UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

SOBRE PROBLEMAS NÃO-LOCAIS DO TIPO STEKLOV-NEUMANN

André Renan Lima Barros

BELÉM
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

André Renan Lima Barros

SOBRE PROBLEMAS NÃO-LOCAIS DO TIPO STEKLOV-NEUMANN

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e, defendida por André Renan Lima Barros como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Joelma Morbach.

BELÉM

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B277s Barros, André Renan Lima
SOBRE PROBLEMAS NÃO-LOCAIS DO TIPO STEKLOV-NEUMANN / André Renan Lima Barros. — 2019.
ix, 79 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Joelma Morbach
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Kirchhoff, Fronteira Integral, Condição de Neumann, Teorema do Passo da Montanha, Princípio Variacional de Ekeland.. I. Título.

CDD 515.353

Andre Renan Lima Barros

SOBRE PROBLEMAS NÃO-LOCAIS DO TIPO STEKLOV-NEUMANN

Esta dissertação foi julgada e aprovada para a obtenção do título de Mestre em Matemática no Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, pela seguinte banca examinadora:

Joelma Morbach

Profa. Dra. Joelma Morbach - Orientadora (PPGME/UFPA)

Cristina Lúcia Dias Vaz

Prof. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz (PPGCIMES/UFPA) - Membro externo

João Rodrigues dos S. Júnior.

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior (PPGME/PDM/UFPA) - Membro interno

Belém 17, de Maio de 2019

Resultado: Aprovado

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me iluminar, por tornar o caminho menos tortuoso e por me dar forças para continuar sempre. À Universidade Federal do Pará (UFPA), Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN) e ao Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística (PPGME).

Agradeço a minha orientadora Professora Joelma Morbach por ter acreditado no meu potencial, pelos ensinamentos, paciência quando as coisas não ocorriam da maneira esperada e pela orientação neste trabalho. Tenho grande admiração pelo seu trabalho e pela pessoa que é, muito obrigado.

Gratidão por essas pessoas que sempre me apoiaram e sei que continuarão a me apoiar: a minha rainha e mãe Euza Barros, meu pai, guerreiro Francisco Barros, esses sim são os verdadeiros heróis dessa história, pois nunca mediram esforços para me proporcionar educação, convívio e aprendizagem fundamentais na construção do meu caráter. Serão sempre meu espelho de ser humano, meus verdadeiros mestres. Muito obrigado mãe e pai.

Aos meus irmãos, Francisco Alex, Aline e Sabrina Barros, vocês são os melhores irmãos do mundo. Agora que trouxeram duas sementinhas, Miguel e Sophia, titio ama muito vocês! Aos meus cunhados e Cicero “Cirobrow”. Amo todos vocês. Agradeço ao meu primo-irmão Júnior Barros, sempre no apoio técnico, na formatação dos PC‘s e por estar sempre por perto, valeu.

Não poderia deixar de falar deles, a minha amada esposa e companheira Wanessa Shoraya e ao nosso querido filho Arthur Silva Barros motivo de alegria infinita e muitas noites em claro “kkk”. Sou muito grato a vocês por sempre estarem comigo e serem parte disso durante toda essa trajetória, mesmo antes da aprovação. Um dos meus esteios! obrigado Wanessa por me dar forças nos momentos mais difíceis, por simplesmente estar ali do lado. Para mim já era o suficiente. Obrigado por acreditar em min e por me fazer acreditar também. Te amo minha pequena.

Agradeço aos meus amigos e eternos professores da graduação Leandro, Silvia, Alessandra, Baldez e Elizardo, agradeço também aos grandes parceiros dessa grande batalha que foi o mestrado Alcinei, Bruno, Clayton, Marcus, Renan, Romario e Thiago, não poderia esquecer da Mayara grande amiga e agora parceira de trabalho, agradeço ao grande amigo e parceiro Diogo que me ajudou bastante a realizar esse trabalho.

Aos professores do PPGME pelos ensinamentos repassados durante e após as disciplinas do mestrado em especial aos professores Pablo, Amanda e a professora Rúbia que me deu muitos conselhos durante a disciplina de Introdução a Teoria dos Pontos Críticos.
A todos que de forma direta ou indireta fizeram parte dessa caminhada. Meus sinceros agradecimentos!
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste estudo, usaremos algumas técnicas de Análise Funcional Não-Linear para investigar existência e multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos não-locais do tipo Steklov - Neumann sob a forma

$$\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = a(\lambda, x, u) & \text{em } \Omega \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = b(\lambda, x, u, \mathfrak{B}(x,u)) & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.1}$$

em que Ω é um domínio suave e limitado do $\mathbb{R}^N, N \geq 1$, o operador $M(\|u\|^2)$ será o termo de Kirchhoff em que $\|u\|^2 = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)dx$ é a norma usual em $W^{1,2}(\Omega)$. Temos ainda que a, b são funções dadas, $\mathfrak{B}$ é um operador integral do tipo $\mathfrak{B}(x,u) = \int_\Lambda c(x)u^\beta d\sigma$ com $\Lambda \in \{\Omega, \partial\Omega\}$, $d\sigma$ é a medida de superfície de Lebesgue em $\partial\Omega$, β é uma constante positiva, η é a normal exterior unitária em $\partial\Omega$.

Palavras chave: Kirchhoff, Fronteira Integral, Condição de Neumann, Teorema do Passo da Montanha, Princípio Variacional de Ekeland.

Abstract

In this study, we will use some nonlinear Functional Analysis techniques for to investigate the existence and multiplicity of solutions for the following class of nonlocal Steklov-Neumann type elliptical problems in the form

$$\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = a(\lambda, x, u) & \text{em } \Omega \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = b(\lambda, x, u, \mathfrak{B}(x,u)) & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.1}$$

where Ω is a limited soft domainn of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, the operator $M(\|u\|^2)$ will be the term of Kirchhof where $\|u\|^2 = \displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)dx$ is the usual norm in $W^{1,2}(\Omega)$. We also have that a, b are given functions, $\mathfrak{B}$ is an integral operator of the type $\mathfrak{B}(x,u) = \displaystyle\int_\Lambda c(x)u^\beta d\sigma$ with $\Lambda \in \{\Omega, \partial\Omega\}$, $d\sigma$ is the surface measure of Lebesgue in $\partial\Omega$, β is a positive constant, η is the unitary external norm in $\partial\Omega$.

Keywords: Kirchhoff, Boundary Integral, Condition of Neumman, Mountain Pass Theorem, Ekeland Variational Principle.

Índice de Notações

$\overline{\Omega}$, $\mid \Omega \mid$ e $\partial\Omega$ são, respectivamente, o fecho, a medida e a fronteira do conjunto Ω.

$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ u \text{ é mensurável };\ \int_\Omega |u|^2 dx < +\infty \right\}.$

$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma usual em $L^2(\Omega)$.

$W^{1,2}(\Omega)$ é espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$ tal que $\nabla u \in L^2(\Omega)$.

$\langle u, v \rangle = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv) dx$ é o produto interno usual em $W^{1,2}(\Omega)$.

$\|u\| = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma usual em $W^{1,2}(\Omega)$.

$W_0^{1,2}(\Omega)$ é espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$ tal que $\nabla u \in L^2(\Omega)$ e $\int_{\partial\Omega} u dx = 0$.

$\langle u, v \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ é o produto interno usual em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma usual em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

$S(\Omega, 2, q) = \inf\limits_{u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega)} \dfrac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) dx}{\left(\int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma \right)^{2/q}}$ é a melhor constante de Sobolev da imersão compacta de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$.

$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o operador Laplaciano aplicado a função u.

$u_n \longrightarrow u$ convergência forte (em norma)

$u_n \rightharpoonup u$ convergência fraca

C^{α} é o conjunto das funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Hölder-contínuas de expoente α que possuem extensão contínua em $\overline{\Omega}$

$C^{1,\alpha}$ é o conjunto das funções $u \in C^1(\Omega)$ cuja derivada é Hölder-contínua com expoente $\alpha \in (0,1)$.

Sumário

Introdução

Neste estudo usaremos algumas técnicas de Análise Funcional Não-Linear para investigar a existência de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos não-locais do tipo Steklov - Neumann sob a forma.

$$\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = a(\lambda, x, u) & \text{em } \Omega \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = b(\lambda, x, u, \mathfrak{B}(x,u)) & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.2}$$

em que Ω é um domínio suave e limitado do $\mathbb{R}^N, N \geq 1$, o operador $M(\|u\|^2)$ será o termo de Kirchhoff em que $\|u\|^2 = \displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)dx$ é a norma usual em $W^{1,2}(\Omega)$. Temos ainda que f, g são funções dadas, $\mathfrak{B}$ é um operador integral do tipo $\mathfrak{B}(x,u) = \displaystyle\int_\Lambda c(x)u^\beta d\sigma$ com $\Lambda \in \{\Omega, \partial\Omega\}$, $d\sigma$ é a medida de superfície de Lebesgue em $\partial\Omega$, β é uma constante positiva, η é a normal exterior unitária em $\partial\Omega$.

O problema (**??**) é denominado não-local devido a presença do termo $M(||u||^2)$ não ser calculado pontualmente. Algumas classes interessantes de problemas do tipo Kirchhoff com condição de fronteira integrais, tais como (**??**), foram estudadas de diversas formas em [**?**]. Grande parte dos trabalhos relacionados a Equação de Kirchhoff estudaram-na sob condições de fronteira homogêneas de Dirichlet. O primeiro a utilizar argumentos de Análise Não-Linear para explorar os problemas não-locais do tipo Kirchhoff foi Lions em [**?**]. Ressaltamos que existem diversos trabalhos sobre a equação de Kirchhoff usando método variacional, ver por exemplo [**?**], [**?**], [**?**], [**?**], [**?**], [**?**], [**?**] e [**?**] dentre outros.

Além de ser do tipo Kirchhoff, uma outra característica de (**??**) é ter fronteira do tipo integral. Wang [?] estuda problemas de Dirichlet com condição de fronteira integral da forma

$$\begin{cases} Lu = -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u(x) = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u(y)dy & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.3}$$

em que o núcleo $K(x,y)$ é uma dada função. São estudados por Wang problemas de autovalor como, por exemplo,

$$\begin{cases} L\varphi = \lambda\varphi & \text{em } \Omega, \\ \varphi = K\displaystyle\int_\Omega \varphi(y)dy & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.4}$$

em que $\lambda > 0$ é um parâmetro real e $K(x,y)$ é constante, existência de soluções para os casos linear e semilinear usando Princípios de Comparação e Teoria de Semigrupos.

No capítulo 1 foi feito um resumo sobre a Teoria Espectral e Teoremas de Krein-Rutmam, introduzimos também os conceitos básicos da teoria de pontos críticos que serão utilizados no trabalho onde destacamos, em especial, o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio Variacional de Ekeland.

No capítulo 2 fizemos um estudo sobre Problemas Lineares Não-Locais do Tipo Steklov-Neumann, onde destacamos os seguintes problemas

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda m(x)u & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda\displaystyle\int_{\partial\Omega} ud\sigma & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{I}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda\displaystyle\int_{\Omega} udx & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{II}$$

em que λ é um parâmetro e m é um peso positivo em $C^0(\overline{\Omega})$

No problema (I), mostramos que se trata de um problema de autovalor autoadjunto, e que o operador solução $S : W^{1,2}(\Omega) \to W^{1,2}(\Omega)$ é linear, contínuo, autoadjunto e compacto.

Usamos a teoria espectral para operadores compactos e autoadjuntos garantimos a existência de uma sequência (μ_j) de autovalores reais de S, com $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \cdots$ e $\mu_j \longrightarrow 0$.

No problema (II) mostramos que se trata de um problema de autovalor, porém, do tipo não autoadjunto. Devido a isso não podemos usar a teoria espectral como no problema (I), ainda assim mostramos que é possível realizar uma caracterização para o autovalor principal do problema (II), mostrando que o mesmo é simples, possui autofunção positiva e não existe nenhum outro autovalor com autofunção positiva.

Precisamente, no capitulo 3 desta dissertação, usaremos o teorema do passo da montanha e o Princípio Variacional de Ekeland para mostrar a existência de pelo menos duas soluções fracas não triviais distintas para o seguinte problema de Steklov-Neumann do tipo Côncavo-Convexo

$$(P0) \begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) &= f(x)|u|^{p-2}u + h(x) & \text{em} & \Omega, \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= \lambda g(x)|u|^{q-2}u \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g(x)|u|^q d\sigma & \text{em} & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função dada por $M(t) = a + bt^\alpha$ com $a, b, \alpha > 0$, $f, h : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que f^+, g^+, h^+ são não identicamente nulas e $\lambda > 0$ é um parâmetro. Suporemos que

$$1 < q, p < 2^* = \frac{2N}{N-2}, \quad N \geq 3.$$

O fato do termo $M(\|u\|^2)$ não ser calculado pontualmente garante que o o problema (P0) é não-local.

Mas antes de encontrar soluções para o problema (P0), vamos comentar dois casos particulares desse problema ao qual foram estudados por Diogo em ([**?**]). Consideremos os problemas

$$(P1) \begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) &= f(u) & \text{em} & \Omega, \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= f(u) \displaystyle\int_{\partial\Omega} F(u) d\sigma & \text{em} & \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ são funções contínuas satisfazendo certas condições e

$$(P2)\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) &= |u|^{p-2}u \qquad\qquad \text{em} \quad \Omega, \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= \lambda |u|^{q-2}u \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado e regular, $\alpha, \lambda > 0$ e $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$.

Usando o Teorema do Passo da Montanha foi possível mostrar existência de solução para o problema (P1) e aplicando a Teoria de Morse obteve-se multiplicidade de soluções.

O problema (P2) foi dividido em três casos, onde foi possível mostrar a existência de solução em cada. Nos dois primeiros foi feito um estudo usado o Princípio Variacional de Ekeland para mostrar a existência de solução não trivial para o problema. Já no terceiro caso o estudo foi feito utilizado a Variedade de Nehari e o Método de Fibração para obter uma solução não trivial.

Capítulo 1

Alguns Conceitos e Resultados Preliminares

O que faremos neste capítulo é falar sobre a Teoria Espectral, ferramenta de fundamental importância aplicada em Operadores Compactos Autoadjuntos, resultados do tipo Krein-Rutman e fazer uma introdução sobre a Teoria de Pontos Críticos falando sobre os principais métodos variacionais utilizados neste trabalho.

1.1 Teoria Espectral e Teoremas de Krein-Rutman

Começaremos este capítulo com resultados do tipo Krein-Rutman os quais podem ser consultados em Amann [**?**].

Observação 1.1. *Os espaços vetoriais considerados são todos reais.*

Observação 1.2. *Seja X um espaço de Banach e $T : D(X) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear e fechado. Designamos por $\mathfrak{L}(X)$ o conjunto dos operadores lineares contínuos definidos em X e tomando valores em X.*

Definição 1.1. *O resolvente de T, designado por ρ é definido por*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - T)^{-1} \in \mathfrak{L}(X)\}.$$

O complemento de $\rho(T)$ é chamado de espectro de T e designado por $\sigma(T)$

Definição 1.2. *Dizemos que* $\lambda \in \mathbb{C}$ *é um autovalor de* T *se* $\lambda I - T$ *não é injetivo. Se* $x \in X \setminus \{0\}$ *satisfaz* $Tx = \lambda x$*, então* λ *é chamado de autovetor de* T.

Definição 1.3. *O raio espectral de* T*, designado por* $r(T)$ *é definido por*

$$r(T) := \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Definição 1.4. *Seja* E *um espaço vetorial e* $\leq$ *uma relação de ordem em* E*, isto é,* $\leq$ *é transitiva, reflexiva e anti simétrica que satisfaz as condições de compatibilidade*

$$x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z, \ \forall z \in E,$$

e

$$x \leq y \Longrightarrow \lambda x \leq \lambda y, \ \forall \lambda \geq 0.$$

Dizemos que $(E, \leq)$ *é um espaço vetorial ordenado (EVO).*

Definição 1.5. *Seja* E *um espaço de Banach ordenado (EBO), então* $x \leq y$ *significa* $x \leq y$ *e* $x \neq y$*. Além disso, o conjunto*

$$[x, y]_E := \{z \in E; x \leq z \leq y\},$$

é chamado um intervalo ordenado entre x *e* y.

Definição 1.6. *Seja* $(E, \leq)$ *um espaço vetorial ordenado. O conjunto*

$$E_+ := \{x \in E; x \geq 0\},$$

é chamado de cone positivo de E*. Seja* $x \in E$

a) Diz-se que x *é não-negativo se* $x \in E_+$.

b) Diz-se que x *é positivo se* $x \in E_+ \setminus \{0\}$.

c) Suponhamos que $int(E_+) \neq \varnothing$*. Diz-se que* x *é fortemente positivo se* $x \in int(E_+)$.

Definição 1.7. *Seja E um espaço de Banach. Diz-se que $(E, \leq)$ é um espaço de Banach Ordenado se for um espaço vetorial ordenado e o cone positivo E_+ é fechado com relação a topologia da norma de E.*

Definição 1.8. *Seja E um espaço de Banach com cone positivo E_+. Diz-se que E_+ é total se $E = \overline{E_+ - E_+}$.*

Definição 1.9. *Sejam E e F espaços de Banach ordenados, respectivamente, por cones E_+ e F_+. Um operador linear $T : E \longrightarrow F$ é dito positivo se $T(E_+) \subset F_+$ e T é dito estritamente positivo se $T(E_+ \setminus \{0\}) \subset F_+ \setminus \{0\}$.*

Teorema 1.1. *(Krein-Rutman-Versão 1) Seja E um espaço de Banach ordenado com cone positivo total E_+. Suponhamos que $T : E \longrightarrow E$ é compacto, positivo e possui raio espectral $r(T)$ positivo. Então $r(T)$ é um autovalor de T com autovetores $u \in E_+$. Além disso, $r(T)$ é autovalor de T^* com autovetores E_+^*, respectivamente.*

Definição 1.10. *Sejam E e F espaços de Banach ordenados, respectivamente, por cones E_+ e F_+.. Suponhamos que $int(F_+) \neq \varnothing$ e consideremos o operador $T : E \longrightarrow F$. Dizemos que T é fortemente positivo, $T >> 0$, se $Tx \in int(F_+)$ para todo $x > 0$.*

Teorema 1.2. *(Krein-Rutman-Versão 2) Seja E um espaço de Banach ordenado cujo cone positivo E_+ possui interior não vazio. Se $T : E \longrightarrow E$ é um operador compacto fortemente positivo, então as seguintes condições se verificam:*

a) $r(T)$ é positivo.

b) $r(T)$ é um autovalor simples de T tendo autovetor positivo e não existe nenhum outro autovalor com autovetor positivo. Aqui, positivo é fortemente positivo.

c) $r(T)$ é autovalor simples de T^* tendo autovetor estritamente positivo.

d) Para todo $y \in E_+ \setminus \{0\}$, a equação

$$\lambda x - Tx = y$$

possui exatamente uma solução positiva se $\lambda > r(T)$ e nenhuma solução positiva se $\lambda \leq r(T)$.

e) Para toda $S \in \mathfrak{L}(E)$ satisfazendo $S \geq T$, $r(S) \geq r(T)$. Se $S-T$ é fortemente positivo, então $r(S) > r(T)$.

Teorema 1.3. *(Krein-Rutman-Versão 3) Sejam $(E, \leq)$ um espaço de Banach ordenado cujo cone positivo E_+ possui interior não vazio e $T \in \mathfrak{L}(E)$ um operador positivo, compacto e fortemente positivo. Então*

a) $r(T)$ é um autovalor com multiplicidade algébrica 1 tanto de T quanto de T^*.

b) os auto espaços são gerados por funções fortemente positivas e por funcional fortemente positivo.

c) $r(T)$ é o único autovalor de T cuja autofunção associada pode ser escolhida positiva.

Consideremos o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda u \quad \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + bu &= 0 \quad\;\; \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $\Omega \in \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e regular, $b \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema 1.4. *(Krein-Rutman-Versão 4) O problema de autovalor (**??**) possui um autovalor λ_1 que satisfaz $\lambda \geq \lambda_1$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de (**??**). O autovalor λ_1 é chamado de autovalor principal de (**??**). Além disso, λ_1 é o único autovalor tal que a autofunção associada pode ser escolhida positiva em Ω.*

1.2 Um pouco de Teoria de Pontos Críticos

Nesta seção apresentamos um breve sumário de resultados recentes da teoria dos pontos críticos e dos métodos variacionais que utilizaremos. Entendemos por métodos variacionais as técnicas usadas para demonstrar que um determinado funcional atinge um ponto crítico, em que encontrar este ponto equivale a determinar uma solução fraca para uma certa equação diferencial relacionada com o funcional.

Seja X um espaço de Banach real e seja $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional continuamente diferenciável, isto é, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $u \in X$ é um ponto crítico do funcional I se

$$I'(u)\varphi = 0 \tag{1.2}$$

para toda $\varphi \in X$, em que $I'(u)$ denota a derivada de Fréchet. Nesse caso, o correspondente número $c = I(u)$ é chamado de valor crítico de I ou nível crítico de I. Veremos que na aplicação da teoria dos pontos críticos às equações diferencias, determinar um elemento $u \in X$ que verifica (**??**) é equivalente a determinar uma solução fraca para uma certa equação diferencial relacionada com o funcional.

Veremos que os problemas (**??**), (**??**) e (**??**) abordados no capitulo 3 possuem estrutura variacional. Com isso queremos dizer que tais problemas podem ser reformulados de maneira que a existência de solução pode ser obtida através da aplicação dos resultados da teoria de pontos críticos.

1.3 Princípio Variacional de Ekeland

O Princípio Variacional de Ekeland trata-se de um teorema provado por Ekeland em 1972 (ver [**?**]) e é uma forte ferramenta para resolver uma ampla classe de equações diferencias elípticas. Utilizamos este teorema, mais precisamente uma de suas consequências para mostrar que o problema (**??**) possui uma solução não trivial para os casos 1 e 2 bem como para mostrar uma segunda solução para o problema (**??**) apresentados no capítulo 3.

Antes de enunciarmos o Princípio Variacional de Ekeland vejamos a seguinte definição.

Definição 1.11. *Seja X um espaço topológico, a função $\phi : X \to \mathbb{R}$ é dita ser semicontínua inferiormente se, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $\phi^{-1}(\lambda, +\infty)$ é aberto em X.*

Teorema 1.5. *(Princípio Variacional de Ekeland) Sejam X um espaço Métrico Completo e $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente. Suponhamos que ϕ seja limitado inferiormente e sejam $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ e $u \in X$ dados tais que*

$$\phi(u) \leq \inf_X \phi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

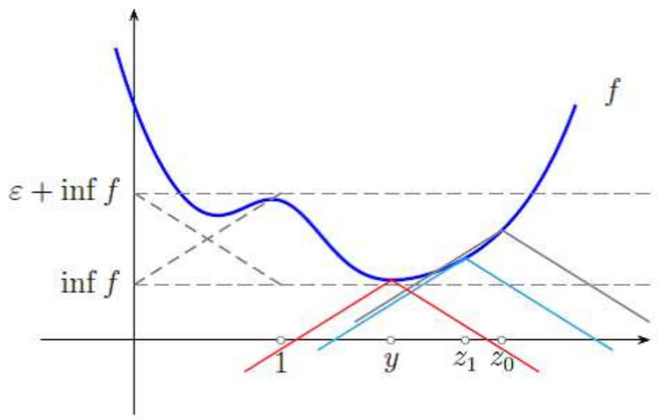
Então existe $u_\varepsilon \in X$ tal que

(a) $\phi(u_\varepsilon) \leq \phi(u)$;

(b) $d(u, u_\varepsilon) \leq \frac{1}{\lambda}$;

(c) *Para cada* $w \neq u_\varepsilon \in X$, $\phi(u_\varepsilon) < \phi(w) + \varepsilon\lambda d(u_\varepsilon, w)$.

O Princípio Variacional de Ekeland apresenta uma forma de aproximação do ínfimo ao garantir que, para $\varepsilon > 0$, a função f possui um cone suporte da forma $f(y) - \varepsilon\|x - y\|$. Uma forma de verificar como isto acontece geometricamente é ilustrada na figura seguinte.



Começando com um ponto y_0 tal que $f(y_0) < \inf\limits_{x \in X} f(x) + \varepsilon$ e com cone $f(y_0) - \varepsilon\|x - y_0\|$. Se este cone não é suporte para f então existe um ponto $y_1 \in A_1 = \{x \in X : f(x) \geq f(y_0) - \varepsilon\|x - y_0\|\}$ tal que

$$f(y_1) < \inf_{x \in A} f(x) + \frac{1}{2}\left(f(y_0) - \inf_{x \in A} f(x)\right).$$

Se $f(y_1) - \varepsilon\|x - y_1\|$ não é cone suporte para f, então repetimos o processo. Esse procedimento finalmente determina um cone suporte para f ou gera uma sequencia de subconjuntos fechados $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ cujos os diâmetros tendem a zero. No último caso, definimos $\{y\} = \cap_{i=1}^{+\infty} A_i$, deste modo obtemos o cone suporte $f(y) - \varepsilon\|x - y\|$.

Para apresentar uma consequência importante do Princípio Variacional de Ekeland para este trabalho, precisaremos da seguinte definição:

Definição 1.12. *Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que a sequência $(u_n) \in X$ é Palais-Smale no nível c para I se as seguintes convergências ocorrem:*

$$I(u_n) \longrightarrow c \text{ e } I'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Dizemos que o funcional I satisfaz a condição Palais-Smale no nível c se toda sequência Palais-Smale no nível c possui subsequência convergente em X.

Corolário 1.1. *Sejam X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 limitado inferiormente. Então, existe uma sequência Palais-Smale (u_n) no nível c para I, onde $c = \inf\limits_{u \in X} I(u)$.*

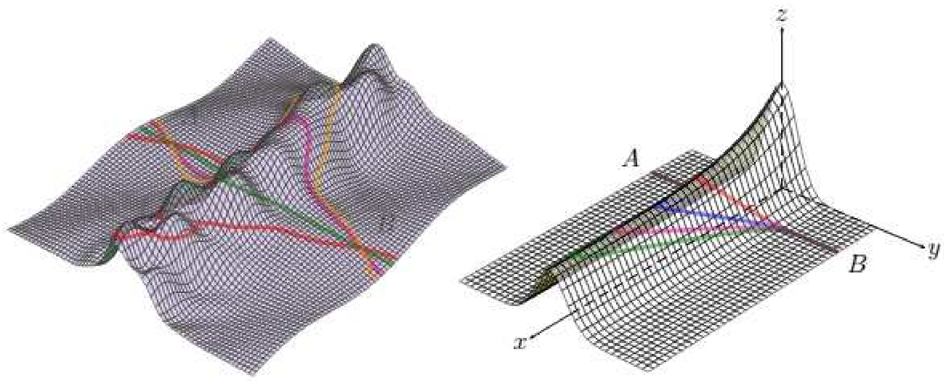
Mais adiante, quando nos referirmos ao Princípio Variacional de Ekeland, mais precisamente estaremos nos referindo ao próximo resultado que pode ser encontrado em [?] e [?].

Corolário 1.2. *Sejam X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 limitado inferiormente. Se I satisfaz a condição $(PS)_c$ com $c = \inf\limits_{u \in X} I(u)$, então c é atingido em um ponto $u_0 \in X$, e u_0 é ponto crítico de I.*

1.4 Teorema do Passo da Montanha

O Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz pode ser encontrado [?], o usaremos para mostrar que os problemas (??) e (??) possuem uma solução positiva. A seguir veremos uma ideia geométrica do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz, logo após o enunciaremos.

Suponhamos que alguém se encontra no interior de uma montanha em um ponto A a uma altura h_0, rodeado por uma cadeia de montanhas de alturas superiores ou iguais a h_0, e se deseja atingir o ponto B situado fora da cadeia de montanhas a uma altura $h_1 < h_0$, então parece existir um "melhor caminho" passando pela cadeia de montanhas e ligando A até B. Um procedimento para determina-lo é o de considerar, entre todos os caminhos unindo os pontos A e B, aquele que sobe à mínima altura. Mais especificamente, avaliamos a máxima altura de cada caminho unindo os pontos A e B; em seguida, avaliamos o mínimo entre esses valores máximos. Veremos em seguida que é fundamental considerar alguma hipótese de compacidade sobre essa classe de caminhos, pois como sugere a figura da direita, o melhor caminho pode escapar para o infinito e o valor de minimax pode não ser atingido.



Teorema 1.6. *(Teorema do Passo da Montanha-M.Willem): Sejam X um espaço de Banach real, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(I1) Existem constantes r, $\rho > 0$ tais que $I(u) \geq r > 0$, para todo $u \in X$ com $\|u\|_X = \rho$

(I2) Existe um $e \in X$ tal que $\|e\|_X > \rho$ e $I(e) < 0$.

Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in X$ tal que

(a) $c - 2\varepsilon \leq I(u_\varepsilon) \leq c + 2\varepsilon$.

(b) $\|I'(u_\varepsilon)\| \leq 4\varepsilon$.

onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in ([0,1])} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração. Ver [**?**].

Teorema 1.7. *(Teorema do Passo da Montanha-Ambrosetti-Rabinowitz): Sejam X um espaço de Banach real, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(I1) Existem constantes $r,\ \rho > 0$ tais que $I(u) \geq r > 0$, para todo $u \in X$ com $\|u\|_X = \rho$

(I2) Existe um $e \in X$ tal que $\|e\|_X > \rho$ e $I(e) < 0$.

Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in ([0,1])} I(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0 \ e \ \gamma(1) = e\}.$$

Se I satisfaz a condição $(PS)_c$, então c é um valor crítico para I, isto é, existe $u \in X$ tal que

$$I(u) = c \ \ e \ \ I'(u) = 0$$

Demonstração. Ver [**?**].

Capítulo 2

Problemas Lineares Não-Locais do Tipo Steklov-Neumann

2.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos problemas de autovalor lineares do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda m(x) u & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \displaystyle\int_{\partial\Omega} u d\sigma & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{I}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \displaystyle\int_{\Omega} u dx & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{II}$$

em que λ é um parâmetro e m é um peso positivo em $C^0(\overline{\Omega})$. Caso queiramos maior regularidade das soluções podemos supor que $m \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \alpha < 1$.

Sob condições de fronteira locais, problemas do tipo (I) e (II) foram introduzidos por Steklov [?]. Mais precisamente, em [?] foi considerado o problema.

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda u & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

o qual foi inicialmente estudado por Calderon [?]. O problema (??) tem importante significado físico e as propriedades dos autovalores são bem conhecidas. Se $N = 2$ o problema (??) descreve a vibração de uma membrana livre cuja massa total está distribuída uniformemente sobre o bordo.

Relacionados, também, com problemas do tipo (I) e (II) sob condições de fronteiras locais temos a equação proveniente do Teorema de Sobolev do Traço. Mais precisamente, dada uma função $u \in C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,2}(\Omega)$, pode-se definir a restrição de u a $\partial\Omega$. Esse operador restrição, que é linear, pode ser estendido continuamente a $W^{1,2}(\Omega)$, produzindo um operador linear contínuo

$$T : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow L^r(\partial\Omega)$$

para $1 \leq r \leq 2_* = \dfrac{2(N-1)}{N-2}$. Esse é o conhecido Teorema do Traço o qual está enunciado no Apêndice, e encontra-se demonstrado em Adams [?]. A norma desse operador é dada por

$$S(\Omega, 2, r) = \inf_{u \in W^{1,2}(\Omega)} \{\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}; \|u\|^2_{L(\partial\Omega)} = 1\} = \inf_{u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)dx}{(\int_{\partial\Omega} |u|^r d\sigma)^{2/r}}. \quad (2.2)$$

No caso subcrítico, $r < 2_*$, o operador traço é compacto e existe uma função em $W^{1,2}(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega)$ que atinge o ínfimo descrito no problema (??). Esse extremo vem a ser a solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= \lambda |u|^{r-2} u \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.3)$$

em que λ é um multiplicador de Lagrange.

No caso em que $r = 2$, chegamos ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= \lambda u \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4)$$

para o qual existe uma sequência de autovalores reais (λ_j) com $\lambda_j \longrightarrow +\infty$, em que o primeiro autovalor corresponde a $S(\Omega, 2, 2)$. Veja Bonder-Rossi [?] e suas referências.

2.2 Problema de Steklov-Neumann Não-Local Tipo I: Um Caso Autoadjunto

Nesta seção estudaremos o problema de autovalor autoadjunto

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda m(x) u \quad \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= \lambda \displaystyle\int_{\partial\Omega} u d\sigma \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

fazendo sua análise espectral. Suporemos que $m \in C^0(\overline{\Omega})$, mas se quisermos obter melhor regularidade nas soluções, poderemos supor $m \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \alpha < 1$.

Dizemos que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de (**??**) se u satisfaz a igualdade

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi) dx = \lambda \int_\Omega m(x) u \varphi dx + \lambda \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right), \tag{2.6}$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Temos ainda que (**??**) pode ser visto em termos do produto interno usual de $W^{1,2}(\Omega)$ como

$$\langle u, \varphi \rangle = \lambda \left[\int_\Omega m(x) u \varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right) \right]. \tag{2.7}$$

Motivado por essa expressão, para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ fixada consideramos o funcional linear

$$\begin{aligned} L_u : W^{1,2}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto L_u(\varphi) = \int_\Omega m(x) u \varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Observemos que L_u está bem definido e claramente é linear devido a linearidade da integral. Além disso, como $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\in L^2(\partial\Omega)$, temos que $u \in L^2(\partial\Omega)$ e assim

$$\left|\int_{\partial\Omega} u d\sigma\right| \leq \|1\|_{L^2(\partial\Omega)}.\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} =\mid \partial\Omega \mid^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |L_u(\varphi)| &= \left|\int_\Omega m(x)u\varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma\right)\right| \\ &\leq \int_\Omega |m(x)||u||\varphi| dx + \left|\int_{\partial\Omega} u d\sigma\right|\left|\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma\right| \\ &\leq \int_\Omega |m(x)||u||\varphi| dx + \mid \partial\Omega \mid^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \mid \partial\Omega \mid^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|m\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \mid \partial\Omega \mid \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

e usando o Teorema do Traço

$$|L_u(\varphi)| \leq (C_1\|m\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \mid \partial\Omega \mid \|u\|_{L^2(\partial\Omega)})\|\varphi\|.$$

Como u está fixada, temos que

$$|L_u(\varphi)| \leq C(u) \cdot \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

E assim L_u é limitado. Desse modo, L_u é um funcional linear e contínuo em $W^{1,2}(\Omega)$. Logo, pelo Teorema da Representação de Riesz, para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ fixada, existe um único $v := Su \in W^{1,2}(\Omega)$, tal que

$$L_u(\varphi) = \langle Su, \varphi \rangle,$$

isto é,

$$\langle v, \varphi \rangle = \int_\Omega m(x)u\varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma\right), \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Notamos que, para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ fixada, v é a única solução fraca de

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta v + v &=& m(x)u & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} &=& \displaystyle\int_{\partial\Omega} u d\sigma & \text{em } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2.9}$$

Dessa forma, temos um operador

$$
\begin{aligned}
S : W^{1,2}(\Omega) &\longrightarrow W^{1,2}(\Omega) \\
u &\longmapsto v := Su
\end{aligned}
$$

em que $\langle Su, \varphi \rangle = L_u(\varphi)$

Proposição 2.1. *O operador S acima definido é linear, contínuo, autoadjunto e compacto.*

Demonstração.

Passo 1: **(S é linear)** Dadas $u_1, u_2 \in W^{1,2}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, existem únicos $Su_1 \in W^{1,2}(\Omega)$ e $Su_2 \in W^{1,2}(\Omega)$ tais que para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ tem-se

$$\langle Su_1, \varphi \rangle = L_{u_1}(\varphi)$$

e

$$\langle Su_2, \varphi \rangle = L_{u_2}(\varphi).$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\langle S(u_1 + \alpha u_2), \varphi \rangle &= L_{(u_1+\alpha u_2)}(\varphi) \\
&= \int_\Omega m(x)(u_1 + \alpha u_2)\varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} (u_1 + \alpha u_2) d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right) \\
&= \int_\Omega m(x) u_1 \varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u_1 d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right) \\
&\quad + \alpha \left[\int_\Omega m(x) u_2 \varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u_2 d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right) \right] \\
&= L_{u_1}(\varphi) + \alpha L_{u_2}(\varphi) \\
&= \langle Su_1, \varphi \rangle + \alpha \langle Su_2, \varphi \rangle \\
&= \langle Su_1 + \alpha Su_2, \varphi \rangle
\end{aligned}
$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Portanto, $S(u_1 + \alpha u_2) = Su_1 + \alpha Su_2$ e S é linear.

Passo 2: **(S é autoadjunto)** Para quaisquer $u_1, u_2 \in W^{1,2}(\Omega)$, com $v_1 = Su_1$ e

$v_2 = Su_2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle Su_1, u_2\rangle &= \langle v_1, u_2\rangle \\
&= \int_\Omega m(x)u_1u_2dx + \left(\int_{\partial\Omega} u_1 d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} u_2 d\sigma\right) \\
&= \int_\Omega m(x)u_2u_1dx + \left(\int_{\partial\Omega} u_2 d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} u_1 d\sigma\right) \\
&= \langle v_2, u_1\rangle \\
&= \langle Su_2, u_1\rangle \\
&= \langle u_1, Su_2\rangle
\end{aligned}$$

de onde segue que S é autoadjunto.

Passo 3: **(S é compacto)** Seja $(u_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|Su_n - Su\|^2 &= \langle S(u_n-u), S(u_n-u)\rangle \\
&= \int_\Omega m(x)(u_n-u)S(u_n-u)dx + \left(\int_{\partial\Omega}(u_n-u)d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} S(u_n-u)d\sigma\right) \\
&\leq (C_1\|m\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_n-u\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \mid \partial\Omega \mid \|u_n-u\|_{L^2(\partial\Omega)})\|S(u_n-u)\|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|Su_n - Su\| \leq C_1\|m\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_n-u\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \mid \partial\Omega \mid \|u_n-u\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Desde que as imersões de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$ são compactas temos que a menos de subsequências $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$ e $u_n \to u$ em $L^2(\partial\Omega)$. Então, $Su_n \to Su$ em $W^{1,2}(\Omega)$ possivelmente para subsequências e daí S é compacto. Sendo S compacto, então S é limitado e desde que este é linear, temos S contínuo. $\blacksquare$.

Segue do resultado anterior e da teoria espectral para operadores compactos e autoadjuntos que existe uma sequência (μ_j) de autovalores reais de S, com $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq ...$ e $\mu_j \longrightarrow 0$.

Observação 2.1. *Seja $Su = \mu u$ com $u \neq 0$. Supondo $\mu = 0$ então $Su = 0$ e daí*

$$0 = \langle 0, \varphi \rangle = \langle Su, \varphi \rangle = \int_\Omega m(x) u \varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right), \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Fazendo $\varphi = u$, teremos

$$\int_\Omega m(x) u^2 dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right)^2 = 0.$$

Supondo $m > 0$, segue-se que

$$\int_\Omega m(x) u^2 dx = 0 \quad e \quad \int_{\partial\Omega} u d\sigma = 0 \tag{2.10}$$

Assim temos que

*(i) Desde que $m > 0$ em Ω e $u \not\equiv 0$, segue-se que $u^2 \geq 0$ e $u^2 \not\equiv 0$, então a primeira igualdade em (**??**) nos leva a uma contradição. Portanto, $\mu = 0$ não é um autovalor de S.*

(ii) Observemos que se $m = 0$, teremos $Su = 0$ se, e somente se,

$$\left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right) = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{2.11}$$

*Ou seja $u \in Ker(S)$ se, e somente se, (**??**) acontece. Logo, se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, então $\int_{\partial\Omega} u d\sigma = 0$ e assim (**??**) se verifica, isto é, $W_0^{1,2}(\Omega) \subset Ker(S)$.*

Agora suponhamos $\mu \neq 0$ e $Su = \mu u$ com $u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$. Daí

$$\mu \langle u, \varphi \rangle = \langle Su, \varphi \rangle = \int_\Omega m(x) u \varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right), \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Fazendo $\varphi = u$, teremos

$$\mu \|u\|^2 = \int_\Omega m(x) u^2 dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right)^2 > 0$$

pois $m(x) > 0$ em Ω. Assim, segue que $\mu > 0$, ou seja, todos os autovalores de S são positivos.

Além disso, já que

$$\langle Su, u\rangle = \int_\Omega m(x)u^2dx + \left(\int_{\partial\Omega} ud\sigma\right)^2 = \mu\|u\|^2 \geq 0,$$

sendo $u \neq 0$ temos $\langle Su, u\rangle > 0$. De onde segue que o operador S é positivo definido.

Assim, $Su = \mu u$ se, e somente se, $S\left(\frac{u}{\mu}\right) = u$ e daí,

$$\langle u, \varphi\rangle = \left\langle S\left(\frac{u}{\mu}\right), \varphi\right\rangle = \int_\Omega m(x)\frac{u}{\mu}\varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} \frac{u}{\mu}d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma\right) \quad \forall\varphi \in W^{1,2}(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega (\nabla u\nabla\varphi + u\varphi)dx = \frac{1}{\mu}\int_\Omega m(x)u\varphi dx + \frac{1}{\mu}\left(\int_{\partial\Omega} ud\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma\right) \quad \forall\varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Fazendo $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$ temos

$$\int_\Omega (\nabla u\nabla\varphi + u\varphi)dx = \lambda\int_\Omega m(x)u\varphi dx + \lambda\left(\int_{\partial\Omega} ud\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma\right), \quad \forall\varphi \in W^{1,2}(\Omega). \tag{2.12}$$

Desse modo, fica evidente que os autovalores λ do problema (**??**) são os inversos dos autovalores de S. Logo, $\lambda_j = \dfrac{1}{\mu_j}$ e desde que $\mu_j \longrightarrow 0$ temos que $\lambda_j \longrightarrow +\infty$.

Com efeito, pela teoria da regularidade, $u \in W^{2,2}(\Omega)$ e (λ, u) satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda m(x)u \quad \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial\eta} &= \lambda\displaystyle\int_{\partial\Omega} ud\sigma \quad \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

no sentido fraco. De fato, usando a identidade de Green

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx = \int_\Omega -\Delta u\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\eta}\varphi d\sigma$$

em (**??**) temos

$$\int_\Omega -\Delta u\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\eta}\varphi d\sigma + \int_\Omega u\varphi dx = \lambda\int_\Omega m(x)u\varphi dx + \lambda\left(\int_{\partial\Omega} ud\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma\right), \quad \forall\varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Logo,

$$\int_\Omega (-\Delta u+u)\varphi dx - \lambda \int_\Omega m(x)u\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\varphi d\sigma - \lambda \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma\right) = 0, \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

O que equivale a

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - \lambda m(x)u)\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial \eta} - \lambda \int_{\partial\Omega} u d\sigma\right] \varphi d\sigma = 0, \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega). \tag{2.14}$$

Assim, tomando $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, de (**??**) temos

$$\int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial \eta} - \lambda \int_{\partial\Omega} u d\sigma\right] \varphi d\sigma = 0 \tag{2.15}$$

e que

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - \lambda m(x)u)\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{2.16}$$

Portanto,

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda m(x) u \quad \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= \lambda \displaystyle\int_{\partial\Omega} u d\sigma \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.17}$$

Da Teoria Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos segue-se que

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \sup\{\langle Su, u\rangle; \|u\| = 1\} > 0 \\ &= \sup\left\{\int_\Omega m(x)u^2 dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma\right)^2; \|u\| = 1\right\} > 0 \end{aligned}$$

e existe $\varphi_1 \in W^{1,2}(\Omega)$ com $\|\varphi_1\| = 1$ tal que $\langle S\varphi_1, \varphi_1\rangle = \mu_1$ e $S\varphi_1 = \mu_1\varphi_1$. Desse modo $\mu_1 = r(S)$ em que $r(S)$ é o raio espectral de S ver Capítulo (**??**) , ou seja, $\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{r(S)}$.

Proposição 2.2. *As autofunções associadas ao primeiro autovalor tem sinal definido.*

Demonstração. Dada $v := Su$ com $u \geq 0$ em $W^{1,2}(\Omega)$, isto é, $u \geq 0$ quase sempre em Ω então v satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v + v &= m(x) u \geq 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} &= \displaystyle\int_{\partial\Omega} u d\sigma \geq 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

no sentido fraco e daí, pelo Princípio do Máximo, $v \geq 0$ quase sempre em Ω, ou seja, S é um endomorfismo positivo. Temos ainda que o cone positivo em $W^{1,2}(\Omega)$ é dado por

$$\left[W^{1,2}(\Omega)\right]_+ = \{u \in W^{1,2}(\Omega); u \geq 0 \ \ q.s. \ \ em \ \ \Omega\}.$$

e se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ então $u = u^+ - u^-$ com $u^+ \in [W^{1,2}(\Omega)]_+$ e $u^- \in [W^{1,2}(\Omega)]_+$. Assim, $W^{1,2}(\Omega) = [W^{1,2}(\Omega)]_+ - [W^{1,2}(\Omega)]_+$, o que significa que $[W^{1,2}(\Omega)]_+$ é um cone positivo total neste espaço. Além disso, S é positivo, pois $S([W^{1,2}(\Omega)]_+) \subset [W^{1,2}(\Omega)]_+$, S é compacto e possui raio espectral positivo. Logo, pelo Teorema **??**, segue-se $\mu_1 = r(S)$ é um autovalor de S e que as autofunções associadas à $\mu_1 = r(T)$ podem ser tomadas em $[W_0^{1,2}(\Omega)]_+$. Assim, $\varphi_1 \geq 0$ quase sempre em Ω. Além disso, desde que φ_1 é autofunção então $\varphi_1 \not\equiv 0$. ■

Devemos observar que, pela Teoria da Regularidade, $\varphi_j \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.3. *O autovalor λ_1 é simples.*

Demonstração. Suponhamos que ψ_1 e φ_1 são autofunções associada a λ_1 e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como S é linear temos

$$S(\alpha\varphi_1 + \psi_1) = \mu_1(\alpha\varphi_1 + \psi_1).$$

Assim, $\alpha\varphi_1 + \psi_1$ também é autofunção associada a λ_1 e, portanto, tem sinal definido como vimos na observação anterior. Logo os conjuntos, $A := \{\alpha \in \mathbb{R}; \alpha\varphi_1 + \psi_1 \geq 0\}$ e $B := \{\alpha \in \mathbb{R}; \alpha\varphi_1 + \psi_1 \leq 0\}$ são ambos não vazios, fechados e $A \cup B = \mathbb{R}$. Portanto, existe $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{\alpha}\varphi_1 + \psi_1 = 0$. De onde segue que essas autofunções são linearmente dependentes e o auto-espaço associado a λ_1 é gerado por φ_1. ■

2.3 Problema de Steklov-Neumann Não-Local Tipo II: Um Caso Não-Autoadjunto

A seguir, consideraremos o seguinte problema de autovalor, que surgirá em aplicações futuras, que não possui estrutura autoadjunta como no caso anterior:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_\Omega u dx & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.18}$$

Dizemos que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de (**??**) se

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi) dx = \lambda \left(\int_\Omega u dx \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right), \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega). \tag{2.19}$$

Motivado por (**??**), para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ definimos o funcional

$$\begin{aligned} l_u : W^{1,2}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \left(\int_\Omega u dx \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right), \end{aligned} \qquad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Claramente l_u está bem definida, é linear e contínuo em $W^{1,2}(\Omega)$. Portanto, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $v := Tu \in W^{1,2}(\Omega)$, tal que $l_u(\varphi) = \langle Tu, \varphi \rangle$. Ou seja,

$$\int_\Omega (\nabla v \nabla \varphi + v\varphi) dx = \left(\int_\Omega u dx \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right).$$

Isso define um operador

$$\begin{aligned} T : W^{1,2}(\Omega) &\longrightarrow W^{1,2}(\Omega) \\ u &\longmapsto Tu := v \end{aligned}$$

Notamos que T é contínuo, pois

$$\begin{aligned}
\|Tu\|^2 &= \langle Tu, Tu\rangle \\
&= l_u(Tu) \\
&= \left(\int_\Omega udx\right)\left(\int_{\partial\Omega} Tud\sigma\right) \\
&\le \left(\int_\Omega |u|d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} |Tu|d\sigma\right) \\
&\le \|1\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\|1\|_{L^2(\partial\Omega)}\|Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\le |\Omega|^{\frac{1}{2}}|\partial\Omega|^{\frac{1}{2}}C\|u\|\|Tu\|.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|Tu\| \le |\Omega|^{\frac{1}{2}}|\partial\Omega|^{\frac{1}{2}}C\|u\|.$$

Em virtude de termos no produto $\left(\int_\Omega udx\right)\left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma\right)$ uma integral em Ω e outra em $\partial\Omega$, esse operador, que é contínuo, não é autoadjunto, pois se tomarmos $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ com $\int_\Omega \varphi dx \neq 0$ e $u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega)$ com $\int_{\partial\Omega} ud\sigma \neq 0$ teremos

$$\langle Tu, \varphi\rangle = \left(\int_\Omega udx\right)\left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma\right) = 0, \tag{2.20}$$

e

$$\langle u, T\varphi\rangle = \left(\int_\Omega \varphi dx\right)\left(\int_{\partial\Omega} ud\sigma\right) \neq 0. \tag{2.21}$$

Para $u \in C^0(\overline{\Omega})$ consideremos o problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta v + v &=& 0 & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} &=& \int_\Omega udx & \text{em } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.22}$$

Pelo Teorema **??**, usando o fato de que $\int_\Omega udx$ é um número real, o problema (**??**) possui uma única solução $v \in W^{2,p}(\Omega)$ satisfazendo

$$\|v\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C\left\|\int_\Omega udx\right\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \le C\left\|\int_\Omega udx\right\|_{L^p(\partial\Omega)}.$$

Na verdade, observamos que $v \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_\Omega u dx \right\|_{L^p(\partial\Omega)} &= \left(\int_{\partial\Omega} \left| \int_\Omega u dx \right|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\partial\Omega} \left(\|u\|^p_{L^\infty(\Omega)} \mid \Omega \mid^p \right) d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \mid \Omega \mid\mid \partial\Omega \mid^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)},
\end{aligned}$$

e daí,

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \mid \Omega \mid\mid \partial\Omega \mid^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.23}$$

Tomando $p > N$ teremos

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$$

e daí

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Desse modo, se chamarmos $v := Tu$, a desigualdade (**??**) nos diz que o operador

$$\begin{aligned}
T : C^0(\overline{\Omega}) &\longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \\
u &\longmapsto Tu = v
\end{aligned}$$

é contínuo. Notemos também que este operador é linear, por causa da linearidade da integral e tomando $p > N$, já que $\displaystyle\int_\Omega u dx \in \mathbb{R}$ e Ω é limitado, podemos usar a imersão compacta $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ e concluir que

$$\begin{aligned}
T : C^0(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \\
u &\longmapsto Tu = v
\end{aligned}$$

é linear e compacto.

Desse modo, acabamos de demonstrar que

Proposição 2.4. *O operador solução associado ao problema (**??**) visto como operador*

$$\begin{aligned}
T : C^0(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \\
u &\longmapsto Tu = v
\end{aligned}$$

é linear, contínuo e compacto.

Mesmo este operador não sendo autoadjunto como no caso anterior é possível realizarmos a caracterização de seu autovalor principal. Faremos isso no resultado a seguir.

Teorema 2.1. *O primeiro autovalor de T é simples, possui autofunção positiva e não existe nenhum outro autovalor de T com autofunção positiva.*

Demonstração. Consideremos o cone $[C^0(\overline{\Omega})]^+ = \{u \in C^0(\overline{\Omega}); u \geq 0 \text{ em } \overline{\Omega}\}$ e observemos que $T([C^0(\overline{\Omega})]^+) \subset [C^0(\overline{\Omega})]^+$, pois se $u \in [C^0(\overline{\Omega})]^+$, pelo princípio do máximo, $v := Tu \geq 0$. Desse modo, T é positivo. Além disso, dada $u \in C^0(\overline{\Omega})$, $u \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ e $u \not\equiv 0$ temos $\displaystyle\int_\Omega u dx > 0$. Assim, $v \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ e $v \not\equiv 0$ em $\overline{\Omega}$. Pelo Princípio do Máximo ([**?**] pag. 634), temos que $v(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Agora, se $v(x) = 0$ para algum $x \in \partial\Omega$ então, pelo mesmo Princípio do Máximo, teríamos $0 > \frac{\partial v(x)}{\partial \eta} = \displaystyle\int_\Omega u dx \in \mathbb{R} > 0$, o que é uma contradição. Dessa forma, $v(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e, portanto, existe $v_0 > 0$ tal que $v(x) > v_0 > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Assim, se $u \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ e $u \not\equiv 0$, então $v := Tu$ satisfaz $v(x) > v_0 > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e, portanto, $v \in int[C^0(\overline{\Omega})]^+$. De fato, já que $v_0 > 0$, basta tomar $\dfrac{v_0}{2}$ para ver que toda $\omega \in B_r(v) \subset C^0(\overline{\Omega})$ satisfaz $\omega(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, ou seja, $B_r(v) \subset [C^0(\overline{\Omega})]^+$. Conseqüentemente, $int[C^0(\overline{\Omega})]^+ \neq \varnothing$ e T é fortemente positiva. Logo pelo Teorema **??** o raio espectral de T, $r(T)$, é positivo, é autovalor simples de T tendo autofunção positiva e não existe nenhum outro autovalor de T com autofunção positiva. ■

Capítulo 3

Problema de Steklov-Neumann Côncavo-Convexo

3.1 Introdução

Neste capítulo, usaremos o teorema do passo da montanha e o Princípio Variacional de Ekeland para mostrar a existência de pelo menos duas soluções fracas não triviais distintas para o seguinte problema de Steklov-Neumann do tipo Côncavo-Convexo

$$(P0)\left\{\begin{array}{rcllr} M(\|u\|^2)(-\Delta u+u) & = & f(x)|u|^{p-2}u+h(x) & \text{em} & \Omega, \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} & = & \lambda g(x)|u|^{q-2}u\displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}g(x)|u|^q d\sigma & \text{em} & \partial\Omega, \end{array}\right.$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função dada por $M(t) = a + bt^\alpha$ com $a, b, \alpha > 0$, $f, h : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que f^+, g^+, h^+ são não identicamente nulas e $\lambda > 0$ é um parâmetro. Suporemos que

$$1 < q, p < 2^* = \frac{2N}{N-2}, \quad N \geq 3.$$

O fato do termo $M(\|u\|^2)$ não ser calculado pontualmente garante que o o problema (P0) é não-local.

Mas antes de encontrar soluções para o problema (P0), vamos comentar dois casos particulares desse problema ao qual foram estudados por Diogo em [**?**]. Consideremos os problemas

$$(P1)\left\{\begin{array}{rcll} M(\|u\|^2)(-\Delta u+u) & = & f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} & = & f(u)\displaystyle\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{array}\right.$$

em que $N \geq 3$, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ são funções contínuas satisfazendo certas condições.

e

$$(P2)\left\{\begin{array}{rcll} M(\|u\|^2)(-\Delta u+u) & = & |u|^{p-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} & = & \lambda|u|^{q-2}u\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{array}\right.$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado e regular, $\alpha, \lambda > 0$ e $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$.

Usando o Teorema do Passo da Montanha foi possível mostrar existência de solução para o problema (P1) e aplicando a Teoria de Morse obteve-se multiplicidade de soluções.

O problema (P2) foi dividido em três casos, onde foi possível mostrar a existência de solução em cada. Nos dois primeiros foi feito um estudo usado o Princípio Variacional de Ekeland para mostrar a existência de solução não trivial para o problema. Já no terceiro caso o estudo foi feito utilizado a Variedade de Nehari e o Método de Fibração para obter uma solução não trivial.

3.2 Casos particulares de Problemas do tipo Steklov-Neumann Côncavo-Convexo

Começaremos mostrando, via Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz, a existência de solução para o problema de Neumann Não-Local com Termo de

Kirchhoff Não-Crescente dado por

$$\left\{\begin{array}{rcll} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) & = & f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} & = & f(u)\displaystyle\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

em que $N \geq 3$, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ são funções contínuas satisfazendo

$$M \text{ é não-crescente e } M(0) = 1. \tag{M1}$$

$$\text{Existem constantes } m_2, t_2 > 0 \text{ tais que } 0 < M(t) \leq m_2, \text{ se } t \geq t_2. \tag{M2}$$

$$M(t^2)t \longrightarrow +\infty \text{ se } t \longrightarrow +\infty. \tag{M3}$$

$$f(0) = 0, \ f(t) > 0 \text{ se } t > 0 \text{ e } |f(-t)| \leq f(t) \text{ se } t > 0. \tag{f1}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = l, \text{ em que } l > 0. \tag{f2}$$

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = 0 \text{ onde } 2 < q < 2^* = \frac{2N}{N-2} \text{ ou } 2 < q < 2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}. \tag{f3}$$

Sejam $\lambda_1 < \lambda_2 < ...$ os autovalores de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$. Suponhamos também que

$$\lambda_j < f'(0) - 1 < \lambda_{j+1}, \text{ para algum } j \geq 1. \tag{f4}$$

Como $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(\xi)d\xi$ e $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(\xi)d\xi$, temos que o funcional energia $I : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(u)dx - \frac{1}{2}\left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)^2.$$

é o funcional associado ao problema (??).

Temos ainda que $I \in C^2(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ onde

$$I'(u)\varphi = M(\|u\|^2)\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi)dx - \int_\Omega f(u)\varphi dx - \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma$$

para toda $u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, e

$$\begin{aligned} I''(u)(\varphi,\psi) &= 2M'(\|u\|^2)\langle u,\psi\rangle\langle u,\varphi\rangle + M(\|u\|^2)\langle \psi,\varphi\rangle - \int_\Omega f'(u)\varphi\psi dx \\ &- \left(\int_{\partial\Omega} f(u)\psi d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma\right) - \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} f'(u)\varphi\psi d\sigma\right). \end{aligned}$$

onde $M' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ são funções contínuas.

Teorema 3.1. *Suponhamos que M satisfaça as hipóteses (??), (??), (??) e que f satisfaça a condição de Ambrosetti-Rabinowitz e as hipóteses (??), (??) e (??). Então o problema (??) possui uma solução fraca positiva.*

Idéia da demonstração Vamos mostrar que o funcional I satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha.

Afirmação 1: **O funcional I satisfaz a primeira geometria do T.P.M.** Em vista de (??) e da continuidade de M, é possível mostrar que

$$I(u) \geq \frac{m_1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(u)dx - \frac{1}{2}\left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)^2$$

com $m_1 > 0$.

Além disso segue de (??), (??) (??) e da continuidade da f que $f(t) < (\varepsilon + l)|t| + C_\varepsilon |t|^{q-1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$F(t) < \frac{(\varepsilon + l)}{2}t^2 + C'_\varepsilon |t|^q,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e, assim,

$$\int_\Omega F(u)dx < \frac{(\varepsilon + l)}{2}\int_\Omega u^2 dx + C'_\varepsilon \int_\Omega |u|^q dx,$$

para toda $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Segue das imersões de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^t(\Omega)$ para todo $1 \leq t < 2^*$ que

$$\int_\Omega u^2 dx = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1\|u\|^2 \ \text{ e } \ \int_\Omega u^q dx = \|u\|^q_{L^q(\Omega)} \leq C_2\|u\|^q.$$

Logo,

$$\int_\Omega F(u)dx < \frac{(\varepsilon + l)}{2} C_1\|u\|^2 + C'_\varepsilon C_2\|u\|^q$$

para toda $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Quando consideramos apenas a fronteira de Ω a igualdade anterior também vale, desse modo

$$\frac{1}{2}\left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)^2 < (\varepsilon + l)C_3\|u\|^4 + C_\varepsilon C_4\|u\|^{2q}$$

para toda $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Portanto,

$$I(u) \geq \frac{m_1}{2}\|u\|^2 - \left(\underbrace{\frac{(\varepsilon + l)}{2}C_1}\|u\|^2 + \underbrace{C'_\varepsilon C_2}\|u\|^q\right) - \left(\underbrace{(\varepsilon + l)C_3}\|u\|^4 + \underbrace{C_\varepsilon C_4}\|u\|^{2q}\right).$$

Para não carregar a notação denotaremos de modo mais simples as constantes da desigualdade anterior, assim,

$$I(u) \geq \frac{m_1}{2}\|u\|^2 - (\varepsilon + l)\|u\|^2 - C_\varepsilon\|u\|^q - (\varepsilon + l)\|u\|^4 - C_\varepsilon\|u\|^{2q}.$$

Assim, supondo $2 < q < 2_*$ temos

$$I(u) \geq \left(\frac{m_1}{2} - (\varepsilon + l)\right)\|u\|^2\left(1 - C_\varepsilon\|u\|^{q-2} - (\varepsilon + l)\|u\|^2 - C_\varepsilon\|u\|^{2q-2}\right)$$

Sendo $0 < \varepsilon < \dfrac{m_1}{2}$ e tomando l e $0 < \|u\| = \varrho < t_1$ suficientemente pequeno tal que

$$1 - C_\varepsilon\varrho^{q-2} - \varepsilon\varrho^2 - C_\varepsilon\varrho^{2q-2} > 0 \ \text{ e } \ \frac{m_1}{2} - (\varepsilon + l) > 0$$

teremos

$$I(u) \geq \left(\frac{m_1}{2} - (\varepsilon + l)\right) \varrho^2 \left(1 - C_\varepsilon \varrho^{q-2} - (\varepsilon + l)\varrho^2 - C_\varepsilon \varrho^{2q-2}\right) = r > 0,$$

sempre que $\|u\| = \varrho$. Assim, a primeira geometria do Teorema do Passo da Montanha é satisfeita.

Afirmação 2: **O funcional I satisfaz a segunda geometria do T.P.M.**

Desde que f satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz: *Existe* $2 < \mu < q$ *tal que* $0 < \mu F(t) \leq tf(t)$ *para todo* $t > 0$, segue que

$$\frac{f(t)}{F(t)} \quad \geq \quad \frac{\mu}{t}, \quad \text{para todo} \quad t > 0$$

isso nos da

$$F(t) \quad \geq \quad F(1)t^\mu, \quad \text{para todo} \quad t \geq 1.$$

Logo, se $0 \leq t < 1$, então $F(t) > -K$ e para todo $t > 0$ teremos $2F(t) \geq F(1)t^\mu - K$. Assim, $F(t) > C_1 t^\mu - C_2$ para todo $t > 0$.

Fixemos uma função $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ com $\psi > 0$ em $\overline{\Omega}$. Assim, para $t > 0$, teremos

$$I(t\psi) = \frac{1}{2}\widehat{M}(t^2\|\psi\|^2) - \int_\Omega F(t\psi)dx - \frac{1}{2}\left(\int_{\partial\Omega} F(t\psi)d\sigma\right)^2.$$

Se considerarmos $\psi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ teremos $\psi(x) = 0$ em $\partial\Omega$, de onde segue que, $t\psi(x) = 0$ em $\partial\Omega$ e desde que $F(0) = 0$, obtém-se

$$\int_{\partial\Omega} F(t\psi)d\sigma = 0.$$

Neste caso,

$$
\begin{aligned}
I(t\psi) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(t^2\|\psi\|^2) - \int_\Omega F(t\psi)dx \\
&< \frac{1}{2}\int_0^{t_2} M(s)ds + \frac{1}{2}\int_{t_2}^{t^2\|\psi\|^2} M(s)ds - C_1 t^\mu \int_\Omega |\psi|^\mu dx + C_2|\Omega| \\
&< \frac{1}{2}m_2 t^2\|\psi\|^2 - C_1 t^\mu \int_\Omega |\psi|^\mu dx + C
\end{aligned}
$$

Como $\mu > 2$ tem-se que $I(t\psi) \longrightarrow -\infty$ se $t \longrightarrow +\infty$.

Portanto, existe $t_0 > 0$ tal que $I(t_0\psi) < 0$ com $\|t_0\psi\| > \varrho$ e a segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha é satisfeita.

Afirmação 3: **O funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale**.

De fato, seja $(u_n) \in W^{1,2}(\Omega)$ uma seqüencia Palais-Smale para I, isto é,

$$
I(u_n) \longrightarrow C \;\; \text{e} \;\; I'(u_n) \longrightarrow 0.
$$

Desse modo,

$$
\begin{aligned}
I(u_n) - \frac{1}{\beta}I'(u_n)u_n &\leq |I(u_n)| + \frac{1}{\beta}|I'(u_n)u_n| \\
&\leq C + \frac{1}{\beta}\|u_n\|
\end{aligned}
$$

onde $\beta > 0$ e escolhido de modo conveniente. Assim,

$$
\begin{aligned}
C + \frac{1}{\beta}\|u_n\| &\geq I(u_n) - \frac{1}{\beta}I'(u_n)u_n \\
&= \left(\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\beta}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2\right) + \int_\Omega \left[\frac{1}{\beta}f(u_n)u_n - F(u_n)\right] dx \\
&+ \left(\int_{\partial\Omega} F(u_n)d\sigma\right)\left[\int_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{\beta}f(u_n)u_n - \frac{1}{2}F(u_n)\right] d\sigma\right].
\end{aligned}
$$

Sendo $\frac{1}{\beta}f(t)t - \frac{1}{2}F(t) \geq 0 \Rightarrow f(t)t \geq \frac{\beta}{2}F(t)$.

Da condição de Ambrosetti-Rabinowitz temos que $f(t)t \geq \mu F(t)$ com $2 < \mu < q < 2^*$. Assim, $f(t)t \geq \mu F(t) \geq \frac{\mu}{2}F(t)$ pois $f(t) \geq 0$ para todo $t > 0$ e então $F(t) \geq 0$ para todo

$t > 0$. Logo, tomando $\beta = \mu$ teremos

$$\begin{aligned} C + \frac{1}{\mu}\|u_n\| &\geq \left(\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2\right) + \int_\Omega \left[\frac{1}{\mu}f(u_n)u_n - F(u_n)\right] dx \\ &+ \left(\int_{\partial\Omega} F(u_n)d\sigma\right)\left[\int_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{\mu}f(u_n)u_n - \frac{1}{2}F(u_n)\right] d\sigma\right]. \end{aligned}$$

Como $f(u_n)u_n \geq \mu F(u_n) \geq \frac{\mu}{2}F(u_n)$ obtém-se que

$$\begin{aligned} C + \frac{1}{\mu}\|u_n\| &\geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\|u_n\|^2} M(\xi)d\xi - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2. \end{aligned}$$

Desde que M é contínua, pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $0 < \xi_n < \|u_n\|^2$ tal que

$$\int_0^{\|u_n\|^2} M(\xi)d\xi = M(\xi_n)\|u_n\|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} C + \frac{1}{\mu}\|u_n\| &\geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \\ &= \frac{1}{2}M(\xi_n)\|u_n\|^2 - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2. \end{aligned}$$

Desde que M é não-crescente, temos $M(\xi_n) \geq M(\|u_n\|^2)$, de onde segue que

$$\begin{aligned} C + \frac{1}{\mu}\|u_n\| &\geq \frac{M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2}{2} - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{C}{\|u_n\|} + \frac{1}{\mu} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) M(\|u_n\|^2)\|u_n\|.$$

Por (**??**), (u_n) é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$. Assim, a menos de subsequências obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2 &\longrightarrow \theta \text{ em } \mathbb{R}, \\
u_n &\rightharpoonup u \text{ em } W^{1,2}(\Omega), \\
u_n &\longrightarrow u \text{ em } L^s(\Omega),\ 1 \leq s < 2^* \\
u_n &\longrightarrow u \text{ em } L^s(\Omega),\ 1 \leq s < 2_*, \\
u_n(x) &\longrightarrow u(x) \text{ q. s. em } \Omega.
\end{aligned}$$

Como M é contínua, temos

$$M(\|u_n\|^2) \longrightarrow M(\theta) > 0 \text{ em } \mathbb{R}.$$

Logo, existe $k > 0$ tal que $M(\|u_n\|^2) \geq k > 0$ para n grande.

Podemos considerar não-negativa toda sequência Palais-Smale para este problema, isto é, $(u_n) \geq 0$ e consequentemente $u \geq 0$.

Desde que $u_n \longrightarrow u$ em $L^s(\Omega),\ 1 \leq s < 2^*$, segue-se que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^2(\Omega), \quad u_n \longrightarrow u \text{ em } L^q(\Omega).$$

E do fato de

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \text{ q. s. em } \Omega.$$

segue a existência de funções $g \in L^2(\Omega)$ e $h \in L^q(\Omega)$ tais que

$$|u_n(x)| \leq g(x) \quad \text{q. s. em } \Omega, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

$$|u_n(x)| \leq h(x) \quad \text{q. s. em } \Omega, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso,

$$f(u_n(x))u_n(x) \longrightarrow f(u(x))u(x) \text{ q. s. em } \Omega \quad \text{pois } f \text{ é contínua}$$

e

$$|f(u_n(x))u_n(x)| \leq (\varepsilon + l)|u_n|^2 + C_\varepsilon |u_n|^q \leq (\varepsilon + l)g(x)^2 + C_\varepsilon h(x)^q.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega f(u_n(x))u_n(x)dx \longrightarrow \int_\Omega f(u(x))u(x)dx.$$

De modo análogo,

$$\int_\Omega f(u_n(x))u(x)dx \longrightarrow \int_\Omega f(u(x))u(x)dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= I'(u_n)u_n - I'(u_n)u + M(\|u_n\|^2)\left(\langle u, u\rangle - \langle u_n, u\rangle\right) \\
&= M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 - M(\|u_n\|^2)\langle u_n, u\rangle + M(\|u_n\|^2)\left(\langle u, u\rangle - \langle u_n, u\rangle\right) \\
&\quad - \int_\Omega f(u_n)u_n dx - \left(\int_{\partial\Omega} F(u_n)d\sigma\right)\int_{\partial\Omega} f(u_n)u_n d\sigma \\
&\quad + \int_\Omega f(u_n)u dx + \left(\int_{\partial\Omega} F(u_n)d\sigma\right)\int_{\partial\Omega} f(u_n)u d\sigma \\
&= M(\|u_n\|^2)\left(\langle u_n, u_n\rangle - 2\langle u_n, u\rangle + \langle u, u\rangle\right) + o_n(1) \\
&= M(\|u_n\|^2)\|u_n - u\|^2 + o_n(1).
\end{aligned}$$

Logo, $u_n \longrightarrow u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, pelo Teorema do Passo da Montanha u é ponto crítico do funcional I e, portanto, solução do problema (**??**). Desde que $I(u) = c > 0$, segue que $u \not\equiv 0$. ■

Mostraremos agora como o método variacional aliado a teoria de Morse pode ser aplicado no estudo de multiplicidade de soluções para o problema (**??**).

Teorema 3.2. *Sob as hipóteses* $(M1)$, $(M2)$, $(M3)$ *e que* f *satisfaça a condição de Ambrosetti-Rabinowitz e as hipóteses* $(f1)$, $(f2)$, $(f3)$ *e* $(f4)$. *Então o problema (**??**) possui pelo menos três soluções.*

A fim de demonstrar o Teorema **??** utilizaremos a Teoria de Morse, para isso precisamos mostrar alguns resultados e que o funcional I seja limitado inferiormente, o que não é o caso como já vimos na demonstração de que I satisfaz a segunda geometria do passo da montanha.

Assim, verificamos que o funcional I é limitado inferiormente em $\overline{B}_\rho(0)$.

Lema 3.1. *O funcional I é limitado inferiormente em $\overline{B}_\rho(0)$, onde $\rho = \|t_0\psi\|$*

Demonstração. Ver [?]

Lema 3.2. *A origem de $W_0^{1,2}(\Omega)$ é um ponto crítico não degenerado de I.*

Demonstração. Ver [?]

Lema 3.3. *O índice de Morse de I em $u_0 = 0$ é maior do que ou igual a 1, ou seja, $m(I, 0) \geq 1$.*

Demonstração. O índice de Morse de I em 0 é o supremo das dimensões de subespaços de $W_0^{1,2}(\Omega)$, sobre os quais $I''(0)$ é negativo definido, isto é, $I''(0)(\varphi, \psi) < 0$. Sabemos que

$$I''(0)(\varphi,\varphi) = \langle L\varphi, \varphi\rangle = \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2 dx - f'(0)\int_\Omega |\varphi|^2 dx.$$

Assim, se φ_i é uma autofunção de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$associado ao autovalor λ_i temos

$$I''(0)(\varphi_i, \varphi_i) = \int_\Omega |\varphi_i|^2(\lambda_i + 1 - f'(0))dx < 0$$

para todo $1 \leq i \leq j$, onde j é dado na hipótese (f_4). Portanto $m(I, 0) \geq j \geq 1$. ■

Demonstração. (do Teorema **??**) Desde de que $I \in C^2(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ satisfaz a condição Palais-Smale, segue do Lema **??** que I é limitado em $\overline{B}\rho(0)$ e dos Lemas **??** e **??** que $u_0 = 0$ é ponto crítico não degenerado de I que não é ponto de mínimo com índice de Morse j finito. Portanto, I tem pelo menos três pontos críticos. ■

Para obter soluções para o próximo problema, fez-se uso do Princípio Variacional de Ekeland, Conhecimentos a respeito de Variedade Nehari e método de Fibração para estudar.

Considere o problema

$$\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) &= |u|^{p-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= \lambda |u|^{q-2}u \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado e regular, $\alpha, \lambda > 0$ e $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$.

Seja $E_{\lambda,\alpha} : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcional energia associado ao problema (**??**) definido por

$$E_{\lambda,\alpha}(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{\lambda}{2}\left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)^2, \quad \forall u \in W^{1,2}(\Omega). \tag{3.3}$$

Onde

$$\widehat{M}(t) = \frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1} \quad \forall t \geq 0.$$

Logo,

$$E_{\lambda,\alpha}(u) \;=\; \frac{1}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{\lambda}{2}\left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)^2 \tag{3.4}$$

para toda $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \langle E'_{\alpha,\lambda}(u), \varphi\rangle \;&=\; \|u\|^{2\alpha}\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi)dx - \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx \\ &-\; \lambda\left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

para toda $u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Logo, $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é solução do problema (**??**) se, e somente se, u é ponto crítico do funcional $E_{\alpha,\lambda}$.

Teorema 3.3. *O funcional $E_{\lambda,\alpha}$ possui ao menos um ponto crítico não-trivial, isto é, o problema (**??**) possui ao menos uma solução fraca não-trivial.*

Ideia da demonstração

Segue das imersões compactas de Sobolev que

$$E_{\lambda,\alpha}(u) \;\geq\; \frac{1}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}S_p^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p - \frac{\lambda}{2}\frac{1}{q^2}(S_q^T)^{-q}\|u\|^{2q} \tag{3.6}$$

para toda $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Observemos que estamos considerando $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$. De modo que temos de estudar alguns casos:

Solução via Princípio Variacional de Ekland.

Caso 1: $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $2q < p < 2(\alpha+1)$.

Neste caso, segue de (**??**) que o funcional energia $E_{\lambda,\alpha}$ é coercivo, logo é limitado inferiormente.

$$\textbf{\textit{Afirmação 1:}} \text{ O funcional } E_{\lambda,\alpha} \text{ satisfaz a condição de Palais-Smale.} \tag{3.7}$$

De fato, seja $(u_n) \in W^{1,2}(\Omega)$ uma sequência tal que $|E_{\lambda,\alpha}(u_n)| \leq C$ e $E'_{\lambda,\alpha}(u_n) \longrightarrow 0$. Assim,

$$C \geq E_{\lambda,\alpha}(u_n) \quad \geq \quad \left(\frac{1}{2(\alpha+1)}\|u_n\|^{2(\alpha+1)-p} - \frac{1}{p}S_p^{-\frac{p}{2}}\right)\|u_n\|^p - \frac{\lambda}{2}\frac{1}{q^2}(S_q^T)^{-q}\|u_n\|^{2q} \tag{3.8}$$

Logo, (u_n) é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$ pois $p > 2q$. Além disso, temos que

$$\langle E'_{\alpha,\lambda}(u), \varphi\rangle \quad = \quad \langle \|u_n\|^{2\alpha}u_n, \varphi\rangle - \langle Tu_n, \varphi\rangle \tag{3.9}$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Em que $T : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow W^{1,2}(\Omega)$ é um operador compacto dado por

$$\langle Tu, \varphi\rangle = \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx - \lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right) \tag{3.10}$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

De fato, para mostrar que T é compacto definamos para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ o funcional

$$\begin{aligned} J_u : W^{1,2}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto J_u(\varphi) \end{aligned}$$

em que $J_u(\varphi) = \displaystyle\int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx + \lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right)$.

Observemos que J_u está bem definido e claramente é linear, por causa das propriedades da integral, e limitado, ou seja, temos um funcional linear e contínuo em $W^{1,2}(\Omega)$. Logo pelo Teorema da Representação de Riez, para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ dado, existe um único

$v := Tu \in W^{1,2}(\Omega)$, tal que $J_u(\varphi) = \langle Tu, \varphi \rangle$, isto é,

$$\langle v, \varphi \rangle = \int_\Omega |u|^{p-2} u\varphi dx + \lambda \left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} |u|^{q-2} u\varphi d\sigma \right)$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Dessa forma temos um operador

$$\begin{aligned} T : W^{1,2}(\Omega) &\longrightarrow W^{1,2}(\Omega) \\ u &\longmapsto v := Tu \end{aligned}$$

em que $\langle Tu, \varphi \rangle = J_u(\varphi)$, o qual está bem definido e é linear. Além disso, este operador é compacto. Com efeito, tomemos $(u_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u \in W^{1,2}(\Omega)$ e façamos $v_n = Tu_n$ e $v = Tu$. Assim, temos que

$$\|Tu_n - Tu\| \;\leq\; \left[K_1 \cdot \|u_n - u\|^{p-1}_{L_2(\Omega)} + K_2 \|u_n - u\|^{3q-2}_{L_2(\partial\Omega)} \right]$$

Como as imersões de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$ são compactas, então $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,2}(\Omega)$ implica em $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$ e $u_n \to u$ em $L^2(\partial\Omega)$ eventualmente para uma subseqüências. Portanto, $Tu_n \longrightarrow Tu$ em $W^{1,2}(\Omega)$ e daí T é compacto. Voltando a identidade (**??**) teremos que

$$E'_{\alpha,\lambda}(u_n) \;=\; \|u_n\|^{2\alpha} u_n - Tu_n. \tag{3.11}$$

Como (u_n) é uma seqüencia (PS), tem-se que $E'_{\lambda,\alpha}(u_n) \longrightarrow 0$, ou seja, $\|u_n\|^{2\alpha} u_n - Tu_n \longrightarrow 0$. Como (u_n) é uma seqüencia limitada em $W^{1,2}(\Omega)$ segue-se que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,2}(\Omega)$ e $\|u_n\| \longrightarrow \widehat{a} \geq 0$, possivelmente para subseqüências.

Se $\widehat{a} = 0$ então $u_n \longrightarrow 0$ em $W^{1,2}(\Omega)$.

Se $\widehat{a} > 0$ então $\|u_n\| \geq \frac{\widehat{a}}{2} > 0$ se n for suficientemente grande. Observemos que

$$u_n = \frac{1}{\|u_n\|^{2\alpha}} [\|u_n\|^{2\alpha} u_n - Tu_n + Tu_n].$$

Desde que $\|u_n\|^{2\alpha} u_n - Tu_n \longrightarrow 0$, (Tu_n) converge pois T é compacto e $\|u_n\|^{2\alpha} \longrightarrow \widehat{a}^{2\alpha} > 0$ teremos que (u_n) converge (possivelmente para uma subseqüência).

Agora, se $u \in W^{1,2}(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, $t > 0$ então

$$E_{\lambda,\alpha}(tu) = t^{2q}\left[\frac{t^{2(\alpha+1)-2q}}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{t^{p-2q}}{p}\int_{\Omega}\|u\|^p dx - \frac{\lambda}{2}\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)^2\right]$$

Desde que $2q < p < 2(\alpha+1)$, segue-se que $E_{\lambda,\alpha}(tu) < 0$ se t for suficientemente pequeno. Desse modo o mínimo de $E_{\lambda,\alpha}$ é não trivial, ou seja, o problema possui solução fraca não trivial.

Caso 2: $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $p < 2q < 2(\alpha+1)$.

Tal como no caso 1, segue de (**??**) que o funcional energia é limitado inferiormente, coercivo e satisfaz a condição (PS).

Assim, existe $(u_n) \in W^{1,2}(\Omega)$ uma seqüencia Palais-Smale satisfeita por $E_{\lambda,\alpha}$, isto é, $|E_{\lambda,\alpha}(u_n)| \leq C$ e $E'_{\lambda,\alpha}(u_n) \longrightarrow 0$, fazendo $p = 2r$ e $2q = s$ teremos $2r < s < 2(\alpha+1)$ e basta fazer uma substituição e tudo se processará como no caso 1.

Solução Via Nehari e Fibração.

Caso 3: $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $p = 2q > 2(\alpha+1)$.

Neste caso vamos ter

$$E_{\lambda,\alpha}(tu) = \frac{t^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{t^p}{p}\int_{\Omega}|u|^p dx - \frac{\lambda}{2}t^p\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)^2.$$

Assim, $E_{\lambda,\alpha}(tu) \longrightarrow -\infty$ se $t \longrightarrow +\infty$ e, portanto, $E_{\lambda,\alpha}$ não é limitado inferiormente. Também temos que

$$E_{\lambda,\alpha}(u) \geq \frac{1}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \left[\frac{1}{p}S_p^{-\frac{p}{2}} + \frac{\lambda}{2}\frac{1}{q^2}(S_q^T)^{-q}\right]\|u\|^p.$$

Façamos $\varrho = \|u\|$. Logo,

$$E_{\lambda,\alpha}(u) \geq \left[\frac{1}{2(\alpha+1)} - \left(\frac{1}{p}S_p^{-\frac{p}{2}} + \frac{\lambda}{2}\frac{1}{q^2}(S_q^T)^{-q}\right)\varrho^{p-2(\alpha+1)}\right]\varrho^{2(\alpha+1)}.$$

Portanto, se $\varrho > 0$ for suficientemente pequeno, então $E_{\lambda,\alpha} \geq r > 0$ se $\|u\| = \varrho$. De onde conclui-se que, neste caso, $E_{\lambda,\alpha}$ satisfaz a Geometria do Passo da Montanha.

Poderíamos verificar que $E_{\lambda,\alpha}$ satisfaz a condição (PS) e usando o Teorema do Passo da Montanha concluiríamos que $E_{\lambda,\alpha}$ possui ponto crítico não trivial. No entanto, vamos usar neste caso a variedade de Nehari e o método da fibração para chegar ao resultado.

O método da aplicação fibração introduzido por Drabek e Pohozaev em [?] e posteriormente estudado por Brown e Zhang em [?] relaciona o funcional associado ao problema com uma função real. Com as informações sobre esta função conseguimos uma demonstração simples do resultado desejado.

Definamos

$$\mathcal{N}_{\lambda,\alpha} := \{u \in W^{1,2}(\Omega); \langle E'(u)_{\lambda,\alpha}, u\rangle = 0\}. \tag{3.12}$$

Observemos que

$$\langle E'_{\alpha,\lambda}(u), u\rangle \;=\; \|u\|^{2\alpha+2} - \int_\Omega |u|^p dx - \frac{2\lambda}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2.$$

Assim, $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$ se, e somente se, $\langle E'(u)_{\lambda,\alpha}, u\rangle = 0$, ou seja, $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$ se, e somente se

$$\|u\|^{2\alpha+2} = \int_\Omega |u|^p dx + \frac{2\lambda}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2. \tag{3.13}$$

Além disso, se $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$ então

$$E_{\lambda,\alpha}(u) = \left(\frac{1}{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}\right)\|u\|^{2(\alpha+1)} > 0.$$

Como $p > 2(\alpha+1)$, segue-se que $E_{\lambda,\alpha}$ é limitado inferiormente e coercivo em $\mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$. Definamos $m := \inf_{u\in\mathcal{N}_{\lambda,\alpha}} E_{\lambda,\alpha}(u)$.

Afirmação 2: $\mathcal{N}_{\lambda,\alpha} \neq \varnothing$.

De fato, para mostrar a validade desta afirmação, definamos o funcional fibração

$$\begin{aligned} K_{u,\alpha} : (0,+\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto K_{u,\alpha}(t) := E_{\lambda,\alpha}(tu) \end{aligned}$$

para toda $u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$. Assim,

$$K_{u,\alpha}(t) = E_{\lambda,\alpha}(tu) \;=\; \frac{t^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{t^p}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{\lambda t^p}{2}\left(\int_{\partial\Omega} \frac{2}{p}|u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2$$

e

$$K'_{u,\alpha}(t) = t^{2\alpha+1}\|u\|^{2(\alpha+1)} - t^{p-1}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{2\lambda t^{p-1}}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2.$$

De onde segue que

$$\begin{aligned} tK'_{u,\alpha}(t) &= t^{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - t^p\int_\Omega |u|^p dx - \frac{2\lambda t^p}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2 \\ &= \langle E'_{\alpha,\lambda}(tu), tu\rangle, \quad \text{com} \quad t > 0. \end{aligned}$$

Portanto, $tu \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$ se, e somente se, t é ponto crítico de $K_{u,\alpha}$. Agora, $K'_{u,\alpha}(t) = 0$ se, e somente se,

$$t^{2\alpha+1}\|u\|^{2(\alpha+1)} = \left[\int_\Omega |u|^p dx + \frac{2\lambda}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2\right] t^{p-1}.$$

Desde que $p > 2(\alpha+1)$ temos $p-1 > 2\alpha+1$ e, portanto, o único ponto crítico $t_{u,\alpha} > 0$ de $K_{u,\alpha}$ é dado por

$$t_{u,\alpha} = \left[\frac{\|u\|^{2(\alpha+1)}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{2\lambda}{p}\|u\|^p_{L^{\frac{p}{2}}(\partial\Omega)}}\right]^{\frac{1}{p-2(\alpha+1)}}.$$

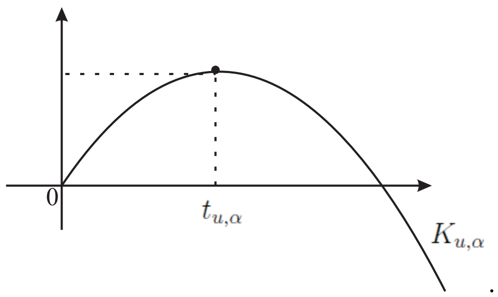
Observemos que

$$K_{u,\alpha}(t) = \frac{t^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \left(\frac{1}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{2\lambda}{p^2}\|u\|^p_{L^{\frac{p}{2}}(\partial\Omega)}\right) t^p.$$

Desde que $p > 2(\alpha+1)$ temos

$$\begin{aligned}
K_{u,\alpha}(t) &> 0 \ \text{ se } \ t>0 \ \text{ for pequeno} \\
K_{u,\alpha}(t) &\to -\infty \ \text{ se } \ t \to +\infty \\
K'_{u,\alpha}(t) &> 0 \ \text{ se } \ 0<t<t_{u,\alpha} \\
K'_{u,\alpha}(t) &< 0 \ \text{ se } \ t>t_{u,\alpha}.
\end{aligned}$$

Logo, o comportamento de $K_{u,\alpha}$ é como na figura a seguir



De onde concluímos que $\mathcal{N}_{\lambda,\alpha} \neq \varnothing$.

Agora, uma questão que surge naturalmente, é se $m > 0$. Observemos que se $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$, então

$$\|u\|^{2(\alpha+1)} = \int_\Omega |u|^p dx + \frac{2\lambda}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^p dx &\leq S_p^{-\frac{p}{2}} \|u\|^p; \ \text{ para toda } \ u \in W^{1,2}(\Omega) \\
\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma &\leq \left(S^T_{\frac{p}{2}}\right)^{-\frac{p}{4}} \|u\|^{\frac{p}{2}}; \ \text{ para toda } \ u \in W^{1,2}(\Omega) \\
\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2 &\leq \left(S^T_{\frac{p}{2}}\right)^{-\frac{p}{2}} \|u\|^p; \ \text{ para toda } \ u \in W^{1,2}(\Omega).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|u\|^{2(\alpha+1)} &\leq S_p^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p + \left(S^T_{\frac{p}{2}}\right)^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p \\ &= \left[S_p^{-\frac{p}{2}} + \left(S^T_{\frac{p}{2}}\right)^{-\frac{p}{2}}\right]\|u\|^p.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u\| \geq \frac{1}{\left[S_p^{-\frac{p}{2}} + \left(S^T_{\frac{p}{2}}\right)^{-\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p-2(\alpha+1)}}}.$$

para toda $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$. Usando uma expressão já vista de $E_{\lambda,\alpha}(u)$ temos

$$E_{\lambda,\alpha}(u) = \left(\frac{1}{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}\right)\|u\|^{2(\alpha+1)} \geq C > 0.$$

Façamos a decomposição de $\mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$ da seguinte maneira:

$$K'_{u,\alpha}(t_u) = 0 \text{ se e somente se } t_u u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$$

o que equivale a

$$K'_{u,\alpha}(1) = 0 \text{ se e somente se } u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$$

Assim, é natural decompormos $\mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$ em pontos de mínimos locais, máximos locais e pontos de inflexão

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^+_{\lambda,\alpha} &= \{u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}; K''_{u,\alpha}(1) > 0\} \\ \mathcal{N}^-_{\lambda,\alpha} &= \{u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}; K''_{u,\alpha}(1) < 0\} \\ \mathcal{N}^0_{\lambda,\alpha} &= \{u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}; K''_{u,\alpha}(1) = 0\}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{N}_{\lambda,\alpha} = \mathcal{N}^+_{\lambda,\alpha} \cup \mathcal{N}^-_{\lambda,\alpha} \cup \mathcal{N}^0_{\lambda,\alpha}.$$

No entanto, temos que $K'_{u,\alpha}(1) = 0$ se e somente se $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$, o que ocorre se, e somente,

$$\|u\|^{2(\alpha+1)} = \int_\Omega |u|^p dx + \frac{2\lambda}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2. \tag{3.14}$$

Mas

$$K''_{u,\alpha}(t) = (2\alpha+1)t^{2\alpha}\|u\|^{2(\alpha+1)} - (p-1)t^{p-2}\left[\int_\Omega |u|^p dx + \frac{2\lambda}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2\right]$$

e, então,

$$K''_{u,\alpha}(1) = (2\alpha+1)\|u\|^{2(\alpha+1)} - (p-1)\left[\int_\Omega |u|^p dx + \frac{2\lambda}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2\right].$$

Usando a identidade (**??**) temos que

$$\begin{aligned}
K''_{u,\alpha}(1) &= (2\alpha+1)\|u\|^{2(\alpha+1)} - (p-1)\left[\int_\Omega |u|^p dx + \|u\|^{2(\alpha+1)} - \int_\Omega |u|^p dx\right] \\
&= (2\alpha+1)\|u\|^{2(\alpha+1)} - (p-1)\|u\|^{2(\alpha+1)} \\
&= \left[(2\alpha+1) - (p-1)\right]\|u\|^{2(\alpha+1)} \\
&= \left[2(\alpha+1) - p\right]\|u\|^{2(\alpha+1)} < 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{N}^+_{\lambda,\alpha} = \mathcal{N}^0_{\lambda,\alpha} = \varnothing$ e daí $\mathcal{N}_{\lambda,\alpha} = \mathcal{N}^-_{\lambda,\alpha}$.

Portanto, o o funcional $E_{\lambda,\alpha}$ possui um ponto crítico $u \in W^{1,2}(\Omega)$. ■

É importante lembrar que os dois problemas abordados anteriormente foram estudados mais detalhadamente por Diogo em [**?**] e são casos particulares do próximo problema.

3.3 Problema de Steklov-Neumann Côncavo-Convexo um caso geral

Nessa sessão encontra-se o resultado principal desse trabalho onde vamos utilizar Teorema do Passo da Montanha e o Princípio Variacional de Ekeland para mostrar a existência de pelo menos duas soluções fracas não triviais para o seguinte problema do tipo Steklov-Neumann Côncavo-Convexo

$$\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = f(x)|u|^{p-2}u + h(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda g(x)|u|^{q-2}u \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g(x)|u|^q d\sigma & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.15}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função dada por $M(t) = a + bt^\alpha$ com $a, b, \alpha > 0$, $f, h : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que f^+, g^+, h^+ são não identicamente nulas e $\lambda > 0$ é um parâmetro. Suporemos que

$$1 < q, p < 2^* = \frac{2N}{N-2}, \quad N \geq 3 \tag{3.16}$$

Observação 3.1. *Designemos por S_r a melhor constante de Sobolev da imersão compacta de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^r(\Omega)$ para $1 < r < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, isto é,*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq (S_r)^{-1/2}\|u\|_{1,2}.$$

Observação 3.2. *Designemos por S_r^T a melhor constante de Sobolev da Imersão compacta de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^r(\partial\Omega)$ para $1 < r < 2_* = \dfrac{2(N-1)}{N-2}$, isto é,*

$$\|u\|_{L^r(\partial\Omega)} \leq (S_r^T)^{-1/2}\|u\|_{1,2}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação (**??**) por uma função teste $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ e integrando, obtemos

$$(i) \;\; M(\|u\|^2)\int_\Omega -\Delta u\varphi dx + M(\|u\|^2)\int_\Omega u\varphi dx = \int_\Omega f(x)|u|^{p-2}u\varphi dx + \int_\Omega h(x)\varphi dx,$$

$$(ii) \;\; M(\|u\|^2)\int_{\partial\Omega} \varphi\frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma = \lambda\left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g(x)|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} g(x)|u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right).$$

Aplicando a identidade de Green em (i) temos

$$M(\|u\|^2)\left(\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx - \int_{\partial\Omega} \varphi\frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma\right) + M(\|u\|^2)\int_\Omega u\varphi dx = \int_\Omega f(x)|u|^{p-2}u\varphi dx + \int_\Omega h(x)\varphi dx$$

e segue de (ii) que

$$\begin{aligned} M(\|u\|^2)\int_\Omega(\nabla u\nabla\varphi+u\varphi)dx &= \int_\Omega f(x)|u|^{p-2}u\varphi dx+\int_\Omega h(x)\varphi dx \\ &+ \lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}g(x)|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}g(x)|u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Portanto $u\in W^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca do problema (**??**) se, e somente se, u satisfaz a equação (**??**) para toda $\varphi\in W^{1,2}(\Omega)$.

Desta forma uma solução fraca para o problema (**??**) é um pondo crítico do funcional $E:W^{1,2}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$ se, e somente se, o funcional satisfaz

$$\begin{aligned} \langle E'(u),\varphi\rangle &= M(\|u\|^2)\int_\Omega(\nabla u\nabla\varphi+u\varphi)dx-\int_\Omega f(x)|u|^{p-2}u\varphi dx-\int_\Omega h(x)\varphi dx \\ &- \lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}g(x)|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}g(x)|u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

para toda $\varphi\in W^{1,2}(\Omega)$. Logo, um candidato natural a funcional associada ao problema (**??**) é da forma

$$E(u)=\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2)-\frac{1}{p}\int_\Omega f(x)|u|^p dx-\int_\Omega h(x)udx-\frac{\lambda}{2}\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}g(x)|u|^q d\sigma\right)^2 \tag{3.19}$$

Com

$$\widehat{M}(t)=\int_0^t M(s)ds=\int_0^t(a+bs^\alpha)ds=at+\frac{b}{\alpha+1}t^{\alpha+1},\ t\in\mathbb{R}.$$

Desse modo, temos

$$E(u)=\frac{a\|u\|^2}{2}+\frac{b}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)}-\frac{1}{p}\int_\Omega f(x)|u|^p dx-\int_\Omega h(x)udx-\frac{\lambda}{2}\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}g(x)|u|^q d\sigma\right)^2 \tag{3.20}$$

Teorema 3.4. *O funcional $E:W^{1,2}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$ definido em (**??**) é o funcional associado ao problema (**??**). $E\in C^1(W^{1,2}(\Omega),\mathbb{R})$, cuja derivada no sentido de Frechet dada por (**??**).*

Demonstração. Considere $E(u)=\frac{1}{2}J_1(u)-J_2(u)-J_3(u)-\frac{\lambda}{2}J_4(u)$, onde

$$\begin{aligned} J_1(u) &= \widehat{M}(\|u\|^2); & J_2(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega f(x)|u|^p\,dx; \\ J_3(u) &= \int_\Omega h(x)udx; & J_4(u) &= \left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}g(x)|u|^q d\sigma\right)^2. \end{aligned}$$

Mostraremos que $J_1, J_2, J_3, J_4 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

Calculando a derivada de gateaux DJ_1. Como $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(s)ds$ segue que a derivada de $\widehat{M}(t)$ é igual a $M(t)$. Assim, para calcular DJ_1 considere $H_1(u) = \|u\|^2$. Desse modo, temos que $DJ_1(u)\varphi = M(\|u\|^2)DH_1(u)\varphi$. Vamos calcular DH_1. Por definição,temos que

$$
\begin{aligned}
DH_1(u)\varphi &= \lim_{t\to 0}\frac{H_1(u+t\varphi)-H_1(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\|u+t\varphi\|^2-\|u\|^2}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\|u\|^2+2t\langle u,\varphi\rangle+t^2\|\varphi\|^2-\|u\|^2}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t(2\langle u,\varphi\rangle+t\|\varphi\|^2)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\left[2\int_\Omega(\nabla u\nabla\varphi+u\varphi)\;dx+t\|\varphi\|^2\right]\\
&= 2\int_\Omega(\nabla u\nabla\varphi+u\varphi)dx.
\end{aligned}
$$

Portanto, $$DJ_1(u)\varphi = M(\|u\|^2)DH_1(u)\varphi = 2M(\|u\|^2)\int_\Omega(\nabla u\nabla\varphi+u\varphi)dx. \tag{3.21}$$

Mostraremos que DJ_1 é contínua. De fato,vejamos que DH_1 é contínua. Seja $(u_n)\subset W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n\to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Então, para cada $\varphi\in W^{1,2}(\Omega)$, com $\|\varphi\|\leq 1$, temos

$$
\begin{aligned}
|DH_1(u_n)\varphi-DH_1(u)\varphi| &= \left|2\int_\Omega(\nabla u_n\nabla\varphi+u_n\varphi)\;dx-2\int_\Omega(\nabla u\nabla\varphi+u\varphi)\;dx\right|\\
&\leq 2\int_\Omega(|\nabla u_n\nabla\varphi-\nabla u\nabla\varphi|+|u_n\varphi-u\varphi|)\;dx\\
&= 2\int_\Omega|\nabla u_n\nabla\varphi-\nabla u\nabla\varphi|\;dx+2\int_\Omega|u_n\varphi-u\varphi|\;dx\\
&= 2\int_\Omega|\nabla(u_n-u)\nabla\varphi|\;dx+2\int_\Omega|(u_n-u)\varphi|\;dx\\
&\leq 2\|u_n-u\|_0\|\varphi\|_0+2\|u_n-u\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq 2\|u_n-u\|\|\varphi\|+2C\|u_n-u\|\|\varphi\|\\
&= (2+2C)\|u_n-u\|\|\varphi\|\\
&\leq (2+2C)\|u_n-u\|
\end{aligned}
$$

Aplicando agora a norma em $(W^{1,2}(\Omega))'$, concluimos que

$$\|DH_1(u_n) - DH_1(u)\| := \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |DH_1(u_n)\varphi - DH_1(u)\varphi| \leq (2+2C)\|u_n - u\|$$

Logo $DH_1(u_n) \to DH_1(u)$ em $(W^{1,2}(\Omega))'$ quando $u_n \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Portanto, DH_1 é contínuo e desse modo DJ_1 é contínuo e temos $DJ_1 = J_1'$. Assim $J_1 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ e por (**??**) temos que

$$DJ_1(u)\varphi = J_1'(u)\varphi = 2M(\|u\|^2)\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi)dx \tag{3.22}$$

Calculando a derivada de gateaux DJ_2. Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e cada $u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ definamos a aplicação $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(s) = \frac{|u + st\varphi|^p}{p}.$$

Note que $h(0) = \dfrac{|u|^p}{p}$, $h(1) = \dfrac{|u+t\varphi|^p}{p}$ e pela regra da cadeia, obtemos

$$h'(s) = |u + st\varphi|^{p-2}(u + st\varphi)t\varphi.$$

Temos que h é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ logo pelo Teorema do Valor Médio, existe $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} h(1) - h(0) &= h'(\alpha) \\ \frac{|u+t\varphi|^p - |u|^p}{p} &= |u + \alpha t\varphi|^{p-2}(u + \alpha t\varphi)t\varphi \\ \frac{|u+t\varphi|^p - |u|^p}{tp} &= |u + \alpha t\varphi|^{p-2}(u + \alpha t\varphi)\varphi \end{aligned} \tag{3.23}$$

Além disso, para cada sequência $|t_n| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$ temos de (**??**) que

$$\frac{|u(x) + t_n\varphi(x)|^p - |u(x)|^p}{t_n p} \longrightarrow |u(x)|^{p-2}u(x)\varphi(x) \;\; \text{q.t.p em } \; \Omega.$$

Como $\alpha \in (0,1)$ e $0 < |t| < 1$, segue de (**??**) que

$$\left|\frac{|u+t\varphi|^p - |u|^p}{tp}\right| = |u+\alpha t\varphi|^{p-1}|\varphi| \leq |u+\varphi|^{p-1}|\varphi|$$

Como $W^{1,2}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^p(\Omega)$ com $1 < p < 2^*$ e $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial, então

$$u, \varphi \in L^p(\Omega) \Rightarrow u+\varphi \in L^p(\Omega) \Rightarrow |u+\varphi|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$$

e desde que $\dfrac{p}{p-1}$ e p são expoentes conjugados, por Houder $|u+\varphi|^{p-1}|\varphi| \in L^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesque, temos

$$\begin{aligned}
DJ_2(u)\varphi &= \lim_{t\to 0}\frac{J_2(u+t\varphi)-J_2(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega f(x)|u+t\varphi|^p dx - \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega f(x)|u|^p dx}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega f(x)\left(\frac{|u+t\varphi|^p-|u|^p}{tp}\right)dx\\
&= \int_\Omega f(x)\left(\lim_{t\to 0}\frac{|u+t\varphi|^p-|u|^p}{tp}\right)dx\\
&= \int_\Omega f(x)|u|^{p-2}u\varphi dx.
\end{aligned}$$

Portanto,
$$DJ_2(u)\varphi = \int_\Omega f(x)|u|^{p-2}u\varphi dx. \tag{3.24}$$

Vamos mostrar agora que DJ_2 é contínuo. De fato, seja $(u_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$ uma sequencia tal que $u_n \longrightarrow u$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Segue da imersão contínua de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ com $1 < p < 2^*$ no caso $N \geq 3$ que $u_n \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$. Assim, pelo Teorema de Vaimberg existem $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $\alpha \in L^p(\Omega)$ tais que:

(a) $u_{n_j}(x) \longrightarrow u(x)$ q.t.p em Ω;

(b) $|u_{n_j}(x)| \leq \alpha(x)$ q.t.p em Ω.

Usando (b) e a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} ||u_{n_j}(x)|^{p-2}u_{n_j}(x) - |u(x)|^{p-2}u(x)|^{\frac{p}{p-1}} &\leq (|u_{n_j}(x)|^{p-1} + |u(x)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq (\alpha(x)^{p-1} + |u(x)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq C(\alpha(x)^p + |u(x)|^p). \end{aligned}$$

Como $u, \alpha \in L^p(\Omega)$ então $u^p, \alpha^p \in L^1(\Omega)$ e portanto $C(\alpha(x)^p + |u(x)|^p) \in L^1(\Omega)$ Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\| \, |u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u \, \|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Desse modo, para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ com $\|\varphi\| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |DJ_2(u_{n_j})\varphi - DJ_2(u)\varphi| &= \left| \int_\Omega f(x)|u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j}\varphi dx - \int_\Omega f(x)|u|^{p-2}u\varphi dx \right| \\ &= \left| \int_\Omega f(x)(|u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u)\varphi dx \right| \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega ||u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u||\varphi| dx. \end{aligned}$$

Como $(|u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, $\varphi \in L^p(\Omega)$ e $\dfrac{p}{p-1}$ e p são expoentes conjugados, por Holder

$$|DJ_2(u_{n_j})\varphi - DJ_2(u)\varphi| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \, \| \, |u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u \, \|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^p(\Omega)}.$$

Da imesão contínua de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ com $1 < p < 2^*$ no caso $N \geq 3$, segue que

$$\begin{aligned} |DJ_2(u_{n_j})\varphi - DJ_2(u)\varphi| &\leq C\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \, \| \, |u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u \, \|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \|\varphi\| \\ &\leq C\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \, \| \, |u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u \, \|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Aplicando agora a norma em $(W^{1,2}(\Omega))'$ concluímos que

$$\begin{aligned} \| DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u) \| &:= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |DJ_2(u_{n_j})\varphi - DJ_2(u)\varphi| \\ &\leq C\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \| |u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u \|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} . \end{aligned}$$

Logo, $DJ_2(u_{n_j}) \longrightarrow DJ_2(u)$ em $(W^{1,2}(\Omega))'$ quando $u_n \longrightarrow u$ em $W^{1,2}(\Omega)$. assim DJ_2 é contínuo e temos $DJ_2 = J_2'$. Portanto $J_2 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ e por (**??**)

$$DJ_2(u)\varphi = J_2'(u)\varphi = \int_\Omega f(x)|u|^{p-2}u\varphi dx. \tag{3.25}$$

Calculando a derivada de gateaux DJ_3. Por definição, para todas $u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned} DJ_3(u)\varphi &= \lim_{t\to 0} \frac{J_3(u+t\varphi) - J_3(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega h(x)(u+t\varphi)dx - \int_\Omega h(x)udx}{t_n} \\ &= \lim_{t\to 0} \int_\Omega h(x)\left(\frac{u+t\varphi-u}{t}\right)dx \\ &= \int_\Omega h(x)\varphi dx. \end{aligned}$$

Portanto,
$$DJ_3(u)\varphi = \int_\Omega h(x)\varphi dx. \tag{3.26}$$

Vamos mostrar agora que DJ_3 é contínuo. De fato, note que para toda sequência $(u_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$ com $u_n \longrightarrow u$ em $W^{1,2}(\Omega)$ e toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que $\|\varphi\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \|DJ_3(u_n) - DJ_3(u)\| &:= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |DJ_3(u_n)\varphi - DJ_3(u)\varphi| \\ &= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left| \int_\Omega h(x)\varphi dx - \int_\Omega h(x)\varphi dx \right| \\ &= \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left(\int_\Omega |\varphi - \varphi| dx \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto $DJ_3(u_n) \longrightarrow DJ_3(u)$ em $(W^{1,2}(\Omega))'$ quando $u_n \longrightarrow u$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Logo DJ_3 é contínuo e temos $DJ_3 = J_3'$. Portanto $J_3 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ e por (**??**)

$$DJ_3(u)\varphi = J_3'(u)\varphi = \int_\Omega h(x)\varphi dx. \tag{3.27}$$

Calculando a derivada de gateaux DJ_4. Considere $H_4(u) = \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g(x)|u|^q d\sigma$. Desse modo, temos que

$$DJ_4(u)\varphi = 2\bigg(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g(x)|u|^q d\sigma\bigg) DH_4(u)\varphi$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e cada $u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ definamos a aplicação $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(s) = |u+st\varphi|^q$. Note que $h(0) = |u|^q$, $h(1) = |u+t\varphi|^q$ e $h'(s) = |u+st\varphi|^{q-2}(u+st\varphi)t\varphi$. Temos que h é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ logo pelo Teorema do Valor Médio, existe $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} h(1) - h(0) &= h'(\alpha) \\ |u+t\varphi|^q - |u|^q &= q|u+\alpha t\varphi|^{q-2}(u+\alpha t\varphi)t\varphi \\ \frac{|u+t\varphi|^q - |u|^q}{tq} &= |u+\alpha t\varphi|^{q-2}(u+\alpha t\varphi)\varphi \end{aligned} \tag{3.28}$$

Além disso, para cada sequência $|t_n| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$ temos de (**??**) que

$$\frac{|u(x)+t_n\varphi(x)|^q - |u(x)|^q}{t_n q} \longrightarrow |u(x)|^{q-2}u(x)\varphi(x) \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Como $\alpha \in (0,1)$ e $0 < |t| < 1$, segue de (**??**) que

$$\left|\frac{|u+t\varphi|^q - |u|^q}{tq}\right| = |u+\alpha t\varphi|^{q-1}|\varphi| \leq |u+\varphi|^{q-1}|\varphi|$$

e pelas imerções contínuas de de sobolev segue que $|u+\varphi|^{q-1}|\varphi| \in L^1(\partial\Omega)$.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesque, temos

$$\begin{aligned} DH_4(u)\varphi &= \lim_{t\to 0} \frac{H_4(u+t\varphi)-H_4(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g(x)|u+t\varphi|^q d\sigma - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g(x)|u|^q d\sigma}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \int_{\partial\Omega} g(x)\left(\frac{|u+t\varphi|^q-|u|^q}{tq}\right) d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} g(x)\left(\lim_{t\to 0}\frac{|u+t\varphi|^q-|u|^q}{tq}\right) d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} g(x)|u|^{q-2}u\varphi d\sigma. \end{aligned}$$

Portanto,
$$DH_4(u)\varphi = \int_{\partial\Omega} g(x)|u|^{q-2}u\varphi d\sigma. \tag{3.29}$$

Vamos mostrar agora que DH_4 é contínuo. De fato, seja $(u_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$ uma sequencia tal que $u_n \longrightarrow u$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Segue da imersão contínua de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^q(\partial\Omega)$ que $u_n \longrightarrow u$ em $L^q(\partial\Omega)$. Assim, pelo Teorema de Vaimberg existem $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $\alpha \in L^q(\partial\Omega)$ tais que:

(a) $u_{n_j}(x) \longrightarrow u(x)$ q.t.p em $\partial\Omega$;

(b) $|u_{n_j}(x)| \leq \alpha(x)$ q.t.p em $\partial\Omega$.

Usando (b) e a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} ||u_{n_j}(x)|^{q-2}u_{n_j}(x) - |u(x)|^{q-2}u(x)|^{\frac{q}{q-1}} &\leq (|u_{n_j}(x)|^{q-1} + |u(x)|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}} \\ &\leq (\alpha(x)^{q-1} + |u(x)|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}} \\ &\leq C(\alpha(x)^q + |u(x)|^q). \end{aligned}$$

Como $u, \alpha \in L^q(\partial\Omega)$ então $u^q, \alpha^q \in L^1(\partial\Omega)$ e portanto $C(\alpha(x)^q + |u(x)|^q) \in L^1(\Omega)$ Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\|\, |u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j} - |u|^{q-2}u \,\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\partial\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Desse modo, para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ com $\|\varphi\| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
|DH_4(u_{n_j})\varphi - DH_4(u)\varphi| &= \left| \int_{\partial\Omega} g(x)|u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j}\varphi d\sigma - \int_{\partial\Omega} g(x)|u|^{q-2}u\varphi d\sigma \right| \\
&= \left| \int_{\partial\Omega} g(x)(|u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j} - |u|^{q-2}u)\varphi d\sigma \right| \\
&\leq \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} ||u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j} - |u|^{q-2}u||\varphi| d\sigma.
\end{aligned}$$

Como $|u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j} - |u|^{q-2}u \in L^{\frac{q}{q-1}}(\partial\Omega)$, $\varphi \in L^q(\partial\Omega)$ devido as imerções contínuas e $\frac{q}{q-1}$ e q são expoentes conjugados, por Holder

$$\begin{aligned}
|DH_4(u_{n_j})\varphi - DH_4(u)\varphi| &\leq \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \parallel |u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j} - |u|^{q-2}u \parallel_{L^{\frac{q}{q-1}}(\partial\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \parallel |u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j} - |u|^{q-2}u \parallel_{L^{\frac{q}{q-1}}(\partial\Omega)} \|\varphi\| \\
&\leq C\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \parallel |u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j} - |u|^{q-2}u \parallel_{L^{\frac{q}{q-1}}(\partial\Omega)}.
\end{aligned}$$

Aplicando a norma em $(W^{1,2}(\Omega))'$ concluímos que

$$\begin{aligned}
\parallel DH_4(u_{n_j}) - DH_4(u) \parallel &:= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |DH_4(u_{n_j})\varphi - DH_4(u)\varphi| \\
&\leq C\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \parallel |u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j} - |u|^{q-2}u \parallel_{L^{\frac{q}{q-1}}(\partial\Omega)}.
\end{aligned}$$

Logo, $DH_4(u_n) \longrightarrow DH_4(u)$ em $(W^{1,2}(\Omega))'$ quando $u_n \longrightarrow u$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Assim DH_4 é contínuo, portanto DJ_4 é contínuo e temos $DJ_4 = J_4'$. Logo $J_4 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ e por (**??**)

$$DJ_4(u)\varphi = J_4'(u)\varphi = 2\left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g(x)|u|^q d\sigma \right)\left(\int_{\partial\Omega} g(x)|u|^{q-2}u\varphi d\sigma \right). \tag{3.30}$$

Portanto, $E \in C^2(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\langle E'(u), \varphi \rangle = \frac{1}{2}J_1'(u)\varphi - J_2'(u)\varphi - J_3'(u)\varphi - \frac{\lambda}{2}J_4'(u)\varphi \quad \forall\ u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$$

e por (??), (??), (??) e (??) temos

$$\begin{aligned}\langle E'(u),\varphi\rangle &= M(\|u\|^2)\int_\Omega(\nabla u\nabla\varphi+u\varphi)dx-\int_\Omega f(x)|u|^{p-2}u\varphi dx-\int_\Omega h(x)\varphi dx\\ &- \lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}g(x)|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}g(x)|u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right).\end{aligned}$$ ■

Teorema 3.5. *O problema (??) possui pelo menos duas soluções fraca não-triviais distintas.*

Demonstração. **Solução 1 via teorema do passo da montanha**

Vamos mostrar que o funcional (??) cumpre as hipóteses do teorema.

Afirmação 1: **O funcional (??) satisfaz a 1ª Geometria.**

Seque das imersões compactas de Sobolev que

$$\int_\Omega f(x)|u|^p dx \le \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |u|^p dx = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^\infty(\Omega)}(S_p)^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p.$$

Logo temos a desigualdade

$$\int_\Omega f(x)|u|^p dx \le \|f\|_{L^\infty(\Omega)}(S_p)^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p. \tag{3.31}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} g(x)|u|^q d\sigma &\le \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\int_{\partial\Omega}|u|^q d\sigma\\ \int_{\partial\Omega} g(x)|u|^q d\sigma &\le \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\|u\|^q_{L^q_{(\partial\Omega)}}\\ \int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}g(x)|u|^q d\sigma &\le \frac{\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}}{q}(S_p^T)^{-\frac{q}{2}}\|u\|^q. \end{aligned}\tag{3.32}$$

portanto

$$\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}g(x)|u|^q d\sigma\right)^2 \le \frac{\|g\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}}{q^2}(S_q^T)^{-q}\|u\|^{2q} \tag{3.33}$$

Temos ainda para $p, p' > 1$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $\varepsilon > 0$ que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h(x)udx &\leq \int_\Omega \left(\frac{|h(x)|}{\varepsilon}\right)(\varepsilon|u|)dx \\
&\leq \int_\Omega \left[\frac{1}{p'}\left(\frac{|h(x)|}{\varepsilon}\right)^{p'} + \frac{1}{p}(\varepsilon|u|)^p\right]dx \\
&= \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon^{p'}p'}|h(x)|^{p'}dx + \int_\Omega \frac{\varepsilon^p}{p}|u|^p dx \\
&= \frac{1}{\varepsilon^{p'}p'}\|h\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} + \frac{\varepsilon^p}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^{p'}}\|h\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} + \frac{\varepsilon^p}{p}(S_p)^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p.
\end{aligned}$$

Isto nos da

$$\int_\Omega h(x)udx \leq \frac{\|h\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}}{\varepsilon^{p'}} + \frac{\varepsilon^p}{p}(S_p)^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p. \tag{3.34}$$

Desse modo, para toda $u \in W^{1,2}(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned}
E(u) \geq\ & \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}(S_p)^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p \\
& -\frac{\|h\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}}{\varepsilon^{p'}} - \frac{\varepsilon^p}{p}(S_p)^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p - \frac{\lambda\|g\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}}{2q^2}(S_q^T)^{-q}\|u\|^{2q}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Segue de (**??**) para $p = p' = 2$ que

$$\int_\Omega h(x)udx \leq \frac{\|h\|^2_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2}{2}(S_2)^{-1}\|u\|^2. \tag{3.36}$$

Desse modo, de (**??**) e (**??**) obtemos

$$\begin{aligned}
E(u) \geq\ & \left(\frac{a}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}(S_2)^{-1}\right)\|u\|^2 + \frac{b}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}(S_p)^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p \\
& -\frac{\|h\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}}{\varepsilon^{p'}} - \frac{\lambda\|g\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}}{2q^2}(S_q^T)^{-q}\|u\|^{2q},
\end{aligned}$$

tome $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\frac{a}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}(S_2)^{-1} \geq 0$. Assim,

$$
\begin{aligned}
E(u) \quad \geq \quad & \frac{b}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}(S_p)^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p \\
& -\frac{\|h\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}}{\varepsilon^{p'}} - \frac{\lambda\|g\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}}{2q^2}(S_q^T)^{-q}\|u\|^{2q}
\end{aligned}
$$

isso implica que

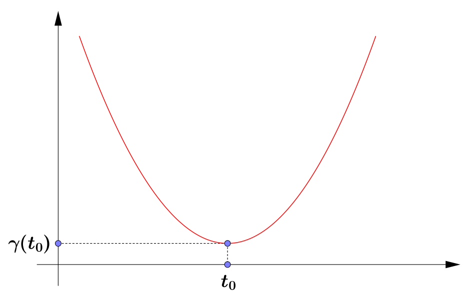
$$
\begin{aligned}
E(u) \quad \geq \quad & \|u\|^{2(\alpha+1)}\left[\frac{b}{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}(S_p)^{-\frac{p}{2}}\|u\|^{p-2(\alpha+1)}\right. \\
& \left.-\frac{\lambda\|g\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}}{2q^2}(S_q^T)^{-q}\|u\|^{2q-2(\alpha+1)}\right] - \frac{\|h\|^2_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

onde $1 < q < 2 < 2q < 2(\alpha+1) < p < 2^*$.

Observamos agora que a função

$$
\gamma(t) = \frac{1}{p}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}(S_p)^{-\frac{p}{2}}t^{p-2(\alpha+1)} + \frac{\lambda\|g\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}}{2q^2}(S_q^T)^{-q}t^{2q-2(\alpha+1)},
$$

onde $t = \|u\| \geq 0$, atinge um valor mínimo em um único ponto $t_0 > 0$. De fato, como $2q - 2(\alpha+1) < 0$ temos que $t \neq 0$, para $t \longrightarrow 0$ temos que $\gamma(t) \longrightarrow +\infty$ e para $t \longrightarrow +\infty$ temos que $\gamma(t) \longrightarrow +\infty$. Isto pode ser melhor interpretado através do seguinte gráfico



Além disso, temos que

$$\gamma'(t) = \frac{1}{p}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}(S_p)^{-\frac{p}{2}}[p-2(\alpha+1)]t^{p-2(\alpha+1)-1}+\frac{\lambda\|g\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}}{2q^2}(S_q^T)^{-q}[2q-2(\alpha+1)]t^{2q-2(\alpha+1)-1},$$

desse modo $\gamma'(t) = 0$ se, e somente se, ocorrem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}(S_p)^{-\frac{p}{2}}[p-2(\alpha+1)]t^{p-2(\alpha+1)-1} &= \frac{\lambda\|g\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}}{2q^2}(S_q^T)^{-q}[2(\alpha+1)-2q]t^{2q-2(\alpha+1)-1}\\
\frac{t^p t^{-2(\alpha+1)-1}}{t^{2q}t^{-2(\alpha+1)-1}} &= \frac{\dfrac{\lambda\|g\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}}{2q^2}(S_q^T)^{-q}[2(\alpha+1)-2q]}{\dfrac{1}{p}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}(S_p)^{-\frac{p}{2}}[p-2(\alpha+1)]}\\
t^{p-2q} &= \frac{|g\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}(S_q^T)^{-q}[2(\alpha+1)-2q]p}{2q^2\|f\|_{L^\infty(\Omega)}(S_p)^{-\frac{p}{2}}[p-2(\alpha+1)]}\lambda,
\end{aligned}$$

considere então $t_0 = A\lambda^{\frac{1}{p-2q}}$ onde

$$A = \left(\frac{\|g\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}(S_q^T)^{-q}[2(\alpha+1)-2q]p}{2q^2\|f\|_{L^\infty(\Omega)}(S_p)^{-\frac{p}{2}}[p-2(\alpha+1)]}\right)^{\frac{1}{p-2q}}.$$

Note que A não depende de λ pois $A = A(\alpha, p, q, \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)})$. Desse modo,

$$\gamma(t_0) = A_1(A\lambda^{\frac{1}{p-2q}})^{p-2(\alpha+1)} + B_1(A\lambda^{\frac{1}{p-2q}})^{2q-2(\alpha+1)}$$

onde $A_1 = \dfrac{1}{p}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}(S_p)^{-\frac{p}{2}}$ e $B_1 = \dfrac{\|g\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}}{2q^2}(S_q^T)^{-q}$, vemos que A_1 e B_1 também não dependem de λ, assim

$$\begin{aligned}
\gamma(t_0) &= A_1A^{p-2(\alpha+1)}\lambda^{\frac{p-2(\alpha+1)}{p-2q}} + \lambda B_1A^{2q-2(\alpha+1)}\lambda^{\frac{2q-2(\alpha+1)}{p-2q}}\\
&= A_1A^{p-2(\alpha+1)}\lambda^{\frac{p-2(\alpha+1)}{p-2q}} + B_1A^{2q-2(\alpha+1)}\lambda^{\frac{2q-2(\alpha+1)}{p-2q}+1}\\
&= A_1A^{p-2(\alpha+1)}\lambda^{\frac{p-2(\alpha+1)}{p-2q}} + B_1A^{2q-2(\alpha+1)}\lambda^{\frac{p-2(\alpha+1)}{p-2q}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\gamma(t_0) = A_2\lambda^{\frac{p-2(\alpha+1)}{p-2q}} > 0$$

em que $A_2 = A_1A^{p-2(\alpha+1)} + B_1A^{2q-2(\alpha+1)}$, A_2 também não depende de λ e assim podemos tomar $\lambda_0 > 0$ de modo que

$$\gamma(t_0) = A_2 \lambda_0^{\frac{p-2(\alpha+1)}{p-2q}} < \frac{b}{2(\alpha+1)}.$$

Tome $\|u\| = t_0 > 0$ então

$$\gamma(\|u\|) = A_2 \lambda_0^{\frac{p-2(\alpha+1)}{p-2q}}.$$

Assim

$$E(u) \geq t_0^{2(\alpha+1)} \left[\frac{b}{2(\alpha+1)} - A_2 \lambda_0^{\frac{p-2(\alpha+1)}{p-2q}} \right] - \frac{\|h\|^2_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon^2}, \tag{3.37}$$

como $t_0^{2(\alpha+1)} \left[\frac{b}{2(\alpha+1)} - A_2 \lambda_0^{\frac{p-2(\alpha+1)}{p-2q}} \right]$ não depende de $\varepsilon > 0$ podemos considerar h pequeno de modo que

$$E(u) \geq t_0^{2(\alpha+1)} \left[\frac{b}{2(\alpha+1)} - A_2 \lambda_0^{\frac{p-2(\alpha+1)}{p-2q}} \right] - \frac{\|h\|^2_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon^2} = r > 0,$$

ou seja, existem $r, t_0 > 0$ tais que

$$E(u) \geq r > 0 \ \text{ sempre que } \ \|u\| = t_0 > 0. \tag{3.38}$$

Afirmação 2: **O funcional (??) satisfaz a 2ª Geometria.**

Dada uma função teste $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ fixada e $t > 0$ de modo que $\|t\psi\| > 0$, teremos

$$\begin{aligned} E(t\psi) &= \frac{at^2}{2}\|\psi\|^2 + \frac{bt^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)}\|\psi\|^{2(\alpha+1)} - \frac{t^p}{p}\int_\Omega f(x)|\psi|^p dx \\ &- t\int_\Omega h(x)\psi dx - \frac{\lambda t^{2q}}{2}\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}g(x)|\psi|^q d\sigma\right)^2. \end{aligned}$$

Se considerarmos $\psi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ teremos $\psi(x) = 0$ na $\partial\Omega$ desse modo,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g(x)|\psi|^q d\sigma = 0.$$

Logo

$$E(t\psi) = \frac{at^2}{2}\|\psi\|^2 + \frac{bt^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)}\|\psi\|^{2(\alpha+1)} - \frac{t^p}{p}\int_\Omega f(x)|\psi|^p dx - t\int_\Omega h(x)\psi dx. \tag{3.39}$$

desde que $1 < q < 2 < 2q < 2(\alpha+1) < p < 2^*$, como $f \not\equiv 0$ se $\psi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ é tal que $supp(\psi) \subset \{x \in \Omega;\ f(x) > 0\}$, teremos $E(t\psi) \longrightarrow -\infty$ quando $t \longrightarrow +\infty$. Portanto existe $t_* > 0$ tal que $e = t_*\psi$ com $E(e) < 0$ e $\|t_*\psi\| > t_0$ garantindo que a segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha está satisfeita.

Afirmação 3: **O funcional (??) satisfas a condição Palais-Smale.**

Seja $(u_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$ uma sequência $(PS)_c$ para E, isto é

$$E(u_n) \to c \ \text{ e } \ E'(u_n) \to 0$$

desse modo existe $C_E > 0$ tal que

$$|E(u_n)| \leq C_E, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim de (**??**), obtemos

$$C_E \geq E(u_n) \geq \|u_n\|^{2(\alpha+1)}\left[\frac{b}{2(\alpha+1)} - A_2\lambda_0^{\frac{p-2(\alpha+1)}{p-2q}}\right] - \frac{\|h\|^2_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon^2} \tag{3.40}$$

seque de (**??**) que (u_n) é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\langle E'(u_n), \varphi\rangle &= M(\|u_n\|^2)\int_\Omega(\nabla u_n \nabla\varphi + u_n\varphi)dx - \int_\Omega f(x)|u_n|^{p-2}u_n\varphi dx - \int_\Omega h(x)\varphi dx \\
&\quad -\lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}g(x)|u_n|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}g(x)|u_n|^{q-2}u_n\varphi d\sigma\right) \\
&= (a + b\|u_n\|^{2\alpha})\langle u_n, \varphi\rangle - \left[\int_\Omega f(x)|u_n|^{p-2}u_n\varphi dx + \int_\Omega h(x)\varphi dx\right. \\
&\quad \left. +\lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}g(x)|u_n|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}g(x)|u_n|^{q-2}u_n\varphi d\sigma\right)\right]
\end{aligned}$$

isto é

$$\langle E'(u_n), \varphi\rangle = \langle (a + b\|u_n\|^{2\alpha})u_n, \varphi\rangle - \langle Tu_n, \varphi\rangle \ \ \forall\ \varphi \in W^{1,2}(\Omega) \tag{3.41}$$

onde $T : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow W^{1,2}(\Omega)$ é um operador linear definido por

$$\begin{aligned} \langle Tu, \varphi \rangle &= \int_\Omega f(x)|u|^{p-2}u\varphi dx + \int_\Omega h(x)\varphi dx \\ &+\lambda \left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g(x)|u|^q d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} g(x)|u|^{q-2}u\varphi d\sigma \right) \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.42}$$

T é um operador compacto. De fato, para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ fixada consideremos inicialmente o funcional

$$\begin{aligned} J_u : W^{1,2}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto J_u(\varphi) \end{aligned}$$

em que

$$J_u(\varphi) = \int_\Omega f(x)|u|^{p-2}u\varphi dx + \int_\Omega h(x)\varphi dx + \lambda \left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g(x)|u|^q d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} g(x)|u|^{q-2}u\varphi d\sigma \right).$$

Observe que J_u está bem definido e é claramente linear, devido as propriedades da integral.

Vamos recordar que no Teorema (**??**) mostramos que $\int_\Omega f(x)|u|^{p-2}u\varphi dx$, $\int_\Omega h(x)\varphi dx$ e $(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g(x)|u|^q d\sigma)(\int_{\partial\Omega} g(x)|u|^{q-2}u\varphi d\sigma)$ são contínuos. Portanto, J_u é contínuo. Então, temos um funcional linear e contínuo em $W^{1,2}(\Omega)$. Logo pelo Teorema da Representação de Riez, para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ fixada, existe um único $v := Tu \in W^{1,2}(\Omega)$, tal que $J_u(\varphi) = \langle Tu, \varphi \rangle$, isto é,

$$\begin{aligned} \langle v, \varphi \rangle &= \int_\Omega f(x)|u|^{p-2}u\varphi dx + \int_\Omega h(x)\varphi dx \\ &+\lambda \left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g(x)|u|^q d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} g(x)|u|^{q-2}u\varphi d\sigma \right) \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega). \end{aligned}$$

Desse modo, temos um operador

$$\begin{aligned} T : W^{1,2}(\Omega) &\longrightarrow W^{1,2}(\Omega) \\ u &\longmapsto v := Tu \end{aligned}$$

em que $\langle Tu, \varphi \rangle = J_u(\varphi)$ o qual está bem definido e é linear. Além disso, T é compacto. De fato, seja $(u_n) \in W^{1,2}(\Omega)$ uma sequência tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Considere $v_n = Tu_n$ e $v = Tu$. Assim, usando o fato de J_u ser um funcional linear e contínuo, portanto limitado, temos que existem constantes K_1 e K_2 positivas tais que

$$\begin{array}{rcl} \|Tu_n - Tu\|^2 & = & \langle T(u_n-u), T(u_n-u)\rangle \\ & \leq & |J_{(u_n-u)}(Tu_n - Tu)| \\ & \leq & \left(K_1\|u_n-u\|^{p-1}_{L^2(\Omega)} + K_2\|u_n-u\|^{2q-1}_{L^2(\partial\Omega)}\right)\|Tu_n - Tu\| \end{array}$$

logo

$$\|Tu_n - Tu\| \leq K_1\|u_n-u\|^{p-1}_{L^2(\Omega)} + K_2\|u_n-u\|^{2q-1}_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Como as imersões de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$ são compactas temos que, a menos de subsequência, $u_n \longrightarrow u$ em $L^2(\Omega)$ e $u_n \longrightarrow u$ em $L^2(\partial\Omega)$. Logo, a menos de subsequência, $Tu_n \longrightarrow Tu$, mostrando que T é compacto.

Agora, temos de (**??**)que

$$E'(u_n) = \left(a + b\|u_n\|^{2\alpha}\right)u_n - Tu_n. \tag{3.43}$$

Desde que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$, tem-se que

$$E'(u_n) \longrightarrow 0 \Rightarrow \left(a + b\|u_n\|^{2\alpha}\right)u_n - Tu_n \longrightarrow 0.$$

Como (u_n) é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$ temos que $u_n \rightharpoonup u_1$ em $W^{1,2}(\Omega)$ e $\|u_n\| \longrightarrow \widehat{a} \geq 0$ possivelmente para subsequência em $W^{1,2}(\Omega)$. Então, se $\widehat{a} = 0$ teremos $u_n \longrightarrow 0$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Agora, se $\widehat{a} > 0$ então para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande teremos $0 < \frac{\widehat{a}}{2} \leq \|u_n\|$. Notamos agora que

$$u_n = \frac{1}{a + b\|u_n\|^{2\alpha}}\left[\left(a + b\|u_n\|^{2\alpha}\right)u_n - Tu_n + Tu_n\right].$$

Temos então que $(a + b\|u_n\|^{2\alpha})u_n - Tu_n \longrightarrow 0$, (Tu_n) converge pois T é compacto e $a + b\|u_n\|^{2\alpha} \longrightarrow a + b\widehat{a}^{2\alpha} > 0$. Assim, a menos de subsequência $u_n \longrightarrow u_1$ em $W^{1,2}(\Omega)$ mostrando que o funcional (**??**) satisfaz a condição $(PS)_c$. Pelo Teorema do Passo da

Montanha u_1 é ponto crítico do funcional (??) e, portanto, solução fraca do problema (??). Desde que $E(u_1) = c > 0$, segue que $u_1 \not\equiv 0$.

Solução 2 via Princípio Variacional de Ekeland.

Segue de (??) que

$$E(t\psi) = \frac{at^2}{2}\|\psi\|^2 + \frac{bt^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)}\|\psi\|^{2(\alpha+1)} - \frac{t^p}{p}\int_\Omega f(x)|\psi|^p dx - t\int_\Omega h(x)\psi dx$$

onde $\psi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ e $t > 0$. Assim

$$E(t\psi) = t\left[\frac{at}{2}\|\psi\|^2 + \frac{bt^{2\alpha+1}}{2(\alpha+1)}\|\psi\|^{2(\alpha+1)} - \frac{t^{p-1}}{p}\int_\Omega f(x)|\psi|^p dx - \int_\Omega h(x)\psi dx\right],$$

como h^+ é não identicamente nula, podemos escolher $\psi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que $\displaystyle\int_\Omega h(x)\psi dx > 0$. Desse modo, se $t > 0$ for suficientemente pequeno, tem-se

$$E(t\psi) < 0 \tag{3.44}$$

Além disso, temos que o funcional E é limitado inferiormente na bola $B_j(0) \subset W^{1,2}(\Omega)$ para algum $j > 0$. Logo, existe um número real C_j tal que

$$-\infty < C_j = \inf_{u \in \overline{B_j(0)}} E(u) < 0.$$

Considere $j = t_0$ onde $t_0 > 0$ foi obtido no Teorema do Passo da Montanha em (??), assim

$$-\infty < C_{t_0} = \inf_{u \in B_{t_0}(0)} E(u) < 0 \quad \text{e} \quad \inf_{u \in \partial B_{t_0}(0)} E(u) \geq r > 0 \tag{3.45}$$

logo

$$0 < \inf_{u \in \partial B_{t_0}(0)} E(u) - \inf_{u \in B_{t_0}(0)} E(u).$$

Desse modo, podemos tomar $\varepsilon_m \longrightarrow 0^+$ tal que

$$0 < \varepsilon_m < \inf_{u \in \partial B_{t_0}(0)} E(u) - \inf_{u \in B_{t_0}(0)} E(u)$$

isso implica que

$$\inf_{u\in B_{t_0}(0)} E(u) + \varepsilon_m < \inf_{u\in \partial B_{t_0}(0)} E(u). \tag{3.46}$$

Temos então que $\overline{B_{t_0}(0)}$ é um espaço métrico completo e $E : \overline{B_{t_0}(0)} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Pelo Princípio Variacional de Ekeland existe uma sequência $(u_n) \subset \overline{B_{t_0}(0)}$ tal que

$$C_{t_0} \leq E(u_n) < C_{t_0} + \varepsilon_m \tag{3.47}$$

e

$$E(u_n) \leq E(u) + \varepsilon_m \|u_n - u\|, \quad \forall u \in \overline{B_{t_0}(0)}, \quad u \neq u_n. \tag{3.48}$$

assim, de (**??**), (**??**) e (**??**)

$$E(u_n) < C_{t_0} + \varepsilon_m \leq \inf_{u\in B_{t_0}(0)} E(u) + \varepsilon_m < \inf_{u\in \partial B_{t_0}(0)} E(u) \tag{3.49}$$

e daí $(u_n) \subset B_{t_0}(0)$.

Consideremos agora o funcional $J_m : \overline{B_{t_0}(0)} \longrightarrow \mathbb{R}$, definido no espaço métrico completo $\overline{B_{t_0}(0)} \subset W^{1,2}(\Omega)$, dado por

$$J_m(u) = E(u) + \varepsilon_m \|u - u_n\|, \quad u \in \overline{B_{t_0}(0)}. \tag{3.50}$$

Note que

$$J_m(u_n) = E(u) < J_m(u) \quad \forall u \in \overline{B_{t_0}(0)} \backslash \{u_n\}$$

isso mostra que u_n e ponto de mínimo estrito de J_m.

Agora fixado $v \in B_1(0)$ de modo que para $t > 0$ suficientemente pequeno temos,

$$\begin{aligned} \frac{J_m(u_n + tv) - J_m(u_n)}{t} &\geq 0 \\ \frac{E(u_n + tv) + \varepsilon_m \|(u_n + tv) - u_n\| - E(u)}{t} &\geq 0 \\ \frac{E(u_n + tv) - E(u)}{t} + \frac{\varepsilon_m t \|v\|}{t} &\geq 0 \\ \frac{E(u_n + tv) - E(u)}{t} + \varepsilon_m \|v\| &\geq 0. \end{aligned}$$

Desde que E é diferenciável então passando ao limite $t \longrightarrow 0$ obtemos

$$\langle E'(u_n), v\rangle + \varepsilon_m \|v\| \geq 0, \quad \forall v \in B_1(0). \tag{3.51}$$

Como (??) é válida para todo $v \in B_1(0)$ então podemos considerar $-v \in B_1(0)$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \langle E'(u_n), -v\rangle + \varepsilon_m \| - v\| &\geq 0 \qquad (3.52)\\ -\langle E'(u_n), v\rangle + \varepsilon_m \|v\| &\geq 0 \\ -\langle E'(u_n), v\rangle &\geq -\varepsilon_m \|v\|, \end{aligned}$$

assim,

$$-\varepsilon_m \|v\| \leq \langle E'(u_n), v\rangle \leq \varepsilon_m \|v\|$$

isso implica que

$$|\langle E'(u_n), v\rangle| \leq \varepsilon_m \|v\|.$$

Portanto, temos que $\|E'(u_n)\|_* \leq \varepsilon_m$ e $\varepsilon_m \longrightarrow 0$ isso garante que $E'(u_n) \longrightarrow 0$ em $[W^{1,2}(\Omega)]^*$.

Desse modo, temos uma sequência $(u_n) \subset B_{t_0}(0)$ tal que $E(u_n) \longrightarrow C_{t_0} < 0$ e $E'(u_n) \longrightarrow 0$, isto é, (u_n) e uma sequência $(PS)_{C_{t_0}}$ para o funcional E.

Segue da afirmação 3 da solução via Teorema do Passo da Montanha que E satisfaz a condição (PS) logo, a menos de subsequência $u_n \longrightarrow u_2$ em $W^{1,2}(\Omega)$ temos então que

$$u_n \longrightarrow u_2, \quad E(u_n) \longrightarrow E(u_2) \;\text{ e }\; E'(u_n) \longrightarrow E'(u_2)$$

pela unicidade do limite temos

$$E(u_2) = C_{t_0} < 0 \;\text{ e }\; E'(u_2) = 0.$$

Daí, u_2 é ponto critico do funcional E.

Comparando as soluções via Teorema do Passo da Montanha e via Princípio Variacional de Ekeland, temos

$$E(u_2) = C_{t_0} < 0 < c = E(u_1)$$

isso implica que $u_1 \neq u_2$ ■

Apêndice A

Conceitos e resultados

Definição A.1. *Sejam X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional, I é dito ser Fréchet diferenciável em $u \in X$ quando existe um funcional linear $T \in X'$, tal que,*

$$\lim_{||v|| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Tv}{||v||} = 0.$$

A derivada de Fréchet no ponto u, quando existe, é única. Vamos denotá-la por $I'(u)$.

Definição A.2. *Se A é um conjunto aberto em X, dizemos que funcional I é de classe C^1 em A ou simplesmente $I \in C^1(A, \mathbb{R})$ quando é Fréchet diferenciável em todo ponto $u \in X$ e o operador $I' : A \to X'$ é contínuo.*

Definição A.3. *Sejam X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional, I é dito ser Gâteaux diferenciável em u, se existe um funcional linear $T_u \in X'$, tal que,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - f(x)}{t} = T_u v, \quad \forall v \in X.$$

A derivada de Gâteaux no ponto u, quando existe, é única. Vamos denotá-la por $DI(u)$. Mais além, I é de classe C^1 em A se, a derivada de Gateaux existe e o operador $DI : E \to X'$ existe e é continuo.

Teorema A.1. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se (x_n) é uma seqüencia limitada em X, então existem uma subseqüência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ e $x \in X$ tais que $x_{n_j} \longrightarrow x$ em X.*

Demonstração. Ver [?].

Teorema A.2. *(da Convergência Dominada de Lebesgue): Seja (f_n) uma seqüencia de funções em $L^1(\Omega)$ e suponha que:*

(a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\displaystyle\int_\Omega f_n dx \longrightarrow \int_\Omega f dx$.

Demonstração. Ver [?].

Teorema A.3. *(de Vainberg): Seja (f_n) uma seqüencia de funções em $L^p(\Omega)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subseqüência $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ tal que*

(a) $f_{n_j}(x) \longrightarrow f_n(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*

(b) Existe $h \in L^p(\Omega)$ *tal que* $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração. Ver [?].

Lema A.1. *(de Brezis-Lieb): Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$ e $(f_n) \subset L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ com $p > 1$. Suponha que $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω e exita $C > 0$, tal que*

$$\int |f_n|^p \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\int f_n \varphi \to \int f \varphi, \ \forall \varphi \in L^q(\Omega)$$

onde, $1/p + 1/q = 1$.

Demonstração. Ver [?].

Teorema A.4. *(Teorema de Rellich-Kondrachov): Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um domínio limitado de classe C^1. Então as seguintes afirmações são válidas* *(i) Se $p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < p^*$ em que $1/p^* = 1/p - 1/N$;*

(ii) Se $p = N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < +\infty$;

(iii) Se $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. Além disso, as imersões são compactas.

Demonstração. Ver [?]

Proposição A.1. *(Identidade de Green). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e $u, \varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$. Então*

$$-\int_{\Omega} \varphi \Delta u dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma.$$

Demonstração. Ver [?]

Teorema A.5. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq P < +\infty$ e $1/p + 1/q = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [?]

Teorema A.6. *(Teorema da Representação de Riesz-Fréchet): Sejam H um espaço de Hilbert e $f \in H'$, existe $u \in H$ tal que*

$$f(v) = \langle u, v \rangle \, , \forall v \in H.$$

Além disso,

$$|f|_{h'} = \|u\|_H.$$

Demonstração. Ver [?]

Proposição A.2. *(Alternativa de Fredholm): Sejam E um espaço de Banach e $T : E \to E$ um operador compacto. Então*

(i) $Ker(I - T)$ *tem dimensão finita;*

(ii) $R(I - T)$ *é fechado em E e* $R(I - T) = Ker(I - T^*)^{\perp}$*;*

(iii) $Ker(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I - T) = E$*;*

(iv) $dim(Ker(I - T)) = dim(Ker(I - T^*))$*.*

Demonstração. Ver [?]

Teorema A.7. *(Desigualdade de Poincaré): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado em relação a alguma direção do $\mathbb{R}^N$. Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \; \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [?]

A seguir apresentaremos resultados de existência e regularidade para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = h(x) & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

Teorema A.8. *Suponhamos que $f \in L^p(\Omega)$ e $h \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. Então o problema (??) possui uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Além disso.*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|h\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)}. \tag{1.2}$$

O próximo resultado esta demostrado em [?]

Lema A.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$ um domínio limitado com fronteira regular $\partial\Omega$. Se $1 < p < N$ e $p \leq q \leq p^* = \frac{(N-1)p}{N-p}$. Então a imersão*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$$

é contínua. Além disso, se $q < p^* = \frac{(N-1)p}{N-p}$ então a imersão é compacta.

Assim, as funções de $W^{1,2}(\Omega)$ admitem um traço em $L^q(\partial\Omega)$ e temos a desigualdade do traço Sobolev

$$S_T(\Omega, 2, q)\|u\|^2_{L^q(\partial\Omega)} \leq \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}, \; 1 \leq q \leq 2^* = \frac{2(N-1)}{N-2}.$$

Além disso, a melhor constante de Sobolev $S_T(\Omega, 2, q)$ é dada

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)dx}{\left(\displaystyle\int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma\right)^{2/q}} > 0. \tag{1.3}$$

e as funções que fazem com que esse ínfimo seja atingido são justamente as autofunções associadas ao λ_1.

Referências Bibliográficas

[1] R.A. Adams, J.J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press (2003).

[2] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, T. F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl. 49 (2005), 85-93.

[3] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, G.M. Figueiredo, *On a class of nonlocal elliptic problems with critical growth*, Differential Equations Applications 3 (2010), 409-417.

[4] H. Amann. *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Rev. 18 (1976), 620-709.

[5] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and apllications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[6] G. Anello; *On a pertubed Dirichlet problem for a nonlocal differential equation of Kirchhoff type*, Bound. Val. Prob. 2011 (2011), 1-10.

[7] R. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley-Interscience (1995).

[8] V. Benci, G. Cerami, Multiple positive solutions of some elliptic problems via the morse theory and the domain topology, Calc. Var. 2 (1994), 29-48.

[9] J. F. Bonder & J. D. Rossi, *Existence results for the p-Laplacian with nonlinear boundary condition,* J. Math. Anal. Appl. 263. (2001) 195-223.

[10] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011).

[11] K.J. Brown, Y. Zhang, *The Nehari manifold for a semilinear elliptic problem with a sign changing weight function,* J. Differ. Equa. 193 (2003), 481-499.

[12] A. P. Calderon, *On a inverse boundary value problem,* Seminar on Nonlinear Analysis and Applications to Continnum Physics. Soc. Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro (1980), 65-73

[13] F.J.S.A. Corrêa, G.M. Figueiredo, *On an elliptic equation of p-Kirchhoff-type via variational methods*, Bull. Austral. Math. Soc. 74 (2006), 263-277.

[14] F.J.S.A. Corrêa, G.M. Figueiredo, *On a p-Kirchhoff equation via Krasnoselskii's genus*, Appl. Math. Lett. 22 (2009), 819-822.

[15] T. M. L. Diogo, *Existência e Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos Não-Locais com Condição de Fronteira Integrais*, Dissertação (mestrado) - Programa DE Pós-graduação em Matemática e Estatística(PPGME), Instituto de Ciências Exatas e Naturais(ICEN), Universidade Federal do Pará(UFPA), Belém, (2018).

[16] P. Drabek, S.I. Pohozaev, *Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method*, Proc. Roayl Soc. Edinburgh (1997), 703-726.

[17] D. G. De Figueiredo, *Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Tata Inst. Fund. Res. Lect. Math. Phys., Springer-Verlag 81 (1989).

[18] S. Dias, *Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de equações elípticas quase lineares*, ICEX-UFMG (2011).

[19] I. Ekeland, *On The Variational Principle*, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.

[20] G.M. Figueiredo, *Uma introdução à teoria dos pontos críticos*, PPGME-UFPA (2015).

[21] J. Jin, X. Wu, *Infinitely many radial solutions for Kirchhoff-type problems in R*, J. Math. Anal. Appl. 369 (2010), 564-574.

[22] N.I. Kavallaris, D.E. Tzanetis,*On the blow-up of a non-local parabolic problem*, Appl. Math. Lett. 19 (2006), 921-925.

[23] O. Kavian, *Introduction à théorie des points critiques et applications aux problémes elleptiques*, Springer-Verlag (1993).

[24] M. Lazzo, *Morse Theory and Multiple Positive Solutions to a Neumann Problem*, Ann. Mat. Pura Appl. 168 (1995), 205-217.

[25] J.L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics, International Symposium on Continuum*, Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro (1977), Mathematics Studies, 30 (1978), 284-346.

[26] T.F. Ma, J.E. Muñoz Rivera, *Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem*, Appl. Math. Lett. 16 (2003) 243-248.

[27] J. Morbach, *Problemas Elípticos Não-Locais com Condições de Fronteira Integrais.* Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Doutorado em Matemática, Belém, (2014).

[28] D. Pereira, *Existência e multiplicidade de solução para uma classe de Equações elípticas via teoria de Morse*, Dissertação (Mestrado), CCT-UFCG (2010).

[29] K. Perera, Z. Zhang, *Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index.* J. Differ. Equ. 221, 246-255 (2006).

[30] L. Sandra, *Existência de solução para duas classes de problemas elípticos usando a aplicação fibração relacionada à Variedade de Nehari*, Dissertação (Mestrado), UFJF (2014).

[31] W. Steklov, *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique*, (suite et fin), Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 19 (1902), pp. 455-490.

[32] Y. Wang, *Solutions to nonlinear elliptic equations with a nonlocal boundary condition*, Eletron. J. Diff. Eq. 2002 (2002), 1-16.