Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Dissertação de Mestrado

Existência de solução positiva para uma classe de problemas $p\&q$ elípticos com expoente crítico e não linearidade descontínua

Clayton Wallace Fonseca Ribeiro

Belém - PA
2019

Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Clayton Wallace Fonseca Ribeiro

Existência de solução positiva para uma classe de problemas $p\&q$ elípticos com expoente crítico e não linearidade descontínua

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Rúbia Gonçalves Nascimento

Belém - PA
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R484e Ribeiro, Clayton Wallace Fonseca.
Existência de solução positiva para uma classe de problemas p&q elípticos com expoente crítico e não linearidade descontínua / Clayton Wallace Fonseca Ribeiro, . — 2019.
65 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Rúbia Gonçalves Nascimento
Dissertação (Mestrado) - 1, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Método variacional, Expoente crítico, Equações elípticas não-lineares, Não linearidade descontínua . I. Título.

CDD 515.353

Clayton Wallace Fonseca Ribeiro

Existência de solução positiva para uma classe de problemas $p\&q$ elípticos com expoente crítico e não linearidade descontínua

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Belém 28, de fevereiro de 2019

Resultado: APROVADO

Rajloscament

Profª. Drª. Rúbia Gonçalves Nascimento - Orientadora
PPGME/PDM/UFPA

Gelson Conceição G. dos Santos

Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos - Membro
PPGME/PDM/UFPA

Suellen Cristina Q. Arruda

Profª. Drª. Suellen Cristina Queiroz Arruda - Membro externo
UFPA/ Campus Universitário do Baixo Tocantins

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde e força para superar os obstáculos enfrentadas.

Agradeço a minha família, em especial, meus pais Sidney Ribeiro e Claudia Rezende e ao meu irmão Matheus Ribeiro, pelo apoio, e que apesar de todas as dificuldades sempre me fortaleceram e incentivaram.

À minha orientadora, Profª. Drª. Rúbia Gonçalves Nascimento, pela paciência, compreensão e ensinamentos dado durante o mestrado.

Aos professores Gelson dos Santos e Suellen Arruda por aceitarem o convite para compor a banca examinadora deste trabalho e contribuir para o enriquecimento do mesmo.

Aos meus professores do ensino básico, graduação e pós-graduação que foram importantes para a minha formação profissional.

Agradeço também a todos meus amigos, em especial, a minha amiga Bruna Rosa pelo seu companheirismo e apoio nos momentos mais importantes da finalização deste trabalho.

A todos que de maneira direta ou indireta fizeram parte desta trajetória, o meu muito obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste trabalho, usamos algumas técnicas de Análise Funcional Não-linear para estudar a existência de soluções positivas para a seguinte classe de problemas elípticos do tipo $p\&q$-Laplaciano com expoente crítico e não linearidade descontínua

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u) + |u|^{q*-2} & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $2 \leq p \leq q < q^*$, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função de classe C^1 e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que possui um conjunto não-enumerável de pontos de descontinuidade.

Palavras-chave: Método variacional, Expoente crítico, Equações elípticas não-lineares, Não linearidade descontínua.

Abstract

In this work, we use some techniques of Nonlinear Functional Analysis to study the existence of positive solutions for the following class of elliptic problems of $p\&q$-Laplacian type with critical exponent and discontinuous nonlineariry

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u) + |u|^{q*-2} \text{ in } \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \qquad\qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is boundary domain, $2 \leq p \leq q < q^*$, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ is a function of class C^1 and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function that can have an uncontable set of discontinuous points.

Keywords: Variational methods, Critical exponents, Nonlinear elliptic equations, Discontinuous nolinearity.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudaremos resultados de existência de solução para a seguinte classe de problemas elípticos do tipo $p\&q$-Laplaciano com não linearidade descontínua

$$(P)\ \begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u) + |u|^{q*-2} & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $2 \leq p \leq q < q^*$, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função de classe C^1 e f uma função que pode apresentar um conjunto não-enumerável de pontos de descontinuidade.

Devido a grande relevância, o estudo de problemas envolvendo este operador mais geral, não-linear e não-homogêneo, vem sendo abordado nos últimos anos, conforme mencionamos abaixo.

No final da década de 90, nos artigos [16] e [17], Do Ó mostrou resultados de existência e multiplicidade de soluções para o problema (P), sendo f com crescimento polinomial subcrítico e crescimento exponencial subcrítico, respectivamente, sem o termo crítico. Figueiredo, em [20], usou uma abordagem variacional para o estudo de problemas considerando crescimento crítico na não-linearidade. Em [13], Corrêa, Corrêa e Santos Júnior mostram a existência e multiplicidade de soluções positivas, sendo f uma função contínua mudando de sinal. O problema em $\mathbb{R}^N$ foi estudado por Figueiredo em [19] e por Alves e Figueiredo em [2].

Este problema, do tipo $p\&q$-Laplaciano, envolve uma classe bem mais geral de operadores em que tal generalidade será ilustrada, através da função a, por exemplo, quando f é uma função contínua, a existência e a multiplicidade de soluções para o caso particular $a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}}$ têm sido extensivamente investigadas nos últimos anos, como vemos nos trabalhos [7],[8] e [11] em domínio limitado, e [1], [6], [9] e [18] em $\mathbb{R}^N$.

Os estudos são justificados não somente pelo grande interesse matemático, como também porque a classe de problemas considerados tem uma vasta gama de aplicações em Física, Química, Biologia e nas ciências afins, tais como Biofísica e Física Plasmática. Por exemplo, o caso

$$\begin{cases} -\Delta u_p - \Delta u_q = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem sua origem nas aplicações de um sistema geral de reação-difusão da forma

$$u_t = div[D(u)\nabla u] + c(x,u), \tag{1}$$

onde $D(u) = (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u|^{N-2})$. Em tais aplicações, a função u descreve uma concentração, o primeiro termo do lado direito de (1) corresponde a difusão com coeficiente de difusão de $D(u)$ e o segundo termo é o de reação e refere-se a fonte e processos de perda. Em aplicações na química e biologia o termo de reação $c(x,u)$ é um polinômio em u com coeficientes variáveis, veja por exemplo [24], [25].

Dentre os trabalhos recentes, podemos citar Barile e Figueiredo [4], onde é estudado o problema

$$-div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u) \;\; \text{em } \Omega,$$

onde $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 satisfazendo determinadas condições de crescimento e Ω domínio limitado.

Outro importante estudo é feito por Figueiredo em [19], onde o autor estuda a existência de soluções positivas para a seguinte classe de problemas do tipo $p\&q$-Laplaciano com expoente crítico

$$-div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + b(|u|^p)|u|^{p-2}u = \lambda f(u) + |u|^{\gamma^*-2},$$

onde λ é um parâmetro positivo, $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $b, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas.

Em [3], Badiale utilizou técnicas variacionais para funcionais não-diferenciáveis para obter uma solução não-trivial do problema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + |u|^{2^*-2}u & , \text{em } \Omega \\ u \geq 0, & u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Em [15], dos Santos e Figueiredo mostraram a existência de uma solução fraca não trivial para a seguinte classe de problemas do tipo Kirchhoff envolvendo não-linearidade descontínua e o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg,

$$\begin{cases} L(u) = |x|^{-\delta} f(x,u) + |x|^{-bp^*}|u|^{p^*-2} & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0, & u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}), \end{cases}$$

onde

$$L(u) = -\left[M \left(\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u|^p dx \right) \right] div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Visto que estamos considerando o operador $p\&q$-Laplaciano, algumas estimativas são totalmente diferentes quando comparadas a [3] e [15]. Precisamos definir solução para (P), no sentido da teoria dos funcionais Localmente Lipschitz, veja [10].

Nosso trabalho está organizado do seguinte modo: No Capítulo 1 apresentamos uma teoria desenvolvida por Clarke [12] conhecida como Gradiente Generalizado, onde seguindo o livro dos autores Grossinho e Tersian [23] e com o auxilio do artigo do autor Chang [10], abordamos algumas definições e propriedades que serão úteis ao longo deste trabalho.

No Capítulo 2, estudaremos a existência de solução positiva para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u) + |u|^{q*-2} \text{ em } \Omega \\ u = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é uma domínio limitado, $2 \leq p \leq q < q^*$, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que apresenta um conjunto não-enumerável de pontos de descontinuidade. Mais precisamente, as hipóteses sobre as funções a e f são:

(a_1) Existem constantes $k_i > 0$, $i = 0, 1, 2, 3$, tais que

$$k_0 + k_1 t^{(q-p)/p} \leq a(t) \leq k_2 + k_3 t^{(q-p)/p}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(a_2) Existe $\alpha \in (0, 1]$ tal que

$$A(t) \geq \alpha a(t)t, \text{ para todo } t \geq 0,$$

onde $A(t) = \int_0^t a(s)ds$.

(a_3) A função $t \mapsto a(t^p)t^{p-2}$ é crescente.

Antes de enunciarmos as hipóteses sobre a função f, vamos recordar a definição de função N-mensurável. Recorde que uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada N-mensurável quando a composição $g(v(.)) : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável, para cada função $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável.

Nossas hipóteses sobre a função f são:

(f_1) Para todo $t \in \mathbb{R}$, existe $C > 0$ e $r \in (q, q^*)$ tal que

$$|f(t)| \leq C(1 + |t|^{r-1})$$

(f_2) Para todo $t \in \mathbb{R}$, existe $\theta \in \left(\frac{p}{\alpha}, q^*\right)$, tal que

$$0 \leq \theta F(t) = \theta \int_0^t f(s)ds \leq t\underline{f}(t),$$

onde

$$\underline{f}(t) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} ess \inf_{|t-s|<\epsilon} f(s) \quad \text{e} \quad \overline{f}(t) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} ess \sup_{|t-s|<\epsilon} f(s),$$

são N-mensuráveis.

(f_3) Existe $\beta > 0$, que será dado posteriormente, tal que

$$H(t - \beta) \leq f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde H é a função Heaviside, isto é,

$$H(t) = \begin{cases} 0 & , \text{se } \ t \leq 0, \\ 1 & , \text{se } \ t > 0. \end{cases}$$

(f_4) $\limsup_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = 0 \quad$ e $\quad f(t) = 0$ se $t \leq 0$.

Um exemplo típico de uma função satisfazendo as condições $(f_1) - (f_4)$ é dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & se \ \ t \in \,]-\infty, \beta/2[\\ 1 & se \ \ t \in \mathbb{Q} \cap [\beta/2, \beta] \\ 0 & se \ \ t \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, \beta] \\ \sum_{k=1}^{l} \frac{|t|^{q_k - 1}}{\beta^{q_k - 1}} & se \ \ t > \beta, \ \ l \geq 1 \text{ e } q_k \in (q, q^*). \end{cases}$$

Note que essa função f tem um conjunto não-enumerável de pontos de descontinuidade. Baseada na teoria dos funcionais localmente Lipschitz desenvolvida por Chang [10], Clarke

[12], Grossinho e Tersian [23], definimos como solução fraca do problema (P) sendo uma função $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega \rho \varphi dx + \int_\Omega |u|^{q^*-2} u \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$ e

$$\rho(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \text{ q.t.p em } \Omega.$$

O principal resultado deste capítulo é o seguinte Teorema

Teorema 0.1. *Assumindo as hipóteses* $(a_1) - (a_2)$ *e* $(f_1) - (f_4)$*. Então, o problema* (P) *possui uma solução positiva. Além disso, se* $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ *é uma solução do problema* (P)*, então* $|\{x \in \Omega; u(x) > \beta\}| > 0$.

O problema (P), do tipo $p\&q$-Laplaciano, envolve uma classe bem geral de operadores em que tal generalidade será ilustrada, através de alguns exemplos, pela função a:

Exemplo 0.1. *Se* $a(t) = t^{\frac{q-p}{p}}$*, temos que a função a satisfaz as hipóteses* $(a_1) - (a_2)$ *com* $k_0 = k_2 = 0$ *e* $k_1 = k_3 = 1$*. Logo, o Teorema 0.1 é válido para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_q u = f(u) + |u|^{q^*-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Exemplo 0.2. *Considerando* $a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}}$*, temos que a função a satisfaz as hipóteses* $(a_1) - (a_2)$ *com* $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 1$*. Logo, o Teorema 0.1 é válido para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = f(u) + |u|^{q^*-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Exemplo 0.3. . *Considerando* $a(t) = 1 + \frac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$*, temos que a função a satisfaz as hipóteses* $(a_1) - (a_2)$ *com* $k_0 = 1, k_1 = 0, k_2 = 2$ *e* $k_3 = 0$*. Logo, o Teorema 0.1 é válido para o problema*

$$\begin{cases} -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}}\right) = f(u) + |u|^{q^*-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Exemplo 0.4. . *Considerando* $a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}} + \frac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$*, temos que a função a satisfaz as hipóteses* $(a_1) - (a_2)$ *com* $k_0 = k_1 = k_2 = 2$ *e* $k_3 = 1$. *Logo, o Teorema 0.1 é válido para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u - div\left(\frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}}\right) = f(u) + |u|^{q^*-2}u, & em\ \Omega, \\ u = 0, & sobre\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Este estudo é baseado no artigo de Figueiredo e Nascimento [21], onde os autores tratam da existência de soluções positivas para tal classe de problemas, utilizando métodos variacionais.

Encerraremos esta dissertação com dois apêndices. No apêndice A, colocamos alguns resultados que envolvem a Teoria de Análise Funcional e Medida e Integração utilizados em nosso estudo. No Apêndice B, enunciaremos e demonstraremos alguns resultados importantes utilizados ao longo deste trabalho.

Abaixo, listamos o que acreditamos ser as principais contribuições deste trabalho:

(1) O problema (P) apresenta uma combinação do operador do tipo $p\&q$-Laplaciano e a não-linearidade descontínua que até o presente momento, ao menos em nosso conhecimento, não existia na literatura.

(2) Em [5], [19] e [20] a não-linearidade é contínua. Neste trabalho, a não-linearidade pode ter um conjunto não-enumerável de pontos de descontinuidade.

(3) Adaptamos argumentos que podem ser encontrados em [3] para uma classe mais geral de operadores.

Notações

- $||.|| := ||.||_{W_0^{1,q}(\Omega)}$ é a norma usual de $W_0^{1,q}(\Omega)$

- $||.||_* := ||.||_{(W_0^{1,q}(\Omega))'}$ é a norma do espaço dual $(W_0^{1,q}(\Omega))'$.

- $u := u(x)$.

- $v := v(x)$.

- $|\Omega| :=$ Medida de Lebesgue de um conjunto Ω.

- $\rightarrow$: Convergência forte.

- $\rightharpoonup$: Convergência fraca.

Capítulo 1

Resultados sobre Funcionais Localmente Lipschtizianos

Apresentaremos algumas propriedades envolvendo Funcionais Localmente Lipschitz e Gradiente Generalizado da Teoria dos Pontos Críticos desenvolvida por Clarke [12] e Chang [10]. Além disso enunciaremos algumas definições e propriedades importantes que serão úteis no desenvolvimento deste trabalho. Nos limitaremos em demonstrar alguns resultados, sendo os demais, encontrados em detalhes em [23] e [26].

1.1 Gradiente Generalizado

Definição 1.1. *Seja X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que I é um Funcional Localmente Lipschitz ($I \in LL(X, \mathbb{R})$), se dado $u \in X$, existir uma vizinhança $V = V_u \subset X$ de u e uma constante $K = K_u > 0$ tal que*

$$|I(v_1) - I(v_2)| \leq K||v_1 - v_2||, \ \forall v_1, v_2 \in V. \tag{1.1}$$

Definição 1.2. *A Derivada Direcional Generalizada de um Funcional Localmente Lipschitz $I : X \to \mathbb{R}$, em um ponto $u \in X$ na direção de $v \in X$, denotado por $I^0(u; v)$ é definida por*

$$I^0(u; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \downarrow 0} \frac{I(u + h + \lambda v) - I(u + h)}{\lambda}, \ \ v \in X. \tag{1.2}$$

Segue abaixo algumas propriedades da Derivada Direcional Generalizada

(A_1) A função $I^0(u;.) : X \to \mathbb{R}$ é sub-aditiva e homogênea positiva, isto é,

$$I^0(u; v_1 + v_2) \leq I^0(u; v_1) + I^0(u; v_2),\ \forall v_1, v_2 \in X,$$

e

$$I^0(u; \lambda v) = \lambda I^0(u; v),\ \forall v \in X\ \text{ e } \lambda \geq 0.$$

(A_2) $I^0(u;.)$ é um funcional convexo;

Demonstração. Dados $v_1, v_2 \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se de (A_1), que

$$I^0(u; v_1 t + v_2(1-t)) \leq I^0(u; v_1 t) + I^0(u; v_2(1-t)),$$

tendo em vista que $(1-t) > 0$, segue, novamente de (A_1) que

$$I^0(u; v_1 t + v_2(1-t)) \leq t I^0(u; v_1) + (1-t) I^0(u; v_2).$$

$\square$

(A_3) $|I^0(u; v)| \leq K||v||$, onde $K > 0$ satisfaz (1.1) e depende do conjunto aberto $V = V_u$, para cada $u \in X$.

Demonstração. Observemos que

$$I^0(u; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left(I(u + h + \lambda v) - I(u + h) \right).$$

Pela propriedade de lim sup, temos

$$I^0(u; v) = \lim_{\epsilon \to 0, \delta \to 0^+} \left(\sup \left\{ \frac{I(u + h + \lambda v) - I(u + h)}{\lambda}; h \in B_\epsilon, \lambda \in (0, \delta) \right\} \right),$$

e pela propriedade de supremo

$$I^0(u; v) \leq \lim_{\epsilon \to 0, \delta \to 0^+} \left(\sup \left\{ \left| \frac{I(u + h + \lambda v) - I(u + h)}{\lambda} \right|; h \in B_\epsilon, \lambda \in (0, \delta) \right\} \right).$$

Sendo $I \in LL(X, \mathbb{R})$, temos de (1.1)

$$I^0(u; v) \leq \lim_{\epsilon \to 0, \delta \to 0^+} K||v|| = K||v||. \tag{1.3}$$

Observemos agora que

$$I^0(u;v) = \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\left(I(u+h+\lambda v) - I(u+h)\right)$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0,\delta\to 0^+}\left(\sup\left\{\frac{I(u+h\lambda v) - I(u+h)}{\lambda}; h\in B_\epsilon, \lambda\in(0,\delta)\right\}\right),$$

novamente pela propriedade de supremo, temos

$$I^0(u;v) \geq \lim_{\epsilon\to 0,\delta\to 0^+}\left(\sup\left\{-\left|\frac{I(u+h\lambda v) - I(u+h)}{\lambda}\right|; h\in B_\epsilon, \lambda\in(0,\delta)\right\}\right).$$

E sendo $I\in LL(X,\mathbb{R})$, obtemos

$$I^0(u;v) \geq \lim_{\epsilon\to 0,\delta\to 0^+}(-K||v||) = -K||v||. \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4) resulta em

$$|I^0(u;v)| \leq K||v||$$

□

(A_4) $|I^0(u;v) - I^0(u;t)| \leq K||v-t||$, para todo $v,t\in X$, isto é, $I^0(u;.) : X\to\mathbb{R}$ é uma função lipschitz, com constante K;

Demonstração. Pela propriedade (A_1)

$$I^0(u;v) = I^0(u;v-t+t) \leq I^0(u;v-t) + I^0(u;t)$$

e

$$I^0(u;t) = I^0(u;t-v+v) \leq I^0(u;t-v) + I^0(u;v).$$

Assim,

$$I^0(u;v) - I^0(u;t) \leq I^0(u;v-t) \leq |I^0(u;v-t)|$$

e por (A_3) segue que

$$I^0(u;v) - I^0(u;t) \leq K||v-t||. \tag{1.5}$$

Por outro lado

$$I^0(u;t) - I^0(u;v) \leq I^0(u;t-v) \leq |I^0(u;t-v)|,$$

por (A_3)

$$I^0(u;t) - I^0(u;v) \leq K||t-v||. \tag{1.6}$$

Logo, por (1.5) e (1.6) concluímos que

$$|I^0(u;v) - I^0(u;t)| \leq K||v-t||.$$

$\square$

(A_5) $I^0(u;-v) = (-I)^0(u;v)$, para todo $u, v \in X$.

Demonstração. Por definição sabemos que

$$I^0(u;-v) = \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\left(I(u+h+\lambda(-v)) - I(u+h)\right),$$

implicando que,

$$I^0(u;-v) = \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda} I(u+h+-\lambda v) - I(u+h-\lambda v+\lambda v)),$$

e assim

$$I^0(u;-v) = \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}(-I(u+(h-\lambda v)+\lambda v) + I(u+(h-\lambda v)),$$

logo

$$I^0(u;-v) = \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}((-I)(u+(h-\lambda v)+\lambda v) - (-I)(u+(h-\lambda v)),$$

$$\leq (-I)^0(u;v), \ \forall u, v \in X.$$

De modo análogo, mostra-se que $(-I)^0(u;v) \leq I^0(u;-v), \forall u, v \in X$. Portanto,

$$I^0(u;-v) = (-I)^0(u;v), \forall u, v \in X.$$

$\square$

(A_6) $I^0(u;v)$ é uma função semicontínua superiormente, isto é,

$$\limsup_{j\to+\infty} I^0(u_j;v_j) \leq I^0(u;v),$$

onde $\lim_{j\to+\infty}(u_j, v_j) = (u, v)$, com $(u, v) \in X \times X$.

Agora, definiremos o Gradiente generalizado de um funcional localmente Lipschitz.

Definição 1.3. *Seja $I \in LL(X, \mathbb{R})$. Definimos o Gradiente generalizado de I no ponto $u \in X$, e denotamos por $\partial I(u)$, o subconjunto de X' dado por*

$$\partial I(u) = \{\xi \in X'; \langle \xi, v\rangle \leq I^0(u;v), \ \forall v \in X\}.$$

Desde que $I^0(u;0) = 0$, segue que $\partial I(u) = \partial I^0(u;0)$.

Lema 1.1. *O Gradiente generalizado de um funcional $I \in LL(X;\mathbb{R})$ é sempre não vazio, isto é, $\partial I(u) \neq \emptyset$.*

Lema 1.2. *Dados $u, v \in X$ tem-se, $I^0(u;v) = \max\{\langle \xi, v\rangle; \xi \in \partial I(u)\}$.*

Algumas propriedades relacionadas ao Gradiente Generalizado.

(P_1) Para todo $u \in X$ o conjunto $\partial I(u) \subset X'$ é convexo e compacto no topologia fraca estrela. Além disso, para $\xi \in \partial I(u)$ temos $||\xi||_{X'} \leq K_u$.

Demonstração. Dados $\xi_1, \xi_2 \in \partial I(u)$, temos

$$\langle \xi_1, v\rangle \leq I^0(u;v), \forall v \in X$$

e

$$\langle \xi_2, v\rangle \leq I^0(u;v), \forall v \in X.$$

Para cada $t \in (0,1)$, segue que

$$t\langle \xi_1, v\rangle + (1-t)\langle \xi_2, v\rangle \leq tI^0(u;v) + (1-t)I^0(u;v),$$

implicando em

$$\langle t\xi_1, v\rangle + \langle (1-t)\xi_2, v\rangle \leq I^0(u;v), \forall v \in X,$$

logo,

$$\langle t\xi_1 + (1-t)\xi_2, v\rangle \leq I^0(u;v), \forall v \in X.$$

Assim, $t\xi_1 + (1-t)\xi_2 \in \partial I(u)$, para todo $t \in (0,1)$, mostrando qu $\partial I(u)$ é convexo. Mostraremos agora que $\partial I(u)$ é compacto fraco estrela.

Dado $\xi \in \partial I(u)$, temos

$$\langle \xi, v\rangle \leq I^0(u;v) \leq |I^0(u;v)|,$$

segue pela propriedade (A_3) que

$$\langle \xi, v\rangle \leq K_u||v||, \forall v \in X,$$

ou seja,

$$\langle \xi, v\rangle \leq K_u, \forall v \in X,$$

com $||v|| \leq 1$. Logo,

$$||\xi||_* = \sup_{||v|| \leq 1} \langle \xi, v\rangle \leq K_u, \forall v \in X$$

implicando que $\partial I(u) \subset \overline{B}_{K_u}(0) \subset X'$.

O conjunto $\partial I(u)$ é fechado fraco estrela. De fato, seja $(\xi_n) \subset \partial I(u)$ um a sequência tal que $\xi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0$, isto é,

$$\langle \xi_n, v \rangle \to \langle \xi_0, v \rangle, \forall v \in X.$$

Desde que $\xi_n \in \partial I(u)$, temos

$$\langle \xi_n, v \rangle \leq I^0(u; v), \forall n \in \mathbb{N},$$

logo, passando ao limite $n \to \infty$ segue que

$$\langle \xi_0, v \rangle \leq I^0(u; v), \forall n \in \mathbb{N},$$

implicando que $\xi_0 \in \partial I(u)$, provando a afirmação. Como $\partial I(u)$ é fechado fraco estrela e $\partial I(u) \subset \overline{B}_{K_u}(0)$, com $\overline{B}_{K_u}(0)$ compacto na topologia fraca estrela, temos $\partial I(u)$ é compacto na topologia fraca*, completando a prova.

□

(P_2) Para cada $F, G \in LL(X, \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\partial(F+G)(x) \subset \partial F(x) + \partial G(x),$$

e

$$\partial(\lambda I)(x) = \lambda \partial I(x).$$

(P_3) O funcional $x \mapsto \lambda_I(x)$ é semi-contínuo inferiormente, isto é,

$$\liminf_{x \to x_0} \lambda_I(x) \geq \lambda_I(x_0),$$

onde $\lambda_I : X \to \mathbb{R}$, é definido por

$$\lambda_I(x) = \min\{||\xi||_*; \xi \in \partial I(x)\}.$$

(P_4) Se I é continuamente diferenciável a Fréchet numa vizinhança aberta de $x \in X$, temos

$$\partial I(x) = \{I'(x)\}.$$

(P_5) Se $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $G \in LL(X, \mathbb{R})$, então

$$\partial(I+G)(x) = \partial I(x) + \partial G(x).$$

Lema 1.3. *Para cada $u \in X$, existe $\xi_0 \in \partial I(X)$ tal que*

$$||\xi_0||_* = \min\{||\xi||_*; \xi \in \partial I(u)\}$$

Demonstração. Observe que para demonstrar o lema, basta mostrar que o ínfimo do seguinte conjunto

$$A = \{||\xi||_*; \xi \in \partial I(u)\} \subset \mathbb{R}$$

é atingido. Para tanto, note que o conjunto A é limitado inferiormente, pois

$$||\xi||_* \geq 0, \forall \xi \in \partial I(u).$$

Definamos,

$$C_I(u) = \inf\{||\xi||_*; \xi \in \partial I(u)\}.$$

Logo, pela definição de ínfimo, existe uma sequência $(\xi_n) \subset \partial I(u)$ tal que

$$||\xi_n||_* \to C_I(u). \tag{1.7}$$

Por (P_1) sabemos que $(\xi_n) \subset \partial I(u) \subset \overline{B}_{K_u}(0) \subset X'$, onde $\overline{B}_{K_u}(0)$ é fechado fraco estrela. Segue, pelo fato de $(\xi_n) \subset \overline{B}_{K_u}(0)$, que existe $\xi_0 \in X'$ tal que, a menos de subsequência

$$\xi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0, \text{ em } X'. \tag{1.8}$$

Sendo $\partial I(u)$ fechado fraco estrela, concluimos que $\xi_0 \in \partial I(u)$. Agora, definamos a seguinte função $\varphi : X' \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(\xi) = ||\xi||_*$.

De (1.8)

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi(\xi_n) \geq \varphi(\xi), \tag{1.9}$$

para toda sequência $(\xi_n) \subset X'$ tal que $\xi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \xi$ em X'.

Logo, de (1.7), (1.8) e (1.9), temos

$$C_I(u) = \lim_{n\to\infty} ||\xi_n||_* = \liminf_{n\to\infty} ||\xi_n|| \geq ||\xi_0||_* \geq C_I(u).$$

Portanto, $C_I(u) = \inf A = ||\xi_0||_*$, pois $\xi_0 \in \partial I(u)$, mostrando que o ínfimo do conjunto A é atingido, como queriamos demonstrar. $\square$

Lema 1.4. *Sejam $F, \overline{f}$ e $\underline{f}$ as funções definidas anteriormente. Então*

$$F^0(u; v) \leq \begin{cases} \overline{f}(u)v, & se \quad v > 0, \\ \underline{f}(u)v, & se \quad v < 0. \end{cases}$$

Demonstração. Sabemos que

$$F^0(u;v) = \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}[F(u+h+\lambda v) - F(u+h)].$$

Pela definição de F, temos para $v > 0$

$$\begin{aligned} F^0(u;v) &= \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\left(\int_0^{u+h+\lambda v} f(s)ds - \int_0^{u+h} f(s)ds\right) \\ &= \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\left(\int_{u+h}^{u+h+\lambda v} f(s)ds\right) \\ &\leq \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\overline{f}_\epsilon(u)\left(\int_{u+h}^{u+h+\lambda v} ds\right), \forall \epsilon > 0, \end{aligned}$$

onde denotaremos $\overline{f}_\epsilon(u)$ e $\underline{f}_\epsilon(u)$ por

$$\overline{f}_\epsilon(t) = ess \sup_{|s-t|<\epsilon} f(s) \;\; \text{e} \;\; \underline{f}_\epsilon(t) = ess \inf_{|s-t|<\epsilon} f(s).$$

Logo,

$$F^0(u;v) \leq \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \overline{f}_\epsilon(u)v = \overline{f}_\epsilon(u)v, \;\forall\epsilon > 0$$

fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos

$$F^0(u;v) \leq \overline{f}(u)v, \;\forall v > 0.$$

Se $v < 0$, observe que

$$\begin{aligned} F^0(u;v) &= \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} -\frac{1}{\lambda}\left(\int_{u+h+\lambda v}^{u+h} f(s)ds\right) \\ &= -\liminf_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\int_{u+h+\lambda v}^{u+h} f(s)ds \end{aligned}$$

assim,

$$F^0(u;v) \leq -\liminf_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\underline{f}_\epsilon(u)\int_{u+h+\lambda v}^{u+h} ds = -\underline{f}_\epsilon(u)(-v).$$

Logo,

$$F^0(u;v) \leq \underline{f}_\epsilon(u)v,$$

fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos

$$F^0(u;v) \leq \underline{f}(u)v, \;\forall v < 0.$$

Portanto,

$$F^0(u;v) \leq \begin{cases} \overline{f}(u)v, & \text{se } \; v > 0, \\ \underline{f}(u)v, & \text{se } \; v < 0. \end{cases}$$

$\square$

Definição 1.4. *Um ponto $u \in X$ é dito ser ponto crítico do funcional $I \in LL(X, \mathbb{R})$, se $0 \in \partial I(u)$, isto é,*

$$0 \leq I^0(u; v), \; \forall v \in X.$$

Definição 1.5. *Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é valor crítico de I se existe um ponto crítico $u \in X$ tal que $I(u) = c$.*

Definição 1.6. *Uma sequência $(u_n) \subset X$ é uma sequência Palais-Smale no nível c, $(PS)_c$, se*

$$I(u_n) \to c \quad e \quad \lambda(u_n) \to 0.$$

Definição 1.7. *Um funcional $I \in LL(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição Palais-Smale no nível c se toda sequência $(PS)_c$ possui uma subsequência que converge forte em X.*

Teorema 1.1. *(Teorema do Passo da Montanha) Seja X um espaço de Banach reflexivo e $I \in LL(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição $(PS)_c$, com $I(0) = 0$. Suponhamos que:*

(i) Existem constantes $\alpha, r > 0$, tal que

$$I(u) \geq \alpha > 0 \; \text{ para todo } \; u \in X \; \text{ tal que } ||u|| = r;$$

(ii) Existe $e \in X$ tal que $||e|| > r$ e $I(e) < 0$.

Então, I possui um valor crítico $c \geq \alpha$, com

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{[0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Capítulo 2

Existência de Solução Positiva

Neste capítulo, estudaremos resultados de existência de solução positiva para a seguinte classe de problemas elípticos $p\&q$-Laplaciano com expoente crítico e não linearidade descontínua.

$$(P)\quad \begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u) + |u|^{q*-2} \text{ em } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é limitado, $2 \leq p \leq q \leq q^*$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função que tem seu conjunto de pontos de descontinuidade não-enumerável e a é uma função de classe C^1 que satisfaz certas hipóteses.

As hipóteses sobre a função a e f são as seguintes:

(a_1) Existem constantes $k_i > 0$, $i = 0, 1, 2, 3$, tais que

$$k_0 + k_1 t^{(q-p)/p} \leq a(t) \leq k_2 + k_3 t^{(q-p)/p}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(a_2) Existe $\alpha \in (0, 1]$, tal que

$$A(t) \geq \alpha a(t)t, \text{ para todo } t \geq 0,$$

onde $A(t) = \int_0^t a(s)ds$.

(a_3) A função $t \mapsto a(t^p)t^{p-2}$ é crescente.

Antes de enunciarmos as hipóteses sobre a função f, vamos recordar a definição de função N-mensurável. Recorde que uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada N-mensurável quando a composição $g(v(.)) : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável, para cada função $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável.

(f_1) Para todo $t \in \mathbb{R}$, existe $C > 0$ e $r \in (q, q^*)$ tal que

$$|f(t)| \leq C(1 + |t|^{r-1})$$

(f_2) Para todo $t \in \mathbb{R}$, existe $\theta \in \left(\frac{p}{\alpha}, q^*\right)$ tal que

$$0 \leq \theta F(t) = \theta \int_0^t f(s)ds \leq t\underline{f}(t),$$

onde

$$\underline{f}(t) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} ess \inf_{|t-s|<\epsilon} f(s) \quad \text{e} \quad \overline{f}(t) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} ess \sup_{|t-s|<\epsilon} f(s)$$

são N-mensuráveis.

(f_3) Existe $\beta > 0$, que será dado posteriormente, tal que

$$H(t - \beta) \leq f(t), \ \forall t \in \mathbb{R},$$

onde H é a função Heaviside, isto é,

$$H(t) = \begin{cases} 0 & , \text{se} \ \ t \leq 0, \\ 1 & , \text{se} \ \ t > 0. \end{cases}$$

(f_4) $\limsup_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = 0$ e $f(t) = 0$ se $t \leq 0$.

Antes de enunciarmos o resultado principal deste capítulo, precisamos definir solução fraca para (P) baseada na teoria dos funcionais localmente Lipschitz desenvolvida por Chang [10], Clarke [12], Grossinho e Tersian [23].

Definição 2.1. *Uma solução fraca para o prolema (P), é uma função $0 \leq u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ satisfazendo*

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega \rho \varphi dx + \int_\Omega |u|^{q^*-2} u \varphi dx,$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$ e

$$\rho(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \ q.t.p \ em \ \Omega.$$

Assim, uma solução fraca para (P) será um ponto crítico do funcional $I : W_0^{1,q}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por $I(u) = Q(u) - \Psi(u)$, onde

$$Q(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{1}{q^*}\int_\Omega |u|^{q^*}dx$$

e $\Psi(u) = \int_\Omega F(u)dx$.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte Teorema:

Teorema 2.1. *Assumindo as hipóteses* $(a_1)-(a_2)$ *e* $(f_1)-(f_4)$*. Então, o problema* (P) *possui uma solução positiva. Além disso, se* $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ *é uma solução do problema* (P)*, então* $|\{x \in \Omega; u(x) > \beta\}| > 0$.

2.1 Estrutura Variacional.

A demonstração do Teorema 2.1 será baseada em uma versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais localmente Lipschitz, veja o Teorema 1.1. Para tal, vamos provar alguns lemas técnicos. O próximo resultado é essencial em nosso trabalho.

Proposição 2.1. *Se* $\Psi(u) = \int_\Omega F(u)dx$*, então* $\Psi \in LL(L^r(\Omega), \mathbb{R})$ *e* $\partial\Psi(u) \subset L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$*. Além disso, se* $\rho \in \partial\Psi(u)$ *então*

$$\rho(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Demonstração. Dado $w \in L^r(\Omega)$, fixemos $R > 0$. Para cada $u, v \in B_R(w)$, onde $B_R(w) = \{z \in L^r(\Omega); |z - w|_{L^r(\Omega)} < R\}$, observe que

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| = \left|\int_\Omega \int_0^u f(s)dsdx - \int_\Omega \int_0^v f(s)dsdx\right| \leq \int_\Omega \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} |f(s)|dsdx,$$

onde $\theta(x) = \max\{u(x), v(x)\}$ e $\eta(x) = \min\{u(x), v(x)\}$.

Por (f_1),

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| \leq C\int_\Omega \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} dsdx + C\int_\Omega \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} |s|^{r-1}dsdx.$$

Para cada $r > 1$, a função $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $L(s) = \frac{s|s|^{r-1}}{r}$ é de classe C^1 com $L'(s) = |s|^{r-1}, \forall s \in \mathbb{R}$.

Como

$$|\Psi(u)-\Psi(v)| \leq C\int_\Omega |\theta(x)-\eta(x)|dx + C\int_\Omega\int_{\eta(x)}^{\theta(x)} L'(s)dsdx,$$

segue do Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$|\Psi(u)-\Psi(v)| \leq C\int_\Omega (\theta(x)-\eta(x))dx + C\int_\Omega (L(\theta(x))-L(\eta(x))dx.$$

Agora pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi(x)\in(\eta(x),\theta(x))$ tal que

$$|\Psi(u)-\Psi(v)| \leq C\int_\Omega (\theta(x)-\eta(x))dx + C\int_\Omega L'(\xi)(\theta-\eta)dx.$$

Note que $\theta(x)-\eta(x) = |u(x)-v(x)|$. Logo,

$$\begin{aligned}|\Psi(u)-\Psi(v)| &\leq C\int_\Omega |u-v|dx + C\int_\Omega L'(\xi)|u-v|dx.\\ &\leq C\int_\Omega |u-v|dx + C\int_\Omega (|u|+|v|)^{r-1}|u-v|dx.\\ &\leq C\int_\Omega |u-v|dx + C_1\int_\Omega (|u|^{r-1}+|v|^{r-1})|u-v|dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\Psi(u)-\Psi(v)| \leq C\int_\Omega |u-v|dx + C_1\int_\Omega |u|^{r-1}|u-v|dx + C_1\int_\Omega |v|^{r-1}|u-v|dx.$$

Desde que $u\in L^r(\Omega)$ então $|u|^{r-1}\in L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$. Além disso, pela imersão contínua de Sobolev segue que

$$|\Psi(u)-\Psi(v)| \leq C_2|u-v|_{L^r(\Omega)} + C_1\int_\Omega |u|^{r-1}|u-v|dx + C_1\int_\Omega |v|^{r-1}|u-v|dx.$$

Pela desigualdade de Hölder com expoentes r e $\frac{r}{r-1}$, temos

$$|\Psi(u)-\Psi(v)| \leq C_2|u-v|_{L^r(\Omega)} + C_1|u^{r-1}|_{L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)}|u-v|_{L^r(\Omega)} + C_1|v^{r-1}|_{L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)}|u-v|_{L^r(\Omega)},$$

ou seja,

$$|\Psi(u)-\Psi(v)| \leq C_2|u-v|_{L^r(\Omega)} + C_1|u|^{r-1}_{L^r(\Omega)}|u-v|_{L^r(\Omega)} + C_1|v|^{r-1}_{L^r(\Omega)}|u-v|_{L^r(\Omega)}.$$

Consequentemente

$$|\Psi(u)-\Psi(v)| \leq C_2|u-v|_{L^r(\Omega)} + C_1|u-w+w|^{r-1}_{L^r(\Omega)}|u-v|_{L^r(\Omega)} + C_1|v-w+w|^{r-1}_{L^r(\Omega)}|u-v|_{L^r(\Omega)}.$$

Da desigualdade de Minkowski,

$$|\Psi(u)-\Psi(v)| \leq C_2|u-v|_{L^r(\Omega)} + C_1(|u-w|_{L^r(\Omega)} + |w|_{L^r(\Omega)})^{r-1}|u-v|_{L^r(\Omega)}$$
$$+C_1(|v-w|_{L^r(\Omega)} + |w|_{L^r(\Omega)})^{r-1}|u-v|_{L^r(\Omega)}.$$

Desde que $u, v \in B_R(w)$, tem-se

$$|\Psi(u)-\Psi(v)| \leq C_2|u-v|_{L^r(\Omega)} + C_1(R+|w|_{L^r(\Omega)})^{r-1}|u-v|_{L^r(\Omega)} + C_1(R+|w|_{L^r(\Omega)})^{r-1}|u-v|_{L^r(\Omega)}.$$

Considerando $K_w = C_2 + 2C_1(R+|w|_{L^r(\Omega)})^{r-1}$, resulta em

$$|\Psi(u)-\Psi(v)| \leq K_w|u-v|_{L^r(\Omega)}, \ \forall u, v \in B_R(w),$$

o que mostra que $\Psi \in LL(L^r(\Omega), \mathbb{R})$.

Para provar a segunda parte da Proposição, relembramos que o gradiente generalizado de Ψ em u é dado por

$$\partial\Psi(u) = \{\xi \in (L^r(\Omega))'; \langle \xi, v\rangle \leq \Psi^0(u; v), \forall v \in L^r(\Omega)\},$$

onde $\Psi^0(u; v)$ é a derivada direcional generalizada de Ψ no ponto u na direção v, isto é,

$$\Psi^0(u; v) = \limsup_{h\to 0, \lambda\to 0} \frac{\Psi(u+h+\lambda v) - \Psi(u+h)}{\lambda}.$$

Seja $(h_n) \subset L^r(\Omega)$ e $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}^+$ tais que $h_n \to 0$ em $L^r(\Omega)$ e $\lambda_n \to 0$ em $\mathbb{R}$. Então,

$$\Psi^0(u; v) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\Psi(u+h_n+\lambda_n v) - \Psi(u+h_n)}{\lambda_n}.$$

Pela definição de Ψ, tem-se

$$\Psi^0(u; v) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\int_\Omega F(u+h_n+\lambda_n v)dx - \int_\Omega F(u+h_n)dx}{\lambda_n}.$$

Definindo

$$G_n(v) = \frac{1}{\lambda_n}(F(u+h_n+\lambda_n v) - F(u+h_n))$$

segue que

$$\Psi^0(u; v) = \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega G_n(v)dx.$$

Desde que $h_n \to 0$ em $L^r(\Omega)$, então, a menos de subsequência

$$h_n \to 0 \ \text{ q.t.p em } \Omega$$

$$|h_n(x)| \leq K(x) \in L^r(\Omega) \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{2.1}$$

Além disso, pela definição de F e por (f_1), temos

$$\begin{aligned}
|G_n(v)| &= \left| \frac{1}{\lambda_n}(F(u+h_n+\lambda_n v) - F(u+h_n)) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{\lambda_n} \int_{u+h_n}^{u+h_n+\lambda_n v} C(1+|s|^{r-1}) \right| \\
&\leq C|v| + \frac{C}{r} \frac{|u+h_n+\lambda_n v|^r - |u+h_n|^r}{\lambda_n}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Agora, vamos definir a seguinte função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(t) = |u + h_n + t\lambda_n v|^r.$$

Desde que g é contínua em $[0,1]$ e derivável em $(0,1)$, segue do Teorema do Valor Médio que dado $0 < |\lambda_n| < 1$, existe $\theta_n \in (0,1)$, tal que

$$g(1) - g(0) = g'(\theta_n).$$

Assim, como

$g(1) = |u + h_n + \lambda_n v|^r;$

$g(0) = |u + h_n|^r;$

$g'(\theta_n) = r|u + h_n + \theta_n \lambda_n v|^{r-1}|\lambda_n||v|.$

Então

$$\frac{1}{r}\frac{|u+h_n+\lambda_n v|^r - |u+h_n|^r}{\lambda_n} = |u+h_n+\theta_n\lambda_n v|^{r-1}|v|. \tag{2.3}$$

Substituindo (2.3) em (2.2), temos

$$|G_n(v)| \leq C|v| + C|u + h_n + \lambda_n\theta_n v|^{r-1}|v|.$$

Mas, notemos que

$$\begin{aligned}
|u+h_n+\lambda_n\theta_n v|^{r-1} &\leq (3\max\{u, h_n, \lambda_n\theta_n v\})^{r-1} \\
&\leq 3^{r-1}\max\{u^{r-1}, h_n^{r-1}, (\lambda_n\theta_n v)^{r-1}\} \\
&\leq 3^{r-1}(|u|^{r-1} + |h_n|^{r-1} + |\lambda_n\theta_n v|^{r-1}) \\
&\leq 3^{r-1}(|u|^{r-1} + |h_n|^{r-1} + |\lambda_n|^{r-1}|\theta_n|^{r-1}|v|^{r-1}).
\end{aligned}$$

Como $\theta_n \in (0,1)$ e $0 < |\lambda_n| < 1$, então

$$0 < |\theta_n||\lambda_n| < 1,$$

implicando em

$$0 < |\theta_n|^{r-1}|\lambda_n|^{r-1} < 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |G_n(v)| &\leq C|v| + 3^{r-1}(|u|^{r-1} + |h_n|^{r-1} + |v|^{r-1})|v| \\ &\leq C|v| + 3^{r-1}(|u|^{r-1}|v| + |h_n|^{r-1}|v| + |v|^r). \end{aligned}$$

Portanto,

$$|G_n(v)| \leq C|v| + C_1(|u|^{r-1}|v| + |h_n|^{r-1}|v| + |v|^r),$$

para algum $C_1 > 0$. De (2.1) sabemos que existe $K(x) \in L^r(\Omega)$ tal que

$$|h_n(x)| \leq K(x) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Logo, pela desigualdade de Hölder

$$C|v| + C(|u|^{r-1}|v| + |K(x)|^{r-1}|v| + |v|^r) \in L^1(\Omega).$$

Como

$$\limsup_{n\to\infty} G_n(v) = F^0(u;v),$$

segue do Lema de Fatou

$$\Psi^0(u;v) = \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega G_n(v)dx \leq \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} G_n(v)dx = \int_\Omega F^0(u;v)dx.$$

Sabemos pelo Lema 1.4 que

$$F^0(u;v) \leq \begin{cases} \overline{f}(u)v, & \text{se } v > 0, \\ \underline{f}(u)v, & \text{se } v < 0, \end{cases}$$

logo,

$$\Psi^0(u;v) \leq \int_{\{v>0\}} \overline{f}(u)vdx + \int_{\{v<0\}} \underline{f}(u)vdx, \ \forall v \in L^r(\Omega). \tag{2.4}$$

Seja $\rho(x) \in \partial\Psi(u) \subset (L^r(\Omega))'$ e suponhamos, por contradição, que existe um conjunto $A \subset \Omega$ com $|A| > 0$ tal que

$$\rho(x) < \underline{f}(u) \text{ em } A.$$

Então,

$$\int_A \rho(x)dx < \int_A \underline{f}(u)dx. \tag{2.5}$$

Note que

$$\int_\Omega \rho(x)(-\chi_A)dx = -\int_A \rho(x)dx,$$

onde χ_A é a função característica do conjunto A e $-\chi_A \in L^r(\Omega)$. Pela definição de $\partial\Psi(u)$

$$\langle \rho, (-\chi_A)\rangle \leq \Psi^0(u; -\chi_A)$$

logo,

$$-\int_A \rho(x)dx = \int_\Omega \rho(x)(-\chi_A)dx = \langle \rho, (-\chi_A)\rangle \leq \Psi^0(u; -\chi_A).$$

Por (2.4), segue que

$$\begin{aligned}
-\int_A \rho(x)dx &\leq \int_{\{-\chi_A>0\}} \overline{f}(u)(-\chi_A)dx + \int_{\{-\chi_A<0\}} \underline{f}(u)(-\chi_A)dx \\
&\leq \int_{\{-\chi_A<0\}} \underline{f}(u)(-\chi_A)dx \\
&= -\int_A \underline{f}(u)dx,
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_A \rho(x)dx \geq \int_A \underline{f}(u)dx,$$

o que contradiz (2.5). Portanto

$$\underline{f}(u(x)) \leq \rho(x) \ \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Usando o mesmo raciocínio, teremos

$$\rho(x) \leq \overline{f}(u(x)) \ \text{ q.t.p em } \Omega,$$

concluindo que

$$\rho(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \text{ q.t.p em } \Omega.$$

□

Pela Proposição 2.5, veja Apêndice B, $Q \in C^1(W_0^{1,q}(\Omega), \mathbb{R})$, como $\Psi \in LL(L^r(\Omega), \mathbb{R})$ segue que $I \in LL(W_0^{1,q}(\Omega), \mathbb{R})$, e desde que

$$I(u) = Q(u) - \Psi(u),$$

usando as propriedades (P_4) e (P_5) de gradiente generalizado, temos

$$\partial I(u) = \{Q'(u)\} - \partial\Psi(u), \ \forall u \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

No seguinte resultado, mostraremos que a condição de Palais-Smale para o funcional I, ocorre abaixo de um certo nível c.

Lema 2.1. *O funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$ para*

$$c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^*}\right).(k_1 S)^{\frac{N}{q}}$$

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I. Então,

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \lambda(u_n) \to 0, \tag{2.6}$$

onde $\lambda(u_n) = \min\{||\xi||_*; \xi \in \partial I(u_n)\}$. Considere $(w_n) \subset \partial I(u_n)$ tal que

$$||w_n||_* \ = \ \lambda(u_n) = o_n(1),$$

e

$$w_n \ = \ Q'(u_n) - \overline{\rho}_n,$$

onde $\overline{\rho}_n \in \partial\Psi(u)$. Desta forma temos

$$\langle w_n, u_n\rangle = Q'(u_n)u_n - \langle\overline{\rho}_n, u_n, \rangle \ \ \forall u_n \in W_0^{1,q}(\Omega),$$

ou seja,

$$\langle w_n, u_n\rangle = \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_n dx - \int_\Omega |u_n|^{q^*-2}u_n u_n dx - \int_\Omega \rho_n u_n dx, \forall u_n \in W_0^{1,q}.$$

Mostraremos, primeiramente que (u_n) é limitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle w_n, u_n\rangle &\leq |I(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle w_n, u_n\rangle| \\ &\leq |I(u_n)| + |\frac{1}{\theta}\langle w_n, u_n\rangle|. \end{aligned}$$

De (2.6) temos que

$$|I(u_n)| < M, \forall n \in \mathbb{N}$$

e além disso,

$$-\langle w_n, u_n\rangle \leq |\langle w_n, u_n\rangle| \leq \|w_n\|_* \|u_n\| \leq \theta \|u_n\|, \ \forall n \geq n_0.$$

Portanto,

$$I(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle w_n, u_n\rangle \leq M + \|u_n\|, \ \forall n \geq n_0 \tag{2.7}$$

Por outro lado, usando a definição do funcional I, a expressão de $Q'(u_n)$ e o Teorema de Representação de Riesz, obtemos

$$\begin{aligned}
I(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle w_n, u_n\rangle &= I(u_n) - \frac{1}{\theta} Q'(u_n)u_n + \frac{1}{\theta}\langle \overline{\rho}_n, u_n\rangle \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \frac{1}{q^*}\int_\Omega |u_n|^{q^*}dx - \int_\Omega F(u_n)dx \\
&- \frac{1}{\theta}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_n dx + \frac{1}{\theta}\int_\Omega |u_n|^{q^*-2}u_n u_n dx \\
&+ \frac{1}{\theta}\int_\Omega \rho_n u_n dx.
\end{aligned}$$

De (a_2), temos que

$$\begin{aligned}
I(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle w_n, u_n\rangle &\geq \frac{\alpha}{p}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx - \frac{1}{q^*}\int_\Omega |u_n|^{q^*}dx - \int_\Omega F(u_n)dx \\
&- \frac{1}{\theta}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx + \frac{1}{\theta}\int_\Omega |u_n|^{q^*}dx + \frac{1}{\theta}\int_\Omega \rho_n u_n dx,
\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
I(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle w_n, u_n\rangle &\geq \left(\frac{\alpha}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta}\rho_n u_n - F(u_n)\right)dx \\
&+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{q^*}dx.
\end{aligned}$$

Usando a condição (f_2) e a Proposição 2.1, temos

$$\frac{1}{\theta}\rho_n(x)u_n(x) \geq \frac{1}{\theta}\underline{f}(u_n(x))u_n(x) \geq F(u_n(x)) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega,$$

assim,

$$0 \leq \frac{1}{\theta}\rho_n(x)u_n(x) - F(u_n(x)) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega.$$

Logo,

$$I(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle w_n, u_n\rangle \geq \left(\frac{\alpha}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{q^*} dx.$$

Novamente de (f_2), temos que $\theta < q^*$ e assim

$$\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{q^*} dx > 0.$$

Dessa forma,

$$I(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle w_n, u_n\rangle \geq \left(\frac{\alpha}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx.$$

Usando (a_1), obtemos

$$\begin{aligned} a(|\nabla u_n|^p) &\geq k_0 + k_1(|\nabla u_n|^p)^{(q-p)/p} \\ &= k_0 + k_1(|\nabla u_n|)^{(q-p)} \\ &\geq k_1(|\nabla u_n|)^{(q-p)}, \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle w_n, u_n\rangle &\geq \left(\frac{\alpha}{p} - \frac{1}{\theta}\right) k_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^q dx \\ &= \left(\frac{\alpha}{p} - \frac{1}{\theta}\right) k_1 ||u_n||^q. \end{aligned} \tag{2.8}$$

De (2.7) e (2.8) segue que

$$M + \|u_n\| \geq \left(\frac{\alpha}{p} - \frac{1}{\theta}\right) k_1 ||u_n||^q.$$

Desde que $\theta > \frac{p}{\alpha}$, concluímos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$. Assim, desde que $W_0^{1,q}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, segue que, a menos de subsequencia, existe $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,q}(\Omega), \tag{2.9}$$

$$u_n \to u \text{ em } L^s(\Omega), \text{ com } 1 \leq s < q^*. \tag{2.10}$$

Logo pelo Teorema de Vainberg, existe $h \in L^s(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u, \quad \text{q.t.p em } \Omega \tag{2.11}$$

$$|u_n| \leq h(x), \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Afirmação 2.1. $\displaystyle\int_\Omega |u_n|^{q^*}dx \to \int_\Omega |u|^{q^*}dx.$

Note que, estendendo por zero as funções de $W_0^{1,q}(\Omega)$ fora de Ω, podemos considerar $W_0^{1,q}(\Omega) \subset D^{1,q}(\mathbb{R}^n)$. Assim,

$$\begin{aligned} |\nabla u_n|^q &\rightharpoonup |\nabla u|^q + \mu \\ |u_n|^{q^*} &\rightharpoonup |u|^{q^*} + \nu, \end{aligned}$$

no sentido das medidas de Radon.

Pelo Princípio de Concentração e Compacidade de Lions, existe um conjunto de índices J, no máximo enumerável, sequencias $(x_i) \subset \Omega$, $(\mu_i), (\nu_i) \subset [0, +\infty)$ tais que

$$\nu = \sum_{i \in J} \nu_i \delta_{x_i} \ , \ \mu \geq \sum_{i \in J} \mu_i \delta_{x_i} \ \text{ e } \ S\nu_i^{\frac{q}{q^*}} \leq \mu_i,$$

para todo $i \in J$, onde δ_{x_i} é chamado de medida de Dirac de massa 1 em $x_i \in \Omega$.

Vamos mostrar que $J = \emptyset$. De fato, suponhamos, por contradição, que $J \neq \emptyset$, fixe $i \in J$ e sem perda de generalidade, suponhamos que $B_2(0) \subset \Omega$.

Considere $\psi \in C_o^\infty(\Omega)$ tal que $\psi \equiv 1$ em $B_1(0)$, $\psi \equiv 0$ em $\Omega \setminus B_2(0)$ e $|\nabla \psi|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2$ e defina

$$\psi_\varrho(x) = \psi\left(\frac{(x - x_i)}{\varrho}\right), \quad \text{onde } \varrho > 0.$$

Desde que (u_n) é limitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$, segue que $(\psi_\varrho u_n)$ é também limitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$, logo

$$\langle w_n, \psi_\varrho u_n \rangle \leq ||w_n||_* ||\psi_\varrho u_n|| \to 0,$$

isto é,

$$\langle w_n, \psi_\varrho u_n \rangle = o_n(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(\psi_\varrho u_n)dx = &\int_\Omega |u_n|^{q^*-2}u_n(\psi_\varrho u_n)dx \\ &+ \int_\Omega \rho_n(\psi_\varrho u_n)dx + o_n(1). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Note que,

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(\psi_\varrho u_n)dx &= \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \psi_\varrho u_n dx \\ &+ \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_n \psi_\varrho dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(\psi_\varrho u_n)dx &= \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \psi_\varrho u_n dx \\ &+ \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p \psi_\varrho dx.\end{aligned}$$

Substituindo a expressão anterior em (2.12) obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p \psi_\varrho dx &= -\int_\Omega u_n a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \psi_\varrho dx + \int_\Omega |u_n|^{q^*}\psi_\varrho dx \quad (2.13)\\ &+ \int_\Omega \rho_n \psi_\varrho u_n dx + o_n(1).\end{aligned}$$

Note que

$$\left|\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-1} u_n \nabla \psi_\varrho dx\right| \leq \int_\Omega |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-1} u_n \nabla \psi_\varrho| dx. \quad (2.14)$$

Usando (a_1) segue que,

$$a(|\nabla u_n|^p) \leq k_2 + k_3|\nabla u_n|^{q-p},$$

ou seja,

$$a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-1} \leq k_2|\nabla u_n|^{p-1} + k_3|\nabla u_n|^{q-1},$$

assim,

$$\int_\Omega |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-1}|u_n \nabla \psi_\varrho| dx \leq k_2 \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1}|u_n \nabla \psi_\varrho| dx + k_3 \int_\Omega |\nabla u_n|^{q-1}|u_n \nabla \psi_\varrho| dx.$$

Da desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{p}{p-1}$ e p, obtemos

$$k_2 \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1}|u_n \nabla \psi_\varrho| dx \leq k_2 \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} . \left(\int_\Omega |u_n \nabla \psi_\varrho|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando a desigualdade de Hölder novamente, com os expoentes $\frac{q}{q-1}$ e q, segue-se

$$k_3 \int_\Omega |\nabla u_n|^{q-1}|u_n \nabla \psi_\varrho| dx \leq k_3 \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^q dx\right)^{\frac{q-1}{q}} . \left(\int_\Omega |u_n \nabla \psi_\varrho|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Desde que o $supp(\psi_\varrho)$ é compacto e está contido em $B_{2\varrho}(x_i)$ temos que

$$k_2 \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1}|u_n \nabla \psi_\varrho| dx \leq k_2 \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |\nabla u_n|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} . \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u_n \nabla \psi_\varrho|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$k_3 \int_\Omega |\nabla u_n|^{q-1}|u_n \nabla \psi_\varrho| dx \leq k_3 \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |\nabla u_n|^q dx\right)^{\frac{q-1}{q}} . \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u_n \nabla \psi_\varrho|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Usando o fato de (u_n) ser limitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$, obtemos as seguintes desigualdades

$$k_2 \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1} |u_n \nabla \psi_\varrho| dx \;\; \leq \;\; C_1 \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u_n \nabla \psi_\varrho|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.15}$$

e

$$k_3 \int_\Omega |\nabla u_n|^{q-1} |u_n \nabla \psi_\varrho| dx \;\; \leq \;\; C_2 \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u_n \nabla \psi_\varrho|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.16}$$

Portanto, de (2.14), (2.15) e (2.16)

$$\left| \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p) |\nabla u_n|^{p-1} u_n \nabla \psi_\varrho dx \right| \leq C_1 \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u_n \nabla \psi_\varrho|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.17}$$

$$+ C_2 \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u_n \nabla \psi_\varrho|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Agora, desde que $\psi_\varrho \equiv 1$ em $B_\varrho(x_i)$, então $\nabla \psi_\varrho = 0$ em $B_\varrho(x_i)$, logo podemos escrever

$$\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u_n \nabla \psi_\varrho|^p dx \right) = \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i) \setminus B_\varrho(x_i)} |u_n \nabla \psi_\varrho|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Considere

$$f_n(x) = |u_n(x)|^p |\nabla \psi_\varrho(x)|^p.$$

de (2.10), segue que

$$u_n \to u \;\; \text{em} \;\; L^q(B_{2\varrho}(x_i) \setminus B_\varrho(x_i)).$$

Pelo Teorema de Vainberg

$$u_n(x) \to u(x) \;\; \text{q.t.p em} \;\; B_{2\varrho}(x_i) \setminus B_\varrho(x_i)$$

e existe $g \in L^q(B_{2\varrho}(x_i) \setminus B_\varrho(x_i))$ tal que

$$|u_n(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p em } \; B_{2\varrho}(x_i) \setminus B_\varrho(x_i).$$

Assim,

$$f_n(x) \to f(x) \text{ q.t.p em } \; B_{2\varrho}(x_i) \setminus B_\varrho(x_i)$$

e além disso

$$|f_n(x)| = |u_n(x)|^p |\nabla \psi_\varrho(x)|^p \leq g(x)^p |\nabla \psi_\varrho(x)|^p \in L^1(\Omega),$$

logo, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|u_n|^p|\nabla\psi_\varrho|^p dx=\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|u|^p|\nabla\psi_\varrho|^p dx. \tag{2.18}$$

Logo, de (2.15) e (2.18) concluimos que

$$\limsup_{n\to+\infty} k_2\int_\Omega|\nabla u_n|^{p-1}|u_n\nabla\psi_\varrho|dx\le C_1\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|u|^p|\nabla\psi_\varrho|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando novamente a desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{N}{N-p}$ e $\frac{N}{p}$, no segundo membro da desigualdade anterior, obtemos

$$C_1\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)\setminus B_{\varrho(x_i)}}|u|^p|\nabla\psi_\varrho|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le C_1\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)\setminus B_{\varrho(x_i)}}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{1}{p^*}}\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)\setminus B_{\varrho(x_i)}}|\nabla\psi_\varrho|^N dx\right)^{\frac{1}{N}}$$

E desde que $B_{2\varrho}(x_i)\setminus B_{\varrho(x_i)}\subset B_{2\varrho}(x_i)$ segue que

$$C_1\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)\setminus B_{\varrho(x_i)}}|u|^p|\nabla\psi_\varrho|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le C_1\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{1}{p^*}}\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|\nabla\psi_\varrho|^N dx\right)^{\frac{1}{N}}. \tag{2.19}$$

Fazendo $y=\frac{x-x_i}{\varrho}$, pela regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial\psi_\varrho(x)}{\partial x_j}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi(y)}{\partial y_j},$$

e portanto

$$\nabla\psi_\varrho(x)=\frac{1}{\varrho}\nabla\psi(y), dx=\varrho^N dy.$$

Portanto, se $x\in B_{2\varrho}(x_i)$ tem-se $y\in B_2(0)$. Assim,

$$\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|\nabla\psi_\varrho|^N dx\right)^{\frac{1}{N}}=\left(\int_{B_2(0)}\frac{1}{\varrho^N}|\nabla\psi|^N\varrho^N dy\right)^{\frac{1}{N}}=\left(\int_{B_2(0)}|\nabla\psi|^N dy\right)^{\frac{1}{N}}.$$

Logo, de (2.19), temos

$$C_1\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)\setminus B_\varrho(x_i)}|u|^p|\nabla\psi_\varrho|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le C_3\left(\int_{B_\varrho(x_i)}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Agora, notemos que para cada $\varrho>0$

$$||u(x)|^{p^*}\chi_{B_\varrho(x_i)}(x)|\le|u(x)|^{p^*}\in L^1(\Omega),$$

fazendo $\varrho \to 0$

$$|u(x)|^{p^*}\chi_{B_\varrho(x_i)}(x) \to 0 \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u|^{p^*}dx = 0,$$

logo,

$$\lim_{\varrho\to 0}\left[\limsup_{n\to+\infty} k_2\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1}|u_n\nabla\psi_\varrho|dx\right] = 0.$$

Procedendo de forma análoga para a expressão (2.16), obtemos

$$\lim_{\varrho\to 0}\left[\limsup_{n\to+\infty} k_3\int_\Omega |\nabla u_n|^{q-1}|u_n\nabla\psi_\varrho|dx\right] = 0.$$

Assim, de (2.17), segue-se que

$$\lim_{\varrho\to 0}\left[\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-1}u_n\nabla\psi_\varrho dx\right] = 0. \tag{2.20}$$

Agora, usamdo a Proposição (2.1) e a hipótese (f_1), temos

$$0 \le \rho_n \le C(1+|u_n|^{r-1}) \text{ q.t.p em } \Omega,$$

então

$$\int_{B_{2\varrho}(x_i)} \rho_n\psi_\varrho u_n dx \le C\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}\psi_\varrho|u_n|dx + \int_{B_{2\varrho}(x_i)}\psi_\varrho|u_n|^r dx\right). \tag{2.21}$$

Desde que

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \ \Omega,$$

então,

$$|u_n(x)|\psi_\varrho(x) \to |u(x)|\psi_\varrho(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega.$$

E pelo Teorema de Vainberg existe $h \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|u_n(x)\psi_\varrho(x)| \le h(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u_n|\psi_\varrho dx = \int_{B_{2\varrho}(x_i)}|u|\psi_\varrho dx. \tag{2.22}$$

Notando que, para cada $\varrho > 0$

$$\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u|\psi_\varrho dx = \int_\Omega |u|\psi_\varrho\chi_{B_{2\varrho}(x_i)}(x)dx,$$

$$|u|\psi_\varrho \chi_{B_{2\varrho}(x_i)} \to 0, \quad q.t.p \ \text{ em } \ \Omega$$

quando $\varrho \to 0$ e que

$$||u|\psi_\varrho \chi_{B_\varrho(x_i)}| \leq |u| \leq h(x) \in L^1(\Omega),$$

segue do Teorema da Convergência de Lebesgue que

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u|\psi_\varrho dx = 0,$$

logo, de (2.22)

$$\lim_{\varrho \to 0} \left[\lim_{n \to +\infty} \int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u_n|\psi_\varrho dx \right] = 0.$$

De maneira análoga, mostra-se que

$$\lim_{\varrho \to 0} \left[\lim_{n \to +\infty} \int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u_n|^r \psi_\varrho dx \right] = 0.$$

Assim, de (2.21)

$$\lim_{\varrho \to 0} \left[\lim_{n \to +\infty} \int_{B_{2\varrho}(x_i)} \rho_n u_n \psi_\varrho dx \right] = 0. \tag{2.23}$$

De (2.13), (2.20) e (2.23) resulta que

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p \psi_\varrho dx = \int_\Omega |u_n|^{p^*} \psi_\varrho dx + o_n(1). \tag{2.24}$$

Novamente, de (a_1), obtemos

$$k_0 + k_1|\nabla u_n|^{q-p} \leq a(|\nabla u_n|^p),$$

logo,

$$k_0|\nabla u_n|^p + k_1|\nabla u_n|^q \leq a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p,$$

assim,

$$k_1|\nabla u_n|^q \leq a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p,$$

disto segue-se

$$k_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^q \psi_\varrho dx \leq \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p \psi_\varrho dx.$$

De (2.24),

$$k_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^q \psi_\varrho dx \leq \int_\Omega |u_n|^{p^*} \psi_\varrho dx.$$

passando ao limite, $n \to +\infty$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} k_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^q \psi_\varrho dx \;\; = \;\; k_1 \int_\Omega \psi_\varrho d\mu$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |u_n|^{p^*} \psi_\varrho dx \;\; = \;\; \int_\Omega \psi_\varrho d\nu.$$

Assim,

$$k_1 \int_{B_\varrho(x_i)} \psi_\varrho d\mu \leq \int_{B_\varrho(x_i)} \psi_\varrho d\nu. \tag{2.25}$$

Note que

$$\lim_{\varrho\to 0} \psi_\varrho(x)\chi_{B_\varrho(x_i)}(x) = \chi_{\{x_i\}}(x)$$

e também,

$$|\psi_\varrho(x)\chi_{B_\varrho(x_i)}(x)| \leq 1 \in L^1(\Omega)$$

segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_\Omega \psi_\varrho \chi_{B_\varrho(x_i)}(x) d\nu = \int_\Omega \chi_{\{x_i\}}(x) d\nu.$$

Logo,

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{B_\varrho(x_i)} \psi_\varrho d\nu = \lim_{\varrho\to 0} \int_\Omega \psi_\varrho \chi_{B_\varrho(x_i)}(x) d\nu = \int_\Omega \chi_{\{x_i\}}(x) d\nu = \int_{\{x_i\}} d\nu = \nu(\{x_i\}) = \nu_i.$$

De forma análoga

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{B_\varrho(x_i)} \psi_\varrho d\mu = \mu_i.$$

De (2.25), segue que

$$k_1 \mu_i \leq \nu_i,$$

pelo Princípio de Comcentração e Compacidade de Lions, tem-se

$$k_1 S \nu^{\frac{q}{q^*}} \leq k_1 \mu_i \leq \nu_i,$$

ou seja,

$$k_1 S \leq \nu_i^{\frac{q}{N}},$$

assim,

$$(k_1 S)^{\frac{N}{q}} \leq \nu_i.$$

Mostraremos que a desigualdade acima não pode ocorrer e, portanto, o conjunto J é vazio.

De fato, suponhamos por contradição que

$$(k_1 S)^{\frac{N}{q}} \leq \nu_i, \quad \text{para algum } j \in J.$$

Desde que (u_n) é uma sequência $(P.S)_c$

$$c + o_n(1) \geq I(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle w_n, u_n\rangle,$$

isto é,

$$c+o_n(1) \geq \left(\frac{\alpha}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta}\rho_n u_n - F(u_n)\right) + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{q^*} dx$$

Da hipótese $(a_2), (f_2)$ e da Proposição (2.1), segue que

$$c + o_n(1) \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{q^*} dx,$$

além disso,

$$c + o_n(1) \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{q^*} dx \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^*}\right)\int_{B_\varrho(x_i)} |u_n|^{q^*} \psi_\varrho dx.$$

Fazendo $n \to +\infty$ na desigualdade acima, temos

$$c \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^*}\right)\int_{B_\varrho(x_i)} \psi_\varrho d\nu,$$

logo, para $\varrho \to 0$ segue que

$$c \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^*}\right)\nu_i \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^*}\right)(Sk_1)^{\frac{N}{q}},$$

o que contraria a hipótese. Consequentemente, J é vazio, o que implica

$$\int_\Omega |u_n|^{q^*} dx \to \int_\Omega |u|^{q^*} dx.$$

Afirmação 2.2. *Para todo $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$, temos $\int_\Omega |u_n|^{q^*-2} u_n v dx \to \int_\Omega |u|^{q^*-2} u v dx$.*

De fato, considere a sequência $f_n = |u_n|^{q^*-2}u_n$ e a função $f = |u|^{q^*-2}u$, de (2.11), temos

$$|u_n|^{q^*-2}u_n \to |u|^{q^*-2}u \ \ \text{q.t.p em } \Omega,$$

ou seja,

$$f_n(x) \to f(x) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Notemos que $|f_n| = ||u_n|^{q^*-2}u_n| = |u_n|^{q^*-1}$. Logo, $|f_n|^{\frac{q^*}{q^*-1}} = |u_n|^{q^*}$ e assim,

$$\int_\Omega |f_n|^{\frac{q^*}{q^*-1}} dx = \int_\Omega |u_n|^{q^*} dx < +\infty,$$

pois $(u_n) \in W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega)$. Com isso, temos também que $(f_n) \subset L^{\frac{q^*}{q^*-1}}(\Omega)$. De modo análogo, temos $f \in L^{\frac{q^*}{q^*-1}}(\Omega)$. Pelo Lema de Brezis-Lieb, segue que

$$\int_\Omega f_n v dx \to \int_\Omega f v dx, \ \forall v \in L^{q^*}(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega |u_n|^{q^*-2} u_n v dx \to \int_\Omega |u|^{q^*-2} u v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,q}(\Omega),$$

provando a afirmação.

Afirmação 2.3. *$u_n \to u$ em $W_0^{1,q}(\Omega)$.*

Veja que das afirmações (2.1) e (2.2), segue que

$$\int_\Omega (|u_n|^{q^*-2}u_n)(u_n - u)dx = \int_\Omega |u_n|^{q^*} dx - \int_\Omega |u_n|^{q^*-2} u_n u dx \to \int_\Omega |u|^{q^*} dx - \int_\Omega |u|^{q^*} dx = 0$$

Isto é,

$$\int_\Omega (|u_n|^{q^*-2}u_n)(u_n - u)dx = o_n(1) \tag{2.26}$$

Além disso, usando (f_1) e da Proposição 2.1 temos

$$0 \le \rho_n \le \overline{f}(u_n) \le |f(u_n)| \le C(1 + |u_n|)^{r-1}.$$

Sendo assim

$$0 \le \rho_n \le C(1 + |u_n|)^{r-1} \text{ q.t.p em } \Omega,$$

implicando em

$$|\rho_n|^{\frac{r}{r-1}} \le [C(1 + |u_n|)^{r-1}]^{\frac{r}{r-1}} \le C2^{\frac{r}{r-1}} \max\{1, |u_n|^r\} \le C + C|u_n|^r.$$

Então,

$$\int_\Omega |\rho_n|^{\frac{r}{r-1}} dx \le C + C \int_\Omega |u_n|^r dx,$$

pelas imersões contínuas de Sobolev, tem-se

$$\int_\Omega |\rho_n|^{\frac{r}{r-1}} dx \leq C + C_1||u_n||^r. \tag{2.27}$$

Por (2.9) e (2.27), concluimos que (ρ_n) é limitada em $L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$. Da desigualdade de Hölder com expoentes r e $r/r-1$ segue que

$$\int_\Omega \rho_n(u_n - u)dx \leq |\rho_n|_{L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)} |u_n - u|_{L^r(\Omega)}.$$

Desde que (ρ_n) é limitada em $L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$ e $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \rho_n(u_n - u)dx = o_n(1). \tag{2.28}$$

Agora para todo $t \geq 0$ obtemos a seguinte desigualdade, ver [20],

$$C|x-y|^q \leq \left\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y \right\rangle, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N, N \geq 1. \tag{2.29}$$

Desde que $(u_n - u)$ é limitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$ e $||w_n||_* = o_n(1)$, temos

$$\langle w_n, u_n - u\rangle = o_n(1).$$

Assim, de (2.29) obtemos,

$$C\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^q dx \ \leq \ \int_\Omega \left(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right).(\nabla u_n - \nabla u)dx.$$

No entanto, note que

$$\begin{aligned}
C||u_n - u||^q &\leq \int_\Omega \left(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right).(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&= \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&- \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&\leq \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&\leq \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx - \int_\Omega (|u_n|^{q^*-2}u_n)(u_n - u)dx \\
&- \int_\Omega \rho_n(u_n - u)dx \\
&= \langle w_n, u_n - u\rangle = o_n(1),
\end{aligned}$$

onde concluimos que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad W_0^{1,q}(\Omega).$$

□

Lema 2.2. *i) Existem* $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ *e* $T > 0$ *tais que*

$$\max_{t \in [0,T]} I(tv) < c$$

ii) Existe $e \in W_0^{1,q}(\Omega)$*, tal que* $I(e) < 0$ *para todo e com* $||e|| > r$*.*

iii) Existe $\rho > 0$*, tal que* $I(u) \geq \rho$*, para todo* $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ *com* $||u|| = r$*.*

Demonstração. Considere $v \in C_o^{\infty}(\Omega)$ tal que $||v|| = 1$, $|\Upsilon = \{x \in \Omega; Tv > \beta\}| > 0$, e a funçao $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$j(t) = \frac{k_2 t^p}{p}||v||_{1,p}^p + \frac{k_3 t^q}{q} - \frac{t^{q^*}}{q^*}|v|_{L^{q^*}(\Omega)}^{q^*}$$

Seja $t_* > 0$ tal que $j'(t_*) = 0$. Observe que $j'(t) > 0$, para todo $t \in (0, t_*)$ e $j'(t) < 0$, para todo $t \in (t_*, +\infty)$. O que mostra que j é crescente em $(0, t_*)$ e decrescente em $(t_*, +\infty)$, consequentemente

$$j(t_*) = \max_{t \geq 0} j(t).$$

Assim, podemos escolher $T > 0$ tal que

a) $T < t_*$;

b) $j(T) < j(t_*)$;

c) $j(T) < c$.

Prova de $i)$. Utilizando a hipótese (a_1) e $||v|| = 1$, temos

$$a(s) \leq k_2 + k_3 s^{\frac{q-p}{p}}, \ \forall s \geq 0$$

Logo,

$$A(|\nabla(tv)|^p) = \int_0^{|\nabla(tv)|^p} a(s)ds \leq k_2 \int_0^{|\nabla(tv)|^p} ds + k_3 \int_0^{|\nabla(tv)|^p} s^{\frac{q-p}{p}} ds.$$

Assim,

$$A(|\nabla(tv)|^p) \leq k_2 \int_0^{|\nabla(tv)|^p} ds + k_3 \int_0^{|\nabla(tv)|^p} s^{\frac{q-p}{p}} ds.$$

Calculando as integrais acima e multiplicando por $\frac{1}{p}$ em ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$\frac{1}{p}A(|\nabla(tv)|^p) \leq \frac{k_2 t^p}{p}|\nabla v|^p + \frac{k_3 t^q}{q}|\nabla v|^q,$$

o que implica

$$\frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla(tv)|^p)dx \leq \frac{k_2t^p}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p dx + \frac{k_3t^q}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q dx.$$

Sendo $F(tv) \geq 0$, e desde que

$$I(tv) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla(tv)|^p)dx - \frac{t^{q^*}}{q^*}\int_\Omega |v|^{q^*}dx - \int_\Omega F(tv)dx,$$

temos

$$\begin{aligned} I(tv) &\leq \frac{k_2t^p}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p dx + \frac{k_3t^q}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q dx - \frac{t^{q^*}}{q^*}\int_\Omega |v|^{q^*}dx \\ &= \frac{k_2t^p}{p}||v||_{1,p}^p + \frac{k_3t^q}{q} - \frac{t^{q^*}}{q^*}|v|_{L^{q^*}(\Omega)}^{q^*} \\ &= j(t) \leq \max_{t\in[0,T]} j(t) \leq j(T) \leq j(T_*) < c. \end{aligned}$$

Então

$$\max_{t\in[0,T]} I(tv) < c.$$

Prova de *ii*). Note que de (f_2) e (f_3) e fixando $\beta = \frac{T}{2}$ obtemos $e = Tv$ com $||e|| = T$ tal que

$$F(Tv) = \int_0^{Tv} f(s)ds \geq \int_0^{Tv} H(s-\beta)ds,$$

onde

$$\int_0^{Tv} H(s-\beta)ds = \begin{cases} 0 & , \text{se } \; Tv \leq \beta \\ Tv-\beta & , \text{se } \; Tv > \beta \end{cases}$$

Disto vem que

$$\begin{aligned} I(e) = I(Tv) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla(Tv)|^p)dx - \frac{T^{q^*}}{q^*}\int_\Omega |v|^{q^*}dx - \int_\Omega F(Tv)dx \\ &\leq j(T) - \int_\Omega F(Tv)dx \\ &\leq j(T) - \int_\Upsilon (Tv-\beta)dx < 0 \end{aligned}$$

Para $T \approx 0$. Logo, $I(e) < 0$.

Prova de *iii*). Observe que da hipótese (a_1) obtemos

$$A(|\nabla(u)|^p) = \int_0^{|\nabla(u)|^p} a(s)ds \geq k_1\int_0^{|\nabla(u)|^p} s^{\frac{q-p}{p}}ds.$$

Calculando as integrais acima e multiplicando por $\frac{1}{p}$ em ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$\frac{1}{p}A(|\nabla(u)|^p) \geq \frac{k_1}{q}|\nabla u|^q,$$

o que implica

$$\frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla(u)|^p)dx \geq \frac{k_1}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q dx = \frac{k_1}{q}||u||^q.$$

Das imersões contínuas de Sobolev, temos

$$I(u) \geq \frac{k_1}{q}||u||^q - C_1||u||^{q*} - \int_\Omega F(u)dx.$$

Agora, de (f_1) e (f_2), segue que

$$\begin{aligned} F(u) &\leq \int_0^u f(s)ds \leq C\int_0^u ds + C\int_0^u |s|^{r-1}ds \\ &= C|u| + C|u|^r. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_\Omega F(u)dx \leq C\int_\Omega |u|dx + C\int_\Omega |u|^r dx.$$

Novamente pelas imersões contínuas de Sobolev temos

$$I(u) \geq \frac{k_1}{q}||u||^q - C_1||u||^{q^*} - C_2||u|| - C_3||u||^r.$$

Seja $\gamma > 0$ a ser fixado posteriormente. Para $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ com $||u|| = \gamma$ temos

$$I(u) \geq \frac{k_1}{q}\gamma^q - C_1\gamma^{q^*} - C_2\gamma - C_3\gamma^r.$$

Para que $I(u) \geq 0$, temos que ter

$$\frac{k_1}{q}\gamma^q - C_1\gamma^{q^*} - C_2\gamma - C_3\gamma^r > 0,$$

ou seja,

$$\gamma^q\left(\frac{k_1}{q} - C_1\gamma^{q^*-q} - C_2\gamma^{1-q} - C_3\gamma^{r-q}\right) > 0.$$

Sabemos que $\gamma^q > 0$, então devemos ter

$$\frac{k_1}{q} - C_1\gamma^{q^*-q} - C_2\gamma^{1-q} - C_3\gamma^{r-q} > 0,$$

isto é,

$$\frac{k_1}{q} - (C_2 + C_1\gamma^{q^*-1} + C_3\gamma^{r-1})\gamma^{1-q} > 0.$$

Note que para $0 < \gamma < 1$, temos

$$C_1\gamma^{q^*-1} + C_3\gamma^{r-1} < C_1 + C_3,$$

logo,

$$\frac{k_1}{q} - (C_2 + C_1\gamma^{q^*-1} + C_3\gamma^{r-1})\gamma^{1-q} > \frac{k_1}{q} - (C_2 + C_1 + C_3)\gamma^{1-q} > 0.$$

Fazendo $C_0 = C_1 + C_2 + C_3$, segue que

$$\frac{k_1}{q} > C_0\gamma^{1-q},$$

então,

$$\gamma < \left(\frac{k_1}{qC_0}\right)^{\frac{1}{1-q}}.$$

Tomando $\gamma_0 = \min\left\{1, \left(\frac{k_1}{qC_0}\right)^{\frac{1}{1-q}}\right\} > 0$, temos

$$I(u) \geq \alpha > 0,\ \forall u \in W_0^{1,q}(\Omega) \text{ com } ||u|| = \gamma,$$

provando o lema. □

Na próxima seção usaremos os lemas técnicos da seção anterior para provar o Teorema 2.1.

2.2 Demonstração do Teorema 2.1

Demonstração. Pelo Lema 2.1 segue que o funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$ e do Lema 2.2 podemos concluir que I satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha. Sabendo disto, concluimos que c é um valor crítico para o funcional I, ou seja, existe $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ tal que $0 \in \partial I(u)$. Mostrando que $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ é uma solução fraca para o problema (P).

Usando u^- como função teste, concluimos que

$$u = u^+ \geq 0.$$

Agora vamos provar que o conjunto

$$|\{x \in \Omega : u(x) > \beta\}|,$$

possui medida positiva.

Suponha, por contradição, que $u(x) \leq \beta$ q.t.p em Ω. Então, desde que u é solução de (P), temos

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx = \int_\Omega \rho u dx + \int_\Omega |u|^{q^*} dx.$$

Usando (a_1) segue que

$$\begin{aligned} k_1||u||^q = k_1 \int_\Omega |\nabla u|^q dx &\leq k_0 \int_\Omega |\nabla u|^p dx + k_1 \int_\Omega |\nabla u|^q dx \\ &\leq \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx = \int_\Omega \rho u dx + \int_\Omega |u|^{q^*} dx. \end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 2.1, tem-se

$$\rho \leq \overline{f}(u) \leq |f(u)| \leq C(1 + |u|^{r-1}),$$

disto vem que,

$$\int_\Omega \rho u dx \leq \int_\Omega C(|u| + |u|^r) dx,$$

consequentemente,

$$k_1||u||^q \leq C \int_\Omega (|u| + |u|^r) dx + \int_\Omega |u|^{q^*} dx.$$

Como $u(x) \leq \beta$ por hipótese, temos

$$\begin{aligned} k_1||u||^q &\leq C \int_\Omega (|u| + |u|^r) dx + \int_\Omega |u|^{q^*} dx. \\ &\leq C(\beta + \beta^r)|\Omega| + \beta|\Omega| \\ &\leq C\beta|\Omega| + C\beta^r|\Omega| + \beta|\Omega|. \end{aligned}$$

Tomando $\hat{C} = \max\{C, 1\}$ e $\beta < 1$, resulta

$$k_1||u||^q \leq 3\hat{C}\beta|\Omega|.$$

Desde que $I(u) = c$, existe $M > 0$ tal que $||u|| \geq M$. Então,

$$k_1 M^q \leq k_1||u||^q \leq 3\hat{C}\beta|\Omega|.$$

Mas essa desigualdade é impossível se escolhermos

$$\beta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{T}{2}, \frac{k_1 M^q}{3\hat{C}\beta|\Omega|}\right\}$$

Portanto, $|\{x \in \Omega : u(x) > \beta\}| > 0$, o que encerra a prova do Teorema principal.

$\square$

Apêndice A

2.3 Resultados Básicos

Apresentaremos aqui alguns resultados que foram usados ao longo desta dissertação.

Teorema 2.2. ***(Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Seja E um conjunto mensurável do $\mathbb{R}^n$ e seja (f_j) uma sequência de funções mensuráveis tal que*

$$f_j(x) \to f(x) \text{ q.t.p em } E,$$

onde f é uma função mensurável. Se existir uma função $g \in L^1(E)$ tal que

$$|f_j(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p em } E,$$

então

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j(x) d\mu = \int_E f(x) d\mu.$$

Teorema 2.3. ***(Vainberg)*** *Sejam (f_j) uma sequência de funções em $L^q(\Omega)$ e $f \in L^q(\Omega)$ tais que*

$$f_j \to f \text{ em } L^q(\Omega).$$

Então, existe $(f_{j_k}) \subset (f_j)$ e uma função $g \in L^q(\Omega)$ tal que

$$|f_{j_k}(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p em } \Omega$$

e

$$f_{j_k}(x) \to f(x) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Teorema 2.4. ***(Desigualdade de Holdër)*** *Sejam Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $1 \leq p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$fg \in L^1(\Omega) \quad e \quad |fg|_{L^1(\Omega)} \leq |f|_{L^p(\Omega)} |g|_{L^q(\Omega)}$$

Teorema 2.5. ***(Representação de Riez)*** *Seja* $1 < p < +\infty$ *e* $\varphi : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ *um funcional linear e contínuo. Então existe uma função* $g \in L^q(\Omega)$*, onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega g f d\mu, \ \ \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso, $||\varphi||_{(L^p(\Omega))'} = |g|_{L^q(\Omega)}$.

Lema 2.3. ***(Brézis-Lieb)*** *Sejam* Ω *um conjunto aberto do* $\mathbb{R}^N$*,* $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *com* $p > 1$*. Suponhamos que* $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω *e exista* $C > 0$ *tal que*

$$\int_\Omega |f_n|^p dx < C \ , \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\int_\Omega f_n \varphi dx \to \int_\Omega f \varphi dx \ , \ \ \forall \varphi \in L^q(\Omega),$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lema 2.4. ***(Princípio de Concentração e Compacidade de Lions)*** *Seja* $(u_n) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *uma sequência tal que* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*. Suponhamos que*

$$\nu_n = |u_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu$$

e

$$\mu_n = |\nabla u_n|^p \rightharpoonup \mu,$$

no sentido das medidas de Randon. Então,

i) *Existe um conjunto* J *de índices, no máximo enumerável, duas famílias* $\{\nu_j\}_{j\in J}$ *e* $\{\mu_j\}_{j\in J}$ *de números reais não negativos e uma família de pontos* $\{x_j\}_{j\in J}$ *do* $\mathbb{R}^N$ *tais que*

$$\nu = |u|^{p^*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}$$

e

$$\mu \geq |\nabla u|^p + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j},$$

onde δ_{x_j} *é a medida de Dirac de massa 1 concentrada em* $x_j \in \mathbb{R}^N$.

ii)

$$S \nu^{\frac{p}{p^*}} \leq \mu_j$$

e

$$\sum_{j\in J} \nu_j^{\frac{p}{p^*}} < +\infty$$

onde S é a melhor constante da imerção $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 2.2. *(ver [20]) Seja $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função de classe C^1 tal que, satisfaz as hipóteses (a_1) e (a_2). Então para $p \leq q$ temos*

$$C|x-y|^q \leq \left\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y \right\rangle,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

Demonstração. Observe que pelo produto interno no $\mathbb{R}^n$ temos

$$\left\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} (a(|x|^p)|x|^{p-2}x_j - a(|y|^p)|y|^{p-2}y_j)(x_j - y_j)$$

e para todo $z, \xi \in \mathbb{R}^n$ temos pela derivada parcial do produto

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j &= (p-2)|z|^{p-4}\sum_{i,j=1}^{n} a(|z|^p)z_iz_j\xi_i\xi_j + \sum_{i,j=1}^{n} a(|z|^p)|z|^{p-2}\delta_{i,j}\xi_i\xi_j \\ &\quad + p\sum_{i,j=1}^{n} a'(|z|^p)|z|^{2p-4}z_iz_j\xi_i\xi_j. \end{aligned}$$

Desde que

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_iz_j\xi_i\xi_j = \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\xi_i\right)^2$$

temos

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j = \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\xi_j\right)^2 |z|^{p-4}[(p-2)a(|z|^p) + pa'(|z|^p)|z|^p] + a(|z|^p)|z|^{p-2}|\xi| \tag{2.30}$$

Desde que $t \mapsto a(t^p)t^{p-2}$ é crescente, isto é,

$$0 < [(p-2)a(|z|^p) + pa'(|z|^p)|z|^p]|z|^{p-3}. \tag{2.31}$$

De (2.30) e (2.31) temos

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j \geq a(|z|^p)|z|^{p-2}|\xi|^2. \tag{2.32}$$

Note que, se $|y| \geq |x|$ temos

$$|y| \geq \frac{1}{2}|x-y| \quad \text{ou ainda} \quad |y| - \frac{1}{4}|x-y| \geq \frac{1}{4}|x-y|.$$

Logo, para $t \in [0, \frac{1}{4}]$ temos

$$|y + t(x-y)| \geq |y| - t|x-y| \geq \frac{1}{4}|x-y|,$$

tomando $z = y + t(x-y)$ e $\xi = x - y$. Pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_j &= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_j\frac{d}{dt}(z_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_j\xi_i.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_j\xi_i \qquad (2.33) \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_j\right]_0^1 \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n}(a(|y+t(x-y)|^p)|y+t(x-y)|^{p-2}(y_j + t(x_j - y_j)))(x_j - y_j)\right]_0^1 \\
&= \sum_{j=1}^{n}(a(|x|^p)|x|^{p-2}x_j - a(|y|^p)|y|^{p-2}y_j)(x_j - y_j)
\end{aligned}$$

Segue de (2.32) e para todo $t \in [0, \frac{1}{4}]$

$$\left\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x - y\right\rangle \geq a(|y - t(x-y)|^p)|y - t(x-y)|^{p-2}|x-y|^2$$

por (a_1) obtemos

$$\begin{aligned}
a(|y-t(x-y)|^p)|y-t(x-y)|^{p-2}|x-y|^2 &\geq (\xi_0 + \xi_1|y+t(x-y)|^{q-p})|y-t(x-y)|^{p-2}|x-y|^2 \\
&\geq \xi_1|y+t(x-y)|^{q-p}|y-t(x-y)|^{p-2}|x-y|^2 \\
&= \xi_1|y+t(x-y)|^{q-2}|x-y|^2 \\
&= \frac{\xi_1}{4}|x-y|^{q-2}|x-y|^2 \\
&\geq C|x-y|^q. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

□

Apêndice B

2.4 Funcionais Diferenciáveis

Neste apêndice, vamos mostrar que o funcional é diferenciável, para isso consideremos algumas definições:

Definição 2.2. *Dado um Espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$ dizemos que I possui Derivada de Fréchet no ponto $u \in X$ quando existir um funcional $T \in X'$ tal que*

$$\lim_{||v|| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Tv}{||v||} = 0$$

A derivada de Fréchet no ponto u, quando existir, é única e denotamos por $I'(u)$.

Definição 2.3. *Dado um Espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$ dizemos que I possui Derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existir um funcional linear $T_0 \in X'$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - T_0 v}{t} = 0, \quad \forall v \in X.$$

A derivada de Fréchet no ponto u, quando existir, é única e denotamos por $DI(u)$.

Definição 2.4. *Se A é um conjunto aberto em X, dizemos que I é de classe C^1 em X ou que $I \in C^1(A, \mathbb{R})$, quando a Derivada de Fréchet de I existir em todo ponto $u \in X$ e a aplicação $I' : A \to X'$ for contínua.*

Proposição 2.3. *Se $I : X \to \mathbb{R}$ é Fréchet diferenciável em $u \in X$ então I é Gateaux diferenciável.*

Proposição 2.4. *Se I tem derivada de Gateaux contínua sobre X então I é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$.*

Proposição 2.5. *O funcional $Q \in C^1(W_0^{1,q}(\Omega), \mathbb{R})$ e para todo $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$, temos:*

$$Q'(u)v = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx - \int_\Omega |u|^{q^*-2}uv dx$$

Demonstração. De fato, primeiramente denotemos por

$$J_1(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx \quad \text{e} \quad J_2(u) = \frac{1}{q^*}\int_\Omega |u|^{q^*}dx,$$

assim, basta mostrarmos que J_1 e $J_2 \in C^1(W_0^{1,q}(\Omega), \mathbb{R})$. Para tanto, mostraremos que a derivada de J_1 e J_2, no sentido de Gateaux, são contínuas. Primeiramente para J_1, considere $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$, $u, v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ e a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(s) = \frac{1}{p}A(|\nabla(u + stv)|^p).$$

Onde:

a) $f'(s) = \dfrac{1}{p}a(|\nabla(u + stv)|^p)p|\nabla(u + stv)|^{p-2}\nabla(u + stv)tv;$

b) $f(1) = \dfrac{1}{p}A(|\nabla(u + tv)|^p);$

c) $f(0) = \dfrac{1}{p}A(|\nabla u|^p).$

Notando que f é diferenciável em $[0,1]$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(\lambda),$$

ou seja,

$$\frac{1}{p}A(|\nabla(u + tv)|^p) - \frac{1}{p}A(|\nabla(u)|^p) = ta(|\nabla(u + \lambda tv)|^p)|\nabla(u + \lambda tv)|^{p-2}\nabla(u + \lambda tv)\nabla v,$$

observe que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{p}A(|\nabla(u + tv)|^p) - \frac{1}{p}A(|\nabla(u)|^p)}{t} = a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v. \tag{2.35}$$

Da hipótese (a_1) temos

$$\begin{aligned} |a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v| &\leq (k_2|\nabla u|^{p-2} + k_3|\nabla u|^{q-2})|\nabla u||\nabla v| \\ &= k_2|\nabla u|^{p-1}|\nabla v| + k_3|\nabla u|^{q-1}|\nabla v|, \end{aligned}$$

onde claramente $|\nabla u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ e $|\nabla v| \in L^p(\Omega)$.

Logo, pela desigualdade de Hölder temos

$$k_2|\nabla u|^{p-1}|\nabla v| \in L^1(\Omega).$$

Analogamente,

$$k_3|\nabla u|^{q-1}|\nabla v| \in L^1(\Omega).$$

Portanto, (2.35) é integrável e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{\frac{1}{p}A(|\nabla(u+tv)|) - \frac{1}{p}A(|\nabla u|^p)}{t}dx = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx,$$

ou seja, existe a derivada de Gateaux de J_1 em u com

$$J_1'(u)v = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

Verificaremos agora a continuidade de $J_1'(u)v$. Seja $(u_n) \subset W_0^{1,q}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,q}(\Omega)$ temos

$$|\nabla u_n| \to |\nabla u| \;\text{ em }\; L^p(\Omega).$$

Pelo Teorema de Vainberg, existe uma subsequência (a qual denotaremos ainda por (u_n)) e uma função $g \in L^p(\Omega)$ tal que

$$|\nabla u_n(x)| \to |\nabla u(x)| \quad \text{q.t.p. em } \Omega \tag{2.36}$$

e

$$|\nabla u_n| \leq g, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.37}$$

Note que para todo $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$, com $||v|| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
|J_1'(u_n)v - J_1'(u)v| &= \left|\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla v dx - \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u||\nabla v|dx.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder com expoente $\frac{p}{p-1}$ e p obtemos

$$|J_1'(u_n)v - J_1'(u)v| \leq (\int_\Omega |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}}dx)^{\frac{p-1}{p}}(\int_\Omega |\nabla v|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}||J_1'(u_n) - J_1'(u)||_* &:= \sup_{||v||\leq 1} |[J_1'(u_n) - J_1'(u)]\, v| \\ &\leq \left(\int_\Omega |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad (2.38)\end{aligned}$$

Observe que pela continuidade de a e por (2.36) temos

$$\begin{aligned} & |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u| \\ = & \; |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u + a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u - \\ & -a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u| \\ \leq & \; |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}||\nabla u_n - \nabla u| + |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}|\nabla u| - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}||\nabla u| \\ = & \; o_n(1). \qquad (2.39)\end{aligned}$$

isto é,

$$|a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}} \to 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

Desde que $|\nabla u_n|^p \to |\nabla u|^p$, pela continuidade de a temos

$$|a(|\nabla u_n|^p)| \to a(|\nabla u|^p),$$

isto é, $|a(|\nabla u_n|^p)| \leq k$. Assim, de (2.37) temos

$$\begin{aligned} & |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}} \\ \leq & \; \left[|a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n| + |a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u|\right]^{\frac{p}{p-1}} \\ \leq & \; \left[k(||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n| + |\nabla u|^{p-2}\nabla u||)\right]^{\frac{p}{p-1}} \\ = & \; k^{\frac{p}{p-1}}(||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n| + |\nabla u|^{p-2}\nabla u||)^{\frac{p}{p-1}} \\ \leq & \; k^{\frac{p}{p-1}} 2^{\frac{p}{p-1}}(|\nabla u_n|^p + |\nabla u|^p) \\ \leq & \; k^{\frac{p}{p-1}} 2^{\frac{p}{p-1}}(g^p + |\nabla u|^p) \quad \in L^1(\Omega).\end{aligned}$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}} dx = 0.$$

Por (2.38) concluímos que

$$||J_1'(u_n) - J_1'(u)||_* \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

ou seja, $J_1'(u_n) \to J_1'(u)$ em $(W_0^{1,q}(\Omega))'$. Implicando que $J_1 \in C^1(W_0^{1,q}(\Omega), \mathbb{R})$

Mostraremos agora que $J_2 \in C^1(W_0^{1,q}(\Omega), \mathbb{R})$. Para tanto, consideremos $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$, e $u, v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ e a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = \frac{1}{q^*}|u + stv|^{q^*}.$$

Temos que:

a) $f'(s) = t|u + stv|^{q^*-2}(u + stv)v$;

b) $f(1) = \frac{1}{q^*}|u + tv|^{q^*}$;

c) $f(0) = \frac{1}{q^*}|u|^{q^*}$.

Desde que f é diferenciável em $(0,1)$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(\lambda),$$

ou seja,

$$\frac{\frac{1}{q^*}|u + tv|^{q^*} - \frac{1}{q^*}|u|^{q^*}}{t} = |u + stv|^{q^*-2}(u + stv)v.$$

Note que,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{q^*}|u + tv|^{q^*} - \frac{1}{q^*}|u|^{q^*}}{t} = |u|^{q^*-2}uv \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e

$$\left| \frac{\frac{1}{q^*}|u + tv|^{q^*} - \frac{1}{q^*}|u|^{q^*}}{t} \right| \leq (|u| + |v|)^{q^*-1}|v|,$$

pela imersão contínua de Sobolev, $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega)$, temos $u,\ v \in L^{q^*}(\Omega)$, disto segue que, $(|u| + |v|)^{q^*-1} \in L^{\frac{q^*}{q^*-1}}(\Omega)$ e $|v| \in L^{q^*}(\Omega)$. Logo, por Hölder $(|u| + |v|)^{q^*-1}|v| \in L^1(\Omega)$. Portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{\frac{1}{q^*}|u + tv|^{q^*} - \frac{1}{q^*}|u|^{q^*}}{t} dx = \int_\Omega |u|^{q^*-2}uvdx.$$

Assim, concluímos

$$\begin{aligned} J_2'(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{J_2(u + tv) - J(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{\frac{1}{q^*}|u + tv|^{q^*} - \frac{1}{q^*}|u|^{q^*}}{t} dx = \int_\Omega |u|^{q^*-2}uvdx. \end{aligned}$$

Portanto, existe a derivada de Gateaux de J_2 em u com

$$J_2'(u)v = \int_\Omega |u|^{q^*-2}uvdx \quad \forall v \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

Precisamos verificar agora a continuidade da derivada de Gateaux de J_2. Considere $(u_n) \subset W_0^{1,q}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,q}(\Omega)$. Assim, temos

$$|u_n| \to |u| \quad \text{em } L^{q^*}(\Omega),$$

segue do Teorema de Vainberg, que existe uma subsequência (u_n) e uma função $g \in L^{q^*}(\Omega)$ tais que

$$|u_n| \to |u| \quad \text{q.t.p em } \Omega \tag{2.40}$$

e

$$|u_n| \leq g, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.41}$$

para todo $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ com $||v|| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |J_2'(u_n)v - J_2'(u)v| &\leq |\int_\Omega |u_n|^{q^*-2}u_n v dx - \int_\Omega |u|^{q^*-2}uvdx| \\ &= |\int_\Omega (|u_n|^{q^*-2}u_n - |u|^{q^*-2}u)vdx| \\ &\leq \int_\Omega ||u_n|^{q^*-2}u_n - |u|^{q^*-2}u||v|dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder com expoente $\frac{q^*}{q^*-1}$ e q^*, e pela imersão contínua $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} |J_2'(u_n)v - J_2'(u)v| &\leq C\left(\int_\Omega ||u_n|^{q^*-2}u_n - |u|^{q^*-2}u|^{\frac{q^*}{q^*-1}}dx\right)^{\frac{q^*-1}{q^*}} ||v|| \\ &\leq C\left(\int_\Omega ||u_n|^{q^*-2}u_n - |u|^{q^*-2}u|^{\frac{q^*}{q^*-1}}dx\right)^{\frac{q^*-1}{q^*}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} ||J_2'(u_n)v - J_2'(u)v||_* &:= \sup_{||v|| \leq 1} |J_2'(u_n)v - J_2'(u)v| \\ &\leq C\left(\int_\Omega ||u_n|^{q^*-2}u_n - |u|^{q^*-2}u|^{\frac{q^*}{q^*-1}}dx\right)^{\frac{q^*-1}{q^*}}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Note que de (2.40)

$$\begin{aligned} ||u_n|^{q^*-2}u_n - |u|^{q^*-2}u| &= ||u_n|^{q^*-2}u_n - |u_n|^{q^*-2}u + |u_n|^{q^*-2}u - |u|^{q^*-2}u| \\ &\leq |u_n|^{q^*-2}|u_n - u| + ||u_n|^{q^*-2} - |u|^{q^*-2}||u| = o_n(1) \quad \text{q.t.p} \end{aligned}$$

enquanto que de (2.41) temos

$$||u_n|^{q^*-2}u_n - |u|^{q^*-2}u|^{\frac{q^*}{q^*-1}} \leq 2^{\frac{q^*}{q^*-1}}\left(g^{q^*} + |u|^{q^*}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $g^{q^*}, |u|^{q^*} \in L^1(\Omega)$ e portanto, $2^{\frac{q^*}{q^*-1}}\left(g^{q^*} + |u|^{q^*}\right) \in L^1(\Omega)$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega ||u_n|^{q^*-2}u_n - |u|^{q^*-2}u|^{\frac{q^*}{q^*-1}} dx = 0.$$

De (2.42), concluímos que

$$||J_2'(u_n) - J_2'(u)||_* \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

ou seja,

$$J_2'(u_n) \to J_2'(u) \quad \text{em} \quad \left(W_0^{1,q}(\Omega)\right)'.$$

Mostrando que $J_2 \in C^1(W_0^{1,q}(\Omega), \mathbb{R})$ $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Alves, M.J., Assunção, R.B., Miyagaki, O.H., *Existence result for a class of quasilinear elliptic equations with (p-q)-Laplacian and vanishing potentials*. Ill. J. Math. 59 (2015), no. 3, 545-575.

[2] Alves, C.O., Figueiredo, G.M., *Multiplicity and concentration of positive solutions for a class of quasilinear problems*, Adv. Nonlinear Stud. 11 (2011), no. 2, 265-278.

[3] Badiale, M., *Some remarks on elliptic problems with discontinuous nonlinearities*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 51 (1993)331-342.

[4] Barile, S., Figueiredo, G.M., *Existence of a least energy nodal solution for a class of p&q-singular elliptic equations*, Adv. Nonlinear Stud. 14(2) (2014), 511-530.

[5] Barile, S., Figueiredo, G.M., *Some class of eingenvalues problems for generalized p&q-Laplacian type operators on bounded domains*. Nonlinear Anal. 119 (2015), 457-468.

[6] Bartolo, R., Salvatore, A.M., *On a class of superlinear(p,q)-Laplacian type equations on* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. 438 (2016), no. 1, 29-41.

[7] Bonheure, D., Rossi, J., *The behavior of solutions to an elliptic equation involving a p-Laplacian and a q-Laplacian for large p*, Nonlinear Anal. 150 (2017), 104-113.

[8] Candito, P., Marano, S.A., Perera, K., *On a class of critical (p,q)-Laplacian problems*, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 22 (2015), no. 6, 1959-1972.

[9] Chaves, M.C., Ercole, G., Miyagaki, O.H., *Existence of a nontrivial solution for the (p; q)-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$ *without the Ambrosetti-Rabinowitz condition*. Nonlinear Anal. 114 (2015), 133-141.

[10] Chang, K. C., *Variational methods for nondiferentiable functionals and their applications to partial diferential equations*, J. Math. Anal. 80 (1981)102-129.

[11] Cherfils L., Il'yasov Y., *On the stationary solutions of generalized reaction difusion equations with p&q-Laplacian*, Commun. Pure Appl. Anal. 4 (2005), no. 1, 9-22.

[12] Clarke, F. H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Jonh Wiley & Sons, N. Y, 1983.

[13] Corrêa, A.S., Corrêa, F.J.S.A., Santos Júnior, J.R., *Multiple ordered positive solutions of an elliptic problems involving the p&q-Laplacian*, J. Convex Anal. 21 (2014), no.4,1023-1042.

[14] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011).

[15] Dos Santos, G. C. G., Figueiredo,G. M., *Solutions for a Kirchhoff equation with critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg growth and discontinuos nonlinearity*, Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik. n. 17, (2018) 00349.

[16] Do Ó, J.M.B., *Existence of solutions for quasilinear elliptic equations*,J.Math.Anal.Appl. 207 (1997), no. 1, 104-126.

[17] Do Ó, J.M.B., *Quasilinear elliptic equations with exponential nonlinearities*, Comm.Appl. Nonlinear Anal. 2 (1995), no. 3, 63-72.

[18] Faria, L.F.O., Miyagaki, O.H., Tanaka, M., *Existence of a positive solution for problems with (p-q)-Laplacian and convection term in* $\mathbb{R}^N$, Bound. Value Probl. 2016, no. 158, 20 pp.

[19] Figueiredo, G.M., *Existence of positive solutions for a class of p&q elliptic problem with critical growth on* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. 378 (2011), no. 2, 507-518.

[20] Figueiredo, G.M., *Existence and multiplicity of solutions for a class of p&q elliptic problems with critical exponent*, Math. Nachr. 286 (2013), no. 11-12, 1129-1141.

[21] Figueiredo, G.M., Nascimento, R.G., *Existence of positive solutions for a class of p&q elliptic problem with critical exponent and discontinuous nonlinearity*, Monatsh Math (2018), https://doi.org/10.1007/s00605-018-1200-0.

[22] Figueiredo, G.M., *Uma introdução à teoria dos pontos críticos*, PPGME-UFPA (2015).

[23] Grossinho, M. R., Tersian, S. A., *An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Diferential Equations* 2001.

[24] He, C., Li, G., *The regularity of weak solutions to nonlinear scalar field elliptic equations containing p&q laplacians*, Ann. Acad. Scientiarum Fennicae, Math. 33 (2008) 337-371.

[25] Li, G., Liang, X., *The existence of nontrivial solutions to nonlinear elliptic equation of p&q-Laplacians type on* $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Anal. 71 (2009) 2316-2334.

[26] Santos, J. A., *Teorema minimax para funcionais localmente lipschitz e aplicações, dissertaçao de mestrado*, CCT-UFCG, 2007.