, Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave, $\frac{\partial}{\partial v}$ é a derivada normal exterior e $f, g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas que mudam de sinal em $\overline{\Omega}$, está bem definido. Também definiremos a Variedade de Nehari e faremos a demonstração de alguns lemas importantes que serão usados como auxilio teoremas principais.

1.1 Funcional Associado ao Problema (P)

Vamos realizar inicialmente a motivação para a solução fraca do problema (P).

Multiplicando pela função teste $\phi \in C^\infty(\Omega)$ ambos os membros da igualdade em (P) obtemos:

$$-\Delta u\phi + u\phi = \lambda f|u|^{q-2}u\phi, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial v}\phi = g|u|^{p-2}u\phi. \tag{1.2}$$

Integrando em seguida, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega -\Delta u\phi\,dx + \int_\Omega u\phi\,dx &= \lambda\int_\Omega f|u|^{q-2}u\phi\,dx && (1.3)\\
\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\phi\,ds &= \int_{\partial\Omega} g|u|^{p-2}u\phi\,ds. && (1.4)
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Divergência, sabemos que

$$\int_\Omega div(\nabla u\phi)\,dx = \int_{\partial\Omega}\nabla u\cdot\phi\cdot\nu\,ds.$$

Desde que $div(\nabla u\phi) = \nabla\phi\cdot\nabla u + \phi\Delta u$, então

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\phi\,dx + \int_\Omega \phi\Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega}\phi\cdot\frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds = \int_{\partial\Omega} g|u|^{p-2}u\phi\,ds,$$

e

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\phi\,dx - \int_{\partial\Omega} g|u|^{p-2}u\phi\,ds = -\int_\Omega \phi\Delta u\,dx$$

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\phi\,dx - \int_{\partial\Omega} g|u|^{p-2}u\phi\,ds + \int_\Omega u\phi\,dx = \lambda\int_\Omega f|u|^{q-2}u\phi\,dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u\nabla\phi\,dx + \int_\Omega u\phi\,dx = \lambda\int_\Omega f|u|^{q-2}u\phi\,dx + \int_{\partial\Omega} g|u|^{p-2}u\phi\,ds\ ,\forall\phi\in C^\infty(\Omega).$$

Desde que Ω é um aberto limitado regular então $\overline{C^\infty(\overline{\Omega})} = H^1(\Omega)$ e, portanto,

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u\nabla\phi\,dx + \int_\Omega u\phi\,dx = \lambda\int_\Omega f|u|^{q-2}u\phi\,dx + \int_{\partial\Omega} g|u|^{p-2}u\phi\,ds\ ,\forall\phi\in H^1(\Omega). \qquad (1.5)$$

Portanto, uma função $u\in H^1(\Omega)$ é solução fraca do problema (P) se, e somente se, satisfaz a igualdade (1.5) para todo $\phi\in H^1(\Omega)$. Associado ao problema (P), consideremos o funcional energia de classe C^1 em $H^1(\Omega)$ dado por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u|^q\,dx - \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds$$

onde ds é a medida sobre a fronteira. A derivada de Fréchet do funcional J_λ é dado por

$$\langle J'_\lambda(u),\phi\rangle = \int_\Omega(\nabla u\nabla\phi + u\phi)\,dx - \lambda\int_\Omega f|u|^{q-2}u\phi\,dx - \int_{\partial\Omega} g|u|^{p-2}u\phi\,ds,$$

para todo $u, \phi \in H^1(\Omega)$. Em particular,

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(u), u\rangle &= \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, dx - \lambda \int_\Omega f|u|^q\, dx - \int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds \\ &= \|u\|^2_{H^1} - \lambda \int_\Omega f|u|^q\, dx - \int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds. \end{aligned}$$

Note que J_λ está bem definido.

De fato,

(i) $\frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1} < \infty$, pois $u \in H^1(\Omega)$.

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u|^q\, dx \le \frac{\lambda}{q}\left|\int_\Omega f|u|^q\, dx\right| &\le \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |f||u^q|\, dx \\ &\le \frac{\lambda}{q}\max_{x\in\overline{\Omega}}|f|\int_\Omega |u|^q\, dx < \infty \end{aligned}$$

pois $u \in H^1(\Omega)$ então, desde que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ continuamente com $1 \le q \le 2^*$ segue que

$$-\frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u|^q\, dx < \infty.$$

(iii)

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds \le \frac{1}{p}\left|\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds\right| &\le \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} |g||u|^p\, ds \\ &\le \frac{1}{p}\max_{x\in\partial\Omega}|g|\int_{\partial\Omega} |u|^p\, ds < \infty. \end{aligned}$$

pois $u \in H^1(\Omega)$ então segue das imersões contínuas de Sobolev ($H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\partial\Omega)$) que $u \in L^p(\partial\Omega)$. Portanto

$$-\frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds < \infty.$$

Assim, o funcional J_λ está bem definido.

1.2 Variedade de Nehari

Nesta seção, vamos denotar por S_p, C_p a melhor constante de Sobolev e traço para as imersões $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\partial\Omega)$, respectivamente.

Agora, consideremos o **problema de minimização de Nehari:** Para $\lambda > 0$,

$$\alpha_\lambda = \inf\{J_\lambda(u) : u \in M_\lambda\},$$

onde $M_\lambda = \{u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\} : \langle J'_\lambda(u), u\rangle = 0\}$. Defina

$$\psi_\lambda(u) = \langle J'_\lambda(u), u\rangle = \|u\|^2_{H^1} - \lambda \int_\Omega f|u|^q\, dx - \int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds.$$

Então para $u \in M_\lambda$,

$$\langle \psi'_\lambda(u), u\rangle = 2\|u\|^2_{H^1} - \lambda q \int_\Omega f|u|^q\, dx - p\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds.$$

Vamos dividir M_λ em três partes:

$$M^+_\lambda = \{u \in M_\lambda : \langle \psi'_\lambda(u), u\rangle > 0\},$$

$$M^0_\lambda = \{u \in M_\lambda : \langle \psi'_\lambda(u), u\rangle = 0\},$$

$$M^-_\lambda = \{u \in M_\lambda : \langle \psi'_\lambda(u), u\rangle < 0\}.$$

Temos os seguintes resultados:

Lema 1.1. *Existe $\lambda_1 > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \lambda_1)$ temos $M^0_\lambda = \emptyset$.*

Demonstração: Consideremos os dois seguintes casos.

Caso (I): $u \in M_\lambda$ e $\int_{\partial\Omega} g|u|^p ds \leq 0$. Como $u \in M_\lambda$, então,

$$\|u\|^2_{H^1} - \lambda \int_\Omega f|u|^q\, dx - \int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds = 0,$$

então,

$$\lambda \int_\Omega f|u|^q\, dx = \|u\|^2_{H^1} - \int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds. \tag{1.6}$$

Temos, de (1.6)

$$\begin{aligned}\langle \psi_\lambda'(u), u\rangle &= 2\|u\|_{H^1}^2 - \lambda q \int_\Omega f|u|^q\,dx - p\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds\\ &= 2\|u\|_{H^1}^2 - q\|u\|_{H^1}^2 + q\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds - p\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds\\ &= \underbrace{(2-q)}_{>0}\|u\|_{H^1}^2 + \underbrace{(q-p)}_{<0}\underbrace{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds}_{\leq 0} > 0.\end{aligned}$$

então $u \in M_\lambda^+$.

Caso (II): $u \in M_\lambda$ e $\int_{\partial\Omega} g|u|^p > 0$. Suponhamos que $M_\lambda^0 \neq \emptyset$ para todo $\lambda > 0$. Se $u \in M_\lambda^0$, então temos

$$\begin{aligned}0 = \langle \psi_\lambda'(u), u\rangle &= 2\|u\|_{H^1}^2 - \lambda q \int_\Omega f|u|^q\,dx - p\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds\\ &= (2-q)\|u\|_{H^1}^2 - (p-q)\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds.\end{aligned}$$

Assim,

$$\|u\|_{H^1}^2 = \frac{p-q}{2-q}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \lambda\int_\Omega f|u|^q\,dx &= \|u\|_{H^1}^2 - \int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds\\ &= \frac{p-q}{2-q}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds - \int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds\\ &= \left(\frac{p-q}{2-q} - 1\right)\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds\\ &= \frac{p-2}{2-q}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds. \end{aligned}\tag{1.8}$$

Entretanto, segue de (1.7), (1.8) e da desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\left(\frac{p-2}{p-q}\right)\|u\|_{H^1}^2 &= \frac{p-2}{p-q}.\frac{p-q}{2-q}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds\\ &= \frac{p-2}{2-q}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds\\ &= \|u\|_{H^1}^2 - \int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds\\ &= \lambda\int_\Omega f|u|^q\,dx.\end{aligned}$$

$$\left(\frac{p-2}{p-q}\right)\|u\|_{H^1}^2 \leq \lambda \left(\int_\Omega f|u|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}}$$
$$\leq \lambda \|f\|_{L^{p^*}} \|u\|_{L^p}^q$$
$$\leq \lambda \|f\|_{L^{p^*}} S_p^q \|u\|_{H^1}^q \text{ pois } (H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega))$$

onde $p^* = \frac{p}{p-q}$. Isso implica

$$\frac{\|u\|_{H^1}^2}{\|u\|_{H^1}^q} \leq \left[\lambda \left(\frac{p-q}{p-2}\right)\|f\|_{L_{p^*}} S_q^p\right],$$

logo,

$$\|u\|_{H^1}^{2-q} \leq \left[\lambda \left(\frac{p-q}{p-2}\right)\|f\|_{L_{p^*}} S_q^p\right],$$

assim,

$$\|u\|_{H^1} \leq \left[\lambda \left(\frac{p-q}{p-2}\right)\|f\|_{L_{p^*}} S_q^p\right]^{\frac{1}{2-q}}. \tag{1.9}$$

Seja $I_\lambda : M_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_\lambda(u) = K(p,q)\left(\frac{\|u\|_{H^1}^{2(p-1)}}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds}\right)^{1/(p-2)} - \lambda \int_\Omega f|u|^q\,dx,$$

onde $K(p,q) = (\frac{2-q}{p-q})^{(p-1)/(p-2)}(\frac{p-2}{2-q})$. Então $I_\lambda(u) = 0$ para todo $u \in M_\lambda^0$.

De fato, de (1.7) e (1.8) segue que para $u \in M_\lambda^0$ temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= K(p,q)\left(\frac{\|u\|_{H^1}^{2(p-1)}}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds}\right)^{1/(p-2)} - \lambda \int_\Omega f|u|^q\,dx \\
I_\lambda(u) &= \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}\left(\frac{p-2}{2-q}\right)\left(\frac{\|u\|_{H^1}^{2(p-1)}}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds}\right)^{\frac{1}{p-2}} - \frac{p-2}{2-q}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds \\
I_\lambda(u) &= \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}\left(\frac{p-2}{2-q}\right)\left(\frac{(\frac{p-q}{2-q})^{p-1}(\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds)^{p-1}}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds}\right)^{\frac{1}{p-2}} - \frac{p-2}{2-q}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds \\
I_\lambda(u) &= \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}\left(\frac{p-2}{2-q}\right)\left(\frac{p-q}{2-q}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds - \frac{p-2}{2-q}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds \\
I_\lambda(u) &= \frac{(2-q)^{\frac{p-1}{p-2}}}{(p-q)^{\frac{p-1}{p-2}}}\frac{(p-q)^{\frac{p-1}{p-2}}}{(2-q)^{\frac{p-1}{p-2}}}\left(\frac{p-2}{2-q}\right)\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds - \frac{p-2}{2-q}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds \\
I_\lambda(u) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Todavia, por (1.9) e pela desigualdade de Hölder e traço de Sobolev, para $u \in M_\lambda^0$

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &\geq K(p,q)\left(\frac{\|u\|_{H^1}^{2(p-1)}}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds}\right)^{1/(p-2)} - \lambda S_p^q \|f\|_{L^{p^*}}\|u\|_{H^1}^q \\
&\geq K(p,q)\left(\frac{\|u\|_{H^1}^{\frac{2(p-1)}{p-2}}}{C_p^{\frac{p}{p-2}}\|g\|_\infty \|u\|_{H^1}^{\frac{p}{p-2}}}\right) - \lambda S_p^q \|f\|_{L^{p^*}}\|u\|_{H^1}^q \\
&\geq K(p,q)(C_p^{\frac{p}{2-p}}\|u\|_{H^1}) - \lambda S_p^q \|f\|_{L^{p^*}}\|u\|_{H^1}^q \\
&\geq \|u\|_{H^1}^q (K(p,q)\|u\|_{H^1}^{1-q} C_p^{\frac{p}{2-p}} - S_p^q \|f\|_{L^{p^*}}) \\
&\geq \|u\|_{H^1}^q \{K(p,q) C^{\frac{p}{2-p}} \lambda^{\frac{1-q}{2-q}} [(\tfrac{p-q}{p-2})\|f\|_{L^{p^*}} S_p^q]^{\frac{1-q}{2-q}} - \lambda S_p^q \|f\|_{L^{p^*}}\}.
\end{aligned}$$

Isso implica que para λ suficientemente pequeno temos $I_\lambda(u) > 0$ para qualquer $u \in M_\lambda^0$, o que contradiz (1.10). Então podemos concluir que existe $\lambda_1 > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \lambda_1)$, temos $M_\lambda^0 = \emptyset$.

□

Pelo Lema (1.1), para $\lambda \in (0, \lambda_1)$ escrevemos $M_\lambda = M_\lambda^+ \cup M_\lambda^-$ e definimos

$$\alpha_\lambda^+(\Omega) = \inf_{u \in M_\lambda^+} J_\lambda(u) \text{ e } \alpha_\lambda^-(\Omega) = \inf_{u \in M_\lambda^-} J_\lambda(u).$$

Como $M_\lambda^+ \subset M_\lambda = M_\lambda^+ \cup M_\lambda^-$ e $J_\lambda(u) \geq 0, \forall u \in M_\lambda$ segue que $J_\lambda(u) \geq 0, \forall u \in M_\lambda^+$. Logo, o número α_λ^+ está bem definido. Analogamente para α^-.

O próximo lema mostra que os minimizadores de M_λ são os pontos críticos usuais de J_λ.

Lema 1.2. *Para $\lambda \in (0, \lambda_1)$ se u_0 é um minimizador local para J_λ em M_λ, então $J_\lambda'(u_0) = 0$ em $H^*(\Omega)$.*

Demonstração: Consideremos $J_\lambda, \varphi_\lambda : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ funcionais de classe C^1 e

$$M_\lambda = \{u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}; \varphi_\lambda(u) = \langle J_\lambda'(u), u\rangle = 0\}.$$

Note que $\varphi_\lambda'(u)u \neq 0$, $\forall u \in M_\lambda$. Pois, como $\lambda \in (0, \lambda_1)$ temos $M_\lambda^0 = \emptyset$ e, portanto, $M_\lambda = M_\lambda^+ \cup M_\lambda^-$. Logo, para $u \in M_\lambda$ temos $\varphi_\lambda'(u)u > 0$ ou $\varphi_\lambda'(u)u < 0$.

Sabemos que u_0 é um mínimo local para J_λ em M_λ, ou seja, $J_\lambda(u_0) = \min\limits_{u \in M_\lambda} J_\lambda(u)$. Então, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (ver Apêndice, A.6, pag 52.) existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'_\lambda(u_0) = \theta\varphi'_\lambda(u_0),$$

isto é, $J'_\lambda(u_0)\psi = \theta\varphi'_\lambda(u_0)\psi, \forall\psi \in H^1(\Omega)$.

Em particular,

$$0 = J'_\lambda(u_0)u_0 = \theta\varphi'_\lambda(u_0)u_0.$$

Como $\varphi'(u_0)u_0 \neq 0$ então $\theta = 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u_0)\psi &= 0, \forall\psi \in H^1(\Omega), \\ J'_\lambda(u_0) &= 0 \text{ em } H^*(\Omega). \end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.3. *(i) Se $u \in M^+_\lambda$, então $\int_\Omega f|u|^q\,dx > 0$;*

(ii) Se $u \in M^-_\lambda$, então $\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds > 0$.

Demonstração: (i) Caso(I): $\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds \leq 0$. Temos

$$\lambda\int_\Omega f|u|^q = \|u\|^2_{H^1} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds}_{\geq 0} > 0.$$

(i) Caso(II): $\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds > 0$. Temos

$$\|u\|^2_{H^1} - \lambda\int_\Omega f|u|^q\,dx - \int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds = 0$$

pois $u \in M_\lambda$. Como $u \in M^+_\lambda$

$$\begin{aligned} 2\|u\|^2_{H^1} - \lambda q\int_\Omega f|u|^q\,dx - p\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds &> 0 \\ \Rightarrow (2-q)\|u\|^2_{H^1} + (q-p)\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds &> 0 \\ \Rightarrow \|u\|^2_{H^1} > \frac{p-q}{2-q}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds.. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lambda \int_{\Omega} f|u|^q &= \|u\|_{H^1}^2 - \int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds \\ &> \frac{p-q}{2-q}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds - \int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds \\ &> \underbrace{\frac{p-2}{2-q}}_{>0}\underbrace{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds}_{>0} > 0.\end{aligned}$$

(ii) Desde que $u \in M_\lambda^-$, segue que

$$\langle \psi_\lambda'(u), u\rangle = (2-q)\|u\|_{H^1}^2 - (p-q)\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds < 0$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow -(p-q)\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds < -(2-q)\|u\|_{H^1}^2 \\ &\Rightarrow (p-q)\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds > (2-q)\|u\|_{H^1}^2 \\ &\Rightarrow \int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds > \frac{(2-q)}{(p-q)}\|u\|_{H^1}^2 > 0.\end{aligned}$$

□

Para cada $u \in M_\lambda^-$, escrevemos

$$t_{max} = \left(\frac{(2-q)\|u\|_{H^1}^2}{(p-q)\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds}\right)^{1/(p-2)} < 1.$$

Então temos o seguinte lema.

Lema 1.4. *Seja* $p^* = \frac{p}{p-q}$ *e* $\lambda_2 = (\frac{p-2}{p-q})(\frac{2-q}{p-q})^{\frac{2-q}{p-2}} C_p^{\frac{p(2-q)}{2-p}} S_p^q \|f\|_{L^{p^*}}$. *Então para cada* $u \in M_\lambda^-$ *e* $\lambda \in (0, \lambda_2)$, *temos*

(i) *se* $\int_\Omega f|u|^q\,dx \leq 0$, *então* $J_\lambda(u) = \sup_{t\geq 0} J_\lambda(tu) > 0$;

(ii) *Se* $\int_\Omega f|u|^q\,dx > 0$, *então existe um único* $0 < t^+ = t^+(u) < t_{max}$ *tal que* $t^+u \in M_\lambda^+$ *e*

$$J_\lambda(t^+u) = \inf_{0\leq t\leq t_{max}} J_\lambda(tu)\,,\; J_\lambda(u) = \sup_{t\geq t_{max}} J_\lambda(tu).$$

Demonstração: Fixado $u \in M_\lambda^-$. Seja

$$h(t) = t^{2-q}\|u\|_{H^1}^2 - t^{(p-q)}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds \ \text{ para } \ t \geq 0.$$

Verifiquemos que h atinge seu máximo em t_{max} como mostra o gráfico

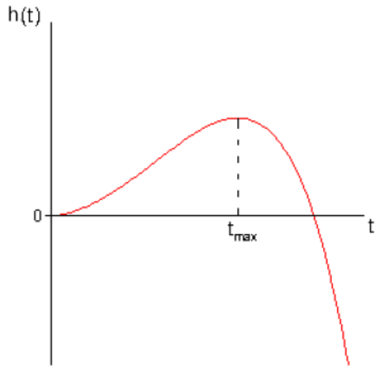

Figura 1.1: Gráfico da função $h(t)$ para $t > 0$ e $u \in M_\lambda^-$ fixado.

Temos que $h(0) = 0$, $h(t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$ e

$$h'(t) = (2-q)t^{1-q}\|u\|_{H^1}^2 - (p-q)t^{(p-q-1)}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds > 0.$$

$$\Leftrightarrow (2-q)t^{1-q}\|u\|_{H^1}^2 > (p-q)t^{(p-q-1)}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2-q)\|u\|_{H^1}^2}{(p-q)\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds} > \frac{t^{p-q-1}}{t^{1-q}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2-q)\|u\|_{H^1}^2}{(p-q)\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds} > t^{p-2}$$

$$\Leftrightarrow t < \left(\frac{(2-q)\|u\|_{H^1}^2}{(p-q)\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}\right)^{1/(p-2)}.$$

Para,

$$h'(t) = (2-q)t^{1-q}\|u\|_{H^1}^2 - (p-q)t^{(p-q-1)}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds < 0$$

tem-se

$$\Rightarrow t > \left(\frac{(2-q)\|u\|_{H^1}^2}{(p-q)\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}\right)^{1/(p-2)}.$$

Então, de fato, $h(t)$ atinge o máximo em t_{max}, crescendo para $t \in [0, t_{max})$ e decrescendo para (t_{max}, ∞). Além disso,

$$\begin{aligned}
h(t_{max}) &= \left(\frac{(2-q)\|u\|_{H^1}^2}{(p-q)\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} \|u\|_{H^1}^2 - \left(\frac{(2-q)\|u\|_{H^1}^2}{(p-q)\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}\right)^{\frac{p-q}{p-2}} \int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds \\
&= \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} \frac{\|u\|_{H^1}^{\frac{2(p-q)}{p-2}}}{(\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds)^{\frac{2-q}{p-2}}} - \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{p-2}} \frac{\|u\|_{H^1}^{\frac{2(p-q)}{p-2}}}{(\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds)^{\frac{2-q}{p-2}}} \\
&= \frac{\|u\|_{H^1}^{\frac{2(p-q)}{p-2}}}{(\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds)^{\frac{2-q}{p-2}}} \left[\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} - \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{p-2}}\right] \\
&= \|u\|_{H^1}^q \left[\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} - \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{p-2}}\right] \left(\frac{\|u\|_{H^1}^p}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} \\
&\geq \|u\|_{H^1}^q \left[\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} - \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{p-2}}\right] \left(\frac{\|u\|_{H^1}^p}{C_p^p \|g\|_\infty \|u\|^p}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} \\
&\geq \|u\|_{H^1}^q \left(\frac{p-2}{p-q}\right) \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} C^{\frac{p(2-q)}{2-p}}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$h(t_{max}) \geq \|u\|_{H^1}^q \left(\frac{p-2}{p-q}\right) \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} C^{\frac{p(2-q)}{2-p}}. \tag{1.11}$$

(i): $\int_\Omega f|u|^q\, dx \leq 0$.

Temos que existe um único $t^- > t_{max}$ tal que $h(t^-) = \lambda \int_\Omega f|u|^q\, ds$ e $h'(t^-) < 0$. A existência de t^- é garantida pelo Teorema do Valor Intermediário, pois para $h : [t_{max}, t'] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e $h(t') < \lambda \int_\Omega f|u|^q\, ds < h(t_{max})$, existe $t^- \in (t_{max}, t')$ tal que $h(t^-) = \lambda \int_\Omega f|u|^q\, dx$. Agora,

$$\begin{aligned}
\langle \psi'(t^- u), t^- u\rangle &= (2-q)\|t^- u\|_{H^1}^2 - (p-q)\int_{\partial\Omega} g|t^- u|^p\, ds \\
&= (t^-)^2 \left((2-q)\|u\|_{H^1}^2) - (t^-)^p((p-q)\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds\right) \\
&= (t^-)^{1+q}\left[(2-q)(t^-)^{1-q}\|u\|_{H^1}^2 - (p-q)(t^-)^{p-q-1}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds\right] \\
&= \underbrace{(t^-)^{1+q}}_{>0}\underbrace{h'(t^-)}_{<0} < 0
\end{aligned}$$

e

$$\langle J'_\lambda(t^- u), t^- u\rangle = \|t^- u\|_{H^1}^2 - \lambda\int_\Omega f|t^- u|^q\, dx - \int_{\partial\Omega} |t^- u|^p\, ds$$

$$
\begin{aligned}
&= (t^-)^2\|u\|^2_{H^1} - (t^-)^q\lambda\int_\Omega f|u|^q\,dx - (t^-)^p\int_{\partial\Omega}|u|^p\,ds\\
&= (t^-)^q\left[(t^-)^{2-q}\|u\|^2_{H^1} - \lambda\int_\Omega f|u|^q\,dx - (t^-)^{p-q}\int_{\partial\Omega}|u|^p\,ds\right]\\
&= (t^-)^q\left[(t^-) - \lambda\int_\Omega f|u|^q\,dx\right]\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Então, se $t^-u \in M_\lambda^-$ e $u \in M_\lambda^-$ implica que $t^- = 1$. Desde que, para $t > t_{max}$, temos

$$(2-q)\|tu\|^2_{H^1} - (p-q)\textstyle\int_{\partial\Omega}|tu|^p\,ds < 0$$

$$J_\lambda(tu) = \frac{t^2}{2}\|tu\|^2_{H^1} - \frac{\lambda}{q}\textstyle\int_\Omega f|tu|^q\,dx - \frac{t^p}{p}\int_{\partial\Omega}|tu|^p\,ds$$

logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_\lambda(tu) &= t\|u\|^2_{H^1} - \lambda t^{q-1}\int_\Omega f|u|^q\,dx - t^{p-1}\int_{\partial\Omega}|u|^p\,ds\\
&= t^{q-1}\left[t^{2-q}\|u\|^2_{H^1} - \lambda\int_\Omega f|u|^q\,dx - t^{p-q}\int_{\partial\Omega}|u|^p\,ds\right]\\
&= t^{q-1}\left[h(t) - \lambda\int_\Omega f|u|^q\,dx\right]\\
&= 0 \quad \text{, para } t = t^-.
\end{aligned}
$$

Temos $h(t) > 0$ em $[0, t_{max})$, h é decrescente em (t_{max}, ∞) e estamos supondo, $h(t^-) = \lambda\int_\Omega f|u|^q\,ds \leq 0$, segue que

$$
\frac{d}{dt}J_\lambda(tu) = \begin{cases} > 0, & em \quad (0, t^-),\\ = 0, & em \quad t^-,\\ < 0, & em \quad (t^-, \infty). \end{cases}
$$

Consequentemente $J_\lambda(tu)$ é crescente em $(0, t^-)$, $\dfrac{d}{dt}J_\lambda(t^-u) = 0$ e $J_\lambda(tu)$ é decrescente em (t^-, ∞), logo t^- é o único ponto crítico de $J_\lambda(tu)$ o qual é ponto de máximo e como

$$\frac{d^2}{dt}J_\lambda(tu) = (q-1)t^{q-1}\left[h(t) - \lambda\int_\Omega f|u|^q\,dx\right] + t^{q-1}h'(t),$$

concluímos que $\dfrac{d^2}{dt}J_\lambda(tu) < 0$ quando $t = t^-$.
Então, $J_\lambda(t^-u) = \sup\limits_{t\geq 0} J_\lambda(tu)$. Além disso,

$$J_\lambda(t^-u) \geq J_\lambda(tu) \geq \frac{t^2}{2}\|u\|^2_{H^1} - \frac{t^p}{p}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds \;\text{ para todo } t \geq 0.$$

Seja $g(t) = \dfrac{t^2}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \dfrac{t^p}{p}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds$, essa função atinge seu máximo em $t_0 = \left(\dfrac{\|u\|_{H^1}^2}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}\right)^{1/(p-2)}$. De fato,

$$g'(t) = t\|u\|_{H^1}^2 - t^{p-1}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds > 0,$$

logo,

$$\begin{aligned}
&\frac{\|u\|_{H^1}^2}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds} > \frac{t^{p-1}}{t} \\
\Rightarrow &\frac{\|u\|_{H^1}^2}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds} > \frac{t^{p-1}}{t} \\
\Rightarrow &\frac{\|u\|_{H^1}^2}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds} > t^{p-2} \\
\Rightarrow &\, t < \left(\frac{\|u\|_{H^1}^2}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}\right)^{1/(p-2)}.
\end{aligned}$$

Para $g'(t) < 0$, tem-se $t > \left(\dfrac{\|u\|_{H^1}^2}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}\right)^{1/(p-2)}$, portanto $g(t)$ atinge o máximo em $t_0 = \left(\dfrac{\|u\|_{H^1}^2}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}\right)^{1/(p-2)}$. Então

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{\|u\|_{H^1}^2}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}\right)^{\frac{2}{(p-2)}} \|u\|_{H^1}^2 - \frac{1}{p}\left(\frac{\|u\|_{H^1}^2}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}\right)^{\frac{p}{(p-2)}} \int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds \\
&\geq \left(\frac{\|u\|_{H^1}^2}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}\right)^{\frac{2}{(p-2)}} \left(\frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{1}{p}(\frac{\|u\|_{H^1}^2}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}) \int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds\right) \\
&\geq \left(\frac{\|u\|_{H^1}^2}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}\right)^{\frac{2}{(p-2)}} \left(\frac{p\|u\|_{H^1}^2 - 2\|u\|_{H^1}^2}{2p}\right) \\
&\geq \left(\frac{p-2}{2p}\right)\left(\frac{\|u\|_{H^1}^2}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}\right)^{\frac{2}{p-2}} \|u\|_{H^1}^2 \\
&\geq \underbrace{\left(\frac{p-2}{2p}\right)}_{>0} \underbrace{\left(\frac{\|u\|_{H^1}^p}{\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}\right)^{\frac{2}{p-2}}}_{(\text{lema}1.3)\ >0} > 0.
\end{aligned}$$

(ii): $\int_\Omega f|u|^q\,dx > 0$. Por (1.11) e

$$\begin{aligned}
h(0) = 0 < \lambda \int_\Omega f|u|^q\,dx &\leq \lambda \|f\|_{L^{p^*}} S_p^q \|u\|_{H^1}^q \\
&< \|u\|_{H^1}^q \left(\frac{p-2}{p-q}\right)\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} C^{\frac{p(2-q)}{2-p}} \\
&\leq h(t_{max}) \text{ para } \lambda \in (0, \lambda_2).
\end{aligned}$$

Seguindo raciocínio análogo ao do item (i), existe um único t^+ e t^- tal que $0 < t^+ < t_{max} < t^-$,

$$h(t^+) = \lambda \int_\Omega f|u|^q\,dx = h(t^-),$$

$$h'(t^+) > 0 > h'(t^-).$$

Temos $t^+u \in M_\lambda^+$, $t^- \in M^-\lambda$, e $J_\lambda(t^-u) \geq J_\lambda(tu) \geq J_\lambda(t^+u)$ para qualquer $t \in [t^+, t^-]$ e $J_\lambda(t^+u) \leq J_\lambda(tu)$ para qualquer $t \in [0, t^+]$. Então $t^- = 1$ e

$$J_\lambda(u) = \sup_{t\geq 0} J_\lambda(tu), J_\lambda(t^+u) = \inf_{0\leq t\leq t_{max}} J_\lambda(tu).$$

$\square$

Capítulo 2

Problema Auxiliar

Neste capítulo, vamos estabelecer a existência de soluções não negativas para o seguinte problema auxiliar:

$$(R) \begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda f(x)|u|^{q-2}u \quad em \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $1 < q < 2 < p \leq \frac{2N}{N-2}$ e posteriormente relacionar a solução desse problema com as possíveis soluções do problema (P).

2.1 Existência de Solução para o Problema Auxiliar

De forma análoga a usada para encontrar o funcional J_λ, obtemos o funcional energia associado a (R)

$$K_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u|^q\,dx$$

e o problema de minimização

$$\beta_\lambda = \inf\{K_\lambda(u) : u \in N_\lambda\}$$

onde $N_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega)\diagdown\{0\} : \langle K'_\lambda(u), u\rangle = 0\}$. Então temos os seguintes resultados.

Teorema 2.1. *Suponhamos que $\lambda > 0$. Então a equação (R) tem uma solução não trivial não negativa v_λ com $K_\lambda(v_\lambda) = \beta_\lambda < 0$.*

Demonstração: Primeiramente, precisamos mostrar que K_λ é limitado inferiormente em N_λ e $\beta_\lambda < 0$. Então para $u \in N_\lambda$

$$\|u\|_{H^1}^2 = \lambda \int_\Omega f|u|^q \, dx \leq \lambda \|f\|_{L^{p^*}} S_p^q \|u\|_{H^1}^q,$$

onde $p^* = \frac{p}{p-q}$. Isso implica

$$\|u\|_{H^1} \leq (\lambda \|f\|_{L^{p^*}} S_p^q)^{\frac{1}{2-q}}. \tag{2.1}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} K_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u|^q \, dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{1}{q}\|u\|_{H^1}^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\left(\lambda \|f\|_{L^{p^*}} S_p^q\right)^{\frac{1}{2-q}}. \end{aligned}$$

para todo $u \in N_\lambda$ e $\beta_\lambda < 0$, portanto K_λ é limitado inferiormente em N_λ, logo β_λ está bem definido. Seja (v_n) a sequência minimizante para K_λ em N_λ, por (2.1) temos que (v_n) é limitada e sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço de Banach reflexivo então existe uma subsequência $\{v_n\}$ e v_λ em $H_0^1(\Omega)$ tal que $v_n \rightharpoonup v_\lambda$ em $H_0^1(\Omega)$ e por imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ temos que $v_n \to v_\lambda$ em $L^q(\Omega)$.

Daí,

1. $v_n(x) \to v_\lambda(x)$ q.t.p em Ω
2. $|v_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω onde $g \in L^q(\Omega)$.

Da continuidade da função f temos

$$f(x)|v_n(x)|^q \to f(x)|v_\lambda(x)|^q \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Além disso,

$$\left|f(x)|v_n(x)|^q\right| = |f(x)||v_n(x)|^q \leq \underbrace{|f(x)|}_{\in L^{\frac{p}{p-q}}}\underbrace{|g(x)|^q}_{\in L^{\frac{p}{q}}} \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver apêndice, Teorema A.2, pag 46.) temos

$$\int_\Omega f|v_n|^q\,dx \longrightarrow \int_\Omega f|v_\lambda|^q\,dx.$$

Como $(v_n) \subset N_\lambda$ então $\|v_n\|^2 = \lambda \displaystyle\int_\Omega f|v_n|^q\,dx$ e, portanto,

$$\int_\Omega f|v_\lambda|^q\,dx \geq 0.$$

Afirmação: $\displaystyle\int_\Omega f|v_\lambda|^q\,dx > 0.$

Do contrário, teríamos

$$\int_\Omega f|v_\lambda|^q\,dx = 0 \;\text{ e }\; \int_\Omega f|v_n|^q\,dx \longrightarrow 0.$$

Assim, $\|v_n\|^2 \longrightarrow 0$ e, portanto,

$$K_\lambda(v_n) = \frac{1}{2}\|v_n\|^2_{H^1} - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|v_n|^q\,dx \longrightarrow 0$$

quando $n \longrightarrow 0$, isto contradiz $K_\lambda(v_n) \longrightarrow \beta_\lambda < 0$.

Então,

$$\int_\Omega f|v_\lambda|^q\,dx > 0.$$

Em particular, $v_\lambda \not\equiv 0$.

Agora provaremos que $v_n \longrightarrow v_\lambda$ em $H^1_0(\Omega)$. Suponha o contrário, temos $\|v_\lambda\|_{H^1} < \liminf\limits_{n\to\infty} \|v_n\|_{H^1}$ e então

$$\|v_\lambda\|^2_{H^1} - \lambda\int_\Omega f|v_\lambda|^q\,dx < \liminf_{n\to\infty}(\|v_n\|^2_{H^1} - \lambda\int_\Omega f|v_n|^q\,dx) = 0.$$

Desde que $\lambda \int_\Omega f|v_\lambda|^q\,dx > 0$, pelo Teorema do Valor Intermediário existe um único $t_0 \neq 1$ tal que $t_0 v_\lambda \in N_\lambda$. O que nos dá

$$t_0 v_n \rightharpoonup t_0 v_\lambda \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Além disso,

$$K_\lambda(t_0 v_\lambda) < K_\lambda(v_\lambda) < \lim_{n\to\infty} K_\lambda(v_n) = \beta_\lambda,$$

o que é uma contradição, pois β_λ é ínfimo de $K_\lambda(u)$ com $u \in N_\lambda$. Consequentemente $v_n \to v_\lambda$ em $H_0^1(\Omega)$. Isso implica que $v_\lambda \in N_\lambda$ e

$$K_\lambda(v_n) \to K_\lambda(v_\lambda) = \beta_\lambda \text{ quando } n \to \infty.$$

Como, pelas propriedade de $H^1(\Omega)$, $K_\lambda(v_\lambda) = K_\lambda(\|v_\lambda\|)$ e $\|v_\lambda\| \in N_\lambda$, sem perda de generalidade, podemos assumir que v_λ é uma solução não trivial não negativa da equação (R).

$\square$

Temos então o seguinte resultado.

Lema 2.1. *(i) $\alpha_\lambda \leq \alpha_\lambda^+ \leq \beta_\lambda < 0$;*

(ii) J_λ é coersivo e limitado inferiormente em M_λ para todo $\lambda \in (0, \frac{p-2}{p-q}]$.

Demonstração: (i) Seja v_λ a solução positiva do problema (R) tal que $K_\lambda(v_\lambda) = \beta_\lambda$. Desde que $\underbrace{v_\lambda \in C^2(\overline{\Omega})}_{\in H_0^1(\Omega)}$ temos $\int_{\partial\Omega} g|v_\lambda|^p\,ds = 0$ (pois $v_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ e $u = 0$ em $\partial\Omega$).

Provemos que $v_\lambda \in M_\lambda^+$, ou seja, $v_\lambda \in M_\lambda$ e $\langle \psi_\lambda'(v_\lambda), v_\lambda\rangle > 0$. De fato,

$\langle J_\lambda'(v_\lambda), v_\lambda\rangle = \|v_\lambda\|_{H^1}^2 - \lambda\int_\Omega f|v_\lambda|^q\,dx$ e como $v_\lambda \in N_\lambda$, temos $\underbrace{\|v_\lambda\|_{H^1}^2 = \lambda \displaystyle\int_\Omega f|v_\lambda|^q\,dx}_{(*)}$, então $\langle J_\lambda'(v_\lambda), v_\lambda\rangle = 0$, portanto $v_\lambda \in M_\lambda$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\lambda'(v_\lambda), v_\lambda\rangle &= 2\|v_\lambda\|_{H^1}^2 - q\lambda\int_\Omega f|v_\lambda|^q\,dx \\
&= 2\|v_\lambda\|_{H^1}^2 - q\|v_\lambda\|_{H^1}^2 \text{ (por}(*)) \\
&= \underbrace{(2-q)}_{>0}\|v_\lambda\|_{H^1}^2 > 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $v_\lambda \in M_\lambda^+$.

Isso implica

$$J_\lambda(v_\lambda) = \frac{1}{2}\|v_\lambda\|_{H^1}^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|v_\lambda|^q\,dx = \beta_\lambda < 0$$

e então $\alpha_\lambda \leq \alpha_\lambda^+ \leq \beta_\lambda$.

(ii) Para $u \in M_\lambda$, temos $\|u\|_{H^1}^2 = \lambda\int_\Omega f|u|^q\,dx + \int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds$, ou seja, $\|u\|_{H^1}^2 - \lambda\int_\Omega f|u|^q\,dx = \int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds$. Então, pelas desigualdade de Hölder e Young, temos

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u|^q\,dx - \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds \\
&= \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u|^q\,dx - \frac{1}{p}\|u\|_{H^1}^2 + \frac{\lambda}{p}\int_\Omega f|u|^q\,dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u\|_{H^1}^2 - \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{\lambda}{p}\right)\int_\Omega f|u|^q\,dx \\
&= \left(\frac{p-2}{2p}\right)\|u\|_{H^1}^2 - \lambda\left(\frac{p-q}{pq}\right)\int_\Omega f|u|^q\,dx \\
&\geq \frac{p-2}{2p}\|u\|_{H^1}^2 - \lambda\left(\frac{p-q}{pq}\right)\|f\|_{L^{p^*}} S_p^q \|u\|_{H^1}^q \\
&\geq \left[\frac{p-2}{2p} - \lambda\left(\frac{p-q}{2p}\right)\right]\|u\|_{H^1}^2 - \lambda\left(\frac{(p-q)(2-q)}{2pq}\right)(\|f\|_L^{p*} \cdot S_p^q)^{\frac{2}{2-q}} \\
&= \frac{1}{2p}[(p-2) - \lambda(p-q)]\|u\|_{H^1}^2 - \lambda\left(\frac{(p-q)(2-q)}{2pq}\right)(\|f\|_{L^{p*}} \cdot S_p^q)^{\frac{2}{2-q}}.
\end{aligned}$$

Assim, se $\|u\| \to \infty$, temos $J_\lambda(u) \to \infty$, ou seja, J_λ é coersivo em M_λ e limitado inferiormente pois

$$J_\lambda(u) \geq -\lambda\left(\frac{(p-q)(2-q)}{2pq}\right)(\|f\|_{L^{p*}} \cdot S_p^q)^{\frac{2}{2-q}},$$

para todo $\lambda \in (0, \frac{p-2}{p-q}]$.

$\square$

Capítulo 3

Solução para o Problema (P)

Neste capítulo, demonstraremos o Teorema 0.1 que é objetivo geral deste trabalho e assim chegar a existência da solução para o problema estudado, mas para isso faremos uso a idéia de Ni-Takagi [16], para obter alguns resultados importantes.

Lema 3.1. *Para cada $u \in M_\lambda$, existe $\epsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi : B(0,\epsilon) \subset H^1(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ tal que $\xi(0) = 1$, a função $\xi(v)(u-v) \in M_\lambda$ e*

$$\langle \xi'(0), v\rangle = \frac{2\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda q \int_\Omega f|u|^{q-2}uvdx - p\int_{\partial\Omega} g|u|^{p-2}uvds}{(2-q)\|u\|_{H^1}^2 - (p-q)\int_{\partial\Omega} g|u|^p ds}, \tag{3.1}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$.

Demonstração: Para todo $u \in M_\lambda$, defina a função $F_u : \mathbb{R} \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} F_u(\xi, w) &= \langle J'_\lambda(\xi(u-w)), \xi(u-w)\rangle \\ &= \xi^2 \int_\Omega |\nabla(u-w)|^2 + (u-w)^2\, dx - \xi^q \lambda \int_\Omega f|u-w|^q\, dx - \xi^p \int_{\partial\Omega} g|u-w|^p\, ds, \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} F_u(1,0) &= \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, dx - \lambda \int_\Omega f|u|^q\, dx - \int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds \\ &= \|u\|_{H^1}^2 - \lambda \int_\Omega f|u|^q\, dx - \int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds = \langle J'(u), u\rangle = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\xi}F_u(1,0) &= 2\|u\|_{H^1}^2 - \lambda q\int_\Omega f|u|^q\,dx - p\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds \\
&= 2\|u\|_{H^1}^2 - q\|u\|_{H^1}^2 + q\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds - p\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds \quad (\text{por } (1.9)) \\
&= \underbrace{(2-q)}_{>0}\|u\|_{H^1}^2 - \underbrace{(p-q)}_{>0}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds \neq 0.
\end{aligned}$$

De acordo com o Teorema da Função Implícita (ver Apêndice, Teorema A.5, pag 51), existe $\epsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi : B(0;\epsilon) \subset H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que $\xi(0) = 1$,

$$\langle \xi'(0), v\rangle = \frac{2\int_\Omega \nabla u\nabla v dx - \lambda q\int_\Omega f|u|^{q-2}uvdx - p\int_{\partial\Omega} g|u|^{p-2}uvds}{(2-q)\|u\|_{H^1}^2 - (p-q)\int_{\partial\Omega} g|u|^p ds}$$

e

$$F_u(\xi(v), v) = 0, \text{ para todo } v \in B(0;\epsilon)$$

o que é equivalente a

$$\langle J'_\lambda(\xi(v)(u-v)), \xi(v)(u-v)\rangle = 0, \text{ para todo } v \in B(0;\epsilon),$$

isto é, $\xi(v)(u-v) \in M_\lambda$.

$\square$

Lema 3.2. *Para cada $u \in M_\lambda^-$ existe $\epsilon > 0$ e uma função diferençiável $\xi^- : B(0;\epsilon) \subset H^1(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ tal que $\xi^-(0) = 1$, a função $\xi^-(v)(u-v) \in M_\lambda^-$ e*

$$\langle (\xi^-)'(0), v\rangle = \frac{2\int_\Omega \nabla u\nabla v dx - \lambda q\int_\Omega f|u|^{q-2}uvdx - p\int_{\partial\Omega} g|u|^{p-2}uvds}{(2-q)\|u\|_{H^1}^2 - (p-q)\int_{\partial\Omega} g|u|^p ds}, \tag{3.2}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$.

Demonstração: Usando argumentos similares ao Lema 3.1 existe $\epsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi^- : B(0;\epsilon) \subset H^1(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ tal que $\xi^-(0) = 1$ e $\xi^-(v)(u-v) \in M_\lambda^-$ para todo $v \in H^1(\Omega)$. Como $u \in M_\lambda^-$ temos

$$\varphi(u) = \langle \psi'_\lambda(u), u\rangle = (2-q)\|u\|_{H^1}^2 - (p-q)\int_\partial g|u|^p\,ds < 0.$$

Desde que $\varphi \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ e $\varphi(u) < 0$ então existe uma vizinhança de u em $H^1(\Omega)$ tal que

$$\varphi(x) < 0, \forall x \in B_\delta(u).$$

Vamos mostrar que $\xi^-(v)(u-v) \in B_\delta(u)$.

De fato, como ξ^- é contínua em 0 para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\xi^-(v)| - 1 \leq |\xi^-(v) - \underbrace{\xi^-(0)}_{=1}| < \epsilon,$$

sempre que $|v| < \delta$.

Note que

$$\begin{aligned} \|\xi^-(v)(u-v) - u\| &= \| -\xi^-(v)v + (\xi^-(v) - 1)u\| \\ &\leq |\xi^-(v)| \underbrace{\|v\|}_{\in B_\epsilon(0)} + |\xi^-(v) - 1| \|u\| \\ &< (\epsilon + 1) \cdot \epsilon + \epsilon \|u\| < \delta, \end{aligned}$$

Pois basta tomar $\epsilon > 0$ pequeno.

Assim, $\xi^-(v)(u-v) \in B_\delta(u)$ e, portanto,

$$\phi(\xi^-(v)(u-v)) = (2-q)\|\xi^-(v)(u-v)\|^2_{H^1} - (p-q)\int_{\partial\Omega} g|\xi^-(v)(u-v)|^p\, ds < 0,$$

se ϵ é suficientemente pequeno. Logo, $\xi^-(v)(u-v) \in M_\lambda^-$.

3.1 Existência de minimizantes para J_λ

Proposição 3.1. *Seja* $\lambda_0 = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \frac{p-2}{p-q}\}$. *Então para* $\lambda \in (0, \lambda_0)$:

(*i*) *Existe uma sequência minimizante* $(u_n) \subset M_\lambda$ *tal que*

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) &= \alpha_\lambda + o(1), \\ J'_\lambda(u_n) &= o(1) \ \ em\ H^*(\Omega). \end{aligned}$$

(*ii*) *Existe uma sequência minimizante* $(u_n) \subset M_\lambda^-$ *tal que*

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) &= \alpha_\lambda^- + o(1), \\ J'_\lambda(u_n) &= o(1) \ \ em\ H^*(\Omega). \end{aligned}$$

Na demonstração da proposição anterior vamos precisar do seguinte Teorema:

Teorema 3.1. *(Princípio Variacional de Ekeland): Sejam X um espaço métrico completo e $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Sejam $\epsilon > 0$, $\lambda > 0$ dados e seja $u \in X$ tal que*

$$\phi(u) \leq \inf_X \phi + \epsilon.$$

Então existe $v_\epsilon \in X$ tal que

(a) $\phi(v_\epsilon) \leq \phi(u)$

(b) $d(u, v_\epsilon) \leq \dfrac{1}{\lambda}$

(c) *Para cada $w \neq v_\epsilon$ em X,*

$$\phi(v_\epsilon) < \phi(w) + \epsilon\lambda d(v_\epsilon, w).$$

Demonstração da Proposição 3.1:(i) Considere $J_\lambda : M_\lambda \to \mathbb{R}$. Temos $J_\lambda \in C^1(M_\lambda, \mathbb{R})$ e, portanto, J_λ é semicontínuo inferiormente. Além disso, segue do Lema 2.1 que J_λ é limitado inferiormente em M_λ.

Sejam $\epsilon = \dfrac{1}{n} > 0$ e $\lambda = 1 > 0$. Desde que $\alpha_\lambda = \inf\limits_{u \in M_\lambda} J_\lambda(u)$ então existe $u \in M_\lambda$, tal que

$$J_\lambda(u) < \alpha_\lambda + \frac{1}{n}. \tag{3.3}$$

Assim, pelo Princípio Variacional de Ekeland para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in M_\lambda$, tal que

(a) $J_\lambda(u_n) \leq J_\lambda(u)$

(b) $d(u_n, u) \leq 1$

(c) $J_\lambda(u_n) < J_\lambda(w) + \dfrac{1}{n}\|u_n - w\|_{H^1}$, $\forall w \in M_\lambda$ com $u_n \neq w$.

De (a) e (3.3) obtemos

$$\alpha_\lambda \leq J_\lambda(u_n) < \alpha_\lambda + \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

Passando ao limite em (3.4) com $n \to \infty$ concluímos

$$J_\lambda(u_n) \to \alpha_\lambda.$$

De (c) temos

$$J_\lambda(u_n) < J_\lambda(w) + \frac{1}{n}\|w - u_n\|_{H^1}, \text{ para cada } w \in M_\lambda \tag{3.5}$$

Como $(u_n) \subset M_\lambda$

$$\begin{aligned}
\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle &= 0 \\
\|u_n\|^2_{H^1} &= \lambda \int_\Omega f|u_n|^q\,dx + \int_{\partial\Omega} g|u_n|^p\,ds, \\
&\Rightarrow \int_{\partial\Omega} g|u_n|^p\,ds = \|u_n\|^2_{H^1} - \lambda \int_\Omega f|u_n|^q\,dx
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H^1} - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u_n|^q\,dx - \frac{\lambda}{p}\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p\,ds \\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H^1} - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u_n|^q\,dx - \frac{\lambda}{p}\|u_n\|^2_{H^1} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u_n|^q\,dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{p}\right)\|u_n\|^2_{H^1} - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega f|u_n|^q\,dx \\
&< \alpha_\lambda + \frac{1}{n} \quad \text{(por (3.4))} \\
&< \frac{\beta_\lambda}{2} \quad \text{(pelo lema 2.1(i).)},
\end{aligned}$$

para n suficientemente grande.

Logo,

$$\begin{aligned}
0 < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2_{H^1} < \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\lambda \int_\Omega f|u_n|^q\,dx + \frac{\beta_\lambda}{2} \\
&= \frac{p-q}{pq}\cdot\lambda\int_\Omega f|u_n|^q\,dx + \frac{\beta_\lambda}{2} \\
&= \frac{2(p-q)\lambda\int_\Omega f|u_n|^q\,dx + \beta_\lambda qp}{2pq}.
\end{aligned}$$

Daí como $2pq > 0$ segue-se

$$\begin{aligned}
2(p-q)\lambda \int_\Omega f|u_n|^q\,dx + \beta_\lambda qp &> 0 \\
\int_\Omega f|u_n|^q\,dx &> \frac{-\beta_\lambda qp}{2(p-q)\lambda} > 0
\end{aligned}$$

pois $\beta_\lambda < 0$.

Assim temos, utilizando Hölder e imersão contínua

$$0 < \frac{-\beta_\lambda qp}{2(p-q)\lambda} < \int_\Omega f|u_n|^q\,dx \leq \|f\|_{L^{p^*}} S_p^q \|u_n\|_{H^1}^q \tag{3.6}$$

e, consequentemente, $u_n \neq 0$.

De (3.6) temos

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{H^1}^q &> \frac{-\frac{pq\beta_\lambda}{2_\lambda(p-q)}}{\|f\|_{L^{p^*}} S_p^q} = -\frac{pq\beta_\lambda}{2_\lambda(p-q)} \cdot \frac{1}{\|f\|_{L^{p^*}} S_p^q} \\
\|u_n\|_{H^1}^q &> -\frac{pq\beta_\lambda}{2_\lambda(p-q)} \|f\|_{L^{p^*}}^{-1} \cdot S_p^{-q} \\
\|u_n\|_{H^1}^q &> \left(\frac{-pq\beta_\lambda \|f\|_{L^{p^*}}^{-1} S_p^{-q}}{2\lambda(p-q)}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

e usando Hölder (ver apêndice, Teorema A.1, pag 46.)

$$\|u_n\|_{H^1} < \left[\frac{2(p-q)}{(p-2)q} \|f\|_{L^{p^*}} S_p^q\right]^{\frac{1}{2-q}}. \tag{3.8}$$

Agora, vamos mostrar que

$$\|J'_\lambda(u_n)\|_{H^1} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Aplicando o Lema 3.1 com u_n obtemos as funções $\xi_n : B(0,\epsilon_n) \to \mathbb{R}^+$ para algum $\epsilon_n > 0$ tal que

$$\xi_n(w)(u_n - w) \in M_\lambda,\ \forall w \in H^1(\Omega).$$

Seja $u \in H^1(\Omega)$ com $u \not\equiv 0$ e seja $w_\rho = \dfrac{\rho u}{\|u\|_{H^1}}$ com $0 < \rho < \epsilon_n$.

Assim, $w_\rho \in B(0,\epsilon_n)$.

Note que

$$\frac{\rho u}{\|u\|_{H^1}} \in B(0,\epsilon_n) \Leftrightarrow \|\frac{\rho u}{\|u\|_{H^1}}\| < \epsilon_n$$
$$\Leftrightarrow \rho\frac{\|u\|_{H^1}}{\|u\|_{H^1}} < \epsilon_n$$
$$\Leftrightarrow \rho < \epsilon_n \ \text{(escolha de } \rho).$$

Façamos $\eta_\rho = \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho)$. Assim,

$$\eta_\rho = \xi_n \underbrace{\left(\frac{\rho u}{\|u\|_{H^1}}\right)}_{\in B(0,\epsilon_n)\subset H^1(\Omega)} \left(u_n - \frac{\rho u}{\|u\|_{H^1}}\right) \in M_\lambda.$$

Com $\|u\|_{H^1} \in B(0,\epsilon_n) \subset H^1(\Omega)$.

De (3.5) como $\eta_\rho \in M_\lambda$ temos

$$J_\lambda(\eta_\rho) - J_\lambda(u_n) > -\frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\|_{H^1},$$

e pelo Teorema do Valor Médio, segue

$$\langle J'_\lambda(u_n), \eta_\rho - u_n\rangle + o(\|\eta_\rho - u_n\|_{H^1}) \geq -\frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\|_{H^1}.$$

Então,

$$\langle J'_\lambda(u_n), -w_\rho\rangle + (\xi_n(w_\rho)-1)\langle J'_\lambda(u_n), (u_n - w_\rho)\rangle \geq -\frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\|_{H^1} + o(\|\eta_\rho - u_n\|_{H^1}). \quad (3.9)$$

Como $\eta_\rho = \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) \in M_\lambda$, então

$$\langle J'_\lambda(\xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho)), \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho)\rangle = 0$$

ou seja,

$$\|\xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho)\|^2 - \lambda\int_\Omega f|\xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho)|^q\,dx - \int_{\partial\Omega} g|\xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho)|^p\,ds = 0,$$

$$(\xi_n(w_\rho))^2\|u_n-w_\rho\|^2-\lambda\xi_n(w_\rho)^q\int_\Omega f|u_n-w_\rho|^q\,dx-\xi_n^q(w_\rho)\int_{\partial\Omega} g|u_n-w_\rho|^p\,ds=0\ (\div\,\xi_n(w_\rho))$$

$$\xi_n(w_\rho)\|u_n-w_\rho\|^2-\lambda\xi_n(w_\rho)^{q-1}\int_\Omega f|u_n-w_\rho|^q\,dx-\xi_n^{p-1}(w_\rho)\int_{\partial\Omega} g|u_n-w_\rho|^p\,ds=0. \quad (3.10)$$

Mas, note que

$$\begin{aligned}
J'_\lambda(\eta_\rho)(u_n-w_\rho) &= \xi_n(\eta_\rho)\int_\Omega \|\nabla(u_n-w_\rho)\|^2\,dx+\xi_n(w_\rho)\int_\Omega |u_n-w_\rho|^2\,dx \\
&- \lambda(\xi_n(w_\rho))^{q-2}\xi_n(w_\rho)\int_\Omega f|u_n-w_\rho|^{q-2}|u_n-w_\rho|^2\,dx \\
&- (\xi_n(w_\rho))^{p-2}\xi_n(w_\rho)\int_{\partial\Omega} g|u_n-w_\rho|^{p-2}|u_n-w_\rho|^2\,ds \\
J'_\lambda(\eta_\rho)(u_n-w_\rho) &= \xi_n(w_\rho)\|u_n-w_\rho\|^2_{H^1}-\lambda(\xi_n(w_\rho))^{q-1}\int_\Omega f|u_n-w_\rho|^q\,dx \\
&- (\xi_n(w_\rho))^{p-1}\int_{\partial\Omega} g|u_n-w_\rho|^p\,ds.
\end{aligned}$$

Por (3.10) segue-se que $J'_\lambda(\eta_\rho)(u_n-w_\rho)=0$ e, portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\langle J'_\lambda(u_n),(u_n-w_\rho)\rangle &= \langle J'_\lambda(u_n),(u_n-w_\rho)\rangle-\langle J'_\lambda(\eta_\rho),(u_n-w_\rho)\rangle \\
&= \langle J'_\lambda(u_n)-J'_\lambda(\eta_\rho),(u_n-w_\rho)\rangle.
\end{aligned}$$

De (3.9) temos

$$\begin{aligned}
&-\rho\langle J'_\lambda(u_n),\frac{u}{\|u\|_{H^1}}\rangle+(\xi_n(w_\rho)-1)\langle J'_\lambda(u_n)-J'_\lambda(\eta_\rho),(u_n-w_\rho)\rangle \\
&\qquad \geq \frac{-1}{n}\|\eta_\rho-u_n\|_{H^1}+o(\|\eta_\rho-u_n\|_{H^1})\ (\div\,(-\rho)),
\end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}
\langle J'_\lambda(u_n),\frac{u}{\|u\|_{H^1}}\rangle &\leq \frac{\|\eta_\rho-u_n\|_{H^1}}{\eta_\rho}+\frac{o\|\eta_\rho-u_n\|_{H^1}}{\rho} \\
&+ \frac{(\xi_n(w_\rho)-1)}{\rho}\langle J'_\lambda(u_n)-J'_\lambda(\eta_\rho),(u_n-w_\rho)\rangle \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\|\eta_\rho - u_n\|_{H^1} &= \|\xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) - u_n\|_{H^1}\\
&= \|\xi_n(w_\rho)u_n - \xi_n(w_\rho)w_\rho - u_n\|_{H^1}\\
&= \|u_n(\xi_n(w_\rho) - 1) - \xi_n(w_\rho)w_\rho\|_{H^1}\\
&\leq |\xi_n(w_\rho) - 1|\|u_n\|_{H^1} + \|\xi_n(w_\rho)\frac{\rho u}{\|u_n\|_{H^1}}\|_{H^1}\\
\|\eta_\rho - u_n\|_{H^1} &\leq \rho|\xi_n(w_\rho)| + |\xi_n(w_\rho) - 1|\|u_n\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
|\xi_n(w_\rho) - 1| &= |\xi_n(w_\rho) - \xi_n(0)|\\
&\leq \|\xi'(u_\rho)\|\|w_\rho\| \quad \text{onde } u_\rho \in [0, w_\rho]\\
&= \|\xi'(u_\rho)\| \cdot \rho,
\end{aligned}$$

implicando que

$$\frac{|\xi_n(w_\rho) - 1|}{\rho} \leq \|\xi'(u_\rho)\|$$

e, portanto,

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{|\xi_n(w_\rho) - 1|}{\rho} \leq \|\xi'(0)\|.$$

Como $\|\eta_\rho - u_n\|_{H^1} \leq \rho|\xi_n(w_\rho)| + |\xi_n(w_\rho) - 1|\|u_n\|_{H^1}$ então $\dfrac{\|\eta_\rho - u_n\|_{H^1}}{\eta\rho} \leq \dfrac{1}{n}|\xi_n(w_\rho)| + \dfrac{|\xi_n(w_\rho) - 1|}{\eta\rho}\|u_n\|_{H^1}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0} \frac{\|\eta_\rho - u_n\|_{H^1}}{\eta\rho} &\leq \frac{1}{n}\underbrace{|\xi_n(0)|}_{=1} + \frac{1}{n}\|\xi_n'(0)\|\|u_n\|_{H^1}\\
&\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\|\xi_n'(0)\| \cdot c \quad \text{(de (3.8))}\\
&= \frac{1}{n}(1 + c\|\xi_n'(0)\|)\\
&\leq \frac{\overline{c}}{n}(1 + c\|\xi_n'(0)\|),
\end{aligned}$$

onde $\overline{c} \geq \max\{1, c\}$.

Passando ao limite de $\rho \to 0$ em (3.11) com n fixado temos

$$\langle J'_\lambda(u_n), \frac{u}{\|u\|_{H^1}} \rangle \leq \frac{\overline{c}}{n}(1 + \|\xi'_n(0)\|).$$

Mostraremos agora que $\|\xi'_n(0)\|$ é uniformemente limitada em n.

Por (3.1), (3.8) e a desigualdade de Hölder temos

$$\langle \xi'_n(0), v \rangle \leq \frac{b\|v\|_{H^1}}{|(2-q)\|u_n\|^2_{H^1} - (p-q)\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds|},$$

para algum $b > 0$.

Necessitamos somente mostrar que

$$\left|(2-q)\|u_n\|^2_{H^1} - (p-q)\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds\right| > c, \tag{3.12}$$

para algum $c > 0$ e n suficientemente grande.

Vamos argumentar por contradição. Assuma que exista uma subsequência (u_n) temos

$$(2-q)\|u_n\|^2_{H^1} - (p-q)\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds = o(1). \tag{3.13}$$

Por (3.7) temos

$$\|u_n\|^2_{H^1} > \left[\frac{-pq}{2\lambda(p-q)}\beta_\lambda S_p^{-q}\|f\|^{-1}_{L^{p^*}}\right]^{\frac{2}{q}}$$

e, portanto,

$$(2-q)\|u_n\|^2_{H^1} > (2-q)\left[\frac{-pq}{2\lambda(p-q)}\beta_\lambda S_p^{-q}\|f\|^{-1}_{L^{p^*}}\right]^{\frac{2}{q}}. \tag{3.14}$$

Como

$$(2-q)\|u_n\|^2_{H^1} = (p-q)\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \; ds + o(1),$$

então de (3.14)

$$(2-q)\left[-\frac{pq}{2\lambda(p-q)}\beta_\lambda S_p^{-q}\|f\|^{-1}_{L^{p^*}}\right]^{\frac{2}{q}} < (p-q)\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds + o(1)$$

$$\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds + o(1) > \frac{(2-q)}{(p-q)}\left[-\frac{pq}{2\lambda(p-q)}\beta_\lambda S_p^{-q}\|f\|^{-1}_{L^{p^*}}\right]^{\frac{2}{q}}$$

Logo, existe $d > 0$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds \geq d \quad \text{para n} \quad \text{suficientemente grande.} \tag{3.15}$$

Como $(u_n) \subset M_\lambda$ temos

$$\lambda \int_\Omega f|u_n|^q \, dx = \|u_n\|_{H^1}^2 - \int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds \tag{3.16}$$

e de (3.13) temos

$$\|u_n\|_{H^1}^2 = \left(\frac{p-q}{2-q}\right) \int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds + o(1).$$

Substituindo a igualdade acima em (3.16) segue

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega f|u_n|^q \, dx &= \left(\frac{p-q}{2-q}\right) \int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds - \int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds + o(1) \\ &= \left(\frac{p-2}{2-q}\right) \int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds + o(1) \\ \|u_n\|_{H^1} &\leq \left[\lambda \left(\frac{p-q}{p-2}\right) \|f\|_{L^{p*}} S_p^q\right]^{\frac{1}{2-q}} + o(1). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &= K(p,q) \left(\frac{\|u_n\|_{H^1}^{2(p-1)}}{\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds}\right)^{\frac{1}{p-2}} - \lambda \int_\Omega f|u_n|^q \, dx \\ &= \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{p-2}{2-q}\right) \left(\frac{(\frac{p-q}{2-q})^{p-1} (\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds)^{p-1}}{\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds}\right)^{\frac{1}{p-2}} - \left(\frac{p-2}{2-q}\right) \int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds + o(1) \\ &= o(1). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Portanto, por (3.15), (3.16), $\lambda \in (0, \lambda_0)$ e pelas desigualdades de Hölder e do Traço

$$\begin{aligned} I(u_n) &\geq K(p,q) \left(\frac{\|u_n\|_{H^1}^{2(p-1)}}{\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p \, ds}\right)^{\frac{1}{p-2}} - \lambda S_p^q \|f\|_{L^{p*}} \|u_n\|_{H^1}^q \\ &\geq \|u_n\|_{H^1}^q \left(K(p,q) \left(\frac{\|u_n\|_{H^1}^{2(p-1)}}{C_p^p \|u_n\|_{H^1}^{p+q(p-2)}}\right)^{\frac{1}{p-2}} - \lambda S_p^q \|f\|_{L^{P^*}} \right) \\ &\geq \|u_n\|_{H^1}^q \{ K(p,q) C_p^{\frac{p}{2-p}} \lambda^{\frac{1-q}{2-q}} \left[\left(\frac{p-q}{p-2}\right) \|f\|_{L^{p*}} S_p^q\right]^{\frac{1-q}{2-q}} - \lambda S_p^q \|f\|_{L^{p*}}^2 \} > d_0, \end{aligned}$$

para algum $d_0 > 0$ e n suficientemente grande o que contradiz (3.18)

Assim, temos

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(u_n), \frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1}}\rangle &\leq \frac{c}{n}, \\ \sup_{\|\frac{u_n}{\|u_n\|}\|=1} \langle J'_\lambda(u_n), \frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1}}\rangle &\leq \frac{c}{n}, \end{aligned}$$

$$\|J'_\lambda(u_n)\| \to 0 \Rightarrow J'_\lambda(u_n) \to 0.$$

Mostramos assim que (u_n) é uma sequência $(PS)_{\alpha_\lambda}$ para J_λ.

(ii) A demonstração segue de forma análoga utilizando o lema 3.2.

□

Agora vamos estabelecer a existência de um mínimo local para J_λ em M^+_λ.

Teorema 3.2. *Seja $\lambda_0 > 0$ como na Proposição 3.1, então para $\lambda \in (0, \lambda_0)$ o funcional J_λ possui um minimizador u_0^+ em M^+_λ e satisfaz*

(i) $J_\lambda(u_0^+) = \alpha_\lambda = \alpha^+_\lambda$;

(ii) u_0^+ *é uma solução não trivial não negativa do problema*(P);

(iii) $J_\lambda(u_0^+) \to 0$ *quando* $\lambda \to 0$.

Demonstração: Seja $(u_n) \subset M_\lambda$ a sequência minimizante para J_λ em M_λ tal que

$$J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda + o(1) \text{ e } J'(u_n) = o(1) \text{ em } H^*(\Omega).$$

Temos que (u_n) é limitada, pois do contrário existiria uma subsequência (u_n) tal que $\|u_n\| \to \infty$ e desde que J_λ é coersivo teríamos $J_\lambda(u_n) \to +\infty$ o que contradiz $J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda + o(1)$. Então pelo Lema 2.1 e pelo Teorema de Imersão Compacta (ver Apêndice, Teorema A.10, pag 53.), existe uma subsequência $\{u_n\}$ e $u_0^+ \in H^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0^+ \text{ em } H^1(\Omega),\ u_n \to u_0^+ \text{ em } L^p(\partial\Omega)$$

e

$$u_n \to u_0^+ \text{ em } L^q(\Omega). \tag{3.19}$$

Primeiro, provemos que $\int_\Omega f(x)\|u_0^+\|^q\,dx \neq 0$. Suponhamos de outra forma, por (3.19) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue podemos concluir que

$$\int_\Omega f|u_n|^q\,dx \to \int_\Omega f|u_0^+|^q\,dx = 0 \text{ quando } n \to \infty$$

e também

$$\begin{aligned}\|u_n\|_{H^1}^2 &= \lambda\int_\Omega f|u_n|^q\,dx + \int_{\partial\Omega} g|u_n|^p\,ds\\ &= \int_{\partial\Omega} g|u_n|^p\,ds + o(1).\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}J_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|_{H^1}^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u_n|^q\,dx - \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p\,ds\\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p\,ds - \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p\,ds + o(1)\\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p\,ds + o(1)\\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_{\partial\Omega} g|u_0^+|^p\,ds \text{ quando } n \to \infty,\end{aligned}$$

isso contradiz $J_\lambda(u_n) \to \alpha_\lambda < 0$ quando $n \to \infty$. Além disso,

$$o(1) = \langle J'_\lambda(u_n), \phi\rangle = \langle J'_\lambda(u_0^+), \phi\rangle + o(1) \text{ para todo } \phi \in H^1(\Omega).$$

Logo, $u_0^+ \in M_\lambda$ é uma solução não nula do problema (P) e $J_\lambda(u_0^+) \geq \alpha_\lambda$ (pois $\alpha_\lambda = \inf\limits_{\lambda \in M_\lambda} J_\lambda(u)$). Agora provemos que $u_n \to u_0^+$ em $H^1(\Omega)$. Suponhamos de outra forma, então $\|u_0^+\|_{H^1} < \liminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_{H^1}$ e também

$$\|u_0^+\|_{H^1} - \lambda\int_\Omega f|u_0^+|^q\,dx - \int_{\partial\Omega} g|u_0^+|^p\,ds$$

$$< \liminf_{n\to\infty}(\|u_n\|_{H^1}^2 - \lambda\int_\Omega f|u_n|^q\,dx - \int_{\partial\Omega} g|u_n|^p\,ds) = 0,$$

isso contradiz $u_0^+ \in M_\lambda$. Consequentemente $u_n \to u_0^+$ em $H^1(\Omega)$ e

$$J_\lambda(u_n) \to J_\lambda(u_0^+) = \alpha_\lambda \text{ quando } n \to \infty.$$

Além disso, temos $u_0^+ \in M_\lambda^+$. De fato, se não, tem-se $u_0^+ \in M_\lambda^-$ e pelo Lema 1.4, existe um único t_0^+ e t_0^- tal que $t_0^+ u_0^+ \in M_\lambda^+$ e $t_0^- u_0^+ \in M_\lambda^-$. Em particular $t_0^+ < t_0^- = 1$. Desde que

$$\frac{d}{dt} J_\lambda(t_0^+ u_0^+) = 0 \;\text{ e }\; \frac{d^2}{dt^2} J_\lambda(t_0^+ u_0^+) > 0,$$

existe $t_0^+ < \bar{t} \leq t_0^-$ tal que $J_\lambda(t_0^+ u_0^+) < J_\lambda(\bar{t} u_0^+)$. Pelo Lema 1.4,

$$J_\lambda(t_0^+ u_0^+) < J_\lambda(\bar{t} u_0^+) \leq J_\lambda(t_0^- u_0^+) = J_\lambda(u_0^+) = \alpha_\lambda,$$

que é uma contradição. Como $J_\lambda(u_0^+) = J_\lambda(|u_0^+|)$ e $|u_0^+| \in M_\lambda^+$, pelo Lema 1.2 podemos assumir que u_0^+ é uma solução não negativa não trivial do problema (P).

Pelo lema 2.1 segue

$$0 > J_\lambda(u_0^+) \geq -\lambda \left(\frac{(p-q)(2-q)}{2pq} \right) (\|f\|_{L^{p^*}} S_p^q)^{\frac{2}{2-q}}$$

e então $J_\lambda(u_0^+) \to 0$ quando $\lambda \to 0$.

□

A seguir, vamos estabelecer a existência de um mínimo local para J_λ em M_λ^-.

Teorema 3.3. *Seja $\lambda_0 > 0$ como na Proposição 3.1. Então para $\lambda \in (0, \lambda_0)$ o funcional J_λ tem um minimizador u_0^- em M_λ^- e satisfaz*

(i) $J_\lambda(u_0^-) = \alpha_\lambda^-$;

(ii) u_0^- *é uma solução não trivial não negativa do problema* (P).

Demonstração: Pela Proposição 3.1 (ii), existe uma sequência minimizante (u_n) para J_λ em M_λ^- tal que

$$J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda^- + o(1) \;\text{ e }\; J'_\lambda(u_n) = o(1) \;\text{ em }\; H^*(\Omega).$$

Pelo Lema 2.1 e pelo Teorema de Imersão Compacta (ver Apêndice, Teorema A.10, pag 53.), existe uma subsequência $\{u_n\}$ e $u_0^- \in H^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0^- \text{ em } H^1(\Omega),$$

$$u_n \to u_0^- \text{ em } L^p(\partial\Omega),$$

$$u_n \to u_0^- \text{ em } L^q(\Omega).$$

Desde que $(2-q)\|u_n\|_{H^1}^2 - (p-q)\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p\, ds < 0$, pela desigualdade do traço de Sobolev existe $C > 0$ tal que $\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p\, ds > C$. Além disso,

$$o(1) = \langle J'_\lambda(u_n), \phi\rangle = \langle J'_\lambda(u_0^-), \phi\rangle + o(1) \text{ para todo } \phi \in H^1(\Omega)$$

e

$$\begin{aligned} &(2-q)\|u_0^-\|_{H^1}^2 - (p-q)\textstyle\int_{\partial\Omega} g|u_0^-|^p\, ds \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}((2-q)\|u_n\|_{H^1}^2 - (p-q)\int_{\partial\Omega} g|u_n|^p\, ds) \leq 0. \end{aligned}$$

Então, $u_0^- \in M_\lambda^-$ é uma solução não nula do problema (P). Agora vamos provar que $u_n \to u_0^-$ em $H^1(\Omega)$. Suponhamos de outra forma, então $\|u_0^-\|_{H^1} < \liminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_{H^1}$ e então

$$\begin{aligned} &\|u_0^-\|_{H^1}^2 - \lambda\textstyle\int_\Omega f|u_0^-|^q\, dx - \int_{\partial\Omega} g|u_0^-|^p\, ds \\ &< \liminf_{n\to\infty}(\|u_n\|_{H^1}^2 - \lambda\int_\Omega f|u_n|^q\, dx - \int_{\partial\Omega} g|u_n|^p\, ds) = 0, \end{aligned}$$

isso contradiz $u_0^- \in M_\lambda^-$. Consequentemente $u_n \to u_0^-$ em $H^1(\Omega)$. Isso implica

$$J_\lambda(u_n) \to J_\lambda(u_0^-) = \alpha_\lambda^- \text{ quando } n \to \infty.$$

Desde que $J_\lambda(u_0^-) = J_\lambda(|u_0^-|)$ e $|u_0^-| \in M_\lambda^-$, pelo Lema 1.2 podemos assumir que u_0^- é uma solução não trivial não negativa do problema (P).

□

Agora, completamos a prova do Teorema 0.1. Pelos Teoremas 3.2 e 3.3, obtemos que o problema (P) possui duas soluções não triviais não negativas u_0^+ e u_0^- tal que $u_0^+ \in M_\lambda^+$ e $u_0^- \in M_\lambda^-$. Como $M_\lambda^+ \cap M_\lambda^- = \emptyset$, isso implica que u_0^+ e u_0^- são diferentes.

Apêndice A

Funcionais Diferenciáveis

Neste capítulo mostraremos que o funcional $J_\lambda \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$.

A.1 Diferenciabilidade de funcionais

Definição A.1. *Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, diremos que I possui* **Derivada de Fréchet** *no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T \in X'$ tal que*

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - Tv}{\|v\|} = 0, \forall v \in X.$$

Definição A.2. *Se a derivada de Fréchet de I existe e é contínua em X, diremos que o funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.*

Definição A.3. *Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, diremos que I possui* **Derivada de Gateaux** *no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T_0 \in X'$ tal que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - T_0 v}{t} = 0, \forall v \in X.$$

Proposição A.1. *Se I tem derivada de Gateaux contínua em X então $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Sejam $w \in X$ e $DI(w)$ a derivada de Gateaux de I em w. Do Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$, tal que

$$\begin{aligned} |I(w+v) - I(w) - DI(w)v| &= |DI(w+\theta v)v - DI(w)v| \\ &= \|DI(W+\theta v)v - DI(w)v\|'_X \|v\| \qquad \text{(A.1)} \end{aligned}$$

Como I possui derivada de Gateaux contínua em X, então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ para qualquer $\|v\| < \delta$ temos

$$\|DI(W + \theta v)v - DI(w)v\|'_X < \epsilon.$$

Por (A.1), segue

$$|I(w + v) - I(w) - DI(w)v| < \epsilon\|v\|.$$

Assim concluímos que I possui derivada de Fréchet contínua.

$\square$

A.2 $J_\lambda \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$

Seja J_λ o funcional energia associado a (1.1) descrito no capítulo 1 como:

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1} - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u|^q\,dx - \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds.$$

Como visto no capítulo 1, J_λ está bem definido, considere $J_\lambda = \frac{1}{2}J_1(u) - J_2(u) - J_3(u)$, onde

$$\begin{aligned} J_1(u) &= \|u\|^2_{H^1}, \\ J_2(u) &= \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u|^q\,dx, \\ J_3(u) &= \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\,ds. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que J_1, J_2, e $J_3 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$.

De fato, calculando por definição a derivada de Gateaux DJ_1, temos para todo $t \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
DJ_1(u)\varphi &= \lim_{t\to 0} \frac{J_1(u+t\varphi) - J_1(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\|u+t\varphi\|_{H^1}^2 - \|u\|_{H^1}^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\langle u+t\varphi, u+t\varphi\rangle - \|u\|_{H^1}^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\|u\|_{H^1}^2 + 2t\langle u,\varphi\rangle + t^2\|\varphi\|_{H^1}^2 - \|u\|_{H^1}^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t(2t\langle u,\varphi\rangle + t\|\varphi\|_{H^1}^2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left[2\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi)\, dx + t\|\varphi\|_{H^1}^2\right] \\
&= 2\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi)\, dx.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
DJ_1(u)\varphi = 2\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi)\, dx. \tag{A.2}
$$

Mostraremos que DJ_1 é contínua. De fato, Seja $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$. Então, para cada $\varphi \in H^1(\Omega)$, com $\|\varphi\|_{H^1} \leq 1$, temos

$$
\begin{aligned}
|DJ_1(u_n)\varphi - DJ_1(u)\varphi| &= \left|2\int_\Omega (\nabla u_n \nabla \varphi + u_n\varphi)\, dx - 2\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi)\, dx\right| \\
&\leq 2\int_\Omega (|\nabla u_n \nabla \varphi - \nabla u \nabla \varphi| + |u_n\varphi - u\varphi|)\, dx \\
&= 2\int_\Omega |\nabla u_n \nabla \varphi - \nabla u \nabla \varphi|\, dx + 2\int_\Omega |u_n\varphi - u\varphi|\, dx \\
&= 2\int_\Omega |\nabla (u_n - u) \nabla \varphi|\, dx + 2\int_\Omega |(u_n - u)\varphi|\, dx \\
&\leq 2\|u_n - u\|_{H_0^1}\|\varphi\|_{H_0^1} + 2\|u_n - u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \\
&\leq 2\|u_n - u\|_{H^1}\|\varphi\|_{H^1} + 2\|u_n - u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

como $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ existe $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
|DJ_1(u_n)\varphi - DJ_1(u)\varphi| &\leq 2\|u_n - u\|_{H^1}\|\varphi\|_{H^1} + 2C\|u_n - u\|_{H^1}\|\varphi\|_{H^1} \\
&= (2+2C)\|u_n - u\|_{H^1}\|\varphi\|_{H^1} \\
&\leq (2+2C)\|u_n - u\|_{H^1}.
\end{aligned}
$$

Agora aplicando a norma em $(H^1(\Omega))'$ temos

$$\begin{aligned}\|DJ_1(u_n) - DJ_1(U)\| &:= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |DJ_1(u_n)\varphi - DJ_1(u)\varphi| \\ &\leq (2+2C)\|u_n - u\|_{H^1}.\end{aligned}$$

Logo $DJ_1(u_n) \to DJ_1(u)$ em $(H^1(\Omega))'$ quando $(H^1(\Omega))'$ quando $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$. Portanto, DJ_1 é contínuo e temos $DJ_1 = J_1'$. Assim $J_1 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ e por (A.2) temos que

$$DJ_1(u)\varphi = J_1'(u)\varphi = 2\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi)\, dx. \tag{A.3}$$

Para mostrar que $J_2 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, consideremos a seguinte função:

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(s) = \dfrac{|u + st\varphi|^q}{q}$ onde $t \in \mathbb{R}$ é tal que $0 < |t| < 1$ e $u, \varphi \in H^1(\Omega)$.

Note que,

(a) $f(1) = \dfrac{|u + t\varphi|^q}{q}$,

(b) $f(0) = \dfrac{|u|^q}{q}$,

(c) $f'(s) = |u + stv|^{q-2}(u + st\varphi)t\varphi$.

Temos que f é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\delta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) &= f'(\delta) \\ \Rightarrow \frac{|u + st\varphi|^q - |u|^q}{q} &= |u + \delta t\varphi|^{q-2}(u + \delta t\varphi)t\varphi \ \ (\div\, t) \qquad \text{(A.4)} \\ \Rightarrow \frac{|u + st\varphi|^q - |u|^q}{tq} &= |u + \delta t\varphi|^{q-2}(u + \delta t\varphi)\varphi. \qquad \text{(A.5)}\end{aligned}$$

Além disso, para cada sequência $|t_n| \to 0$ quando $n \to \infty$ temos de (A.4) que

$$\frac{|u(x) + t_n\varphi(x)|^q - |u(x)|^q}{t_n q} \to |u(x)|^{q-2}u(x)\varphi(x) \ \text{ q.t.p} \in \Omega.$$

Segue de (A.5) que

$$\left|\frac{|u+t\varphi|^q - |u|^q}{tq}\right| = |u+\delta t\varphi|^{q-1}|\varphi| \leq |u+\varphi|^{q-1}|\varphi|.$$

Desde que $H^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^q(\Omega)$ com $1 < q < 2^*$ e $L^q(\Omega)$ é um espaço vetorial, então

$$u, \varphi \in L^q(\Omega) \Rightarrow u+\varphi \in L^q(\Omega) \Rightarrow |u+\varphi|^{q-1} \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$$

e como $\dfrac{q}{q-1}$ e q são expoentes conjugados, por Hölder $|u+\varphi|^{q-1}|\varphi| \in L^1(\Omega)$. Assim pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t_n\to 0}\frac{J_2(u+t_n\varphi)-J_2(u)}{t_n} &= \lim_{t_n\to 0}\frac{\frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u+t_n\varphi|^q\,dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u|^q\,dx}{t_n}\\
&= \lambda \lim_{t_n\to 0}\int_\Omega f\left(\frac{|u+t_n\varphi|^q-|u|^q}{t_nq}\right)dx\\
&= \lambda \int_\Omega f\left(\lim_{t_n\to 0}\frac{|u+t_n\varphi|^q-|u|^q}{t_nq}\right)dx\\
&= \lambda \int_\Omega f|u|^{q-2}u\varphi\,dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$DJ_2(u)\varphi = \lambda\int_\Omega f|u|^{q-2}u\varphi\,dx. \tag{A.6}$$

Vamos mostrar agora que que DJ_2 é contínuo. De fato, seja $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ uma sequência tal que $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$. Da imersão contínua de $H^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ com $1 < q < 2*$ no caso $N \geq 3$, segue que $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$. Assim pelo Teorema de Vaimberg (ver Apêndice, Teorema A.3, pag 46.) existem $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $h \in L^q(\Omega)$ tais que:

(a) $u_{n_j}(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω;

(b) $|u_{n_j}(x)| \leq h(x)$ q.t.p em Ω.

Usando (b) e desigualdade triangular, temos

$$
\begin{aligned}
\left||u_{n_j}(x)|^{q-2}u_{n_j}(x)-|u(x)|^{q-2}u(x)\right|^{\frac{q}{q-1}} &\leq (|u_{n_j}(x)|^{q-1}+|u(x)|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}}\\
&\leq (h(x)^{q-1}+|u(x)|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}}\\
&\leq C(h(x)^q+|u(x)|^q).
\end{aligned}
$$

Como $u,h\in L^q(\Omega)$ então u^q, $h^q\in L^1(\Omega)$ e portanto $C(h(x)^q+|u(x)|^q)\in L^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$
\||u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j}-|u|^{q-2}u\|_{L^{\frac{q}{q-1}}}\to 0.
$$

Desse modo, para toda $\varphi\in H^1(\Omega)$ com $\|\varphi\|\leq 1$ temos

$$
\begin{aligned}
|DJ_2(u_{n_j})\varphi-DJ_2(u)\varphi| &= \left|\int_\Omega f|u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j}\varphi\,dx-\int_\Omega f|u|^{q-2}u\varphi\,dx\right|\\
&= \left|\int_\Omega f(|u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j}-|u|^{p-2}u)\varphi\,dx\right|\\
&\leq \|f\|_{L^\infty}\int_\Omega |\,|u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j}-|u|^{q-2}u\,||\varphi|\,dx
\end{aligned}
$$

Desde que $|u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j}-|u|^{q-2}u\in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$ e $\dfrac{q}{q-1}$ e q são expoentes conjugados, por Hölder

$$
|DJ_2(u_{n_j})\varphi-DJ_2(u)\varphi|\leq\|f\|_{L^\infty}\||u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j}-|u|^{q-2}u\|_{L^{\frac{q}{q-1}}}\|\varphi\|_{L^q}.
$$

Da imersão contínua de $H^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ com $1<q<2^*$ no caso $N\geq 3$, segue que

$$
\begin{aligned}
|DJ_2(u_{n_j})\varphi-DJ_2(u)\varphi| &\leq C\|f\|_{L^\infty}\||u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j}-|u|^{q-2}u\|_{L^{\frac{q}{q-1}}}\|\varphi\|_{L^q}\\
&\leq C\|f\|_{L^\infty}\||u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j}-|u|^{q-2}u\|_{L^{\frac{q}{q-1}}}.
\end{aligned}
$$

Aplicando a norma em $(H^1(\Omega))'$ concluímos que

$$
\begin{aligned}
\|DJ_2(u_{n_j})-DJ_2(u)\|: &= \sup_{\|\varphi\|\leq 1}|DJ_2(u_{n_j})\varphi-DJ_2(u)\varphi|\\
&\leq C\|f\|_{L^\infty}\||u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j}-|u|^{q-2}u\|_{L^{\frac{q}{q-1}}}.
\end{aligned}
$$

Logo, $DJ_2(u_{n_j}) \to DJ_2(u)$ em $(H^1(\Omega))'$ quando $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$. Assim DJ_2 é contínuo e temos $DJ_2 = J_2'$. Portanto $J_2 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ e por A.6

$$DJ_2(u)\varphi = J_2'(u)\varphi = \lambda \int_\Omega f|u|^{q-2}u\varphi\, dx. \tag{A.7}$$

Por fim, vamos calcular a derivada de Gateaux DJ_3. Analogamente ao que foi feito anteriormente, consideremos a seguinte função: $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(s) = \dfrac{|u + st\varphi|^p}{p}$ onde $t \in \mathbb{R}$ é tal que $0 < |t| < 1$ e $u, \varphi \in H^1(\Omega)$.

Note que,

(a) $f(1) = \dfrac{|u + t\varphi|^p}{p}$,

(b) $f(0) = \dfrac{|u|^p}{p}$,

(c) $f'(s) = |u + stv|^{p-2}(u + st\varphi)t\varphi$.

Como f é diferenciável em $(0,1)$ então pelo Teorema do Valor Médio existe $\delta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
f(1) - f(0) &= f'(\delta) \\
\Rightarrow \frac{|u + st\varphi|^p - |u|^p}{p} &= |u + \delta t\varphi|^{p-2}(u + \delta t\varphi)t\varphi \;\; (\div\, t) && \text{(A.8)} \\
\Rightarrow \frac{|u + st\varphi|^p - |u|^p}{tp} &= |u + \delta t\varphi|^{p-2}(u + \delta t\varphi)\varphi && \text{(A.9)}
\end{aligned}$$

Além disso, para cada sequência $|t_n| \to 0$ quando $n \to \infty$ temos de (A.8) que

$$\frac{|u(x) + t_n\varphi(x)|^p - |u(x)|^p}{t_n p} \to |u(x)|^{p-2}u(x)\varphi(x) \;\; \text{q.t.p} \in \Omega.$$

Segue de (A.9) que

$$\left|\frac{|u + t\varphi|^p - |u|^p}{tp}\right| = |u + \delta t\varphi|^{p-1}|\varphi| \leq |u + \varphi|^{p-1}|\varphi|.$$

Desde que $H^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^p(\partial\Omega)$ com $1 < p < 2^*$ e $L^p(\partial\Omega)$ é um espaço vetorial, então

$$u, \varphi \in L^p(\partial\Omega) \Rightarrow u + \varphi \in L^p(\partial\Omega) \Rightarrow |u+\varphi|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\partial\Omega)$$

e como $\dfrac{p}{p-1}$ e p são expoentes conjugados, por Hölder $|u+\varphi|^{p-1}|\varphi| \in L^1(\partial\Omega)$. Assim pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t_n \to 0} \frac{J_3(u + t_n\varphi) - J_3(u)}{t_n} &= \lim_{t_n \to 0} \frac{\frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} g|u + t_n\varphi|^p\, ds - \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} g|u|^p\, ds}{t_n} \\
&= \lim_{t_n \to 0} \int_{\partial\Omega} g \left(\frac{|u + t_n\varphi|^p - |u|^p}{t_n p} \right) ds \\
&= \int_{\partial\Omega} g \left(\lim_{t_n \to 0} \frac{|u + t_n\varphi|^p - |u|^p}{t_n p} \right) ds \\
&= \int_{\partial\Omega} g|u|^{p-2}u\varphi\, ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$DJ_3(u)\varphi = \int_{\partial\Omega} g|u|^{p-2}u\varphi\, ds. \tag{A.10}$$

Vamos mostrar agora que que DJ_3 é contínuo. De fato, seja $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ uma sequência tal que $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$. Da imersão contínua de $H^1(\Omega)$ em $L^p(\partial\Omega)$ com $1 < p < 2*$ no caso $N \geq 3$, segue que $u_n \to u$ em $L^p(\partial\Omega)$. Assim pelo Teorema de Vaimberg (ver Apêndice, Teorema A.3, pag 46.) existem $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $h \in L^p(\partial\Omega)$ tais que:

(a) $u_{n_j}(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω;

(b) $|u_{n_j}(x)| \leq h(x)$ q.t.p em Ω.

Usando (b) e desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}
\left| |u_{n_j}(x)|^{p-2}u_{n_j}(x) - |u(x)|^{p-2}u(x) \right|^{\frac{p}{p-1}} &\leq (|u_{n_j}(x)|^{p-1} + |u(x)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq (h(x)^{q-1} + |u(x)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq C(h(x)^q + |u(x)|^p).
\end{aligned}$$

Como $u, h \in L^p(\partial\Omega)$ então u^q, $h^p \in L^1(\partial\Omega)$ e portanto $C(h(x)^p + |u(x)|^p) \in L^1(\partial\Omega)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\||u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \to 0.$$

Desse modo, para toda $\varphi \in H^1(\Omega)$ com $\|\varphi\| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
|DJ_3(u_{n_j})\varphi - DJ_3(u)\varphi| &= \left|\int_{\partial\Omega} g|u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j}\varphi\, ds - \int_{\Omega} g|u|^{p-2}u\varphi\, ds\right| \\
&= \left|\int_{\partial\Omega} g(|u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u)\varphi\, ds\right| \\
&\leq \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} |\,|u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u\,||\varphi|\, ds.
\end{aligned}$$

Desde que $|u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u \in L^{\frac{p}{p-1}}$ e $\dfrac{p}{p-1}$ e p são expoentes conjugados, por Hölder

$$|DJ_3(u_{n_j})\varphi - DJ_3(u)\varphi| \leq \|f\|_{L^\infty} \||u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \|\varphi\|_{L^p}.$$

Da imersão contínua de $H^1(\Omega)$ em $L^p(\partial\Omega)$ com $1 < p < 2^*$ no caso $N \geq 3$, segue que

$$\begin{aligned}
|DJ_3(u_{n_j})\varphi - DJ_3(u)\varphi| &\leq C\|g\|_{L^\infty} \||u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \|\varphi\|_{L^p} \\
&\leq C\|g\|_{L^\infty} \||u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}.
\end{aligned}$$

Aplicando a norma em $(H^1(\Omega))'$ concluímos que

$$\begin{aligned}
\|DJ_3(u_{n_j}) - DJ_3(u)\| :&= \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |DJ_3(u_{n_j})\varphi - DJ_3(u)\varphi| \\
&\leq C\|g\|_{L^\infty} \||u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}.
\end{aligned}$$

Logo, $DJ_3(u_{n_j}) \to DJ_3(u)$ em $(H^1(\Omega))'$ quando $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$. Assim DJ_3 é contínuo e temos $DJ_3 = J_3'$. Portanto $J_3 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ e por (A.10)

$$DJ_3(u)\varphi = J_3'(u)\varphi = \int_{\partial\Omega} g|u|^{p-2}u\varphi\, ds. \tag{A.11}$$

Provamos assim que de fato $J_\lambda \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$.

A.3 Resultados Importantes

Proposição A.2. *(Identidade de Green): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ um aberto com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e $u, \varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$. Então,*

$$-\int_\Omega \varphi \Delta u \, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx - \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} \, ds.$$

Demonstração: Ver [10].

Teorema A.1. *(Desigualdade de Hölder): Seja $f \in L^P(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$f, g \in L^1(\Omega) \text{ e } \int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [4].

Definição A.4. *Um funcional $J_\lambda : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dito* **coersivo** *se $J_\lambda(u) \to +\infty$, sempre que $\|u\|_{H^1} \to +\infty$.*

Teorema A.2. *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue): Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponhamos que:*

(a) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω;

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e q.t.p em Ω.

Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f_n \, dx \to \int_\Omega f \, dx.$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema A.3. *(Vainberg)Sejam (f_n) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$ tal que $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ tal que*

(a) $f_{n_j}(x) \to f_n(x)$ q.t.p em Ω;

(b) Existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Ver [4].

Teorema A.4. *(Princípio Variacional de Ekeland): Sejam X um espaço métrico completo e $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Sejam $\epsilon > 0$, $\lambda > 0$ dados e seja $u \in X$ tal que*

$$\phi(u) \leq \inf_X \phi + \epsilon.$$

Então existe $v_\epsilon \in X$ tal que

(a) $\phi(v_\epsilon) \leq \phi(u)$

(b) $d(u, v_\epsilon) \leq \dfrac{1}{\lambda}$

(c) *Para cada $w \neq v_\epsilon$ em X,*

$$\phi(v_\epsilon) < \phi(w) + \epsilon\lambda d(v_\epsilon, w).$$

Demonstração: Desde que, se d é métrica, implica que λd também é uma métrica, nesta demonstração é suficiente considerar $\lambda = 1$.

Consideremos a relação em X definida como:

$$w \prec v \Longleftrightarrow \phi(w) \leq \phi(v) - \epsilon d(w, v).$$

Provaremos que $\prec$ é uma relação de ordem parcial em X. De fato, considerando $w \in X$, então

$$\phi(w) \leq \phi(w) - \epsilon d(w, w) \Rightarrow \phi(w) = \phi(w) \Longleftrightarrow w \prec w$$

provando que $\prec$ é reflexiva. Consideremos agora $w, v \in X$, tais que $w \prec v$ e $v \prec w$. Então

$$\phi(w) \leq \phi(v) - \epsilon d(w, v)$$

e

$$\phi(v) \leq \phi(w) - \epsilon d(v, w).$$

Segue das duas expressões anteriores que

$$2\epsilon d(v,w) \leq 0 \Rightarrow d(v,w) = 0 \Longleftrightarrow w = v,$$

provando que $\prec$ é anti-simétrica.

Sejam w,v e $u \in X$ tais que $w \prec v$ e $v \prec u$. Então,

$$\phi(w) \leq \phi(v) - \epsilon d(w,v)$$

e

$$\phi(v) \leq \phi(u) - \epsilon d(v,u),$$

de onde concluímos que

$$\phi(w) \leq \phi(u) - \epsilon d(v,u) - \epsilon d(w,v),$$

o que implica

$$\begin{aligned} \phi(w) &\leq \phi(u) - \epsilon d(w,u) + \epsilon d(w,v) - \epsilon d(w,v) \\ &\leq \phi(u) - \epsilon d(w,u) \Longleftrightarrow w \prec u. \end{aligned}$$

Provamos, portanto que $\prec$ é transitiva e assim, $\prec$ é uma relação de ordem parcial em X.

Definamos agora uma sequência (A_n) de subconjuntos de X. Comecemos com

$$u_0 = u$$

e seja

$$A_0 = \{w \in X : w \prec u_0\}$$

onde $u_1 \in A_0$ satisfaz

$$\phi(u_1) = \inf_{A_0} \phi + \frac{1}{1}.$$

Consideremos $A_1 = \{w \in X : w \prec u_1\}$, com $u_2 \in A_1$ satisfazendo

$$\phi(u_2) = \inf_{A_1} \phi + \frac{1}{2}.$$

Seja $A_2 = \{w \in X : w \prec u_2\}$, com $u_3 \in A_2$ satisfazendo

$$\phi(u_3) = \inf_{A_2} \phi + \frac{1}{3}.$$

Por recorrência, temos

$$A_n = \{w \in X : w \prec u_n\} \text{ com } u_{n+1} \in A_n, \text{ tal que}$$

$$\phi(u_{n+1}) = \inf_{A_n} \phi + \frac{1}{n+1}.$$

Notemos que $A_n \supset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois para w um elemento arbitrário em A_{n+1}, obtemos $w \prec u_{n+1}$. Desde que $u_{n+1} \in A_n$ segue que $u_{n+1} \prec u_n$ e por transitividade concluímos que $w \prec u_n$. Portanto, $w \in A_n$.

Além disso, A_n é fechado, pois considerando $\{w_k\} \subset A_n$ tal qu $w_k \to w \in X$, segue que

$$w_k \prec u_n \Longleftrightarrow \phi(w_k) \leq \phi(u_n) - \epsilon d(w_k, u_n).$$

Como ϕ é semicontínua inferiormente, então

$$\liminf_{k \to +\infty} \phi(w_k) \geq \phi(w).$$

Assim

$$\begin{aligned} \phi(w) &\leq \liminf_{k \to +\infty} [\phi(u_n) - \epsilon d(w_k, u_n)] \\ &\leq \liminf_{k \to +\infty} \phi(u_n) - \liminf_{k \to +\infty} \epsilon d(w_k, u_n)] \\ &\leq \phi(u_n) - \epsilon d(w, u_n), \end{aligned}$$

mostrando que

$$w \prec u_n \Longleftrightarrow w \in A_n,$$

ou seja, que A_n é fechado.

Notando que

$$diam A_n = {}_{w,v \in A_n} d(w, v),$$

vamos mostrar que

$$diam A_n + 1 \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Se $w \in A_{n+1}$, então, $w \prec u_{n+1} \prec u_n$ e

$$\epsilon d(w, u_{n+1}) \leq \phi(u_{n+1}) - \phi(w).$$

Desde que

$$\phi(u_{n+1}) \leq \inf_{A_n} \phi + \frac{1}{n+1}.$$

e

$$-\phi(w) \leq -\inf_{A_n} \phi,$$

temos

$$\epsilon d(w, u_{n+1}) \leq \inf_{A_n} \phi + \frac{1}{n+1} - \inf_{A_n} \phi = \frac{1}{n+1},$$

ou seja,

$$d(w, u_{n+1}) \leq \frac{1}{\epsilon(n+1)}.$$

Consideremos agora $w, v \in A_{n+1}$. Assim,

$$d(w, v) \leq d(w, u_{n+1}) + d(u_{n+1}, v) \leq \frac{2}{\epsilon(n+1)}.$$

Desde que

$$\sup_{w,v \in A_{n+1}} d(w, v) \leq \frac{2}{\epsilon(n+1)},$$

obtemos

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{w,v \in A_{n+1}} d(w, v) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\epsilon(n+1)},$$

de onde concluímos que

$$diam A_{n+1} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Observemos que o único ponto de intersecção dos A_n satisfaz os itens **(a)**, **(b)** e **(c)** do teorema. De fato, para $\bigcap_n A_n = v_\epsilon$ e desde que $v_\epsilon \in A_0$, temos da definição de A_0 que

$$v_\epsilon \prec u_0 = u \Longleftrightarrow \phi(v_\epsilon) \leq \phi(u) - \epsilon d(v_\epsilon, u)$$

e portanto

$$\phi(v_\epsilon) \leq \phi(u),$$

provando **(a)**. Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(u, v_\epsilon) &\leq \frac{1}{\epsilon}(\phi(u) - \phi(v_\epsilon)) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon}({}_X\phi + \epsilon - \inf_X \phi) = 1, \end{aligned}$$

provando **(b)**.

Além disso, se $w \neq v_\epsilon$, tem-se que w não se relaciona com v_ϵ, pois caso contrário, teríamos $w \in \bigcap_n A_n$. Logo

$$\phi(w) > \phi(v_\epsilon) - \epsilon d(v_\epsilon, w),$$

provando **(c)**.

$\square$

Teorema A.5. *(Teorema da Função Implícita): Dada a função $f : U \to \mathbb{R}$, de classe C^k $(k \geq 1)$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, seja $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Existem uma bola $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo $J = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ com as seguintes propriedades:*

(1) $B \times \overline{J} \subset U$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in B \times \overline{J}$;

(2) Para todo $x \in B$ existe um único $y = \xi(x) \in J$ tal que $f(x, y) = f(x, \xi(x)) = c$.

A função $\xi : B \to J$, assim definida, é de classe C^k e suas derivadas parciais em cada ponto $x \in B$ são dadas por

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}$$

.

Demonstração: Ver [13].

Teorema A.6. *(Dos Multiplicadores de Lagrange): Sejam X um espaço de Banach, $J, F : x \longrightarrow \mathbb{R}$ funcionais de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ e $M = \{u \in X; F(u) = 0\} = F^{-1}(\{0\})$ com $F'(u) \neq 0$, $\forall u \in M$. Se J é limitado inferiormente sobre M e existe $u_0 \in M$ tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u),$$

então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (multiplicador de Lagrange) verificando

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Demonstração: Ver [1].

Teorema A.7. *(Brézis-Lieb): Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e seja $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ se*

(a) (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$;

(b) $u_n \to u$ q.t.p em Ω

então $|u_n|_p^p = |u|_p^p + |u_n - u|_p^p + o_n(1)$.

Demonstração: Ver [18].

Teorema A.8. *Seja H um espaço de Banach reflexivo. Se (u_n) é uma sequência limitada em H, então existem, uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) e $u \in H$ tais que*

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \in H.$$

Demonstração: Ver [4].

Teorema A.9. *Se $h \in L^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \subset L^\infty \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, tem-se a imersão compacta*

$$H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \hookrightarrow L^p \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, hdx)$$

para $p \in [1, 2^*)$ se $N \leq 3$.

Demonstração: Ver [11]

Teorema A.10. *(Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov): Seja* Ω *um aberto limitado e um expoente* $p \geq 1$.

(a) Suponhamos $p < n$. *Seja* $q \geq 1$ *tal que*

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

Então, a inclusão

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ é compacta.}$$

(b) Suponhamos $p < n$. *Então, a inclusão*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \text{ é compacta.}$$

Demonstração: Ver [11]

Referências Bibliográficas

[1] Alves, C.O. *Introdução as Equações Elípticas.* Rio de Janeiro, 2007.

[2] Ambrosseti, A, Brezis,H, Cerami, G. *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 137, 1996.

[3] Bartle, R.*The Elements of Integrationand Lebesgue Measure*, Wiley-Interscience, 1995.

[4] Brezis, H. *Functional Analysis, Soboleve Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[5] Corrêa, G.P. *Multiplicidade de soluções positivas para um problema envolvendo o expoente crítico de Sobolev em $\mathbb{R}^N$*, Belém, 2008.

[6] Corrêa, A.S.S. *Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quasilineares em domínio exterior com condição de fronteira de Neumann*, Belém, 2010.

[7] Furtado, M. *Notas de EDP2 (Versão 1.2)*, Brasília, 2012.

[8] Figueiredo, G.J.M. *Uma introdução à teoria dos pontos críticos*, Brasília, 2016.

[9] Garcia-Azorero,J, Peral,I e Rossi, J.D. *A convex-concave problem with a nonlinear boundary condition*, J,Diff.Egns, 2004.

[10] Kavian, O. *Introduction à théorie des points critiques et applications aux problémes elleptiques*, Springer-Verlag, 1993.

[11] Kist, M. *Densidade e Imersões Compactas em Espaços de Sobolev x Regularidade na Fronteira*, Santa Catarina, 1999.

[12] Leme, L.C.P. *Multiplicidade de soluções para problemas com condições de fronteira de Dirichlet e Navie envolvendo o operador p-biharmônico com expoente crítico*, Belo Horizonte, 2015.

[13] Lima, Elon Lages. *Análise Real volume 2. Funções de n variáveis*. 12.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[14] Paula, J.C. *Existência de soluções para um problema elíptico usando a aplicação fibração*, Viçosa, 2011.

[15] Silva, R.C. *Existência de soluções para equações elípticas semilineares envolvendo não linearidades do tipo côncavo-convexas*, João Pessoa, 2012.

[16] Ni, W.M.e Tagaki, I. *On the shape of least energy solution to a Neumann problem*, Comm. Pure Appl. Math, 1991.

[17] Tavares, D.M.l. *Existência e multiplicidade de soluções para problemas elípticos não locais com condição de fronteira integral*, Belém, 2018.

[18] Willem, M. *Minimax theorems, Progresin Nonlinear Differential Equations and Their aplications*, Birkhouser, 1996.

[19] Wu, T.F. *A semilinear elliptic problem involving nonlinear boundary condition and sign-changing pottential*, 2006.

[20] Wu, T.F. *On semilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearites and sign-changing weight function*, 2006.