



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**Critério de Estabilidade de um Esquema Explícito em  
Diferenças Finitas para o Modelo de Placas de  
Mindlin-Timoshenko**

**Alciney das Neves Moraes**

Belém  
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**Alciney das Neves Moraes**

**Critério de Estabilidade de um Esquema Explícito em  
Diferenças Finitas para o Modelo de Placas de  
Mindlin-Timoshenko**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística - PPGME - da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo**

Belém  
2019

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a)**

---

M827c Moraes, Alciney das Neves  
Critério de Estabilidade de um Esquema Explícito em  
Diferenças Finitas para o Modelo de Placas de Mindlin-  
Timoshenko / Alciney das Neves Moraes. — 2019.  
55 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Anderson David de Souza  
Campelo  
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em  
Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e  
Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Diferença finita. 2. critério de estabilidade. 3. inércia  
rotatória. I. Título.

CDD 510

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Alciney das Neves Moraes

Critério de Estabilidade de um Esquema Explícito em Diferenças Finitas  
para o Modelo de Placas de Mindlin-Timoshenko

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística  
da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre  
em Matemática.

Data da defesa: 10 de julho de 2019.

APROVADO

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo (Orientador)  
PPGME - UFPA



Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior  
PDM - UFPA



Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias  
PPGME - UFPA



Prof. Dr. Mauro de Lima Santos  
PDM - UFPA

# Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus, o meu Senhor;
- Agradeço a Ciane, minha esposa;
- Ao professor Anderson, meu orientador;
- Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará e aos professores que me compreenderam e apoiaram minha permanência no programa;
- Ao meu chefe Absolon e todos os colegas de trabalho;
- Aos meus colegas de formação que muito me ajudaram.

# Lista de Figuras

|      |                                  |    |
|------|----------------------------------|----|
| 3.1  | $\beta = 0.0$                    | 30 |
| 3.2  | $\beta = 0.1$                    | 30 |
| 3.3  | $\beta = 0.2$                    | 30 |
| 3.4  | $\beta = 0.3$                    | 30 |
| 3.5  | $\beta = 0.4$                    | 31 |
| 3.6  | $\beta = 0.5$                    | 31 |
| 3.7  | $\beta = 0.6$                    | 31 |
| 3.8  | $\beta = 0.7$                    | 31 |
| 3.9  | $\beta = 0.8$                    | 31 |
| 3.10 | $\beta = 0.9$                    | 31 |
| 3.11 | $\beta = 0.95$                   | 32 |
| 3.12 | $\beta = 1$                      | 32 |
|      |                                  |    |
| 4.1  | Placa                            | 33 |
| 4.2  | $\beta = 0.0$ e $\theta = 0.0$   | 49 |
| 4.3  | $\beta = 0.1$ e $\theta = 0.1$   | 49 |
| 4.4  | $\beta = 0.4$ e $\theta = 0.4$   | 49 |
| 4.5  | $\beta = 0.5$ e $\theta = 0.5$   | 49 |
| 4.6  | $\beta = 0.6$ e $\theta = 0.6$   | 50 |
| 4.7  | $\beta = 0.7$ e $\theta = 0.7$   | 50 |
| 4.8  | $\beta = 0.9$ e $\theta = 0.9$   | 50 |
| 4.9  | $\beta = 0.95$ e $\theta = 0.95$ | 50 |
| 4.10 | $\beta = 1$ e $\theta = 1$       | 50 |
| 4.11 | $\beta = 1$ e $\theta = 0$       | 50 |
| 4.12 | $\theta = 0$                     | 51 |
| 4.13 | $\theta = 0.4$                   | 51 |
| 4.14 | $\theta = 0.5$                   | 51 |
| 4.15 | $\theta = 0.7$                   | 51 |
| 4.16 | $\theta = 0.9$                   | 52 |
| 4.17 | $\theta = 1$                     | 52 |

## RESUMO

Neste trabalho, mostramos que o critério de estabilidade numérica do método explícito de integração no tempo aplicado as equações de uma placa de Mindlin-Timoshenko é dado por

$$\Delta t \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}c_s}$$

onde  $\varepsilon$  é a espessura da placa e  $c_s = \sqrt{kG/\rho}$ .

Este critério impõe uma restrição no passo de tempo que torna o método explícito ineficaz quando o espaçamento nodal é grande em comparação com espessura da placa. Isso ocorre no caso em que  $\varepsilon \ll 1$ , tornando inviável sua utilização computacional. Para superar essa restrição, nós usamos as técnicas desenvolvidas por Wright [23] que consiste em combinar o método explícito de integração no tempo com o aumento da inércia rotatória. A eficácia desse procedimento é comprovada pelos trabalhos de Krieg [10], Belytschko e Mindle [3].

**Palavras-chave:** Diferença finita; critério de estabilidade; inércia rotatória.

## ABSTRACT

In this work, we show that the numerical stability criterion of the explicit time integration method applied to the equations of a Mindlin-Timoshenko plate is given by

$$\Delta t \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}c_s}$$

where  $\varepsilon$  is the thickness of the plate and  $c_s = \sqrt{kG/\rho}$ .

This criterion imposes a restriction on the time step that makes the explicit method ineffective when the nodal spacing is large in comparison to plate thickness. This occurs in the case where  $\varepsilon$ , making its computational use impracticable. To overcome this constraint, we use the techniques developed by Wright which consists of combining the explicit time integration method with increasing rotatory inertia. The effectiveness of this procedure is evidenced by the work of Krieg, Belytschko and Mindle.

**Keywords:** Finite difference; stability criterion; rotatory inertia.

# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>  | <b>2</b>  |
| 1.1      | Considerações gerais . . . . .                                 | 2         |
| 1.2      | Objetivos . . . . .  | 3         |
| 1.2.1    | Objetivos gerais . . . . .                                     | 3         |
| 1.2.2    | Objetivos específicos . . . . .                                | 3         |
| 1.3      | Organização do trabalho . . . . .                              | 3         |
| <b>2</b> | <b>Método de Diferenças Finitas</b>                            | <b>5</b>  |
| 2.1      | Introdução . . . . .   | 5         |
| 2.2      | Aproximação das derivadas por diferenças . . . . .             | 6         |
| 2.2.1    | Equações de uma variável . . . . .                             | 6         |
| 2.2.2    | Equações de duas variáveis . . . . .                           | 8         |
| 2.3      | Método explícito e implícito . . . . .                         | 9         |
| 2.4      | Convergência, consistência e estabilidade . . . . .            | 10        |
| 2.4.1    | Von Neumann . . . . .  | 12        |
| 2.4.2    | Critério da Matriz . . . . .                                   | 13        |
| 2.4.3    | A Condição CFL . . . . .                                       | 17        |
| 2.5      | Equação da onda . . . . .                                      | 19        |
| 2.5.1    | Método implícito . . . . .                                     | 20        |
| 2.5.2    | Método explícito . . . . .                                     | 21        |
| 2.5.3    | Consistência, estabilidade e convergência . . . . .            | 21        |
| <b>3</b> | <b>Estabilidade Numérica para Vigas de Timoshenko</b>          | <b>24</b> |
| 3.1      | Introdução . . . . .   | 24        |
| 3.2      | O modelo de Timoshenko . . . . .                               | 24        |
| 3.3      | Inércia rotatória e estabilidade numérica . . . . .            | 26        |
| 3.4      | Análise de estabilidade numérica . . . . .                     | 27        |
| <b>4</b> | <b>Estabilidade Numérica para Placas de Mindlin-Timoshenko</b> | <b>33</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .   | 33        |
| 4.2      | Origem do modelo . . . . .                                     | 34        |
| 4.3      | Método numérico explícito . . . . .                            | 35        |
| 4.3.1    | Critério de estabilidade numérica . . . . .                    | 36        |
| 4.4      | Inércia rotatória e fatores de correção . . . . .              | 40        |
| 4.5      | Análise de estabilidade . . . . .                              | 42        |
| 4.6      | Implementação do método explícito . . . . .                    | 46        |
|          | Referências . . . . .  | 55        |

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações gerais

Os métodos explícitos de integração no tempo são amplamente utilizados para se obter respostas numéricas na análise transiente de problemas associados à placas e vigas. O uso se justifica pela facilidade de implementação e pelo baixo custo computacional, pois estes problemas frequentemente requerem passos de tempo relativamente pequenos em seus cálculos, motivados principalmente por questões físicas. No entanto, para tais problemas, a relação de estabilidade numérica do método de integração explícita é extremamente sensível à variações no parâmetro  $\varepsilon$  de espessura da estrutura.

Um método para calcular a resposta transitória dessas estruturas é usar a integração explícita no tempo combinada com o aumento da inércia rotatória. Quando não há acréscimo da inércia, Krieg [10] mostrou que a estabilidade numérica impõe uma restrição no passo de tempo que torna a integração explícita ineficiente. Belytschko e Mindle [3] mostraram que aumentar a inércia rotatória alivia essa restrição, sem necessariamente afetar a importância dos baixos modos de vibrações. O aumento da inércia rotatória diminui a frequência máxima, o que permite um passo de tempo maior na integração explícita no tempo. Uma forma de aumentar a inércia foi desenvolvida por Wright [22], pelo uso combinado dos métodos implícito e explícito de diferença finita.

Em seu estudo sobre estabilidade numérica de equações de placas planas elásticas, Krieg [10] mostrou que o uso da inércia rotatória é importante para alterar os tamanhos nos passos de espaço e tempo. Seus resultados mostraram ainda, que nem sempre malhas mais finas são melhores. Outra descoberta importante, foi que, o maior tamanho do passo de tempo permitido é determinado não pelo espaçamento de malha, mas sim pelas dimensões físicas da placa. Krieg [10] é o marco inicial nesse contexto que, pelo uso da discretização espaço - tempo em diferenças finitas aplicado ao modelo numérico conservativo de Timoshenko, determinou que no limite do espaçamento  $\Delta x$ , que é maior que a espessura da placa, o passo de tempo crítico é diretamente proporcional à medida

$\varepsilon$  de espessura, ao invés da discretização espacial  $\Delta x$ , como ocorre pela relação de estabilidade CFL. Usando a análise de estabilidade de Von Neumann, Krieg [10] encontrou alguns resultados importantes. São encontrados três intervalos de espaçamento nodal nos quais diferentes critérios são aplicados para encontrar o tamanho do passo de tempo crítico. Para um espaçamento nodal muito fino, o intervalo de tempo crítico é proporcional ao espaçamento nodal, isso ocorre para comprimento de onda próximo de zero. Para um espaçamento nodal grande em comparação com a espessura, o intervalo de tempo crítico é independente do espaçamento nodal, isso ocorre para comprimento de onda muito longo. Para um espaçamento nodal que é aproximadamente a espessura da placa, o cálculo de tempo crítico é mais complicado.

Nem sempre podemos determinar de forma simples se um esquema numérico converge para a solução de uma equação diferencial, mas mostrar sua consistência é mais prático. Pelo teorema de equivalência de Lax podemos provar que um esquema consistente é convergente, se mostrarmos que esse esquema é estável. Este trabalho trata da análise de estabilidade numérica para equações dos modelos de Timoshenko e Mindlin, utilizando o método explícito de integração no tempo combinado com o aumento da inércia rotatória.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivos gerais

Nesta dissertação, o objetivo é estudar a estabilidade numérica do método explícito de integração no tempo para o modelo Mindlin-Timoshenko com base nos trabalhos de Krieg [10], Belytschko e Mindle [3], com uso das técnicas desenvolvidas por Wright [23].

### 1.2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos desta dissertação foram:

- Encontrar o critério de estabilidade numérica do método explícito em diferenças finitas para Mindlin-Timoshenko;
- Implementar os fatores de correção do critério de estabilidade por meio do aumento da inércia de rotação;
- Mostrar a estabilidade numérica através da análise do raio espectral da matriz dos coeficientes do método explícito.

## 1.3 Organização do trabalho

No Capítulo 2 é feito um estudo sobre os métodos de diferenças finitas. São apresentados a série de Taylor, definições de consistência, convergência e estabilidade. Mostramos

três critérios de estabilidade, Von Neumann, Critério da matriz e condição CFL. Por fim a aplicação desses conceitos a equação da onda.

No Capítulo 3 apresentamos a análise de estabilidade do método explícito de integração no tempo para o modelo Timoshenko, com base no trabalho do Wright [23]. Aplicamos o termo de correção para o critério de estabilidade, por meio do aumento da inércia de rotação e por fim efetuamos a análise espectral da matriz dos coeficiente do método seguido dos gráficos com as devidas observações.

No Capítulo 4 mostramos a análise de estabilidade do método explícito de integração no tempo para o modelo Mindlin-Timoshenko com a aplicação dos fatores de correção  $R_\beta$  e  $R_\theta$  para o critério de estabilidade, o que significa aumentar a inércia de rotação. Primeiro, apresentamos a construção do modelo, efetuamos sua discretização pelo método explícito, fazemos a análise de propagação de ondas, obtemos suas velocidades e frequências, em seguida encontramos o critério de estabilidade. Seguindo os processos do Wright [22], obtemos os fatores de correção citados, para as duas equações de rotação. Finalmente, seguimos com a análise de estabilidade numérica através da análise do raio espectral da matriz dos coeficientes do método explícito.

# Capítulo 2

## Método de Diferenças Finitas

### 2.1 Introdução

Quase todos os problemas em ciências físicas e engenharia podem ser reduzidos a uma equação diferencial, as quais são usadas para construir modelos matemáticos de fenômenos físicos. Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função incógnita e suas derivadas. A maioria das equações diferenciais não são de fácil solução, para resolver muitos desses problemas, usa-se os métodos numéricos. Abordamos aqui, o Método de Diferenças Finitas.

A ideia básica desse método é transformar a resolução de uma equação diferencial em um sistema de equações algébricas, substituindo as derivadas por diferenças. O método numérico das diferenças finitas é facilmente executado em computadores e consiste na discretização do domínio e na substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações utilizando apenas os valores numéricos da função. A ferramenta básica no cálculo das aproximações das derivadas é a série de Taylor.

Conforme afirma Cunha [6], a essência dos métodos numéricos está na discretização do contínuo. É esta discretização que torna finito o problema e assim viabiliza sua solução através dos computadores.

No Método de Diferenças Finitas o domínio do problema, contínuo, é substituído por uma série de pontos discretos, ou nós, nos quais são calculadas as incógnitas do problema. Essa substituição do contínuo pelo discreto denomina-se discretização. Na prática substitui-se as derivadas pela razão incremental que converge para o valor da derivada quando o incremento tende a zero. Dizemos então que o problema foi discretizado. Quando o domínio tem mais de uma variável, a ideia acima é aplicada para cada uma das variáveis separadamente.

Uma vez efetuada a discretização do domínio do problema, discretiza-se a equação diferencial, aplicando-se o método de diferenças finitas para a determinação das incógnitas. As derivadas, que aparecem na equação original, são substituídas (ou aproximadas) por

fórmulas discretas de diferenças. A aplicação dessas fórmulas aos pontos do domínio discretizado gera um sistema de equações algébricas, cuja solução fornece os valores das incógnitas do problema nesses pontos discretos.

A ideia básica dos esquemas de diferenças finitas é substituir os derivados por diferenças finitas. Isso pode ser feito de várias maneiras, como do exemplo que temos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u(x_i, t_n + \Delta t) - u(x_i, t_n)}{\Delta t}.$$

Nos pontos dessa malha serão calculadas aproximações para uma função  $u(x, t)$  e suas derivadas. A série de Taylor é a ferramenta matemática que relaciona os valores da função e suas derivadas.

## 2.2 Aproximação das derivadas por diferenças

Vamos apresentar a série de Taylor para funções de uma variável e a partir delas a aproximação das derivadas de primeira e segunda ordem, em seguida, a aproximação para equações diferenciais parciais.

Considere o intervalo  $[0, L]$  e o número natural  $N$ , denotamos  $\Delta x = L/N$ , assim construímos as divisões com espaçamento uniforme do intervalo  $[0, L]$ , então:

$$x_0 = 0 < x_1 = \Delta x < \dots < x_N = N\Delta x = L, \quad (2.1)$$

com  $x_i = i\Delta x$  para  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Assim construímos uma malha de pontos no intervalo  $(0, L)$ . Para uma função  $u$  definida na malha, escrevemos  $u_i$  para o valor aproximado de  $u$  no ponto  $(x_i)$ .

### 2.2.1 Equações de uma variável

A série de Taylor associada a uma função  $u(x)$  diferenciável infinitamente, é dada por:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_i)^n, \quad (2.2)$$

onde  $a_n = \frac{u^{(n)}(x_i)}{n!}$ . Essa é uma série de Taylor em torno de um ponto  $x_i$ . Podemos escrever  $x = x_i + \Delta x$ , então obtemos

$$u(x_i + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(x_i)}{n!} \Delta x^n. \quad (2.3)$$

Escrevendo  $x = x_i - \Delta x$ , obtemos

$$u(x_i - \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(x_i)}{n!} (-\Delta x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{(n)}(x_i)}{n!} (\Delta x)^n. \quad (2.4)$$

Efetuamos a expansão das expressões (2.3) e (2.4) então

$$u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + u'(x_i)\Delta x + \frac{u''(x_i)}{2!}\Delta x^2 + \frac{u'''(x_i)}{3!}\Delta x^3 + \dots \quad (2.5)$$

$$u(x_i - \Delta x) = u(x_i) - u'(x_i)\Delta x + \frac{u''(x_i)}{2!}\Delta x^2 - \frac{u'''(x_i)}{3!}\Delta x^3 + \dots \quad (2.6)$$

Isolando a derivada primeira nestas expressões, respectivamente, temos:

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x} - \frac{u''(x_i)}{2!}\Delta x - \frac{u'''(x_i)}{3!}\Delta x^2 - \dots$$

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{u''(x_i)}{2!}\Delta x - \frac{u'''(x_i)}{3!}\Delta x^2 + \dots$$

Assim obtemos duas aproximações para a primeira derivada de  $u(x)$  em  $x_i$ :

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x} + O(\Delta x); \quad (2.7)$$

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (2.8)$$

Onde  $O(\Delta x)$  é o erro da aproximação. Nessas expressões o erro é de primeira ordem. A equação (2.7) é chamada **Diferença Finita Progressiva** e (2.8) **Diferença Finita Regressiva**. Podemos também, isolar a derivada primeira, subtraindo (2.5) de (2.6),

$$u(x_i + \Delta x) - u(x_i - \Delta x) = 2u'(x_i)\Delta x + 2\frac{u'''(x_i)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

Segue que,

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{u'''(x_i)}{3!}\Delta x^2 + \dots$$

Assim obtemos

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (2.9)$$

Chamada de **Diferença Finita Central**, onde o erro da aproximação  $O(\Delta x^2)$  é de segunda ordem. Agora vamos encontrar a diferença finita centrada para a derivada de

ordem 2, isso se faz somando (2.5) e (2.6).

$$u(x_i + \Delta x) + u(x_i - \Delta x) = 2u(x_i) + u''(x_i)\Delta x^2 + 2\frac{u^{(4)}(x_i)}{4!}\Delta x^4 + \dots$$

Segue que

$$u(x_i + \Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i - \Delta x) = u''(x_i)\Delta x^2 + 2\frac{u^{(4)}(x_i)}{4!}\Delta x^4 + \dots$$

ou

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i + \Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i - \Delta x)}{\Delta x^2} - 2\frac{u^{(4)}(x_i)}{4!}\Delta x^2 + \dots$$

Assim obtemos uma aproximação para o cálculo da derivada de ordem 2

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i + \Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i - \Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (2.10)$$

Chamada de **Diferença Finita Centrada**, onde o erro da aproximação  $O(\Delta x^2)$  é de ordem 2.

## 2.2.2 Equações de duas variáveis

Podemos aplicar os casos vistos para equações com duas variáveis. Considere a função  $u(x, t)$  e suas derivadas parciais nas variáveis  $x$  e  $t$ . As diferenças finitas já obtidas em uma variável podem ser usadas em cada variável separadamente para gerar as aproximações para as derivadas parciais.

Considere os intervalos  $[0, L]$  e  $[0, T]$  e números naturais  $N$  e  $M$ , denotamos  $\Delta x = L/N$ ,  $\Delta t = T/M$ , assim construímos as divisões com espaçamento uniforme dos intervalos  $[0, L]$  e  $[0, T]$ , chegamos a seguinte malha:

$$x_0 = 0 < x_1 = \Delta x < \dots < x_N = N\Delta x = L; \quad (2.11)$$

$$t_0 = 0 < t_1 = \Delta t < \dots < t_M = M\Delta t = T, \quad (2.12)$$

com  $x_i = i\Delta x$  e  $t_n = n\Delta t$  para  $i = 0, 1, \dots, N$  e  $n = 0, 1, \dots, M$ .

Assim construímos uma malha de pontos num plano  $(x, t)$ . Essa malha é formada pelos pontos  $(x_i, t_n) = (i\Delta x, n\Delta t)$  para inteiros  $i$  e  $n$ . Para uma função  $u$  definida na malha, escrevemos  $u_i^n$  para o valor aproximado de  $u$  no ponto  $(x_i, t_n)$ . O conjunto de pontos  $(x_i, t_n)$  para um valor fixo de  $n$  é chamado de grade de nível  $n$ .

Semelhante a uma variável, obtemos as seguintes aproximações:

**Diferença finita progressiva**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) = \frac{u(x_i + \Delta x, t_n) - u(x_i, t_n)}{\Delta x} + O(\Delta x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{u(x_i, t_n + \Delta t) - u(x_i, t_n)}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

**Diferença finita regressiva**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) = \frac{u(x_i, t_n) - u(x_i - \Delta x, t_n)}{\Delta x} + O(\Delta x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{u(x_i, t_n) - u(x_i, t_n - \Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

**Diferença finita central**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) = \frac{u(x_i + \Delta x, t_n) - u(x_i - \Delta x, t_n)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{u(x_i, t_n + \Delta t) - u(x_i, t_n - \Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2).$$

**Diferença finita centrada**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{u(x_i + \Delta x, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i - \Delta x, t_n)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n) = \frac{u(x_i, t_n + \Delta t) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i, t_n - \Delta t)}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2).$$

## 2.3 Método explícito e implícito

Métodos explícitos e implícitos são aproximações usadas para a obtenção de soluções numéricas de equações diferenciais dependentes do tempo. O método explícito de diferenças finitas consiste em determinar o valor de uma equação diferencial num ponto  $(x_i)$  em uma variável ou  $(x_i, y_j)$  em duas variáveis, num tempo posterior ao do valor atual. Já o método implícito encontra a solução resolvendo uma equação que envolve ambos valores, atual e posterior.

A fim de aplicar um método de diferenças finitas, discretizamos os domínios do tempo e espaço, com passos constantes. Ou seja, o eixo do espaço é discretizado em  $N$  intervalos de passo  $\Delta x$ , e o eixo do tempo em  $M$  intervalos de passo  $\Delta t$  conforme (2.11) e (2.12).

Nos métodos explícitos, por serem condicionalmente estáveis, o passo de tempo é limitado por um intervalo de tempo máximo, também chamado de intervalo de tempo crítico, para garantir a estabilidade esquema usado. Apesar de ter limitações, é um método de fácil implementação e de baixo custo computacional. Os métodos implícitos são incondicionalmente estáveis, por isso permitem intervalos de tempo maiores, mas possuem a desvantagem de serem mais trabalhosos e com alto custo computacional. A escolha do método implícito ou explícito depende do problema em questão, assim como a escolha do esquema a ser utilizado.

Vamos entender melhor essas definições aplicando-os à equação da onda.

## 2.4 Convergência, consistência e estabilidade

Não são todos os esquemas numéricos que são úteis para solução de equações diferenciais. A propriedade mais básica que um esquema deve ter para ser útil é que suas soluções se aproximem da solução da equação diferencial correspondente e que a aproximação melhore à medida que os espaçamentos da malha,  $\Delta x$  e  $\Delta t$ , tendem a zero.

Seja uma função  $u(x, t)$  a solução exata de uma equação diferencial e  $u_i^n$  a solução aproximada dada por um esquema de diferenças finitas. Observe que a solução exata está definida para todos os pontos do domínio, enquanto que a solução aproximada  $u_i^n$  somente nos pontos do domínio que pertencem a malha. Então, só faz sentido comparar a solução aproximada com a solução exata nos pontos da malha. Assim, em um ponto  $(x_i, t_n)$  da malha temos a solução exata  $u(x_i, t_n)$  e a solução aproximada  $u_i^n$ .

Dizer que a solução aproximada é uma boa aproximação para a solução exata é equivalente a dizer que

$$|u(x_i, t_n) - u_i^n| \rightarrow 0,$$

quando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ , onde  $|\cdot|$  é uma norma, isto é o que veremos a seguir.

**Definição 2.1 (convergência):** Um esquema de diferenças finitas é convergente em cada ponto  $(x_i, t_n)$  da malha se  $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$  implica

$$|u(x_i, t_n) - u_i^n| \rightarrow 0.$$

Um esquema de diferenças finitas é convergente em todo domínio da equação diferencial se converge em todos os pontos  $(x_i, t_n)$  quando  $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$ .

Provar que um determinado esquema é convergente, em geral não é fácil. No entanto, existem dois conceitos relacionados que são melhores para verificar: consistência e estabilidade. Primeiro, definimos consistência, conforme encontramos em Strikwerda [18].

**Definição 2.2 (consistência):** Dada uma equação diferencial,  $Pu = f$  e um esquema de diferenças finitas,  $P_{\Delta x, \Delta t}u = f$ , dizemos que o esquema é consistente com a equação diferencial se para qualquer função suave  $\phi(x, t)$

$$P\phi - P_{\Delta x, \Delta t}\phi \rightarrow 0 \quad \text{com} \quad \Delta x, \Delta t \rightarrow 0.$$

Quando nos referimos a uma função suave, queremos dizer que é suficientemente diferenciável.

**Exemplo 2.1:** Para a equação da onda  $u_t + au_x = 0$ , o operador  $P$  é  $\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}$  e

$P\phi = \phi_t + a\phi_x$ . Considere o esquema de diferença dado por

$$P_{\Delta x, \Delta t} \phi_i^n = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\Delta x},$$

onde  $\phi_i^n \approx \phi(i\Delta x, n\Delta t)$ . Usando a série de Taylor, temos

$$\begin{aligned} \phi_i^{n+1} &= \phi_i^n + \phi_t \Delta t + \frac{\phi_{tt}}{2} \Delta t^2 + O(\Delta t^3), \\ \phi_{i+1}^n &= \phi_i^n + \phi_x \Delta x + \frac{\phi_{xx}}{2} \Delta x^2 + O(\Delta x^3). \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} &= \phi_t + \frac{\phi_{tt}}{2} \Delta t + O(\Delta t^2), \\ \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\Delta x} &= \phi_x + \frac{\phi_{xx}}{2} \Delta x + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

Então

$$P_{\Delta x, \Delta t} \phi = \phi_t + a\phi_x + \frac{\phi_{tt}}{2} \Delta t + a \frac{\phi_{xx}}{2} \Delta x + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2).$$

Logo

$$P\phi - P_{\Delta x, \Delta t} \phi = -\frac{\phi_{tt}}{2} \Delta t - a \frac{\phi_{xx}}{2} \Delta x + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2).$$

Assim

$$P\phi - P_{\Delta x, \Delta t} \phi \rightarrow 0 \quad \text{com} \quad \Delta x, \Delta t \rightarrow 0.$$

Portanto o esquema é consistente.

Para introduzir o conceito de estabilidade, notemos que, se um esquema é convergente,  $u_i^n$  converge para  $u(x, t)$ , então certamente  $u_i^n$  é limitado em algum sentido. Para muitos esquemas, existem restrições quanto ao modo como  $\Delta x$  e  $\Delta t$  devem ser escolhidos, de modo que o esquema seja estável e, portanto, útil na computação.

Strikwerda [18] define região de estabilidade como qualquer região não vazia delimitada do primeiro quadrante de  $\mathbb{R}^2$  que tem a origem como um ponto de acumulação. É uma área limitada e não nula, composta pelos pontos  $(\Delta x, \Delta t)$  para os quais o esquema de diferença finita é estável. Um exemplo de região de estabilidade é o conjunto  $\{(\Delta x, \Delta t) : 0 < \Delta t \leq c\Delta x \leq C\}$ , onde  $c$  e  $C$  são constantes positivas.

**Definição 2.3 (estabilidade):** Um esquema de diferenças finitas  $P_{\Delta x, \Delta t} u_i^n$  é dito estável em certa região  $\Omega$  se existir um inteiro  $M$  tal que para qualquer valor positivo de tempo  $T$  exista uma constante  $C_T$  tal que

$$\|u^n\|_{\Delta x} \leq C_T \sum_{m=0}^M \|u^m\|_{\Delta x},$$

para  $0 \leq n\Delta t \leq T$ , sendo  $(\Delta x, \Delta t) \in \Omega$ . Esta definição pode ser interpretada da forma: a norma da solução numérica obtida deve ser limitada por uma constante positiva.

**Teorema 2.1 (equivalência de Lax):** Para uma equação diferencial com problema de valor inicial bem posto, um esquema de diferenças finitas é convergente se, e somente se ele é consistente e estável.

Um problema bem posto é aquele com condições iniciais e de contorno suficientes para existência de uma solução. A prova desse teorema é encontrada em Morton&Mayers [13].

A seguir vamos apresentar três critérios de estabilidade: O critério de Von Neumann, o critério da matriz e a condição CFL.

### 2.4.1 Von Neumann

O método de Von Neumann é baseado no estudo das séries de Fourier. Através do uso da transformada de Fourier, a determinação da estabilidade de um esquema é reduzida a considerações algébricas relativamente simples. Conforme mostrado em Strikwerda [18], a solução de qualquer esquema de diferença finita pode ser escrito na forma

$$u_i^{n+1}(\xi) = g(\xi\Delta x, \Delta x, \Delta t)u_i^n(\xi),$$

em que  $\xi \in [-\pi/\Delta x, \pi\Delta x]$  e a função  $g$  é obtida do esquema de diferenças finitas em questão. Essa equação mostra que o avanço da solução do esquema em um passo de tempo é equivalente a multiplicar a solução do nível de tempo anterior pelo fator de amplificação  $g$ . O fator de amplificação é assim chamado porque seu valor é a quantidade que  $u_i^n(\xi)$  é ampliada no avanço da solução. Aplicando essa equação recursivamente para  $n = 0, 1, 2, \dots$  obtemos a importante equação

$$u_i^n(\xi) = [g(\xi\Delta x, \Delta x, \Delta t)]^n u_i^0(\xi),$$

onde o sobrescrito em  $u$  é um índice do nível de tempo, enquanto em  $g$  é uma potência. Por meio da transformada de Fourier, qualquer esquema de diferenças pode ser colocado na forma desta equação, e isso fornece um método padrão para estudar a ampla variedade de esquemas, sendo que todas as informações sobre um esquema estão contidas em seu fator de amplificação. Assim, para determinar a estabilidade do esquema basta analisar o fator de amplificação.

A condição exata para estabilidade de um esquema com coeficiente constante é dada no próximo teorema.

**Teorema 2.2:** Um esquema de diferenças finitas com coeficientes constantes, é estável em uma região de estabilidade  $\Omega$  se, e somente se, houver uma constante  $K$  (independente de  $\theta$ ,  $\Delta x$  e  $\Delta t$ ) tal que

$$|g(\theta, \Delta x, \Delta t)| \leq 1 + K\Delta t,$$

em que  $\theta = \xi\Delta x$ ,  $(\Delta x, \Delta t) \in \Omega$ . Se  $g(\theta, \Delta x, \Delta t)$  não depende de  $\Delta x$  e  $\Delta t$  a condição de estabilidade acima é dada por

$$|g(\theta)| \leq 1. \quad (2.13)$$

A prova é encontrada em Strikwerda [18]. Este teorema mostra que, para determinar a estabilidade de um esquema de diferenças finitas, precisamos considerar apenas o fator de amplificação  $g$ . Esta observação é devida a Von Neumann, e por causa disso, esta análise é frequentemente chamada de análise de Von Neumann.

Conforme Strikwerda [18], um procedimento para se obter o fator de amplificação é substituir  $u_i^n$  no esquema por  $g^n e^{\hat{i}\theta}$  para cada valor de  $i$  e  $n$ , onde  $\hat{i} = \sqrt{-1}$ .

**Exemplo 2.2:** Considere o seguinte esquema para a equação  $u_t + au_x = 0$ ,

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0. \quad (2.14)$$

Substituindo  $u_i^n$  por  $g^n e^{\hat{i}\theta}$ , obtemos

$$\frac{g^{n+1} e^{\hat{i}\theta} - g^n e^{\hat{i}\theta}}{\Delta t} + a \frac{g^n e^{\hat{i}\theta(i+1)} - g^n e^{\hat{i}\theta(i-1)}}{2\Delta x} = g^n e^{\hat{i}\theta} \left( \frac{g - 1}{\Delta t} + a \frac{e^{\hat{i}\theta} - e^{-\hat{i}\theta}}{2\Delta x} \right) = 0.$$

Assim obtemos o fator de amplificação dado por

$$g = 1 - \hat{i}a\sigma \sin \theta,$$

em que  $\sigma = \Delta t/\Delta x$ . Se  $\sigma$  é constante, então  $g$  não depende de  $\Delta x$  e  $\Delta t$ . Como  $g$  é um número complexo, então  $|g|^2 = g\bar{g}$  e assim

$$|g(\theta)|^2 = 1 + a^2\sigma^2 \sin^2 \theta.$$

Como  $|g(\theta)|$  é maior do que 1 para  $\theta$  diferente de 0 ou  $\pi$ , pelo Teorema 2.1, o esquema (2.13) não é estável.

## 2.4.2 Critério da Matriz

Assumimos que a solução numérica pelo método explícito no nível  $(n+1)$  é dada pelo vetor

$$U^{n+1} = (u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, \dots, u_N^{n+1})^T.$$

Esta solução está relacionada com a solução no nível  $n$  pela equação

$$U^{n+1} = AU^n + B, \quad (2.15)$$

em que  $B = (u_0^n, 0, \dots, 0, u_N^n)^T$  é o vetor coluna com  $(N-1)$  elementos composto por valores

de contorno e o restante por zeros e  $A$  é uma matriz de ordem  $(N - 1) \times (N - 1)$  cujos elementos são os coeficientes do esquema numérico explícito.

Para análise da estabilidade numérica a norma da matriz  $A$  deve satisfazer  $\|A\| \leq 1$ , em que  $\|\cdot\|$  é alguma norma matricial.

Para mostrar a exigência de  $\|A\| \leq 1$  para estabilidade, considere a equação matricial (2.15) e os seguintes vetores

$$\begin{aligned} u(t_n) &= [u(x_1, t_n), u(x_2, t_n), \dots, u(x_{N-1}, t_n)]^T, \\ \tau^n &= (\tau_1^n, \tau_2^n, \dots, \tau_{N-1}^n)^T, \\ e^n &= (e_1^n, e_2^n, \dots, e_{N-1}^n)^T, \end{aligned}$$

respectivamente, a solução exata, o erro de truncamento local e o erro global ao longo do nível  $n$ . A solução exata no nível  $n + 1$  pode ser escrita na forma

$$u(t_{n+1}) = Au(t_n) + B + \tau^n. \tag{2.16}$$

Subtraindo (2.15) de (2.16), obtemos

$$e^{n+1} = Ae^n + \tau^n.$$

Aplicando esta equação recursivamente para  $n, n - 1, \dots, 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} e^{n+1} &= Ae^n + \tau^n \\ e^{n+1} &= A^2e^{n-1} + A\tau^{n-1} + \tau^n \\ e^{n+1} &= A^3e^{n-2} + A^2\tau^{n-2} + A\tau^{n-1} + \tau^n \\ &\text{-----} \\ e^{n+1} &= A^{n+1}e^0 + A^n\tau^0 + A^{n-1}\tau^1 + \dots + A^2\tau^{n-2} + A\tau^{n-1} + \tau^n. \end{aligned}$$

Considerando-se na condição inicial que  $e^0 = 0$  obtemos

$$e^{n+1} = \sum_{b=0}^n A^{n-b}\tau^b.$$

Vemos que a matriz  $A$  amplifica os erros de truncamento, por isso é chamada de matriz de amplificação. Assim, se  $\|A\| \leq 1$  teremos o erro decrescendo, logo, a estabilidade.

Dado um esquema de diferenças finitas na forma (2.14), para verificar se  $\|A\| \leq 1$ , é necessário a análise espectral de  $A$ . Para isso, usamos o teorema abaixo.

**Teorema 2.3:** Um esquema de diferenças na forma matricial é estável em relação a uma norma  $\|\cdot\|$  se seus autovetores são linearmente independentes e seus respectivos

autovalores  $\lambda_i$  satisfazem

$$|\lambda_i| \leq 1 + O(\Delta t),$$

para todo  $i$ . A prova é encontrada em Smith [17], cuja desigualdade é mostrada conforme segue.

Seja  $\lambda_i$  um autovalor da matriz quadrada  $A$  e  $u_i$  o respectivo autovetor, temos que

$$Au_i = \lambda_i u_i$$

e

$$\|Au_i\| = \|\lambda_i u_i\| = |\lambda_i| \cdot \|u_i\|.$$

Segue da desigualdade de normas de matrizes e vetores que

$$\|Au_i\| \leq \|A\| \cdot \|u_i\|.$$

Assim obtemos

$$|\lambda_i| \leq \|A\|.$$

Como para estabilidade temos  $\|A\| \leq 1$ , implica que  $|\lambda_i| \leq 1$ . O que prova a necessidade da restrição dos autovalores.

Agora, escrevemos a matriz  $A$  a partir do esquema de diferenças,  $A$  é uma matriz tridiagonal. Para aplicarmos o Teorema 2.3, fazemos a análise espectral da matriz  $A$ , nessa direção usamos outro teorema:

**Teorema 2.4:** Os autovalores de uma matriz tridiagonal  $A$  de ordem  $k$  dada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{bmatrix}$$

são

$$\lambda_i = a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{i\pi}{k+1}\right),$$

para todo  $i = 1, \dots, k$ , em que  $a, b, c$  são números reais ou complexos.

A prova é encontrada em Smith [17], página 154.

Agora, vamos a uma aplicação dos conceitos do critério da matriz.

**Exemplo 2.3:** Considere a equação do calor

$$u_t - au_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, T).$$

Sujeita as seguintes condições de contorno  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  para  $t > 0$  e condição

inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , em  $(0, L)$ . Esse sistema modela a condução de calor numa barra de comprimento  $L$ .

Discretizamos pelo método explícito Forward Time Central Space (FTCS)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \quad (2.17)$$

O qual podemos escrever como

$$u_i^{n+1} = \sigma u_{i-1}^n + (1 - 2\sigma)u_i^n + \sigma u_{i+1}^n,$$

onde  $\sigma = a\Delta t/\Delta x^2$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ . Obtemos  $u_i^0 = f(i\Delta x)$  e

$$U^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_{N-1}^n)^T.$$

O vetor  $B$  na equação matricial é dado por  $B = (\sigma u_0^n, 0, \dots, 0, \sigma u_N^n)^T$ , com  $N - 1$  elementos e

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 2\sigma & \sigma & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma & 1 - 2\sigma & \sigma & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \sigma & 1 - 2\sigma & \sigma \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma & 1 - 2\sigma \end{bmatrix}$$

de ordem  $(N - 1) \times (N - 1)$

Pelo Teorema 2.4, temos que

$$\begin{aligned} \lambda_i &= 1 - 2\sigma + 2\sqrt{\sigma^2} \cos\left(\frac{i\pi}{k+1}\right), \\ \lambda_i &= 1 - 2\sigma \left(1 - \cos\left(\frac{i\pi}{k+1}\right)\right), \\ \lambda_i &= 1 - 4\sigma \sin^2\left(\frac{i\pi}{2(k+1)}\right). \end{aligned}$$

Para a estabilidade, o critério da matriz exige que

$$|\lambda_i| = \left| 1 - 4\sigma \sin^2\left(\frac{i\pi}{2(k+1)}\right) \right| \leq 1 + O(\Delta t).$$

Isso implica  $\sigma \leq 1/2$ , isto é, o esquema (2.17) é condicionalmente estável se  $\Delta t \leq \Delta x^2/2a$ .

### 2.4.3 A Condição CFL

Essa condição é devida a Richard Courant, Kurt Friedrichs e Hans Lewy. Conforme Trefethen [21], o que Courant, Friedrichs e Lewy (CFL) apontaram foi que muita coisa pode ser aprendida considerando os domínios de dependência de uma equação diferencial parcial e sua aproximação discreta. A condição CFL é uma condição necessária para a convergência de uma aproximação numérica de uma equação diferencial linear ou não linear. Para problemas lineares o teorema da equivalência Lax afirma que há uma equivalência entre convergência e estabilidade.

Em geral, a condição CFL não é suficiente para a estabilidade, seu grande mérito reside na sua simplicidade. Ela nos permite rejeitar vários esquemas de diferenças com uma quantidade trivial de investigação. Os esquemas que satisfazem a condição CFL podem ser considerados com mais detalhes, usando-se em seguida algum teste para certificar a estabilidade, Morton & Mayers [13].

**Definição 2.4 (Domínio de dependência):** O domínio de dependência de um ponto  $(x, t)$  é o conjunto de todos os pontos que a solução de um problema no ponto  $(x, t)$  é dependente.

Considere a equação

$$u_t + au_x = 0, \quad (2.18)$$

onde  $t > 0$ ,  $a > 0$  e  $u(x, 0) = f(x)$ . Sabemos que a solução da equação no ponto  $(x, t)$  depende somente do valor de  $f$  no ponto  $x_0 = x - at$ . O ponto  $x_0$  é chamado o domínio de dependência do ponto  $(x, t)$ . Dependendo do problema a ser analisado, o domínio de dependência pode consistir de pontos, intervalos ou regiões.

Consideremos agora, o esquema explícito de diferença FTCS para a equação (2.18) dado por

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{R}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \quad (2.19)$$

onde  $R = a\Delta t/\Delta x$ . É claro que a solução no ponto  $(i\Delta x, (n+1)\Delta t)$ , depende dos valores no nível  $n$ , estes por sua vez dependem dos valores de  $u$  no nível  $n-1$  e assim segue até o nível  $n=0$ , onde encontramos o domínio numérico de dependência.

Conforme mostrado por Thomas [20], para o esquema numérico (2.19), o domínio numérico de dependência para o ponto  $(i\Delta x, (n+1)\Delta t)$  é dado pelos pontos  $D_n = [(i-n-1)\Delta x, (i+n+1)\Delta x]$ .

**Definição 2.5:** Uma equação diferencial parcial e um esquema numérico associado satisfaz a condição CFL se o domínio analítico de dependência está contido no domínio numérico de dependência.

O domínio analítico de dependência no ponto  $(x, t)$  para a equação diferencial (2.18), como vimos, é  $x_0 = x - at$ . Se considerarmos o ponto  $(x, t) = (i\Delta x, (n+1)\Delta t)$ , então

$$x_0 = x - at = i\Delta x - a(n+1)\Delta t = [i - R(n+1)]\Delta x.$$

Portanto, temos que  $x_0 \in [(i - n - 1)\Delta x, (i + n + 1)\Delta x]$ , o qual é o domínio numérico de dependência do esquema de diferenças (2.19), se e somente se,  $(i - n - 1)\Delta x \leq [i - R(n + 1)]\Delta x \leq (i + n + 1)\Delta x$ . Segue que

$$\begin{aligned} i - n - 1 &\leq i - R(n + 1) \leq i + n + 1, \\ -(n + 1) &\leq -R(n + 1) \leq n + 1, \\ -1 &\leq -R \leq 1 \quad \text{ou} \quad -1 \leq R \leq 1. \end{aligned}$$

Assim, mostramos que o domínio analítico de dependência está contido no domínio numérico de dependência se, e somente se,  $-1 \leq a\Delta t/\Delta x \leq 1$ . Portanto, a condição CFL para a equação diferencial (2.18) e o esquema numérico (2.19) é equivalente a  $-1 \leq R \leq 1$ , isto é,

$$\left| \frac{a\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1. \quad (2.20)$$

A análise feita para o esquema (2.19) vale para qualquer esquema explícito da forma

$$u_i^{n+1} = \alpha u_{i+1}^n + \beta u_i^n + \gamma u_{i-1}^n.$$

Analogamente, encontramos a condição CFL para o esquema numérico abaixo

$$u_i^{n+1} = \alpha u_i^n + \beta u_{i-1}^n,$$

para esse esquema o domínio numérico de dependência para o ponto  $(i\Delta x, (n + 1)\Delta t)$  é  $D_n = [(i - n - 1)\Delta x, i\Delta x]$  e a condição CFL é dada por  $0 \leq R \leq 1$ . Já para o esquema

$$u_i^{n+1} = \alpha u_{i+1}^n + \beta u_i^n,$$

temos o domínio numérico dado por  $[i\Delta x, (i + n + 1)\Delta x]$  para o ponto  $(i\Delta x, (n + 1)\Delta t)$  e a condição CFL  $-1 \leq R \leq 0$ .

### Condição CFL para problemas bidimensionais

A condição CFL para duas dimensões, assim como em uma dimensão, não é uma medida suficiente para estabilidade e convergência. Entretanto, essa condição é fácil verificar e serve como um excelente limite para a condição de estabilidade, Thomas [20].

Para o caso bidimensional, consideremos a equação

$$v_t + av_x + bv_y = 0.$$

Com a condição  $v(x, y, 0) = f(x, y)$  cuja solução é dada por  $v(x, y, t) = f(x - at, y - bt)$ . A velocidade de propagação será  $a$  na direção  $x$  e  $b$  na direção  $y$ . A solução em um ponto

$(x, y)$  num tempo  $t$  dependerá de  $f$  em  $(x_0, y_0) = (x - at, y - bt)$ . Assim o domínio de dependência do ponto  $(x, y, t)$  será  $(x_0, y_0)$ .

Assim como no caso unidimensional, definimos o domínio numérico de dependência assumindo que  $R_x = a\Delta t/\Delta x$  e  $R_y = b\Delta t/\Delta y$  são fixadas. Assim, para um esquema de diferenças no ponto  $(i\Delta x, j\Delta y, (n+1)\Delta t)$ , o domínio numérico de dependência é definido ser o menor retângulo em  $\mathbb{R}^2$  que contém todos os pontos no qual a solução do esquema de diferença depende quando  $\Delta t$  e  $\Delta x$  e  $\Delta y$  aproximam-se de zero.

Usando os mesmos argumentos do caso unidimensional consideramos os esquemas na forma

$$v_{ij}^{n+1} = \alpha_1 v_{i-1j}^n + \alpha_2 v_{ij-1}^n + \alpha_3 v_{ij}^n + \alpha_4 v_{i+1j}^n + \alpha_5 v_{ij+1}^n, \quad (2.21)$$

$$v_{ij}^{n+1} = \alpha_3 v_{ij}^n + \alpha_4 v_{i+1j}^n + \alpha_5 v_{ij+1}^n, \quad (2.22)$$

$$v_{ij}^{n+1} = \alpha_1 v_{i-1j}^n + \alpha_2 v_{ij-1}^n + \alpha_3 v_{ij}^n. \quad (2.23)$$

Obtemos, respectivamente, os domínios numéricos de dependência para o ponto  $(i\Delta x, j\Delta y, (n+1)\Delta t)$  dados por

$$[(i-n-1)\Delta x, (i+n+1)\Delta x] \times [(j-n-1)\Delta y, (j+n+1)\Delta y],$$

$$[i\Delta x, (i+n+1)\Delta x] \times [j\Delta y, (j+n+1)\Delta y],$$

$$[(i-n-1)\Delta x, i\Delta x] \times [(j-n-1)\Delta y, j\Delta y],$$

e a condição CFL para os esquemas (2.21) a (2.23) será

$$-1 \leq R_x \leq 1 \quad e \quad -1 \leq R_y \leq 1,$$

$$-1 \leq R_x \leq 0 \quad e \quad -1 \leq R_y \leq 0,$$

$$0 \leq R_x \leq 1 \quad e \quad 0 \leq R_y \leq 1.$$

respectivamente.

## 2.5 Equação da onda

Vamos usar a equação da onda em uma dimensão para aplicarmos o que estudamos. Considere a equação da onda que modela o movimento de uma corda elástica homogênea que sofre vibrações transversais relativamente pequenas. A equação da onda é de segunda ordem em relação à variável de espaço  $x$  e tempo  $t$ , e assume a forma

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (2.24)$$

onde  $u = u(x, t)$  e a constante  $c$  é a velocidade de propagação da onda. O valor de  $c$  é dado por  $c^2 = \frac{T}{\rho}$ , onde  $T$  é tensão e  $\rho$  é a densidade. Por ser de segunda ordem no tempo, necessita de duas condições iniciais, expressas por

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= f(x), \\u_t(x, 0) &= g(x),\end{aligned}$$

em que  $f$  e  $g$  dependem do problema sendo tratado,  $0 < x < L$  e  $t > 0$ .

A equação da onda é um exemplo de equação de derivadas parciais do tipo hiperbólico. Esse problema admite solução única se as funções  $f$  e  $g$  tem derivadas segundas contínuas no intervalo  $(0, L)$  e se  $f(0) = f(L) = 0$ .

A seguir iremos substituir as derivadas parciais que aparecem na equação da onda por suas respectivas aproximações, formando a equação de diferenças finitas. Essa substituição é chamada discretização.

### 2.5.1 Método implícito

Ao contrário da discretização explícita, nos métodos implícitos as derivadas espaciais são discretizadas no nível de tempo  $n + 1$ . Usaremos a diferença finita centrada para aproximar  $u_{tt}$  e  $u_{xx}$ , mas agora  $u_{xx}$  será discretizada no tempo  $n + 1$ . Assim temos

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}.$$

Implicitamente obtemos

$$-C^2 u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2C^2) u_i^{n+1} - C^2 u_{i+1}^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1}, \quad (2.25)$$

em que  $C$  é o número de Courant. Ao contrário do método explícito, a equação do método implícito, não nos permite encontrar o valor de  $u_i^{n+1}$ , separadamente, pois do lado esquerdo temos três incógnitas  $u_{i-1}^{n+1}$ ,  $u_i^{n+1}$  e  $u_{i+1}^{n+1}$ . Assim, dizemos que o valor de  $u_i^{n+1}$  é definido implicitamente pela equação (2.25).

Para resolver esse problema, escrevemos essa equação para cada  $i = 1, \dots, N - 1$ , assim teremos  $N - 1$  equações linearmente independentes com  $N - 1$  incógnitas dadas pelo vetor  $U^{n+1} = (u_1^{n+1}, \dots, u_{N-1}^{n+1})^T$ , admitindo assim uma única solução. Portanto, pelo método implícito encontramos de uma vez todas as soluções no nível de tempo  $n + 1$ , enquanto no método explícito encontramos uma solução de cada vez.

### 2.5.2 Método explícito

Aqui vamos discretizar a equação usando a diferença finita centrada para aproximar  $u_{tt}$  e  $u_{xx}$ . Assim temos

$$u_{tt}(x, t) = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2)$$

e

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2).$$

Substituindo na equação da onda temos

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Explicitamente temos que

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + C^2(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad (2.26)$$

em que  $C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$  é o número de Courant. Vemos que o valor de  $u_i$  no nível de tempo  $(n+1)$  é calculado a partir dos vales de  $u$  no nível de tempo  $n$  e  $n-1$ , o que caracteriza o método explícito. Conforme Fortuna [8], o esquema (2.26) é estável para  $|C| \leq 1$ . Esta é a condição CFL para a equação da onda, que pode ser escrita na seguinte forma

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c},$$

já que a velocidade  $c$  é positiva.

### 2.5.3 Consistência, estabilidade e convergência

Considere a equação da onda

$$Pu(x, t) = u_{tt} - c^2 u_{xx},$$

e o esquema de diferenças finitas

$$P_{(\Delta x, \Delta t)}u(x_i, t_n) = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2) - c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \\ u_{tt} - c^2 u_{xx} - \left( \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) &= O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2), \\ Pu(x, t) - P_{(\Delta x, \Delta t)}u(x_i, t_n) &= O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

Assim

$$Pu(x, t) - P_{(\Delta x, \Delta t)}u(x_i, t_n) \rightarrow 0.$$

Com  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ . Portanto, o método é consistente.

Para mostrar a estabilidade, vamos utilizar o método de Von Neumann para análise da estabilidade do esquema explícito para a equação da onda.

Pela análise de Von Neumann, considere a equação (2.24) onde substituiremos  $u_i^n$  por  $g^n e^{\hat{i}\theta}$ . Desse modo temos

$$g^{n+1} e^{\hat{i}\theta} = 2g^n e^{\hat{i}\theta} - g^n e^{\hat{i}\theta(i-1)} + C^2 (g^n e^{\hat{i}\theta(i+1)} - 2g^n e^{\hat{i}\theta} + g^n e^{\hat{i}\theta(i-1)}).$$

Eliminando o termo em comum  $g^n e^{\hat{i}\theta(i)}$ , temos

$$g = 2 - g^{-1} + C^2 (e^{\hat{i}\theta} - 2 + e^{-\hat{i}\theta}).$$

Por Euler temos que  $e^{\hat{i}\theta} + e^{-\hat{i}\theta} = 2 \cos \theta$ , então chegamos a equação

$$g^2 - 2[1 - C^2(1 - \cos \theta)]g + 1 = 0.$$

Como  $\cos \theta = \cos(2\theta/2) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)$ , então

$$g^2 + 2(2C^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1)g + 1 = 0.$$

Reescrevemos na forma

$$g^2 + 2bg + 1 = 0,$$

em que  $b = 2C^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1$ . A raízes desta equação é dada por

$$g = -b \pm \sqrt{b^2 - 1}.$$

Como  $g \in \mathbb{C}$ , podemos escrever as raízes na forma

$$g = \begin{cases} -b \pm \sqrt{b^2 - 1}, & \text{se } |b| > 1 \\ -b \pm \hat{i}\sqrt{1 - b^2}, & \text{se } |b| \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que, se  $|b| > 1$ , então  $b < -1$  ou  $b > 1$ . Mas  $b < -1$  implica  $2C^2 \sin^2(\theta/2) < 0$  o que é absurdo, por outro lado,  $b > 1$  implica  $2C^2 \sin^2(\theta/2) > 2$ , então  $C > 1$ , desse modo o esquema explícito não é estável conforme a condição CFL.

Agora, se  $|b| \leq 1$ , notemos que  $g$  é um número complexo, logo  $|g|^2 = g\bar{g}$ , então

$$|g|^2 = b^2 + 1 - b^2 = 1,$$

o que satisfaz a condição de Von Neumann, então para  $|b| \leq 1$ , temos

$$C^2 \sin^2(\theta/2) \leq 1 \implies C \leq 1.$$

Pela condição CFL, o método é condicionalmente estável. Como mostramos sua consistência, pelo Teorema de Lax, o método é condicionalmente convergente.

# Capítulo 3

## Estabilidade Numérica para Vigas de Timoshenko

### 3.1 Introdução

As estruturas elásticas são bastante estudadas e muito utilizadas na engenharia, e apresentam a deflexão como principal característica. Esta é regida por teorias que se embasam na manutenção da seção das estruturas. Dentre essas teorias, a mais utilizada é a teoria de Timoshenko [19]. O modelo de Timoshenko considera o efeito de cisalhamento e o efeito de rotação no movimento vibratório de uma viga elástica. As vigas são elementos estruturais limitados por duas superfícies planas distanciadas entre si de uma grandeza designada por espessura. A viga é um dos modelos fundamentais das estruturas elásticas, e é utilizada em uma variedade de aplicações como, por exemplo, em hélices de helicópteros braços robóticos e trilhos de trens. A equação diferencial resultante dessa teoria torna possível a utilização de métodos numéricos. Entre esses métodos numéricos, destacamos o método explícito de integração no tempo, transformando equações do meio contínuo para o meio discreto, permitindo assim a implementação computacional.

### 3.2 O modelo de Timoshenko

As equações de movimento das vigas de Timoshenko podem ser expressas como

$$\rho\omega_{tt} - kG\omega_{xx} + kG\psi_x = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho I\psi_{tt} - EI\psi_{xx} - kGA\omega_x + kGA\psi = 0, \quad (3.2)$$

onde  $\omega(x, t)$  é o deslocamento transversal,  $\psi(x, t)$  é a rotação na seção transversal,  $\rho$  é a densidade de massa,  $E$  é o módulo de Young,  $G$  é o módulo de cisalhamento,  $k$  é o fator de correção de corte,  $A$  é a área da seção transversal e  $I$  é o momento de inércia da seção

transversal. Essas equações representam o modelo de Timoshenko para vigas planas, nesse modelo, basicamente duas velocidades de propagações de ondas ocorrem, que designamos por  $c$  e  $c_s$ , que é encontrada pelo estudo de propagação de ondas, semelhante ao que faremos no próximo capítulo para o modelo de Mindlin e Timoshenko. As equações (3.1) e (3.2) representam os dois modos de deformações que ocorrem nas vigas planas, assim como o acoplamento físico que ocorrem entre as mesmas.

Aplicando diferenças centrais com espaçamento constante  $\Delta x$ , as equações (3.1) e (3.2) tornam-se

$$\rho\omega_i'' = kG \frac{\omega_{i+1} - 2\omega_i + \omega_{i-1}}{\Delta x^2} - kG \frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{2\Delta x}, \quad (3.3)$$

$$\rho I\psi_i'' = EI \frac{\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1}}{\Delta x^2} + kGA \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2\Delta x} - kGA \frac{\psi_{i+1} + 2\psi_i + \psi_{i-1}}{4}, \quad (3.4)$$

onde  $\omega_i(t)$  para  $i = 1, 2, \dots$  denota os valores aproximados de  $\omega(i\Delta x, t)$ , da mesma forma para  $\psi_i$ , e (") indica diferenciação em relação ao tempo.

Krieg [10] mostrou que a estabilidade numérica impõe uma restrição no tempo que torna o esquema numérico (3.3) e (3.4) ineficaz quando o espaçamento  $\Delta x$  é grande em comparação com a espessura  $\varepsilon$  da viga. Neste caso, ele descobriu que o passo de tempo crítico é proporcional a  $\varepsilon$  em vez de  $\Delta x$ .

Sabemos que para métodos de integração explícita no tempo, a frequência máxima determina o respectivo critério de estabilidade numérica, de acordo com a seguinte condição

$$\Delta t \leq \frac{2}{\bar{\omega}_{max}}. \quad (3.5)$$

Por definição, a frequência é dada por  $\bar{\omega} = \gamma c$ , em que  $\gamma$  é o número de onda,  $\gamma = 2\pi/\lambda$ , onde  $\lambda$  é a medida do comprimento de onda e  $c$  é a velocidade de propagação.

Conforme Graff [9], as vigas planas possuem duas frequências naturais  $\bar{\omega}$  para um dado comprimento de onda  $\lambda$ , sendo que para baixos modos de vibrações predominam os deslocamentos transversais  $\omega$  e para altos modos de vibrações predomina a rotação representada aqui pela função  $\psi$ .

Consideremos agora as seguintes situações, semelhantes àquelas que mostraremos no próximo capítulo, no estudo de propagação de ondas harmônicas para as equações de Mindlin e Timoshenko.

a) para comprimentos de ondas próximo de  $2\Delta x$ , a frequência é dada por ondas com velocidade  $c = \sqrt{E/\rho}$ , de modo que a condição de estabilidade é a CFL.

Especificamente para  $\lambda \leq \pi/\Delta x$ , temos  $\gamma \geq 2/\Delta x$ , logo  $\bar{\omega}_1 \geq 2c/\Delta x$ . Como  $\Delta t \leq 2/\bar{\omega}_1$  logo  $\Delta t \leq \Delta x/c$  e portanto prevalece a condição CFL.

b) para comprimentos de ondas infinito ( $\lambda \rightarrow \infty$ ), o modelo de Timoshenko é governado somente pela função de rotação  $\psi$ , sem deslocamentos transversais  $\omega$ , a saber  $\psi'' + \bar{\omega}_2^2\psi = 0$ , com  $\bar{\omega}_2^2 = kGA/\rho I$ , que é o modo de corte puro discutido por Downs [7].

Conforme vemos em Wright [23], com  $\lambda \rightarrow \infty$ , as derivadas em relação a  $x$  tendem a zero, assim a equação (3.1) resulta em  $\omega'' = 0$  enquanto na (3.2) temos  $\rho I \psi'' + kGA\psi = 0$ , onde  $\bar{\omega}_2^2 = kGA/\rho I$  é precisamente a frequência máxima do modelo de Timoshenko, também denominada de frequência pura associado ao cortante.

Para vigas com seções transversais retangulares, com largura  $b$  e espessura  $\varepsilon$ , temos  $A = b\varepsilon$  e  $I = b\varepsilon^3/12$ , assim obtemos

$$\bar{\omega}_2 = \frac{2\sqrt{3}c_s}{\varepsilon}, \quad (3.6)$$

o que significa que a frequência máxima para as vigas de Timoshenko é inversamente proporcional a medida da espessura. Como o critério de estabilidade (3.5) exige que  $\bar{\omega}_2 \Delta t \leq 2$ , obtemos

$$\Delta t \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}c_s}. \quad (3.7)$$

Este é o resultado de Krieg, que limita a aplicação do método explícito, por exigir que  $\Delta t$  seja condicionado pela espessura  $\varepsilon$ .

Almeida Junior [1] mostrou que o esquema numérico (3.3) e (3.4), munido de quaisquer condições de contorno e iniciais devidamente discretizadas é convergente se, e somente se, a condição (3.7) é satisfeita.

### 3.3 Inércia rotatória e estabilidade numérica

Belytschko e Mindle [3] mostraram que aumentar a inércia rotatória diminui a frequência máxima, o que permite um passo de tempo maior, isso se verifica, devido as grandezas frequência e inércia serem inversamente proporcionais. Pela condição (3.5), notamos que a redução da frequência máxima permite um passo de tempo maior no método de integração explícita no tempo. Dessa forma, o aumento da inércia rotatória faz aumentar o passo de tempo, portanto alivia o critério de estabilidade.

Wright [22], mostrou que, uma forma eficiente de aumentar a inércia e aliviar a restrição (3.7) consiste em usar esquemas numéricos do tipo explícito - implícito, o que simplesmente resulta em combinar o método puramente explícito com o aumento na inércia de rotação, que constitui basicamente em multiplicar o termo de aceleração  $\rho I \psi_{tt}$  na equação (3.4) que governa a rotação na seção transversal pelo fator  $R$ , dado por

$$R = 1 + \frac{\beta kGA \Delta t^2}{2\rho I}, \quad (3.8)$$

onde  $\beta$  é adimensional. Em seus experimentos Wright [23] descobriu que  $\beta \geq 1/2$  é

necessário para reduzir a frequência de corte, ao ponto em que a condição CFL dada por

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad (3.9)$$

prevalece em vez da condição (3.7). Assim,  $R$  minimiza a influência das altas frequências no critério de estabilidade. Dessa forma, para que os passos de tempo sejam maiores, deve-se aumentar o valor de  $\beta$ . O objetivo é aumentar o valor de  $\beta$  até o ponto em que é válida a condição CFL, para isso definimos  $\Delta t = \Delta x/c$ , o limite superior de (3.9). O fator de inércia torna-se então

$$R = 1 + 6\beta \left(\frac{c_s}{c}\right)^2 \left(\frac{\Delta x}{\varepsilon}\right)^2. \quad (3.10)$$

### 3.4 Análise de estabilidade numérica

Conforme Wright [23], para um dado comprimento de onda, os modos de Fourier das soluções do modelo de Timoshenko, possuem deslocamentos e rotações que estão fora de fase em 90 graus. Assim, para as equações (3.3) e (3.4) do modelo de Timoshenko, admitem-se as seguintes soluções

$$\omega_i(t) = \omega_0(t)e^{\hat{i}\alpha x_i}, \quad (3.11)$$

$$\psi_i(t) = \psi_0(t)e^{(\hat{i}\alpha x_i - \hat{i}\pi/2)} = -\hat{i}\psi_0(t)e^{\hat{i}\alpha x_i}, \quad (3.12)$$

onde  $\alpha$  é o número de onda,  $x_i = i\Delta x$  e  $\hat{i} = \sqrt{-1}$ . Substituindo (3.11) e (3.12) nas equações (3.3), (3.4), de modo análogo ao que faremos para o modelo de Mindlin e Timoshenko, obtemos

$$\rho\omega_0'' = 2kG\frac{\cos(\alpha\Delta x) - 1}{\Delta x}\frac{\omega_0}{\Delta x} - kG\frac{\sin(\alpha\Delta x)}{\Delta x}\psi_0, \quad (3.13)$$

$$\rho I\psi_0'' = -kGA\sin(\alpha\Delta x)\frac{\omega_0}{\Delta x} + \left(2EI\frac{\cos(\alpha\Delta x) - 1}{\Delta x^2} - kGA\frac{\cos(\alpha\Delta x) + 1}{2}\right)\psi_0. \quad (3.14)$$

Considerando para o modelo de Timoshenko que  $I = b\varepsilon^3/12$ ,  $A = b\varepsilon$ ,  $c^2 = E/\rho$ ,  $c_s^2 = kG/\rho$  e substituindo  $\Delta x$  por  $h$ , as equações tornam-se

$$\omega_0'' = 2c_s^2\frac{\cos(\alpha h) - 1}{h}\frac{\omega_0}{h} - c_s^2\frac{\sin(\alpha h)}{h}\psi_0,$$

$$\psi_0'' = -12\frac{c_s^2}{\varepsilon^2}\sin(\alpha h)\frac{\omega_0}{h} + \left(2c^2\frac{\cos(\alpha h) - 1}{h^2} - 12\frac{c_s^2}{\varepsilon^2}\frac{\cos(\alpha h) + 1}{2}\right)\psi_0.$$

Reescrevemos essas equações, restringindo o passo de tempo pela condição CFL e com

as seguintes definições:

$$v(\tau) = \frac{\omega_0(t)}{h}, \quad u(\tau) = \psi_0(t), \quad t = \frac{\tau h}{c}, \quad \Delta t = \frac{\Delta \tau h}{c}.$$

Assim, essas equações, são reescritas como:

$$\omega_0'' \frac{h}{c^2} = 2 \left( \frac{c_s}{c} \right)^2 (\cos(\alpha h) - 1) \frac{\omega_0}{h} - \left( \frac{c_s}{c} \right)^2 (\sin(\alpha h)) \psi_0, \quad (3.15)$$

$$\psi_0'' \frac{h^2}{c^2} = -\frac{12c_s^2 h^2}{c^2 \varepsilon^2} \sin(\alpha h) \frac{\omega_0}{h} + \left( 2(\cos(\alpha h) - 1) - \frac{6c_s^2 h^2}{c^2 \varepsilon^2} (\cos(\alpha h) + 1) \right) \psi_0. \quad (3.16)$$

De forma simplificada, considerando o fator R, podemos escrever (3.15) e (3.16) como

$$v''(\tau) = -\gamma_1 v(\tau) - \gamma_2 u(\tau), \quad (3.17)$$

$$u''(\tau) = -\mu_1 v(\tau) - \mu_2 u(\tau), \quad (3.18)$$

onde (") agora indica a diferenciação em relação ao tempo  $\tau$  e os coeficientes valem

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 2 \left( \frac{c_s}{c} \right)^2 (1 - \cos(\alpha h)), \\ \gamma_2 &= \left( \frac{c_s}{c} \right)^2 \sin(\alpha h), \\ \mu_1 &= \frac{12c_s^2 h^2 \sin(\alpha h)}{c^2 \varepsilon^2 R}, \\ \mu_2 &= \frac{2(1 - \cos(\alpha h))}{R} + \frac{6c_s^2 h^2 (1 + \cos(\alpha h))}{c^2 \varepsilon^2 R}. \end{aligned}$$

Conforme Wirite [23], uma maneira simples de implementar a integração explícita no tempo é calcular os deslocamentos a partir das velocidades, acelerações a partir das equações (3.17) e (3.18), em seguida, velocidades a partir das acelerações. Conforme os procedimentos a seguir.

Seja  $\Delta(\tau) = \tau_{n+1} - \tau_n$ , obtemos:

1) Os deslocamentos calculados a partir das velocidades: ( $v'$  e  $u'$  são velocidades)

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \Delta \tau v'_n, \\ u_{n+1} &= u_n + \Delta \tau u'_n. \end{aligned}$$

2) As acelerações são dadas a partir das equações (3.17) e (3.18):

$$\begin{aligned} v''_{n+1} &= -\gamma_1 v_{n+1} - \gamma_2 u_{n+1}, \\ u''_{n+1} &= -\mu_1 v_{n+1} - \mu_2 u_{n+1}. \end{aligned}$$

3) As velocidades a partir das acelerações: ( $v''$  e  $u''$  são acelerações)

$$\begin{aligned} v'_{n+1} &= v'_n + \Delta\tau v''_{n+1}, \\ u'_{n+1} &= u'_n + \Delta\tau u''_{n+1}. \end{aligned}$$

De modo que obtemos

$$v'_{n+1} = -\gamma_1 \Delta\tau v_n + (1 - \gamma_1 \Delta\tau^2) v'_n - \gamma_2 \Delta\tau u_n - \gamma_2 \Delta\tau^2 u'_n,$$

$$u'_{n+1} = -\mu_1 \Delta\tau v_n - \mu_1 \Delta\tau^2 v'_n - \mu_2 \Delta\tau u_n + (1 - \mu_2 \Delta\tau^2) u'_n.$$

Seja  $X_n = (v_n, v'_n, u_n, u'_n)$ , escrevemos  $X_{n+1} = BX_n$ , isto é,

$$\begin{bmatrix} v_{n+1} \\ v'_{n+1} \\ u_{n+1} \\ u'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\tau & 0 & 0 \\ -\gamma_1 \Delta\tau & 1 - \gamma_1 \Delta\tau^2 & -\gamma_2 \Delta\tau & -\gamma_2 \Delta\tau^2 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta\tau \\ -\mu_1 \Delta\tau & -\mu_1 \Delta\tau^2 & -\mu_2 \Delta\tau & 1 - \mu_2 \Delta\tau^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_n \\ v'_n \\ u_n \\ u'_n \end{bmatrix}$$

onde  $B$  é a matriz dos coeficientes e  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , seus autovalores.  $B$  é a matriz de amplificação do método explícito (3.3) e (3.4). O máximo de  $|\lambda_i|$  é chamado de raio espectral de  $B$ . Uma condição necessária para a estabilidade numérica é o raio espectral menor do que ou igual a 1. Se o raio espectral de  $B$  for maior do que 1, então os erros numéricos crescem exponencialmente e o método é instável.

Wright [23] procedeu com a respectiva análise espectral da matriz de amplificação associada as equações (3.3) e (3.4) com as variáveis devidamente reescaladas, mostrando a eficiência do método para  $\beta \geq 1/2$ .

Começamos com a figura 1, para  $\beta = 0$ , onde observamos que os erros numéricos aumentam de forma exponencial, neste caso temos  $R_\beta = 1$ , ou seja, não há incremento na inércia rotatória, o que está de acordo com Krieg [10], pois sem aumento da inércia os erros tendem a aumentar. Na figura 02, notamos que começa uma pequena redução nos erros, em seguida crescem exponencialmente. De forma semelhante, isso se repete nas próximas figuras para  $\beta < 0.5$ , mas vemos que há redução na região de instabilidade numérica conforme o crescimento de  $\beta$ .

Para  $\beta = 0.5$ , a figura mostra o raio espectral  $S = 1$  quando  $\Delta\tau$  está próximo de 1, então o método é estável para esse valor de  $\beta$  se passos de tempo não alternam drasticamente de tamanho. Entretanto, para  $\Delta\tau < 0.66$ , a figura mostra  $S > 1$  o que explica a instabilidade observada com  $\beta = 1/2$  quando os passos de tempo se alternam em tamanho por um fator 2. As figuras para  $0.5 \leq \beta \leq 0.95$  mostram que o método tem regiões de instabilidade para estes valores de  $\beta$ , mas eles também ilustram que, com o aumento de  $\beta$ , a região de instabilidade encolhe e seu centro se move em direção a  $\Delta\tau = 1$ . Para  $\beta \geq 1$  verificou-se que  $S = 1$  para qualquer combinação de  $\Delta\tau \leq 1$ . Em outras palavras,

$\beta \geq 1$  é necessário para evitar instabilidades numéricas causadas por passos de tempo que se alternam em tamanho.

Esses resultados são importantes em nossos estudos, pois eles foram motivadores para que pudéssemos estendê-los para o modelo de Mindlin-Tomoshenko.

Seguem os gráficos construídos a partir do trabalho do Wright [23].

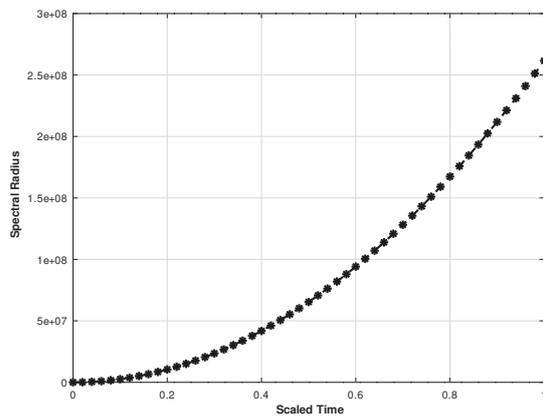


Figura 3.1:  $\beta = 0.0$

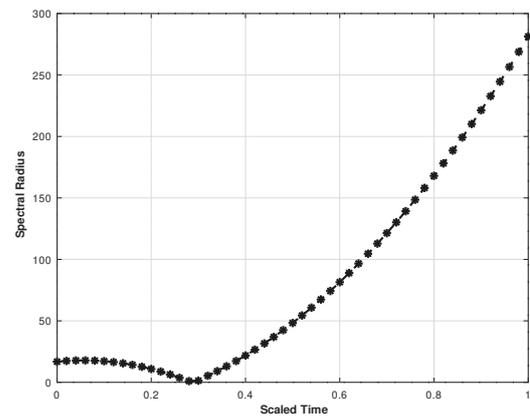


Figura 3.2:  $\beta = 0.1$

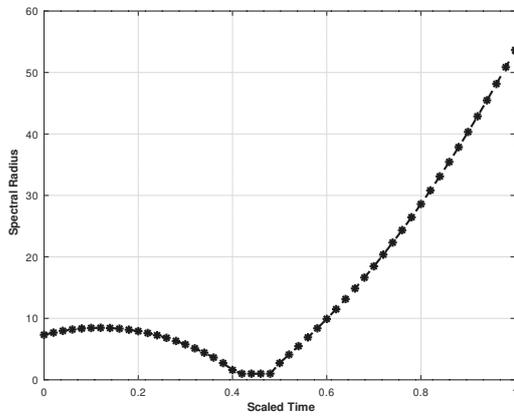


Figura 3.3:  $\beta = 0.2$

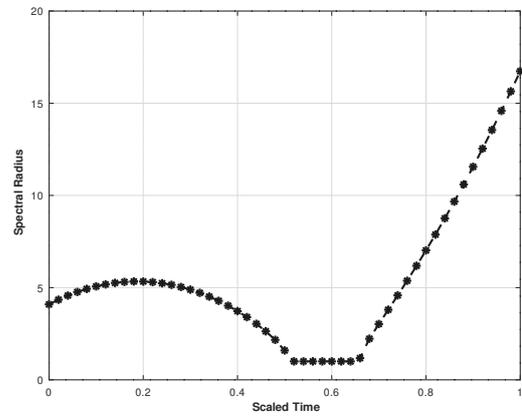


Figura 3.4:  $\beta = 0.3$

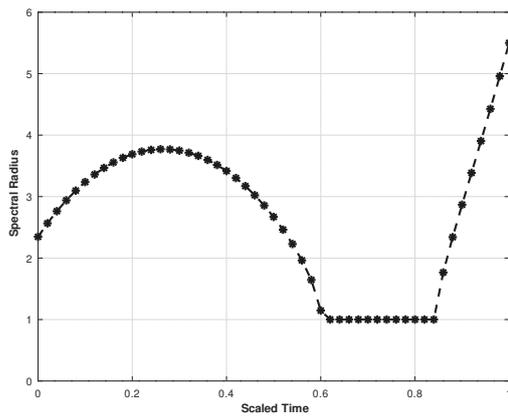


Figura 3.5:  $\beta = 0.4$

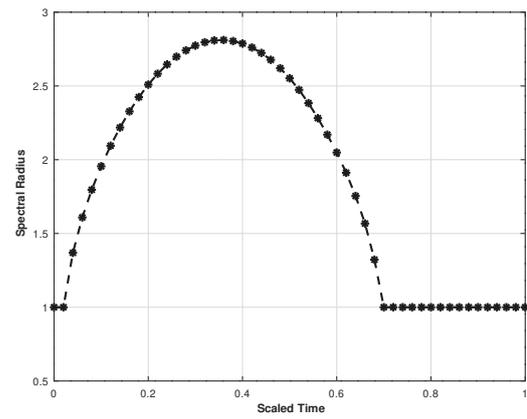


Figura 3.6:  $\beta = 0.5$

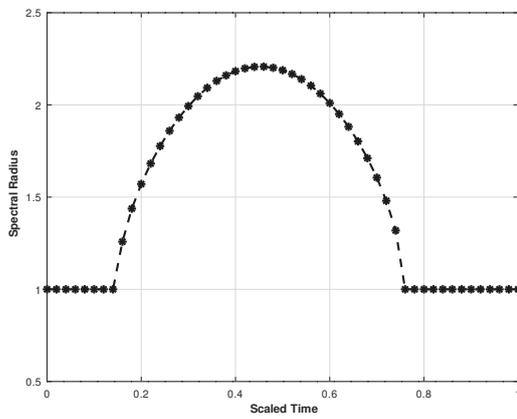


Figura 3.7:  $\beta = 0.6$

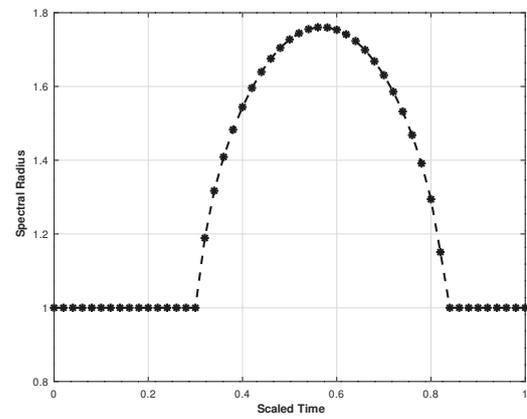


Figura 3.8:  $\beta = 0.7$

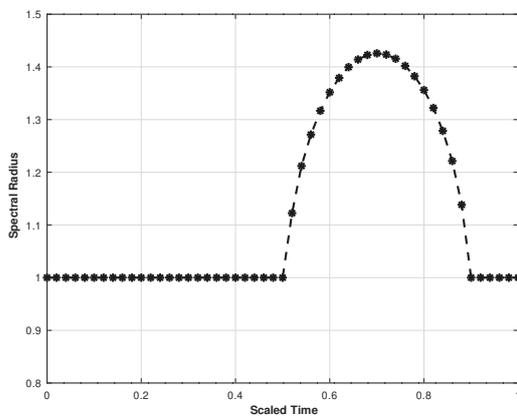


Figura 3.9:  $\beta = 0.8$

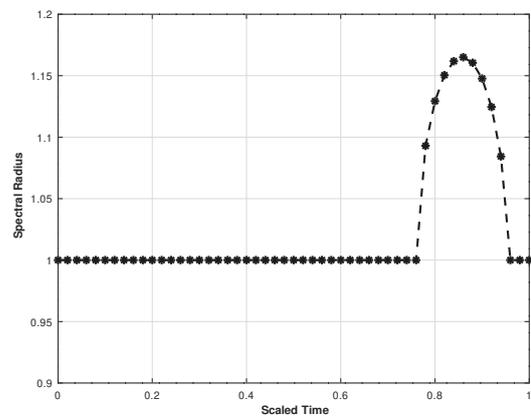


Figura 3.10:  $\beta = 0.9$

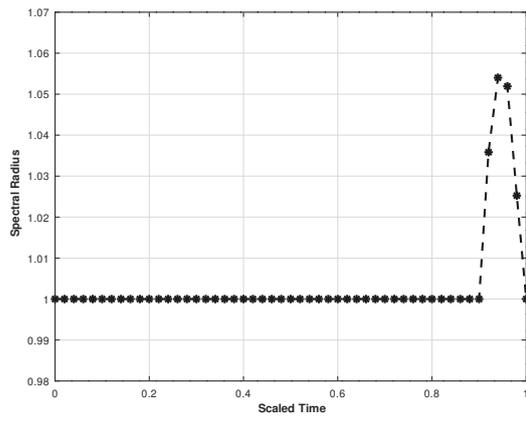


Figura 3.11:  $\beta = 0.95$

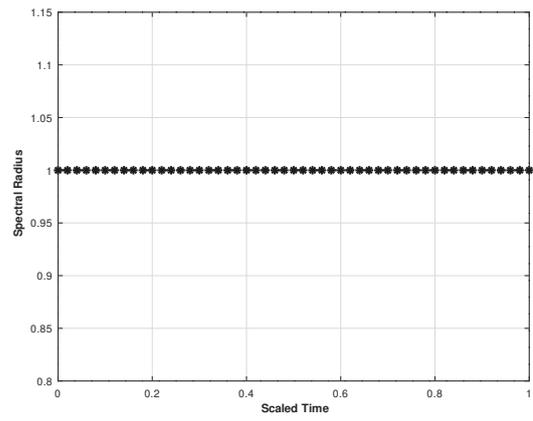


Figura 3.12:  $\beta = 1$

## Capítulo 4

# Estabilidade Numérica para Placas de Mindlin-Timoshenko

### 4.1 Introdução

O modelo de Mindlin-Timoshenko descreve o movimento elástico de uma placa fina homogênea e isotrópica. Este modelo é considerado um dos mais importantes, pois leva em consideração tanto deformações transversais como também rotacionais.

De acordo com Pokojovy [14] uma placa de espessura uniforme é um corpo prismático cuja altura  $\varepsilon$  é pequena em comparação com as dimensões da base  $\Omega$ . Mesmo que uma placa seja um objeto tridimensional, a diferença essencial para sólidos uniformemente espessos é, entre outras coisas, que uma placa pode sofrer grandes deformações sem criar grandes tensões no corpo.

Consideramos uma placa que na configuração de referência determina o conjunto  $B_r = \Omega \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ ,  $\varepsilon > 0$ , isto é, as faces estão no plano  $z = \varepsilon/2$ , conforme figura abaixo, onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é uma área com limite  $\Gamma = \partial\Omega$ .

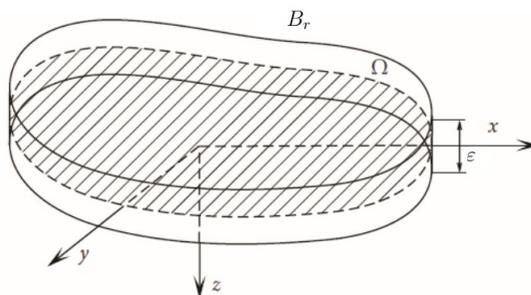


Figura 4.1: Placa

O modelo conservativo de Mindlin-Timoshenko no caso bidimensional é dado por

$$\rho_1 w_{tt} - K(\psi + w_x)_x - K(\varphi + w_y)_y = 0, \quad (4.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - D\psi_{xx} - D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\psi_{yy} - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\varphi_{xy} + K(\psi + w_x) = 0, \quad (4.2)$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} - D\varphi_{yy} - D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\varphi_{xx} - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\psi_{xy} + K(\varphi + w_y) = 0, \quad (4.3)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é limitado,  $\rho$  é a densidade do material,  $\rho_1 = \rho\varepsilon$ ,  $\rho_2 = \rho I$ ,  $I = \varepsilon^3/12$ ,  $\varepsilon$  é a espessura da chapa,  $\mu$  é a razão de Poisson,  $D$  é o módulo de rigidez flexural e  $K$  é o módulo de cisalhamento. As funções  $\omega$ ,  $\psi$  e  $\varphi$  dependem de  $(x, y, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ , onde  $\omega$  modela o deslocamento transversal da placa, e  $\psi$ ,  $\varphi$  são os ângulos de rotação de um filamento da placa.

Sare [16] afirma que a diferença principal deste sistema para o caso unidimensional análogo ( $\varphi = 0$ ) é que aqui é considerada uma outra equação para os ângulos de rotação. Note também que o acoplamento entre as equações dos ângulos de rotação ( $\psi, \varphi$ ) e a equação de deslocamento  $\omega$  é mais fraco que em uma dimensão. Ou seja, enquanto em uma dimensão o acoplamento é dado pelo gradiente das funções, no caso de duas dimensões o acoplamento é dado por derivadas parciais  $\psi_x$  e  $\varphi_y$  em (4.1),  $\omega_x$  em (4.2) e  $\omega_y$  em (4.3).

## 4.2 Origem do modelo

A descrição do modelo encontramos no trabalho de Campelo [4]. O modelo de Mindlin-Timoshenko descreve o movimento elástico de uma placa fina, homogênea e isotrópica. O movimento presume-se ser elástico, no sentido de que não ocorre nenhuma deformação permanente na placa.

Podemos descrever as equações de movimento bidimensionais que regem a teoria de Mindlin-Timoshenko para o estiramento da placa como:

$$\rho\varepsilon \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}, \quad (4.4)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x, \quad (4.5)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y, \quad (4.6)$$

onde  $M$  é o momento fletor e  $Q$  o esforço cortante. Tanto os momentos fletores, quanto as forças cortantes são grandezas por unidade de tempo, e considerando a lei de Hooke e conforme Reismann [15], estas relações encontradas em Mindlin [12] são dadas por

$$M_x = D \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad (4.7)$$

$$M_y = D \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad (4.8)$$

$$M_{xy} = D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad (4.9)$$

$$Q_x = kG\varepsilon \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} + \psi \right), \quad (4.10)$$

$$Q_y = kG\varepsilon \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + \varphi \right), \quad (4.11)$$

onde  $k$  é o fator de correção do cortante,  $G = E/2(1 + \mu)$  exprime o modulo de rigidez do cortante e o fator  $D$  denota a rigidez à flexão da placa e é dada por  $D = EI/(1 - \mu^2)$ , em que  $E$  é o modulo de Young e  $\mu$  é a constante de Poisson.

Substituindo as equações (4.7) a (4.11) nas equações de movimento (4.4) a (4.6), resulta o sistema (4.1) a (4.3) de três equações diferenciais parciais hiperbólicas, onde  $K = kG\varepsilon$  é o modulo de cisalhamento.

### 4.3 Método numérico explícito

Considere  $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$  e para  $K, J, N \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $\Delta x = \frac{L_1}{K}$ ,  $\Delta y = \frac{L_2}{J}$  e  $\Delta t = \frac{T}{N}$ , assim, contruimos as divisões uniformes dos intervalos  $[0, L_1]$  e  $[0, L_2]$ , obtendo a seguinte malha:

$$x_0 = 0 < x_1 = \Delta x < \dots < x_K = K\Delta x = L_1,$$

$$y_0 = 0 < y_1 = \Delta y < \dots < y_J = J\Delta y = L_2,$$

$$t_0 = 0 < t_1 = \Delta t < \dots < t_N = N\Delta t = T,$$

com  $x_i = i\Delta x$ ,  $y_j = j\Delta y$  e  $t_n = n\Delta t$  para  $i = 0, 1, \dots, K$ ,  $j = 0, 1, \dots, J$  e  $n = 0, 1, \dots, N$ .

Reescrevemos as equações (4.1) a (4.3) na forma

$$\rho_1 \omega_{tt} = K\psi_x + K\omega_{xx} + K\varphi_y + K\omega_{yy},$$

$$\rho_2 \psi_{tt} = D\psi_{xx} + D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \psi_{yy} + D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \varphi_{xy} - K\psi - K\omega_x,$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} = D\varphi_{yy} + D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \varphi_{xx} + D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \psi_{xy} - K\varphi - K\omega_y.$$

Aplicando o método de diferenças finitas centrais, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1 \omega_{i,j}'' &= K \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} + K \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ &+ K \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2\Delta y} + K \frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{\Delta y^2}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \psi_{i,j}'' &= D \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \\ &+ D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i+1,j-1} - \varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \\ &- K \frac{\psi_{i+1,j} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{4} - K \frac{\psi_{i,j+1} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{4} \\ &- K \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2\Delta x}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \varphi_{i,j}'' &= D \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{\Delta y^2} + D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ &+ D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \\ &- K \frac{\varphi_{i+1,j} + 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{4} - K \frac{\varphi_{i,j+1} + 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{4} \\ &- K \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2\Delta y}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde (") denota a diferenciação em relação ao tempo,  $\omega_{i,j}(t)$  para  $i, j = 1, 2, 3, \dots$  denota os valores aproximados  $\omega(i\Delta x, j\Delta y, t)$ , da mesma forma para  $\psi_{i,j}(t)$  e  $\varphi_{i,j}(t)$ . Note que

$$\varphi_{xy}(x_i, y_j, t) \approx \frac{\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i+1,j-1} - \varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}.$$

De modo análogo para  $\psi_{xy}(x_i, y_j, t)$ , e

$$\psi(x_i, y_j, t) \approx \frac{\psi_{i+1,j} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{4} + \frac{\psi_{i,j+1} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{4}.$$

Analogamente para  $\varphi(x_i, y_j, t_n)$ .

### 4.3.1 Critério de estabilidade numérica

Já vimos no capítulo anterior que o critério de estabilidade numérica para métodos de integração explícita no tempo depende da frequência máxima. Esta frequência é dada em função do comprimento e velocidade de propagação das ondas. Nesse direção, faremos uma análise, em seguida, na propagação de ondas harmônicas para o modelo de Mindlin e Timoshenko.

### Propagação de ondas harmônicas

A análise de propagação de ondas é importante para o entendimento dos fenômenos de dispersão presentes em estruturas elásticas.

Nesta seção, obtemos as frequências naturais e as velocidades associadas ao sistema de equações hiperbólicas (4.1)-(4.3). Elas são importantes para determinar o critério de estabilidade para o método de integração explícita no tempo.

Baseado nos procedimentos encontrados nos trabalhos de Graff [9], Wright [23] para as vigas de Timoshenko e Almeida&Rivera [2] para o modelo de Bresse, vamos considerar uma estrutura uniforme em que todos os coeficientes são constantes e que as propagações de ondas representadas pelas funções  $\omega$ ,  $\psi$  e  $\varphi$  nas equações (4.1) a (4.3) são dadas por

$$\omega = A_1 e^{\hat{i}(\gamma_x x + \gamma_y y + \bar{\omega} t)}, \quad (4.15)$$

$$\psi = A_2 e^{\hat{i}(\gamma_x x + \gamma_y y + \bar{\omega} t)}, \quad (4.16)$$

$$\varphi = A_3 e^{\hat{i}(\gamma_x x + \gamma_y y + \bar{\omega} t)}, \quad (4.17)$$

em que  $\hat{i} = \sqrt{-1}$ ,  $\gamma_x$  e  $\gamma_y$  são os números de ondas,  $\bar{\omega}$  é a frequência natural das ondas com velocidade de propagação  $c$ , que é própria da estrutura, onde  $A_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  são as amplitudes das funções  $\omega$ ,  $\psi$ , e  $\varphi$ , respectivamente.

Aplicando as soluções (4.15)-(4.17) às equações (4.1)-(4.3), obtemos o sistema nas variáveis  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , como segue

$$\begin{aligned} -\rho_1 \bar{\omega}^2 A_1 + K \gamma_x^2 A_1 + K \gamma_y^2 A_1 - K \hat{i} \gamma_x A_2 - K \hat{i} \gamma_y A_3 &= 0, \\ K \hat{i} \gamma_x A_1 - \rho_2 \bar{\omega}^2 A_2 + D \gamma_x^2 A_2 + D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \gamma_y^2 A_2 + K A_2 + D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \gamma_x \gamma_y A_3 &= 0, \\ K \hat{i} \gamma_y A_1 + D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \gamma_x \gamma_y A_2 - \rho_2 \bar{\omega}^2 A_3 + D \gamma_y^2 A_3 + D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \gamma_x^2 A_3 + K A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Escrevemos na forma matricial

$$\begin{bmatrix} K \gamma_x^2 - \rho_1 \bar{\omega}^2 + K \gamma_y^2 & -K \hat{i} \gamma_x & -K \hat{i} \gamma_y \\ K \hat{i} \gamma_x & K - \rho_2 \bar{\omega}^2 + D \gamma_x^2 + D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \gamma_y^2 & D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \gamma_x \gamma_y \\ K \hat{i} \gamma_y & D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \gamma_x \gamma_y & K - \rho_2 \bar{\omega}^2 + D \gamma_y^2 + D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \gamma_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

em seguida fazemos  $\gamma^2 = \gamma_x^2 + \gamma_y^2$  e  $\frac{1-\mu}{2} = 1 - \frac{1+\mu}{2}$  e obtemos

$$\begin{bmatrix} K \gamma^2 - \rho_1 \bar{\omega}^2 & -K \hat{i} \gamma_x & -K \hat{i} \gamma_y \\ K \hat{i} \gamma_x & K - \rho_2 \bar{\omega}^2 + D \gamma^2 - D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \gamma_y^2 & D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \gamma_x \gamma_y \\ K \hat{i} \gamma_y & D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \gamma_x \gamma_y & K - \rho_2 \bar{\omega}^2 + D \gamma^2 - D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \gamma_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chamaremos de  $A$ , a matriz dos coeficientes acima. As soluções não triviais são obtidas desde que  $\det(A) = 0$ . Assim, segue a equação

$$\begin{aligned} & (K\gamma^2 - \rho_1\bar{\omega}^2) \left( K - \rho_2\bar{\omega}^2 + D\gamma^2 - D\frac{1+\mu}{2}\gamma_y^2 \right) \left( K - \rho_2\bar{\omega}^2 + D\gamma^2 - D\frac{1+\mu}{2}\gamma_x^2 \right) \\ & \quad + 2K^2D\frac{1+\mu}{2}\gamma_x^2\gamma_y^2 - K^2\gamma_y^2 \left( K - \rho_2\bar{\omega}^2 + D\gamma^2 - D\frac{1+\mu}{2}\gamma_y^2 \right) \\ & - (K\gamma^2 - \rho_1\bar{\omega}^2) \left( D\frac{1+\mu}{2}\gamma_x\gamma_y \right)^2 - K^2\gamma_x^2 \left( K - \rho_2\bar{\omega}^2 + D\gamma^2 - D\frac{1+\mu}{2}\gamma_x^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Assim, chegamos a

$$\begin{aligned} & \left[ KD^2 - KD^2 \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \right] \gamma^6 - \rho_1\rho_2^2\bar{\omega}^6 + \left[ \rho_1D^2 \left( \frac{1+\mu}{2} \right) + K\rho_2D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \right. \\ & \left. - \rho_1D^2 - 2K\rho_2D \right] \gamma^4\bar{\omega}^2 + \left[ 2\rho_1\rho_2D - \rho_1\rho_2D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) + K\rho_2^2 \right] \gamma^2\bar{\omega}^4 + K^2D\gamma^4 \\ & \quad + 2K\rho_1\rho_2\bar{\omega}^4 + \left[ K\rho_1D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) - 2K\rho_1D - K^2\rho_2 \right] \gamma^2\bar{\omega}^2 - K^2\rho_1\bar{\omega}^2 = 0, \end{aligned}$$

a qual podemos escrever como

$$a_0\gamma^6 + a_1\bar{\omega}^6 + a_2\gamma^4\bar{\omega}^2 + a_3\gamma^2\bar{\omega}^4 + a_4\gamma^4 + a_5\bar{\omega}^4 + a_6\gamma^2\bar{\omega}^2 + a_7\bar{\omega}^2 = 0, \quad (4.18)$$

denominada equação de frequência, onde os coeficientes  $a_i, i = 0, 1, \dots, 7$  são dados por

$$\begin{aligned} a_0 &= KD^2 - KD^2\frac{1+\mu}{2}, \\ a_1 &= -\rho_1\rho_2^2, \\ a_2 &= \rho_1D^2\frac{1+\mu}{2} + K\rho_2D\frac{1+\mu}{2} - \rho_1D^2 - 2K\rho_2D, \\ a_3 &= 2\rho_1\rho_2D - \rho_1\rho_2D\frac{1+\mu}{2} + K\rho_2^2, \\ a_4 &= K^2D, \\ a_5 &= 2K\rho_1\rho_2, \\ a_6 &= K\rho_1D\frac{1+\mu}{2} - 2K\rho_1D - K^2\rho_2, \\ a_7 &= -K^2\rho_1. \end{aligned}$$

Tal como realizado por Graff [9] para o sistema de vigas planas regido pelas hipóteses de Timoshenko, usamos a identidade  $\bar{\omega} = \gamma c$  com  $c$  constante e assim reduzimos a equação (4.18) para a denominada equação de dispersão:

$$a_0\gamma^6 + a_1c^6\gamma^6 + a_2c^2\gamma^6 + a_3c^4\gamma^6 + a_4\gamma^4 + a_5c^4\gamma^4 + a_6c^2\gamma^4 + a_7c^2\gamma^2 = 0,$$

que podemos escrever como

$$(a_0 + a_1c^6 + a_2c^2 + a_3c^4) + (a_4 + a_5c^4 + a_6c^2)\frac{1}{\gamma^2} + a_7c^2\frac{1}{\gamma^4} = 0. \quad (4.19)$$

Para análise do comportamento assintótico da equação de dispersão, dois casos devem ser levados em consideração:

1) O caso do comprimento de onda ( $\lambda$ ) tendendo a zero, isso implica  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $\gamma$  é o número de ondas, o que corresponde aos altos modos de vibrações;

2) O caso do comprimento de onda infinito, logo  $\gamma \rightarrow 0$  que corresponde aos baixos modos de vibrações.

Quando o número de ondas torna-se muito grande ( $\gamma \rightarrow \infty$ ), obtemos da equação (4.19) que

$$a_1c^6 + a_3c^4 + a_2c^2 + a_0 = 0.$$

Para  $c^2 = d$ , temos

$$a_1d^3 + a_3d^2 + a_2d + a_0 = 0.$$

Considerando os valores de  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$ , obtemos

$$d = \left\{ \frac{K}{\rho_1}, \frac{D}{\rho_2}, \frac{D}{\rho_2} \right\}.$$

Então os valores das velocidades são dados por

$$c = \left\{ \pm \sqrt{\frac{kG}{\rho}}, \pm \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}}, \pm \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}} \right\}.$$

Temos, portanto, que as velocidades são limitadas em grande número de ondas, onde  $\sqrt{kG/\rho}$  é a velocidade de propagação da função  $\omega$  e  $\sqrt{E/\rho(1-\mu^2)}$  é a velocidade de propagação das funções  $\psi$  e  $\varphi$ . Como a frequência é diretamente proporcional a velocidade, então a frequência máxima para comprimentos de ondas próximos de zero é determinada pela velocidade  $\sqrt{E/\rho(1-\mu^2)}$ .

Por outro lado, analisando o caso em que  $\gamma \rightarrow 0$ , quando o comprimento de onda tende ao infinito, vamos investigar a possibilidade de interrupção de frequências. Nesse caso, o modelo de Mindlin e Timoshenko é governado somente pelas funções de rotação  $\psi$  e  $\varphi$ , sem deslocamentos transversais  $\omega$ . Semelhante à análise de Wright [23], quando  $\gamma \rightarrow 0$  ( $\gamma_x, \gamma_y \rightarrow 0$ ), as derivadas em relação a  $x$  e  $y$  tendem a zero, então a equação (4.1) resulta em  $\omega_{tt} = 0$ , a equação (4.2) em  $\rho_2\psi_{tt} + K\psi = 0$  e (4.3) em  $\rho_2\varphi_{tt} + K\varphi = 0$ , onde  $\bar{\omega}^2 = K/\rho_2$  é a frequência máxima do sistema de Mindlin e Timoshenko. De fato, seguindo

com a análise de propagação de ondas, obtemos da equação (4.18) fazendo  $\gamma \rightarrow 0$ , que

$$\begin{aligned} a_1\bar{\omega}^6 + a_5\bar{\omega}^4 + a_7\bar{\omega}^2 &= 0, \\ \bar{\omega}^2(a_1\bar{\omega}^4 + a_5\bar{\omega}^2 + a_7) &= 0. \end{aligned}$$

Assim  $\bar{\omega} = 0$  ou

$$a_1\bar{\omega}^4 + a_5\bar{\omega}^2 + a_7 = 0,$$

de onde obtemos os seguintes valores de frequências:

$$\bar{\omega}^2 = \frac{K}{\rho_2}.$$

Assim, para número de ondas próximo de zero temos frequência de corte finita. Como para placas do tipo Mindlin-Timoshenko,  $K = kG\varepsilon$ ,  $\rho_2 = \frac{\rho\varepsilon^3}{12}$ , obtemos:

$$\bar{\omega}_{max} = \frac{2\sqrt{3}c_s}{\varepsilon}, \quad (4.20)$$

onde  $c_s = \sqrt{kG/\rho}$ . Observamos que esta frequência é a mesma das vigas de Timoshenko.

Notamos que, quando o comprimento de onda é infinito, a frequência mais baixa vai para zero e a frequência mais alta é inversamente proporcional à espessura da placa. Essa frequência mais alta determina a condição de estabilidade numérica. Para  $\varepsilon$  pequeno o valor da frequência aumenta, sendo definido por Downs [7], como a frequência máxima associada ao cortante.

Levando-se em conta a frequência obtida em (4.20) e que a condição  $\bar{\omega}_{max}\Delta t \leq 2$ , obtemos o critério de estabilidade do método explícito de integração no tempo aplicado as equações (4.1) a (4.3) dado por

$$\Delta t \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}c_s}. \quad (4.21)$$

Vemos que esta condição é a mesma das vigas de Timoshenko. Conforme abordamos no capítulo 3, esta restrição ao critério de estabilidade não é a condição CFL. Para superá-la, utilizamos as técnicas realizadas por Wright [23], para minimizar a influência do critério  $\varepsilon$  na estabilidade de tal forma que a condição CFL prevalece. Este procedimento resulta em outra diferença finita explícita, onde o termo inercial  $\rho_2 = \rho I$  é alterado, como sugerido por Belytschko e Mindle [3].

## 4.4 Inércia rotatória e fatores de correção

Vimos que aumentar a inércia rotatória alivia restrição de estabilidade numérica, esse aumento da inércia diminui a frequência máxima e assim permite um passo de tempo

maior na integração explícita no tempo. Nessa direção, Wright [22] desenvolveu uma forma de aumentar a inercia rotatória, usando uma combinação dos métodos explícito e implícito e obteve o fator  $R$  para as equações de Timoshenko, que apresentamos no capítulo anterior.

Seguindo o método do Wright, encontramos os fatores  $R_\beta$  e  $R_\theta$ , para (4.2) e (4.3), respectivamente, as duas equações de rotação do modelo de Mindlin e Timoshenko, o qual descrevemos abaixo.

Considere a equação (4.2), a qual discretizamos apenas o termo  $-K\psi$ , assim temos

$$\begin{aligned} \rho_2 \psi_{tt} = & D\psi_{xx} + D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \psi_{yy} + D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \varphi_{xy} - K\omega_x \\ & - K \left( \frac{\psi_{i+1,j} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{4} \right) - K \left( \frac{\psi_{i,j+1} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{4} \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Em seguida reescrevemos o termo discretizado, como

$$-\frac{K}{4}(\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) - \frac{K}{4}(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) - K\psi_{i,j}.$$

Agora discretizamos o termo  $-K\psi_{i,j}$  no tempo e introduzimos  $\beta$ , como segue

$$-\frac{K}{4}(\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) - \frac{K}{4}(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) - K(\beta\psi_{i,j}^{n+1} + (1-2\beta)\psi_{i,j}^n + \beta\psi_{i,j}^{n-1}).$$

Reescrevemos na forma

$$-\frac{K}{4}(\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) - \frac{K}{4}(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) - K\psi_{i,j} - \beta K(\psi_{i,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j}^{n-1}).$$

Ainda podemos escrever

$$-\frac{K}{4}(\psi_{i+1,j} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}) - \frac{K}{4}(\psi_{i,j+1} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}) - \beta K \Delta t^2 \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2}.$$

Voltando a equação (4.22) e substituindo  $\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2}$  por  $\psi_{tt}$  temos

$$\begin{aligned} \rho_2 \psi_{tt} = & D\psi_{xx} + D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \psi_{yy} + D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \varphi_{xy} - K\omega_x \\ & - K \left( \frac{\psi_{i+1,j} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{4} \right) - K \left( \frac{\psi_{i,j+1} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{4} \right) - \beta K \Delta t^2 \psi_{tt}. \end{aligned}$$

Passamos o termo com  $\psi_{tt}$  para o lado esquerdo e voltamos com o termo  $\psi$  discretizado inicialmente, então

$$(\rho_2 + \beta K \Delta t^2) \psi_{tt} = D\psi_{xx} + D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \psi_{yy} + D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \varphi_{xy} - K\omega_x - K\psi.$$

Considerando que  $\rho_2 = \rho I$ ,  $K = kG\varepsilon$ , temos

$$R_\beta \rho I \psi_{tt} = D \psi_{xx} + D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \psi_{yy} + D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \varphi_{xy} - K(\omega_x + \psi),$$

onde

$$R_\beta = 1 + \frac{\beta k G \varepsilon \Delta t^2}{\rho I}.$$

Analogamente, na equação (4.3) obtemos

$$R_\theta \rho I \varphi_{tt} = D \varphi_{yy} + D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \varphi_{xx} + D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \psi_{xy} - K(w_y + \varphi),$$

onde

$$R_\theta = 1 + \frac{\theta k G \varepsilon \Delta t^2}{\rho I},$$

em que  $\beta$  e  $\theta$  são adimensionais. Termos de correção como  $R_\beta$  e  $R_\theta$  foram usados com sucesso por Wright [23] e Belytschko e Mindle [3]. Mostraram que aumentar a inércia rotatória, alivia a restrição (4.21) sem necessariamente afetar a importância dos baixos modos de vibrações.

Na próxima seção, faremos alguns experimentos numéricos para certificar a eficiência deste procedimento na regularização do critério de estabilidade.

## 4.5 Análise de estabilidade

Para um determinado comprimento de onda, os modos de Fourier têm deslocamentos e rotações que estão defasadas em 90 graus. Nessa direção, para a análise numérica do critério de estabilidade, assumimos que as soluções para as equações discretas (4.12-4.14), são escritas como:

$$\omega_{i,j}(t) = \omega_0(t) e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_j)}, \quad (4.23)$$

$$\psi_{i,j}(t) = \psi_0(t) e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_j - \frac{\pi}{2})} = -\hat{i} \psi_0(t) e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_j)}, \quad (4.24)$$

$$\varphi_{i,j}(t) = \varphi_0(t) e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_j - \frac{\pi}{2})} = -\hat{i} \varphi_0(t) e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_j)}, \quad (4.25)$$

onde  $\hat{i} = \sqrt{-1}$ ,  $(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y)$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são os números de ondas.

Agora vamos a substituição das funções acima nas equações (4.12) a (4.14). Faremos

as substituições em cada equação separadamente. Primeiro a equação (4.12) como segue

$$\begin{aligned} \rho_1 \omega_0'' e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_j)} = & K \left( \frac{-\hat{i}\psi_0 e^{\hat{i}(\alpha x_{i+1} + \beta y_j)} + \hat{i}\psi_0 e^{\hat{i}(\alpha x_{i-1} + \beta y_j)}}{2\Delta x} \right) \\ & + K \left( \frac{\omega_0 e^{\hat{i}(\alpha x_{i+1} + \beta y_j)} - 2\omega_0 e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_j)} + \omega_0 e^{\hat{i}(\alpha x_{i-1} + \beta y_j)}}{\Delta x^2} \right) \\ & + K \left( \frac{-\hat{i}\varphi_0 e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_{j+1})} + \hat{i}\varphi_0 e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_{j-1})}}{2\Delta y} \right) \\ & + K \left( \frac{\omega_0 e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_{j+1})} - 2\omega_0 e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_j)} + \omega_0 e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_{j-1})}}{\Delta y^2} \right). \end{aligned}$$

donde temos

$$\begin{aligned} \rho_1 \omega_0'' e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_j)} = & -\hat{i}\psi_0 K e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_j)} \left( \frac{e^{\hat{i}\alpha\Delta x} - e^{-\hat{i}\alpha\Delta x}}{2\Delta x} \right) \\ & + \omega_0 e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_j)} K \left( \frac{e^{\hat{i}\alpha\Delta x} - 2 + e^{-\hat{i}\alpha\Delta x}}{\Delta x^2} \right) \\ & - \hat{i}\varphi_0 e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_j)} K \left( \frac{e^{\hat{i}\beta\Delta y} - e^{-\hat{i}\beta\Delta y}}{2\Delta y} \right) \\ & + \omega_0 e^{\hat{i}(\alpha x_i + \beta y_j)} K \left( \frac{e^{\hat{i}\beta\Delta y} - 2 + e^{-\hat{i}\beta\Delta y}}{\Delta y^2} \right). \end{aligned}$$

Sabemos, por Euler, que:

$$\begin{aligned} e^{\hat{i}\alpha\Delta x} &= \cos \alpha\Delta x + \hat{i} \sin \alpha\Delta x, \\ e^{-\hat{i}\alpha\Delta x} &= \cos \alpha\Delta x - \hat{i} \sin \alpha\Delta x. \end{aligned}$$

Então obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1 \omega_0'' = & -\hat{i}\psi_0 K \left( \frac{2\hat{i} \sin \alpha\Delta x}{2\Delta x} \right) + \omega_0 K \left( \frac{2 \cos \alpha\Delta x - 2}{\Delta x^2} \right) \\ & - \hat{i}\varphi_0 K \left( \frac{2\hat{i} \sin \beta\Delta y}{2\Delta y} \right) + \omega_0 K \left( \frac{2 \cos \beta\Delta y - 2}{\Delta y^2} \right). \end{aligned}$$

Considerando  $K = kG\varepsilon$ ,  $\rho_1 = \rho\varepsilon$ ,  $c_s^2 = kG/\rho$  e  $h = \Delta x = \Delta y$  obtemos

$$\omega_0'' = 2c_s^2 \left( \frac{\cos \alpha h + \cos \beta h - 2}{h^2} \right) \omega_0 + c_s^2 \left( \frac{\sin \alpha h}{h} \right) \psi_0 + c_s^2 \left( \frac{\sin \beta h}{h} \right) \varphi_0, \quad (4.26)$$

onde  $c^2 = E/\rho(1 - \mu^2)$ .

Agora seguimos com a substituição das soluções (4.23) a (4.25) na equação (4.13)

$$\begin{aligned}
 -\hat{i}\rho_2\psi_0''e^{\hat{i}(\alpha x_i+\beta y_j)} &= D \left( \frac{-\hat{i}\psi_0e^{\hat{i}(\alpha x_{i+1}+\beta y_j)} + 2\hat{i}\psi_0e^{\hat{i}(\alpha x_i+\beta y_j)} - \hat{i}\psi_0e^{\hat{i}(\alpha x_{i-1}+\beta y_j)}}{\Delta x^2} \right) \\
 &\quad + D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \left( \frac{-\hat{i}\psi_0e^{\hat{i}(\alpha x_i+\beta y_{j+1})} + 2\hat{i}\psi_0e^{\hat{i}(\alpha x_i+\beta y_j)} - \hat{i}\psi_0e^{\hat{i}(\alpha x_i+\beta y_{j-1})}}{\Delta y^2} \right) \\
 &\quad + D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \left( \frac{-\hat{i}\varphi_0e^{\hat{i}(\alpha x_{i+1}+\beta y_{j+1})} + \hat{i}\varphi_0e^{\hat{i}(\alpha x_{i+1}+\beta y_{j-1})} + \hat{i}\varphi_0e^{\hat{i}(\alpha x_{i-1}+\beta y_{j+1})} - \hat{i}\varphi_0e^{\hat{i}(\alpha x_{i-1}+\beta y_{j-1})}}{4\Delta x\Delta y} \right) \\
 &\quad - K \left( \frac{-\hat{i}\psi_0e^{\hat{i}(\alpha x_{i+1}+\beta y_j)} - 2I\psi_0e^{\hat{i}(\alpha x_i+\beta y_j)} - \hat{i}\psi_0e^{\hat{i}(\alpha x_{i-1}+\beta y_j)}}{4} \right) \\
 &\quad - K \left( \frac{-\hat{i}\psi_0e^{\hat{i}(\alpha x_i+\beta y_{j+1})} - 2\hat{i}\psi_0e^{\hat{i}(\alpha x_i+\beta y_j)} - \hat{i}\psi_0e^{\hat{i}(\alpha x_i+\beta y_{j-1})}}{4} \right) \\
 &\quad - K \left( \frac{\omega_0e^{\hat{i}(\alpha x_{i+1}+\beta y_j)} - \omega_0e^{\hat{i}(\alpha x_{i-1}+\beta y_j)}}{2\Delta x} \right),
 \end{aligned}$$

donde segue

$$\begin{aligned}
 -\hat{i}\rho_2\psi_0'' &= -\hat{i}\psi_0D \left( \frac{e^{\hat{i}\alpha\Delta x} - 2 + e^{-I\alpha\Delta x}}{\Delta x^2} \right) \\
 &\quad - \hat{i}\psi_0D \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \left( \frac{e^{\hat{i}\beta\Delta y} - 2 + e^{-\hat{i}\beta\Delta y}}{\Delta y^2} \right) \\
 &\quad - \hat{i}\varphi_0D \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \left( \frac{e^{\hat{i}(\alpha\Delta x+\beta\Delta y)} - e^{\hat{i}(\alpha\Delta x-\beta\Delta y)} - e^{\hat{i}(-\alpha\Delta x+\beta\Delta y)} + e^{\hat{i}(-\alpha\Delta x-\beta\Delta y)}}{4\Delta x\Delta y} \right) \\
 &\quad + \hat{i}\psi_0K \left( \frac{e^{\hat{i}\alpha\Delta x} + 2 + e^{-\hat{i}\alpha\Delta x}}{4} \right) \\
 &\quad + \hat{i}\psi_0K \left( \frac{e^{\hat{i}\beta\Delta y} + 2 + e^{-\hat{i}\beta\Delta y}}{4} \right) \\
 &\quad - \omega_0K \left( \frac{e^{\hat{i}\alpha\Delta x} - e^{-\hat{i}\alpha\Delta x}}{2\Delta x} \right).
 \end{aligned}$$

Usando Euler e  $h = \Delta x = \Delta y$  temos

$$\begin{aligned}
 \rho_2\psi_0'' &= \frac{2D}{h^2}(\cos \alpha h - 1)\psi_0 + \frac{2D}{h^2} \left( \frac{1-\mu}{2} \right) (\cos \beta h - 1)\psi_0 \\
 &\quad + \frac{D}{h^2} \left( \frac{1+\mu}{2} \right) \left( \frac{-4 \sin \alpha h \sin \beta h}{4} \right) \varphi_0 - \frac{K}{2}(\cos \alpha h + 1)\psi_0 \\
 &\quad - \frac{K}{2}(\cos \beta h + 1)\psi_0 + \frac{K}{h}(\sin \alpha h)\omega_0.
 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \psi_0'' = & \frac{K}{\rho_2 h} (\sin \alpha h) \omega_0 + \frac{2D}{\rho_2 h^2} (\cos \alpha h - 1) \psi_0 + \frac{2D}{\rho_2 h^2} \left( \frac{1 - \mu}{2} \right) (\cos \beta h - 1) \psi_0 \\ & - \frac{D}{\rho_2 h^2} \left( \frac{1 + \mu}{2} \right) \left( \sin(\alpha h) \sin(\beta h) \right) \varphi_0 - \frac{K}{2\rho_2} (\cos \alpha h + \cos \beta h + 2) \psi_0. \end{aligned}$$

Considerando  $K = kG\varepsilon$ ,  $D = E\varepsilon^3/12(1 - \mu^2)$ ,  $\rho_2 = \rho\varepsilon^3/12$ ,  $c_s^2 = kG/\rho$ ,  $c^2 = E/\rho(1 - \mu^2)$  e  $h = \Delta x = \Delta y$ , segue que

$$\begin{aligned} \psi_0'' = & \frac{12c_s^2}{\varepsilon^2} (\sin \alpha h) \frac{\omega_0}{h} + \frac{2c^2}{h^2} (\cos \alpha h - 1) \psi_0 + \frac{2c^2}{h^2} \left( \frac{1 - \mu}{2} \right) (\cos \beta h - 1) \psi_0 \\ & - \frac{c^2}{h^2} \left( \frac{1 + \mu}{2} \right) \left( \sin(\alpha h) \sin(\beta h) \right) \varphi_0 - \frac{6c_s^2}{\varepsilon^2} (\cos \alpha h + \cos \beta h + 2) \psi_0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Em procedimento análogo, efetuamos a substituição das soluções (4.23) a (4.25) na equação (4.14), obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_0'' = & 12 \frac{c_s^2}{\varepsilon^2} (\sin \beta h) \frac{\omega_0}{h} + 2 \frac{c^2}{h^2} (\cos \beta h - 1) \varphi_0 + 2 \frac{c^2}{h^2} \left( \frac{1 - \mu}{2} \right) (\cos \alpha h - 1) \varphi_0 \\ & - \frac{c^2}{h^2} \left( \frac{1 + \mu}{2} \right) (\sin \alpha h \sin \beta h) \psi_0 - 6 \frac{c_s^2}{\varepsilon^2} (\cos \alpha h + \cos \beta h + 2) \varphi_0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Seguindo o procedimento do Capítulo 2, reescrevemos as equações (4.26) a (4.28) obtidas, definindo o tempo em função da condição CFL, conforme as seguintes definições

$$v(\tau) = \frac{\omega_0(t)}{h}, \quad u(\tau) = \psi_0(t), \quad z(\tau) = \varphi_0(t), \quad t = \frac{\tau h}{c}, \quad \Delta t = \frac{\Delta \tau h}{c},$$

de onde obtemos

$$v''(\tau) = \frac{\omega_0''(t)h}{c^2}, \quad u''(\tau) = \frac{\psi_0''(t)h^2}{c^2}, \quad z''(\tau) = \frac{\varphi_0''(t)h^2}{c^2}.$$

Multiplicamos  $h/c^2$  pela equação (4.26) e  $h^2/c^2$  pelas equações (4.27) e (4.28), obtemos

$$\begin{aligned} \omega_0'' \frac{h}{c^2} = & \frac{2c_s^2}{c^2} (\cos \alpha h + \cos \beta h - 2) \frac{\omega_0}{h} + \frac{c_s^2}{c^2} (\sin \alpha h) \psi_0 + \frac{c_s^2}{c^2} (\sin \beta h) \varphi_0, \\ \psi_0'' \frac{h^2}{c^2} = & \frac{12c_s^2 h^2}{c^2 \varepsilon^2} (\sin \alpha h) \frac{\omega_0}{h} + \left[ 2(\cos \alpha h - 1) + 2 \left( \frac{1 - \mu}{2} \right) (\cos \beta h - 1) \right. \\ & \left. - \frac{6c_s^2 h^2}{c^2 \varepsilon^2} (\cos \alpha h + \cos \beta h + 2) \right] \psi_0 - \left( \frac{1 + \mu}{2} \right) \left( \sin(\alpha h) \sin(\beta h) \right) \varphi_0, \\ \varphi_0'' \frac{h^2}{c^2} = & \frac{12c_s^2 h^2}{c^2 \varepsilon^2} (\sin(\beta h)) \frac{\omega_0}{h} - \left( \frac{1 + \mu}{2} \right) \left( \sin(\alpha h) \sin(\beta h) \right) \psi_0 + \left[ 2(\cos \beta h - 1) \right. \\ & \left. + 2 \left( \frac{1 - \mu}{2} \right) (\cos \alpha h - 1) - \frac{6c_s^2 h^2}{c^2 \varepsilon^2} (\cos \alpha h + \cos \beta h + 2) \right] \varphi_0. \end{aligned}$$

De forma simplificada, considerando os fatores  $R_\beta$  e  $R_\theta$ , escrevemos

$$v''(\tau) = \gamma_1 v(\tau) + \gamma_2 u(\tau) + \gamma_3 z(\tau), \quad (4.29)$$

$$u''(\tau) = \mu_1 v(\tau) + \mu_2 u(\tau) + \mu_3 z(\tau), \quad (4.30)$$

$$z''(\tau) = \eta_1 v(\tau) + \eta_2 u(\tau) + \eta_3 z(\tau), \quad (4.31)$$

onde

$$\gamma_1 = 2 \left( \frac{c_s}{c} \right)^2 (\cos \alpha h + \cos \beta h - 2),$$

$$\gamma_2 = \left( \frac{c_s}{c} \right)^2 (\sin \alpha h),$$

$$\gamma_3 = \left( \frac{c_s}{c} \right)^2 (\sin \beta h),$$

$$\mu_1 = \frac{12}{R_\beta} \left( \frac{c_s}{c} \right)^2 \left( \frac{h}{\varepsilon} \right)^2 (\sin \alpha h),$$

$$\mu_2 = \frac{1}{R_\beta} \left( 2(\cos \alpha h - 1) + 2 \left( \frac{1 - \mu}{2} \right) (\cos \beta h - 1) - 6 \left( \frac{c_s}{c} \right)^2 \left( \frac{h}{\varepsilon} \right)^2 (\cos \alpha h + \cos \beta h + 2) \right),$$

$$\mu_3 = -\frac{1}{R_\beta} \left( \frac{1 + \mu}{2} \right) (\sin(\alpha h) \sin(\beta h)),$$

$$\eta_1 = \frac{12}{R_\theta} \left( \frac{c_s}{c} \right)^2 \left( \frac{h}{\varepsilon} \right)^2 (\sin \beta h),$$

$$\eta_2 = -\frac{1}{R_\theta} \left( \frac{1 + \mu}{2} \right) (\sin(\alpha h) \sin(\beta h)),$$

$$\eta_3 = \frac{1}{R_\theta} \left( 2(\cos \beta h - 1) + 2 \left( \frac{1 - \mu}{2} \right) (\cos \alpha h - 1) - 6 \left( \frac{c_s}{c} \right)^2 \left( \frac{h}{\varepsilon} \right)^2 (\cos \alpha h + \cos \beta h + 2) \right),$$

em que

$$R_\beta = 1 + 12\beta \left( \frac{c_s}{c} \right)^2 \left( \frac{h}{\varepsilon} \right)^2,$$

$$R_\theta = 1 + 12\theta \left( \frac{c_s}{c} \right)^2 \left( \frac{h}{\varepsilon} \right)^2.$$

## 4.6 Implementação do método explícito

Agora, semelhante ao método usado por Wriqth [23] para as equações de Timoshenko, temos que uma maneira de implementar o método explícito de integração no tempo é calcular os deslocamentos a partir das velocidades, as acelerações a partir das equações (4.29) a (4.31) e depois as velocidades a partir das acelerações, conforme segue.

Façamos  $\Delta\tau = \tau_{n+1} - \tau_n$  e calculamos:

1) os deslocamentos a partir das velocidades;

$$v_{n+1} = v_n + \Delta\tau v'_n, \quad (4.32)$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta\tau u'_n, \quad (4.33)$$

$$z_{n+1} = z_n + \Delta\tau z'_n, \quad (4.34)$$

onde temos  $v, u, z$ , são os deslocamentos e  $v', u', z'$  são as velocidades.

2) as acelerações a partir das equações (4.29) a (4.31);

$$v''_{n+1} = \gamma_1 v_{n+1} + \gamma_2 u_{n+1} + \gamma_3 z_{n+1},$$

$$u''_{n+1} = \mu_1 v_{n+1} + \mu_2 u_{n+1} + \mu_3 z_{n+1},$$

$$z''_{n+1} = \eta_1 v_{n+1} + \eta_2 u_{n+1} + \eta_3 z_{n+1}.$$

3) as velocidades a partir das acelerações;

$$v'_{n+1} = v'_n + \Delta\tau v''_{n+1},$$

$$u'_{n+1} = u'_n + \Delta\tau u''_{n+1},$$

$$z'_{n+1} = z'_n + \Delta\tau z''_{n+1},$$

em que  $v', u', z'$  são as velocidades e  $v'', u'', z''$  são as acelerações.

Segue que

$$v'_{n+1} = v'_n + \Delta\tau v''_{n+1},$$

$$v'_{n+1} = v'_n + \Delta\tau[\gamma_1 v_{n+1} + \gamma_2 u_{n+1} + \gamma_3 z_{n+1}],$$

$$v'_{n+1} = v'_n + \Delta\tau[\gamma_1(v_n + \Delta\tau v'_n) + \gamma_2(u_n + \Delta\tau u'_n) + \gamma_3(z_n + \Delta\tau z'_n)],$$

$$v'_{n+1} = \gamma_1 \Delta\tau v_n + (1 + \gamma_1 \Delta\tau^2)v'_n + \gamma_2 \Delta\tau u_n + \gamma_2 \Delta\tau^2 u'_n + \gamma_3 \Delta\tau z_n + \gamma_3 \Delta\tau^2 z'_n. \quad (4.35)$$

Analogamente, obtemos

$$u'_{n+1} = \mu_1 \Delta\tau v_n + \mu_1 \Delta\tau^2 v'_n + \mu_2 \Delta\tau u_n + (1 + \mu_2 \Delta\tau^2)u'_n + \mu_3 \Delta\tau z_n + \mu_3 \Delta\tau^2 z'_n \quad (4.36)$$

$$z'_{n+1} = \eta_1 \Delta\tau v_n + \eta_1 \Delta\tau^2 v'_n + \eta_2 \Delta\tau u_n + \eta_2 \Delta\tau^2 u'_n + \eta_3 \Delta\tau z_n + (1 + \eta_3 \Delta\tau^2)z'_n. \quad (4.37)$$

A partir das equações (4.32) a (4.37) consideramos  $X_n = (v_n, v'_n, u_n, u'_n, z_n, z'_n)$  e es-

crevemos na forma matricial  $X_{n+1} = BX_n$ , isto é,

$$\begin{bmatrix} v_{n+1} \\ v'_{n+1} \\ u_{n+1} \\ u'_{n+1} \\ z_{n+1} \\ z'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1\Delta\tau & 1 + \gamma_1\Delta\tau^2 & \gamma_2\Delta\tau & \gamma_2\Delta\tau^2 & \gamma_3\Delta\tau & \gamma_3\Delta\tau^2 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta\tau & 0 & 0 \\ \mu_1\Delta\tau & \mu_1\Delta\tau^2 & \mu_2\Delta\tau & 1 + \mu_2\Delta\tau^2 & \mu_3\Delta\tau & \mu_3\Delta\tau^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta\tau \\ \eta_1\Delta\tau & \eta_1\Delta\tau^2 & \eta_2\Delta\tau & \eta_2\Delta\tau^2 & \eta_3\Delta\tau & 1 + \eta_3\Delta\tau^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_n \\ v'_n \\ u_n \\ u'_n \\ z_n \\ z'_n \end{bmatrix}$$

onde  $B$  é a matriz dos coeficientes.

Seja  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, 6$  os autovalores de  $B$ . Em terminologia de métodos numéricos,  $B$  é a matriz de amplificação do método explícito aplicado as equações (4.12) a (4.14) e o máximo de  $|\lambda_j|$  para  $j = 1, \dots, 6$  é chamado raio espectral de  $B$ . Além disso, sabe-se que uma condição necessária para a estabilidade numérica é o raio espectral menor do que ou igual a um, isto é,  $|\lambda_j| \leq 1$ . Se o raio espectral de  $B$  for maior do que um, então os erros numéricos crescem exponencialmente e o método é instável.

Em seguida, foram realizados experimentos numéricos para encontrar um limite em  $\beta$  e  $\theta$ , para os quais o raio espectral seja menor do que ou igual a um quando  $\Delta\tau \leq 1$ , o que corresponde a condição CFL. Esta pesquisa mostrou que  $\beta \geq 1/2$  e  $\theta \geq 1/2$  são necessários para estruturas finas e longos comprimentos de onda, pois neste caso, o critério de estabilidade depende da espessura  $\varepsilon$ .

A instabilidade observada vem da análise do raio espectral da matriz de amplificação por dois intervalos de tempo consecutivos,  $\overline{B} = B(\Delta\tau)B(\Delta\bar{\tau})$ , onde  $B(\Delta\tau)$  denota a matriz  $B$  calculada no tempo  $\Delta\tau$  e  $B(\Delta\bar{\tau})$  denota  $B$  calculada no tempo  $\Delta\bar{\tau} = 1$ . Seja  $S$  o raio espectral de  $\overline{B}$ , vemos que as figuras abaixo mostram o plano  $S \times \Delta\tau$  com  $\beta, \theta \in \{0, 0.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.9, 0.95, 1\}$ . Para  $\beta = \theta = 0.5$  o gráfico mostra  $S = 1$  para  $\Delta\tau$  próximo de um, assim o método é estável para esse valor de  $\beta$  se os passos de tempo não se alteram radicalmente, no entanto, para  $\Delta\tau < 0.66$ , a figura mostra  $S > 1$ , o que explica a instabilidade observada usando  $\beta = \theta = 0.5$  quando o passo de tempo alterna de tamanho por um fator 2. Para  $\beta = \theta = 0.6, 0.7, 0.9, 0.95$ , as figuras mostram que o método possui regiões de instabilidade para esses valores de  $\beta$ , mas eles também ilustram que, quando  $\beta$  e  $\theta$  aumentam, a região de instabilidade encolhe e seu centro se move em direção a  $\Delta\tau = 1$ . Para  $\beta \geq 1$  e  $\theta \geq 1$ , encontramos  $S = 1$  para qualquer combinação de  $\Delta\tau \leq 1$  e  $\Delta\bar{\tau} \leq 1$ . Em outras palavras,  $\beta$  e  $\theta$  maiores do que um são necessários para evitar instabilidades numéricas causadas por intervalos de tempo que se alternam em tamanho. claramente, para  $0 \leq \beta, \theta \leq 0.5$  o raio espectral de  $B$  é maior do que um e os erros numéricos crescem exponencialmente, portanto, o método é instável.

Note que para alcançar a estabilidade, é necessário atribuir o fator de correção nas duas equações de rotação, o que difere do trabalho do Almeida&Rivera [2], para o problema de Bresse, onde o fator  $R_\theta$  não é relevante. Vemos por exemplo, a Figura 4.11 onde  $\beta = 1$  e

$\theta = 0$ , o gráfico é semelhante ao da Figura 4.2, onde os erros crescem exponencialmente. Observamos que a partir que  $\beta$  e  $\theta$  assumem valores iguais a 1, os valores dos números de ondas e  $h$  não alteram a estabilidade.

Em nossos experimentos numéricos, usamos  $E = 21 \cdot 10^{12} N/m^2$ ,  $\rho = 7850 kg/m^3$ ,  $k = 5/6$ ,  $\mu = 0,29$ .

Agora seguiremos com os gráficos:

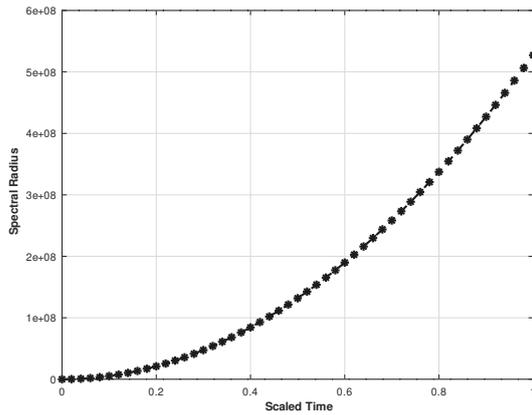


Figura 4.2:  $\beta = 0.0$  e  $\theta = 0.0$

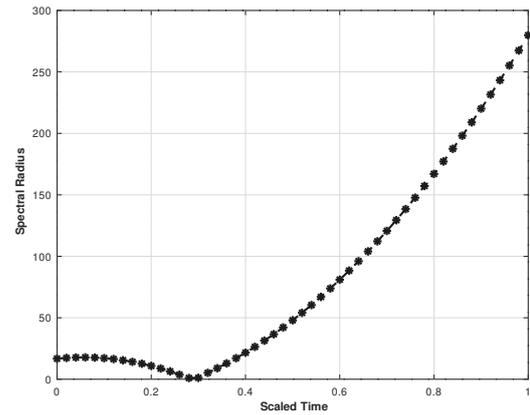


Figura 4.3:  $\beta = 0.1$  e  $\theta = 0.1$

Pela Figura 4.2, observamos que os erros na aproximação numérica aumentam de forma exponencial quando  $\beta = 0$  e  $\theta = 0$ , para esses valores de  $\beta$  e  $\theta$ , obtemos  $R_\beta = R_\theta = 1$  que não alteram o parâmetro da inércia. Isso mostra, conforme Krieg [10], que os erros aumentam se não houver aumento da inércia de rotação. Na Figura 4.3, com um pequeno incremento na inércia rotatória, vemos que a região de instabilidade começa diminuir.

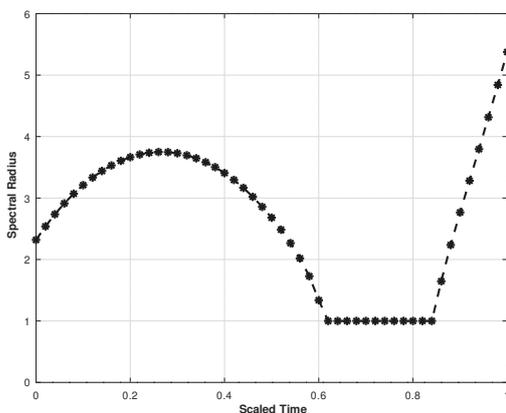


Figura 4.4:  $\beta = 0.4$  e  $\theta = 0.4$

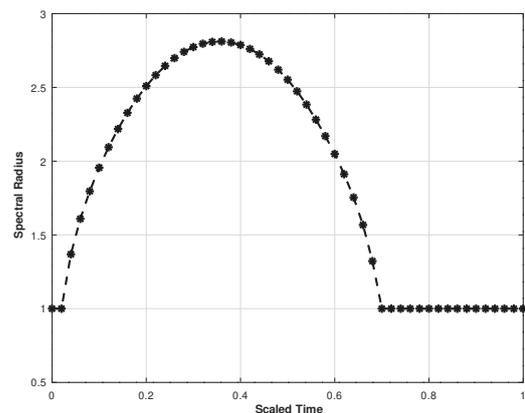


Figura 4.5:  $\beta = 0.5$  e  $\theta = 0.5$

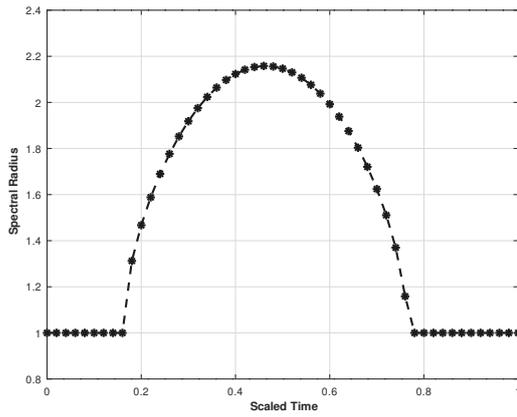


Figura 4.6:  $\beta = 0.6$  e  $\theta = 0.6$

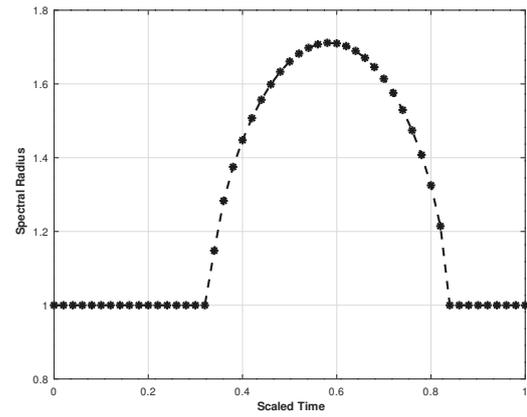


Figura 4.7:  $\beta = 0.7$  e  $\theta = 0.7$

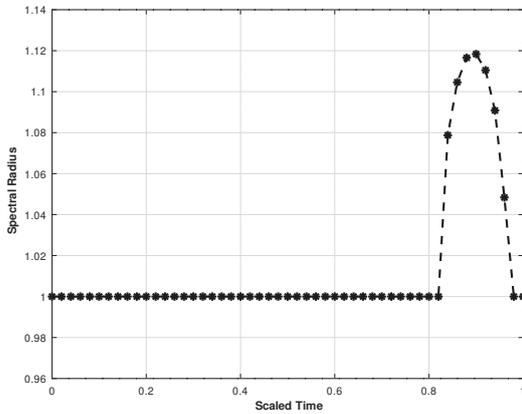


Figura 4.8:  $\beta = 0.9$  e  $\theta = 0.9$

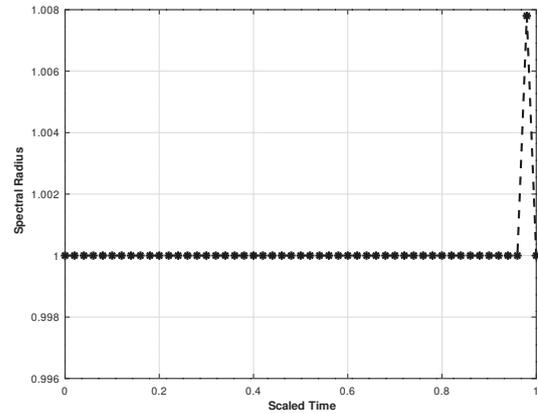


Figura 4.9:  $\beta = 0.95$  e  $\theta = 0.95$

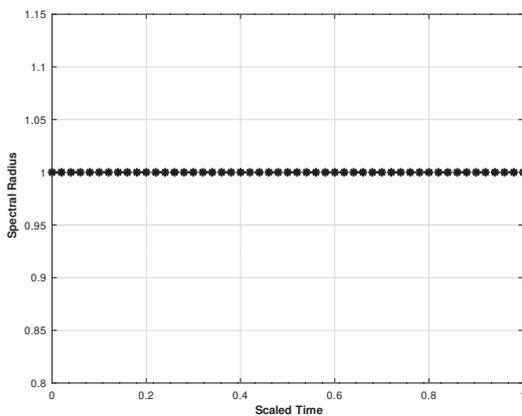


Figura 4.10:  $\beta = 1$  e  $\theta = 1$

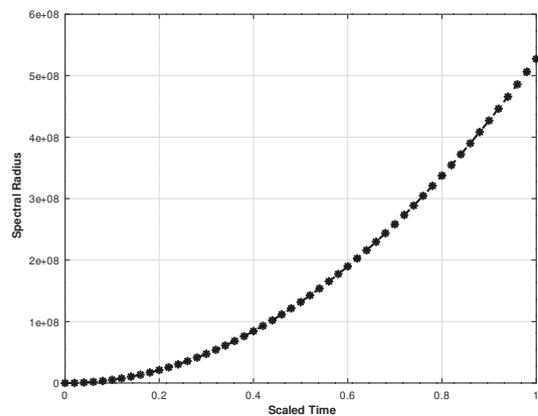


Figura 4.11:  $\beta = 1$  e  $\theta = 0$

A seguir construímos os gráficos em três dimensões, considerando as variáveis raio espectral, tempo e  $\beta$ . O valor de  $\beta$  está variando entre 0.5 e 1, para esses valores construímos

as figuras abaixo para  $\theta = 0, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9, 1$ . Notamos que, para  $\theta = 0$  os erros crescem igualmente, qualquer que seja o valor de  $\beta$ , isso nos mostra que o fator  $R_\theta$  é indispensável para se obter a estabilidade. Para  $\theta = 0.4$  observamos que a região de instabilidade mantém-se quase constante em todos os valores de  $\beta$ , esta observação também vale para  $\theta = 0.5$ . Na Figura 4.15, onde  $\theta = 0.7$  vemos que a região de instabilidade decresce até  $\beta \approx 0.8$ , a partir de então se mantém constante. Semelhantemente na Figura 4.16, onde o decréscimo ocorre até  $\beta \approx 0.9$ . Finalmente, na Figura 4.17, onde  $\theta = 1$ , a região de instabilidade decresce até  $\beta = 1$ , a partir do qual o método torna-se estável. Notamos que, nesta figura temos todos os gráficos das Figuras 4.5 a 4.10.

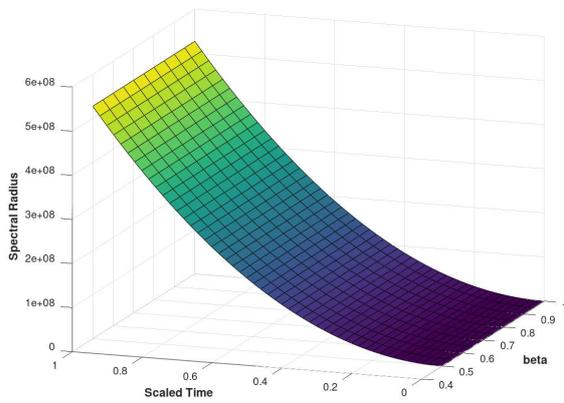


Figura 4.12:  $\theta = 0$

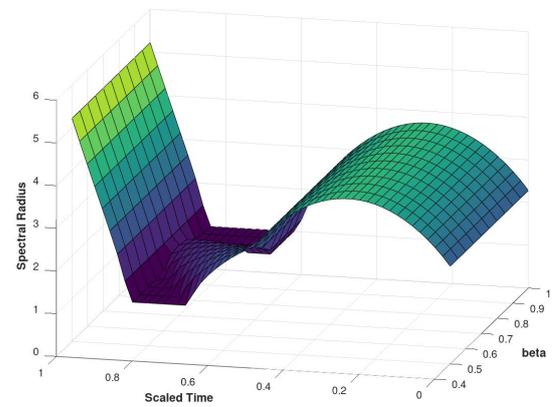


Figura 4.13:  $\theta = 0.4$

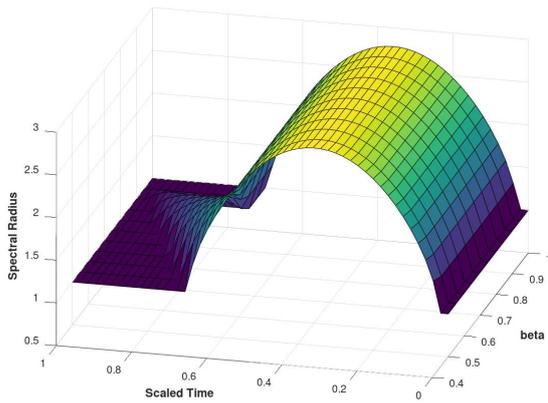


Figura 4.14:  $\theta = 0.5$

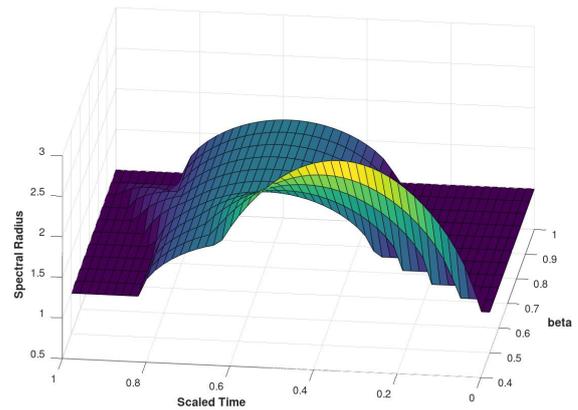


Figura 4.15:  $\theta = 0.7$

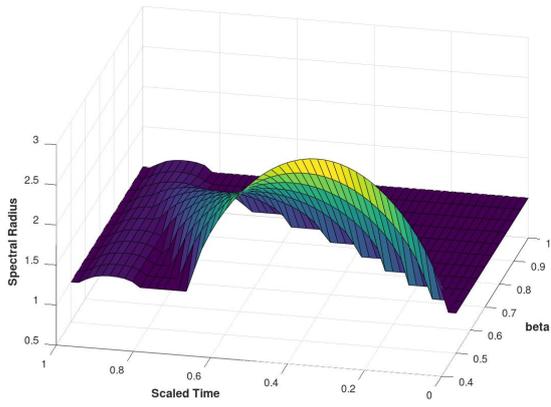


Figura 4.16:  $\theta = 0.9$

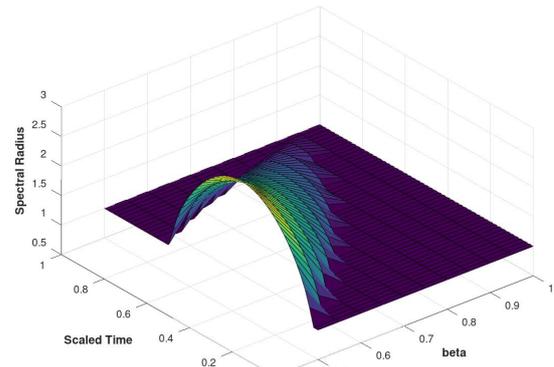


Figura 4.17:  $\theta = 1$

# Conclusão

Considerando a discretização pelo método explícito de integração no tempo combinado com o aumento da inércia rotatória, mostramos a estabilidade desse método para o modelo de placas de Mindlin-Timoshenko. O aumento da inércia deu-se através da inclusão dos termos de correção  $R_\beta$  e  $R_\theta$  desenvolvidos por Wright [22]. Com esses termos observamos que o método começa estabilizar a partir dos valores  $\beta = \theta = 0.5$ , semelhante ao trabalho do Wright [23] para o modelo unidimensional de Timoshenko com uma equação de rotação. Vimos que o fator  $R_\theta$  é importante para o sistema de Mindlin-Timoshenko, diferente do trabalho de Dilberto&Rivera [2] para o sistema de Bresse, onde foi considerado  $\theta = 0$ , pois o fator  $R_\theta$  não apresentou influência na correção da estabilidade.

Notamos que o critério de estabilidade para Mindlin-Timoshenko é igual ao critério para o modelo unidimensional de Timoshenko. Em nossos testes observamos que, para  $\beta = \theta = 0$ , isto é, sem o acréscimo da inércia de rotação, o método não é estável fora do critério 4.21 e sob a condição CFL.

Os resultados obtidos mostram a importância do uso da inércia rotatória para correção de instabilidades numéricas, o que está de acordo com os trabalhos de Krieg, Belyschko e Mindle e Wright.

# Referências Bibliográficas

- [1] D. S. Almeida Junior, Estabilidade Assintótica e Numérica de Sistemas Dissipativos de Vigas de Timoshenko e Vigas de Bresse, Lab. Nac. Comp. Científica, 2009
- [2] D. S. Almeida Junior, J. E. M. Rivera, Stability Criterion to Explicit Finite Difference Applied to the Bresse System, Afrika Matematika, Springer, 2014
- [3] T. Belytschko, W. L. Mindle, Flexural Wave Propagation Behavior of Lumped mass Approximation, Computers Structures, 12, 805-812, 1980
- [4] A. D. S. Campelo, Estabilidade Assintótica e Numérica de Sistemas Fracamente Dissipativos de Mindlin-Timoshenko, UFPA, 2014
- [5] J. A. Cuminato, Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas, 2006
- [6] C. Cunha, Métodos Numéricos para as Engenharias e Ciências Aplicadas, Editora da UNICAMP, 1993.
- [7] B. Downs, Transverse Vibration of a Uniform simply Supported Timoshenko Beam Without Transverse Deflection, J. Appl. Mechanics, 43, 671-674, 1976
- [8] A. O. Fortuna, Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações, Editora da USP, São Paulo, 2000
- [9] K. F. Graff, Wave Motion in Elastic Solids, Dover Publications, New York, 1975
- [10] R. D. Krieg, On the behaviour of a numerical approximation to the rotatory inertia and transverse shear plate, Journal of Applied Mechanics, 977-982, 1973
- [11] J. E. Lagnese, Boundary Stabilization of Thin Plates, Siam, Philadelphia, 1989
- [12] R. D. Mindlin, Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, J. Appl. Mechanics, 18, 31-38, 1951
- [13] K. W. Morton, D. F. Mayers, Numerical Solution of Partial Differential Equations, second edition, Cambridge University Press, 2005

- [14] M. Pokojovy, Zur Theorie Warmeleitender Reissner-Mindlin-Platten, Master's Thesis, Universitat Konstanz, Konstanz, 2011
- [15] H. Reismann, Elastic Plates: Theory and application, 1998
- [16] H. D. F. Sare, On the Stability of Mindlin-Timoshenko Plates, Quarterly of Applied Mathematics, 67, 249-263, 2009
- [17] G. D. Smith, Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, 1985
- [18] J. C. Strikwerda, Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, Second Edition, SIAM, 2004
- [19] S. P. Timoshenko, On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars, Philos. Mag, 6, 744-746, 1921
- [20] J. W. Thomas, Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Texts in Applied Mathematics, 22, Springer, 1995
- [21] L. N. Trefethen, Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, Cornell University, NY, 1996
- [22] J. P. Wright, A mixed time integration method for Timoshenko and Mindlin type elements, Commun. Appl. Numer. Methods, 3, 181-185, 1987
- [23] J. P. Wright, Numerical stability of a variable time step explicit method for Timoshenko and Mindlin type structures, Commun. Numer. Methods Engineering, 14, 81-86, 1998