UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÃO DA ONDA EM MALHA DESLOCADA

Thiago da Silva Laurindo

Belém-PA

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÃO DA ONDA EM MALHA DESLOCADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós graduação em Matemática e Estatística como parte dos pré requisitos para obtenção do grau Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Thiago da Silva Laurindo
Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Belém-PA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L384a Laurindo, Thiago da Silva

Análise de Estabilidade de Métodos Numéricos para Equação da Onda em Malha Deslocada / Thiago da Silva Laurindo. — 2018

61 f.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística (PPGME), Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

1. Energia. 2. Equação da onda. 3. Malha deslocada. 4. Diferenças finitas. 5. Conservação e positividade. I. Júnior, Dilberto da Silva Almeida , *orient.* II. Título

---

CDD 518

ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÃO DA ONDA EM MALHA DESLOCADA

Thiago da Silva Laurindo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós graduação em Matemática e Estatística como parte dos pré requisitos para obtenção do grau Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

RESULTADO: Aprovado

Data de Defesa: 22 de agosto de 2018

Banca Examinadora

Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior - PDM/UFPA

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos - PDM/UFPA

Prof. Dr.Anderson David de Souza Campelo - PPGME/UFPA

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro - PROFMAT/Campus Abaetetuba

Resumo

ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÃO DA ONDA EM MALHA DESLOCADA

Thiago da Silva Laurindo

Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará (PPGME-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

No presente trabalho investigamos as propriedades da energia para um modelo de equação da onda com coeficiente dependente do tempo $d(t) \geq 0$, discretizado por diferenças finitas em malhas deslocadas (*staggered greed*). Para a análise pretendida, abordamos os esquemas numéricos semi e totalmente discretizados em diferenças finitas, devido à presença do coeficiente dependente do tempo. Nossos resultados principais fazem referência sobre a conservação e positividade da energia do problema.

Palavras-chave: Energia; Equação da onda; Malha deslocada; Diferenças finitas; Conservação e positividade.

Belém-Pará

2018

Abstract

STABILITY ANALYSIS OF NUMERICAL METHODS FOR WAVE EQUATION IN STAGGERED GREED

Thiago da Silva Laurindo

Advisor: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Abstract of Master's Thesis submitted to the Postgraduate Program in Mathematics and Statistics, Federal University of Pará (UFPA-PPGME) as part of the requirements for obtaining a Master's Degree in Mathematics .

In the present work we investigate the energy properties for a time-dependent coefficient model of the wave $d(t) \geq 0$, discretized by finite differences in displaced meshes (*staggered greed*). For the intended analysis, we approached numerical schemes semi and totally discretized in finite differences, due to the presence of the coefficient dependent on the time. Our main findings refer to the conservation and positivity of the problem energy.

Keywords: Energy; Wave equation; Staggered greed; Finite differences; Conservation and positivity.

Belém-Pará

2018

"Dedico a meus pais

Antonio Carlos e Maria Lucia "

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original ".

(Albert Einstein)

Agradecimentos

- Agradeço a Deus, pai todo poderoso, por me conceder o dom da vida e estar sempre em primeiro lugar nos meus pensamentos. Toda gratidão a ti, meu Senhor, por estar me concedendo mais esta grande conquista. Toda glória seja dada a ti, Senhor! Também à Virgem de Nazaré, a quem tanto dirigi minhas orações, pedindo a sua intercessão em cada momento dessa jornada.

- Agradeço aos meus pais, Antonio Carlos de Sousa Laurindo e Maria Lucia da Silva Laurindo, que são as maiores riquezas da minha vida e meus verdadeiros anjos da guarda. O meu muito obrigado, por sempre me incentivarem a continuar na busca dos meus objetivos profissionais. Também por sempre acreditarem nas minhas capacidades para a realização de mais esse sonho. Pai! Mãe! Obrigado. Amo vocês para sempre.

- De um modo geral, agradeço a todos os meus familiares, tios(as), primos(as) e amigos que sempre torceram e me incentivaram nessa jornada. De maneira particular, aos meus tios David e Helena Mufarrej por sempre acreditarem e torcerem por mim, além de todo apoio oferecido. Deus abençoe sempre vocês.

- Um agradecimento mais que especial redijo a minha namorada, meu anjo e amor da minha vida, Tayla Fernanda da Silva Costa, por tudo que faz por mim, seu companheirismo, apoio e incentivos dados durante mais essa caminhada. Obrigado, meu amor, você foi e é muito importante para mim. Que Deus nos abençoe sempre. Amo-te!

- Aos meus grandes amigos dessa sonhada jornada: Antônio Carlos, Diego Ferreira, Diogo Moan, Jefferson Macedo e Ronald Barbosa.

- Agradeço a todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística do Campus Universitário de Belém do Pará; especialmente, ao meu orientador, Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Junior, pelas orientações, paciência, disponibilidade e compartilhamento de conhecimentos para o enriquecimento deste trabalho.

- E, finalmente, à Capes pelo apoio financeiro concedido e que foi imprescindível no desenvolvimento desta pesquisa.

Sumário

Introdução

O crescente uso de técnicas numéricas para a solução de problemas complexos, oriundos das engenharias e da física, tem sido cada vez mais beneficiado pelo aumento dos algoritmos computacionais. Devido a isto, a solução de diferentes problemas tem despertado bastante atenção dos analistas numéricos, uma vez que as simulações computacionais das soluções numéricas, acarretam diversas vantagens à indústria, como o baixo custo, resolução de problemas em geometrias complexas, rapidez nos resultados, entre outros. Em problemas da Dinâmica dos Fluidos Computacionais, por exemplo, uma das vantagens citadas por Oishi [8] está na economia de tempo na exploração de fenômenos que ocorrem nos escoamentos dos fluidos. Todavia, sabe-se que as soluções numéricas apresentam também suas desvantagens, dentre as quais podemos mencionar: os custos computacionais, erros de truncamento, instabilidades e imposição apropriadas das condições de contorno.

Em problemas traduzidos em termos de uma equação diferencial parcial (EPD) de evolução, o controle das oscilações é uma das importantes características estudadas pelos pesquisadores. Um exemplo é o controle das vibrações de uma membrana em duas dimensões, cujas oscilações são regidas pela equação da onda. No contexto contínuo, podemos encontrar muitos estudos relacionados às questões de observabilidade e controlabilidade de EDP's, porém, quando transcorremos para os ambientes numéricos discretos, vemos o quanto ainda necessita ser estudado.

Nos estudos de problemas clássicos de vibrações em ondas livres, em ambiente contínuo, podemos fazer referência aos principais resultados já existentes sobre o problema da equação de propagação de ondas unidimensional dada por:

$$\begin{aligned}
\phi_{tt} - \phi_{xx} &= 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) & (1)\\
\phi(0,t) = \phi(L,t) &= 0, \quad 0 < t < T, & (2)\\
\phi(x,0) = \phi_0(x),\ \phi_t(x,0) &= \phi_1(x), \quad 0 < x < L. & (3)
\end{aligned}$$

Em $(1)-(3)$, $\phi = \phi(x,t)$ descreve o deslocamento de uma corda vibrante atuando no intervalo $(0,L)$. Matematicamente o problema é bem posto no espaço de energia $H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$. Mais precisamente, para qualquer $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$ existe uma única solução

$$\phi \in C([0,T]; H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)).$$

A energia das soluções é dada por,

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L (|\phi_t|^2 + |\phi_x|^2)dx, \quad \forall t \geq 0, \tag{4}$$

e ela é conservada ao longo do tempo, isto é,

$$E(t) = E(0),\ \forall t \geq 0.$$

Vejamos a semi-discretização em diferenças finitas para ilustrar o tipo de problema dado em $(1)-(3)$, que foi identificado em detalhes no trabalho de Infante e Zuazua [6], considerado o trabalho pioneiro nesse contexto. Essas semi-discretizações ocorrem no nível da variável espacial x sendo o tempo t contínuo.

Dado $J \in \mathbb{N}$ e $h = \frac{L}{J+1}$ introduzimos a seguinte partição de malha

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_j = jh < ... < x_J < x_{J+1} = L$$

com $j = 0, 1, 2, ..., J+1$. A seguir introduzimos a seguinte semi-discretização em diferenças finitas de $(1)-(3)$

$$\begin{aligned}
\phi_j^{''} - \Delta_h \phi_j &= 0, \quad 0 < t < T,\ j = 1, 2, ..., J & (5)\\
\phi_0(t) = \phi_{J+1}(t) &= 0, \quad \forall t \geq 0, & (6)\\
\phi_j(0) = \phi_j^0,\ \phi_j^{'}(0) &= \phi_j(1), \quad \forall\ 1 \leq j \leq J+1 & (7)
\end{aligned}$$

onde Δ_h é o operador Laplaciano semi-discreto dado por,

$$\Delta_h \phi_j := \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{h^2}.$$

O sistema $(5) - (7)$ é um sistema de J equações diferenciais lineares com J incógnitas $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_J$ uma vez que $\phi_0 = \phi_{J+1} = 0$.

A energia do sistema $(5) - (7)$ é dada por

$$E_h(t) := \frac{h}{2}\sum_{0}^{J} |\phi_j^{'}(t)|^2 + \frac{h}{2}\sum_{0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}(t) - \phi_j(t)}{h}\right)^2$$

que é a discretização da energia continua em (4). Tal energia E_h é conservada ao longo do tempo para toda solução de $(5) - (7)$,

$$E_h(t) = E_h(0),\ \forall t > 0.$$

Negreanu e Zuazua [7] analisam e demonstram com detalhes as propriedades da energia do sistema discreto homogêneo: a conservação da energia e a sua positividade.

O tipo de malha adotado para analisar a estabilidade de soluções de um problema traduzido para o ambiente numérico é um dos fatores fundamentais, pois pode representar grandes vantagens no que diz respeito às simulações numéricas computacionais, como: na economia e uma melhor solução numérica.

Além disso, a escolha da malha associada a esquemas numéricos (explícitos e implícitos) pode provocar alterações inesperadas em sua estabilidade, dependendo das condições de contorno adotadas. Diante disso, abordamos alguns comentários sobre a malha deslocada, da qual faremos uso no decorrer deste trabalho. A malha deslocada (*staggered greed*) introduzida por Harlow e Welch [4] é bastante utilizada no métodos MAC, por possui propriedades de relevância, como: garantir localmente a conservação da massa, energia cinética e movimento, além de ser computacionalmente simples em uma dimensão se comparada a um modelo preditor corretor por exemplo, de acordo com Perot e Nallapati [10]. Não é comum o seu uso para diferenças finitas em uma dimensão mas, quando resolvemos a equação de Navier Stokes por diferenças finitas, usa-se a malha deslocada para evitar oscilações Oishi *et al.* [9]. A seguir, descrevemos alguns resultados observados por Cassio Oishi em suas pesquisas, as quais tomaremos como base para o desenvolvimento da proposta de estudo deste trabalho.

Sendo as equações de Navier - Stokes não lineares, fato que dificulta o estudo da estabilidade numérica, em Oishi *et al.* [9] fez-se o uso da malha deslocada, tomando o modelo simplificado de equação de Navier - Sotkes, abaixo (equação de difusão unidimensional com coeficiente dependente do tempo - com aproximações explícitas e implícitas às condições de contorno de Dirichlet):

$$u_t = d(t)u_{xx} + q(x,t),\ x \in [0,1]\ e\ t \in [0,T], \tag{8}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \in [0,T], \tag{9}$$

$$u(x,0) = u_0,\ x \in [0,1], \tag{10}$$

onde $d(t) \geq 0$ é o coeficiente de difusão, que é uma função dependente do tempo limitada e $q(x,t)$ é o termo de origem. A discretização em diferenças finitas da equação (8) pelo método θ é escrita como

$$u_i^{n+1} - \theta\frac{d^{n+\theta}\delta t}{\delta x^2}(u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}) = u_i^n - (\theta - 1)\frac{d^{n+\theta}\delta t}{\delta x^2}(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) + \delta t q_i^{n+\theta} \tag{11}$$

onde δx e δt são os passos de espaço e tempo, respectivamente, e u_i^n representa uma aproximação para $u(x_i, t_n)$. O coeficiente de difusão $d(t)$ e o termo de origem são calculados de acordo com o valor de θ nos pontos da malha $t_{n+\theta} = (n+\theta)\delta t$. Considerou-se, o método de Crank - Nicolson ($\theta = \frac{1}{2}$), os esquemas implícitos ($\theta = 1$) e explícitos ($\theta = 0$) de Euler.

Aproximando em uma malha deslocada o problema $(8) - (10)$, Oishi discretizou o intervalo $[0,1]$ por um conjunto de pontos igualmente espaçados $x_i = (i - 1/2)\delta x$, com $i = 1, 2, ..., m$ em que $\delta x = 1/m$. A equação (11) é resolvida nos pontos internos $x_1, x_2, ..., x_m$ enquanto x_0 e x_{m+1} são pontos externos considerados fantasmas usados para impor as condições de contorno. Para malha deslocada, os pontos x_0 e x_{m+1} não coincidem com os extremos do intervalo $[0,1]$.

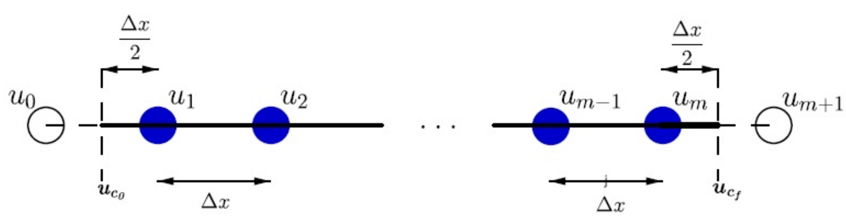

Figura 1: malha deslocada para resolver (8) com $u(0,t) = u(1,t) = u_b$. Em particular, temos $u_b = 0$

Desse modo, é usado a interpolação linear para eliminar os valores desconhecidos de u_0 e u_{m+1} da equação (11). Considerando o polinômio de grau um, nos pontos (x_0, u_0^r) e (x_1, u_1^r) no nível de tempo genérico r, dado por:

$$P_1(x) = \frac{1}{\delta x}((x - x_0)u_1^r - (x - x_1)u_0^r). \tag{12}$$

e usando a condição de contorno $u(0,t)=0$, obte-se

$$P_1(0)=0=\frac{1}{\delta x}\left(\frac{\delta x}{2}(u_1^r+u_0^r)\right)=\frac{1}{2}(u_0^r+u_1^r). \tag{13}$$

A interpolação em $x=1$ é análoga, e resulta na equação

$$P_1(1)=0=\frac{1}{2}(u_{m+1}^r+u_m^r). \tag{14}$$

Dái, obtem-se as equações

$$u_1^0=-u_1^r \text{ e } u_{m+1}^r=-u_m^r \tag{15}$$

O estudo considerou os casos em que r toma os valores n ou $n+1$. Ao esquema de Crank - Nicolson com condições de contorno implícitas, usou-se:

$$u_0^{n+1}=-u_1^{n+1},\ u_{m+1}^{n+1}=-u_m^{n+1},\ u_0^n=-u_1^n \quad e \quad u_{m+1}^n=-u_m^n \tag{16}$$

tendo como maneira alternativa de aproximar as condições de contorno pela formulação explícita abaixo;

$$u_0^{n+1}=-u_1^n,\ u_{m+1}^{n+1}=-u_m^n,\ u_0^n=-u_1^n \quad e \quad u_{m+1}^n=-u_m^n. \tag{17}$$

Ao analisar o método de Crank - Nicolson, por ser incondicionalmente instável e de segunda ordem no tempo e no espaço, constatou-se evidências numéricas de que para esse método, quando utilizado para discretizar equações de Navier - Stokes, o mesmo torna-se condicionalmente estável, dependendo da escolha das condições de fronteira. Este inusitado e inesperado resultado foi a grande surpresa encontrada, uma vez que o método de Crank - Nicolson é tido como um esquema numérico estável. Para o esquema de Crank - Nicolson com condições de contorno implícitas o esquema é irrestritamente estável, enquanto que com condições de contorno explícitas torna-se condicionalmente estável. Para os esquemas de Euler, o comportamento é semelhante aos casos com coeficiente constante. Euler implícito com condições de contorno implícitas ou explícitas é irrestritamente estável, já para o Euler explícito com condições explícitas apresenta a restrição de estabilidade usual no passo do tempo.

Tabela 1. Resumo dos resultados

	ODE método		
	Crank-Nicolson	Euler Implícito	Euler Explícito
Condições de contorno			
Explícito	Condicional	Incondicional	Condicional
	$0 < \sigma < 2$		$0 < \sigma < \frac{1}{2}$
Implícito	Incondicional	Incondicional	Not covered

Neste trabalho, objetivamos estudar a influência da malha deslocada aplicada em esquemas numéricos em diferenças finitas, tomando como problema modelo a equação da onda unidimensional com coeficiente dependente do tempo, provando que duas importantes propriedades da estabilidade são mantidas: a energia do sistema é conservada e sua positividade. O sistema hiperbólico de ondas unidimensional, nosso objeto de estudo neste trabalho, é dado por:

$$\begin{aligned} \phi_{tt} - d(t)\phi_{xx} &= 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) & (18)\\ \phi(0,t) = \phi(L,t) &= 0, \quad 0 < t < T, & (19)\\ \phi(x,0) = \phi_0(x),\ \phi_t(x,0) &= \phi_1(x), \quad 0 < x < L. & (20) \end{aligned}$$

onde $d(t) \geq 0$ representa o coeficiente dependente do tempo.

Para o sistema (18) $-$ (20) assumimos o seguinte esquema numérico semi-discreto em diferenças finitas,

$$\begin{aligned} \phi_j^{''} - d(t_n)\Delta_h\phi_j &= 0, \quad 0 < t < T,\ j = 1, 2, ..., J & (21)\\ \phi_0(t) = \phi_{J+1}(t) &= 0, \quad \forall t \geq 0, & (22)\\ \phi_j(0) = \phi_j^0,\ \phi_j^{'}(0) &= \phi_j(1), \quad \forall\ 1 \leq j \leq J+1 & (23) \end{aligned}$$

onde Δ_h é o operador Laplaciano semi-discreto dado por,

$$\Delta_h\phi_j := \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{h^2}.$$

Em Munch [1], é apresentada uma família parametrizada de esquemas em diferenças finitas para a controlabilidade exata da equação da onda 1-d. O acréscimo de termos da ordem h^2, tornam tais esquemas diferentes dos usuais centralizados, (onde h denota o passo de discretização no espaço), por intermédio de uma técnica simples que assegura uma controlabilidade uniforme, baseada na adição ao esquema centrado usual de termos corretores de ordem h^2. Em seu trabalho é exposto uma série de esquemas em diferenças finitas. Daremos ênfase, ao esquema totalmente discreto e implícito (no espaço e tempo), com algumas adaptações, dado por:

Seja $\alpha \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_{\Delta t}\phi_j^n &= \Delta_h\left(\alpha\phi_j^{n+1} + (1-2\alpha)\phi_j^n + \alpha\phi_j^{n-1}\right), \quad j = 1, ..., J \quad n = 0, ..., N && (24)\\
\phi_0(t) &= \phi_{J+1}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0, && (25)\\
\phi_j(0) &= \phi_j^0, \ (\phi_j^1 - \phi_j^{-1})/2/\Delta t = \phi_{j,1}, \quad j = 0, ..., J+1 && (26)
\end{aligned}$$

onde ϕ_j^n denota a aproximação de ϕ para o ponto x_j no tempo $n\Delta t$, Δt é o passo de tempo tal que $\Delta t = 1/(N+1)$, e

$$\Delta_{\Delta t}\phi_j^n := \frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{\Delta t^2} \quad e \quad \Delta_h\phi_j^n := \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} \tag{27}$$

O esquema $(24)-(26)$ possui uma energia E_n definida, onde as propriedades de conservação da mesma é satisfeita $\forall n = 0, ..., N$, assim como sua positividade.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma.

A presente introdução. Em seguida, motivados pelos resultados de [9] brevemente apresentados na introdução, no capítulo 1 exibimos uma leitura do estudo da estabilidade para os métodos de Crank - Nicolson e Euler associados ao sistema $(8)-(10)$. No capítulo 2, abordamos o estudo de métodos explícitos, onde definimos a energia e verificamos importantes propriedades (conservação e positividade) da energia totalmente discreta do sistema $(21)-(23)$ com condições de contorno de Dirichlet (seguindo os passos realizados em [7]), e na sequência tratamos do comportamento do mesmo sistema, aplicando condições de contorno adequadas, (conforme [9]) em malha do tipo descolada. No capítulo 3, apresentamos uma análise das propriedades da energia, análoga a realizada no capítulo 2, tendo como base o sistema $(24)-(26)$. Por fim, expomos as conclusões e perspectivas futuras.

Capítulo 1

Estabilidade de Métodos Numéricos

Neste capítulo, apresentamos os resultados diagnosticados por Oishi *et al.*[9], no que diz respeito ao estudo da estabilidade dos métodos numéricos de Crank-Nicolson e Euler referente ao problema dependente do tempo $(8)-(10)$. Além disso, exibimos em detalhes a prova de dois dos métodos analisados em seu trabalho.

1.1 Análise do Método de Crank - Nicolson e Euler

Para o estudo da estabilidade dos esquemas de Crank - Nicolson e Euler aplicados ao problema dependente do tempo $(8)-(10)$, usou-se a forma matricial do método numérico. Tal análise de estabilidade para problemas desse tipo torna-se mais difícil, uma vez que, a matriz de coeficientes não será constante. Nesta seção, enunciamos alguns resultados sobre o estudo da estabilidade para várias combinações de métodos para resolver as equações diferenciais (Crank - Nicolson, métodos explícitos e implícitos de Euler) e aproximações explícitas e implícitas para as condições de contorno, os quais a prova com detalhes, pode ser encontrada em [9]. Para a prova dos resultados sobre a estabilidade do esquema de Crank - Nicolson em uma malha deslocada para a equação de difusão com coeficiente dependente do tempo, considerou-se as aproximações implícitas e explícitas para as condições de contorno.

Embora alguns resultados, mantenha o seu comportamento esperado, como (a convergência condicional para Euler explícito e convergência incondicional para Euler implícito com condições de contorno implícitas), o uso de condições de contorno explícitas pode reduzir a estabilidade dos métodos, conforme observado por Oishi *et al.* [9], onde o método de Crank - Nicolson com condições de contorno explícitas tornou-se apenas condicionalmente convergente. Além disso, os resultados para as condições de contorno explícitas são válidas para funções de difusão dependentes do tempo, desde que $\sigma^n = d(t_n)(\delta t)/(\delta x)^2$ tenha variação limitada por γ:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\sigma^{k+1} - \sigma^k| \leq \gamma. \tag{1.1}$$

A condição (1.1) mostra que há uma considerável latitude na mudança de difusão (ou passos-tempo δt).

Na sequência, segue inicialmente a análise em detalhes do estudo da estabilidade do método de Crank - Nicolson com condições de contorno implícitas e explícitas, seguido pelo mesmo estudo para o esquema de Euler implícito e explícito com condições de contorno explícitas.

A forma matricial do método de Crank - Nicolson é:

$$A(\sigma^n)\mathbf{u}^{n+1} = B(\sigma^n)\mathbf{u}^n + \mathbf{c}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{1.2}$$

onde

$$\sigma^n = (d^{n+\frac{1}{2}})\delta t/(\delta x)^2,$$

$A(\sigma^n)$ e $B(\sigma^n)$ são matrizes dependente de σ^n com dimensões $m \times m, \mathbf{u} = (u_1, u_1, ..., u_m)^T$ e $\mathbf{c} = (c_1, c_1, ..., c_m)^T$ são vetores $m \times 1$.

Podemos reescrever (1.2) como

$$\mathbf{u}^{n+1} = M(\sigma^n)\mathbf{u}^n + A^{-1}(\sigma^n)\mathbf{c}^{n+\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

onde $n = 0, ..., indice_{max}$ desde que o problema seja resolvido num intervalo de tempo finito $t \in [0, T]$ com $t_n = n\delta t$ e $T = indice_{max}\delta t$. Da equação (1.3), a matriz de iteração é dada por

$$M(\sigma^n) = A^{-1}(\sigma^n)B(\sigma^n). \tag{1.4}$$

Para a definição de estabilidade, adotou-se a seguinte: uma pequena pertubação nos dados iniciais não deve ser amplificada ao longo do processo. Isto é, seja $\tilde{\mathbf{u}}^0 = \mathbf{u}^0 + \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}}^1 &= M(\sigma^1)(\mathbf{u}^0 + \epsilon) + A^{-1}(\sigma^1)\mathbf{c}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^1 + M(\sigma^1)\varepsilon, && (1.5)\\
\tilde{\mathbf{u}}^2 &= M(\sigma^2)(\mathbf{u}^1 + M(\sigma^1)\epsilon) + A^{-1}(\sigma^2)\mathbf{c}^{\frac{3}{2}} = \mathbf{u}^2 + M(\sigma^2)M(\sigma^1)\varepsilon, \\
&\vdots \\
\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} &= \mathbf{u}^{n+1} + M(\sigma^n)M(\sigma^{n-1})...M(\sigma^2)M(\sigma^1)\varepsilon, && (1.6)
\end{aligned}$$

Dessa maneira, é necessário que

$$M(\sigma^n)M(\sigma^{n-1})...M(\sigma^2)M(\sigma^1) \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{1.7}$$

Para provar (1.7) faz-se necessário a realização do estudo dos autovalores da matriz de iteração $M(\sigma^j), j = 1, ..., n$.

Diferentemente do critério usual de Von Neumann (ver em [11]) para estabilidade numérica em diferenças finitas aplicados à EDP's lineares, a abordagem acima se faz necessária em função do coeficiente dependente do tempo na equação (8).

O calculo das fórmulas exatas para os autovalores de certas matrizes tridiagonais foi proposto por Yueh [12], o qual demonstrou o seguinte Teorema.

Teorema 1.1 *Considere a matriz tridiagonal da forma*

$$T = \begin{bmatrix} -\alpha + b & c & 0 & 0 & \cdots \\ a & b & c & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & a & b & c \\ \cdots & 0 & 0 & a & -\beta + b \end{bmatrix}_{m \times m}$$

Os autovalores λ_i^T *de* T *são dados por*

$$\lambda_i^T = \begin{cases} b + 2\sqrt{ac}\cos\left(\dfrac{i\pi}{m+1}\right), & i = 1, \ldots, m, \quad se \quad \alpha = \beta = 0, \\[2ex] b + 2\sqrt{ac}\cos\left(\dfrac{i\pi}{m}\right), & i = 1, \ldots, m, \quad se \quad \alpha = \beta = \sqrt{ac} \neq 0, \\[2ex] b + 2\sqrt{ac}\cos\left(\dfrac{(i-1)\pi}{m}\right), & i = 1, \ldots, m, \quad se \quad \alpha = \beta = -\sqrt{ac} \neq 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Demonstração: Ver [12].

A seguir, apresentamos em detalhes dois dos resultados analisados em [9].

1.1.1 Método de Crank - Nicolson com condições de contorno explícitas

Nesse caso usando as condições de contorno explícitas, as matrizes em (1.2) são

$$A(\sigma^n) = I + \sigma^n \hat{A} \tag{1.9}$$

e

$$B(\sigma^n) = I + \sigma^n \hat{B} \tag{1.10}$$

onde

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}_{m\times m} \tag{1.11}$$

e

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}_{m\times m} \tag{1.12}$$

Para provarmos nosso resultado principal, necessitamos de alguns resultados auxiliares, os quais descrevemos a seguir.

Lema 1.1.1 *A matriz $A(\sigma^n)$ definida em* (1.9) *é simétrica e definida positiva se $\sigma^n > -\frac{1}{2}$.*

Demonstração: Note que a matriz $\hat{A}$ é simétrica e satisfaz as suposições do **Teorema** 1.1; portanto seus autovalores são dados por

$$\lambda_i^{\hat{A}} = 1 + \cos\left(\frac{i\pi}{m+1}\right), i = 1, ..., m, \tag{1.13}$$

e os autovalores de $A(\sigma^n)$ são dados por:

$$\lambda_i^{A(\sigma^n)} = 1 + \sigma^n \lambda_i^{\hat{A}};\ i = 1, ..., m. \tag{1.14}$$

Portanto, a matriz $A(\sigma^n)$ em (1.9) é simétrica e definida positiva se $\sigma^n > -\frac{1}{2}, \forall t > 0$, que é o caso quando $d(t) \geq 0$. □

Lema 1.1.2 *Se* $\sigma^n = 2$ *então* $\lambda = -1$ *é o autovalor mínimo da matriz*

$$M(\sigma^n) = A^{-1}(\sigma^n)B(\sigma^n). \tag{1.15}$$

Demonstração: Note que, por (1.9) e (1.10) teremos $A(\sigma^n) = I + 2\hat{A}$ e $B(\sigma^n) = I + 2\hat{B}$ para $\sigma^n = 2$.

Consequentemente se λ é o autovalor da matriz M em (1.15) com autovetor $\mathbf{v} \neq 0$, então

$$A^{-1}(\sigma^n)B(\sigma^n)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{1.16}$$

Multiplicando $A(\sigma^n)$ em ambos os lados de (1.16), obtemos

$$B(\sigma^n)\mathbf{v} = \lambda A(\sigma^n)\mathbf{v} \tag{1.17}$$

$$(I + 2\hat{B})\mathbf{v} = \lambda(I + 2\hat{A})\mathbf{v}. \tag{1.18}$$

Pela forma das matrizes $\hat{A}$ em (1.11) e $\hat{B}$ em (1.12) obtemos $(I+2\hat{B})\mathbf{e}_1 = -(I+2\hat{A})\mathbf{e}_1$ onde $\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)^T$. Portanto, $\lambda = -1$ é um autovalor de M.

Da mesma forma, provamos que $M\mathbf{e}_m = -\mathbf{e}_m$.

Agora, suponhamos que exista um autovalor $\lambda < -1$, com

$$A^{-1}B\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \;\text{ e }\; \|\mathbf{v}\|_2 = 1. \tag{1.19}$$

As matrizes A e B para $\sigma^n = 2$ são dadas, respectivamente, por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & -1 & 3 & -1 \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{m\times m} \tag{1.20}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & 1 & -1 & 1 \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}_{m\times m} \tag{1.21}$$

De (1.19) podemos escrever

$$\mathbf{v}^T B\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}^T A\mathbf{v}. \tag{1.22}$$

Note que, a partir das matrizes em (1.20) e (1.21) obtemos

$$B = -I + E \quad \text{e} \quad A = I + F \tag{1.23}$$

onde

$$E = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{m\times m} \tag{1.24}$$

e

$$F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{m\times m} . \tag{1.25}$$

Seque de (1.22) e (1.23) que

$$-1 + \mathbf{v}^T E\mathbf{v} = \lambda + \lambda \mathbf{v}^T F\mathbf{v}. \tag{1.26}$$

A matriz F satisfaz as suposições do **Teorema** 1.1, com $\alpha = \beta = 0, a = c = 1$ e $b = 2$. Dessa maneira, seus autovalores podem ser calculados, resultando em $\lambda_i^F = 2 + 2\cos\left(\frac{i\pi}{m+1}\right)$ para $i = 1, ..., m$, isto é, $\lambda_i^F > 0$. Mas, F é simétrica e definida positiva e $\lambda < -1$, podemos escrever

$$-1 + \mathbf{v}^T E\mathbf{v} < -1 - \mathbf{v}^T F\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}^T (E + F)\mathbf{v} < 0. \tag{1.27}$$

Note que

$$E + F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times m} . \tag{1.28}$$

Consequentemente $\mathbf{v}^T(E+F)\mathbf{v} = 2\sum_{i=2}^{m-1} = \mathbf{v}_i^2$ e não pode ser negativo, então não pode existir um autovalor $\lambda < -1$. Portanto, para $\sigma^n = 2$, $\lambda_{min}^M = -1$. □

Para demonstrar o resultado nos autovalores da matriz de iteração para o esquema de Crank - Nicolson com condições de contorno explícitas, precisamos dos resultados que segue abaixo.

Teorema 1.2 *(Rayleigh-Ritz). Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ simétrica, e seja os autovalores de A ordenados como*

$$\lambda_{min}^A = \lambda_1^A \leq \lambda_2^A \leq \ldots \leq \lambda_{m-1}^A \leq \lambda_m^A = \lambda_{max}^A.$$

Então

$$\lambda_1^A \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v} \leq \lambda_m^A \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m,$$

$$\lambda_{min}^A = \lambda_1^A = \min_{v\neq 0} \frac{\boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}} \tag{1.29}$$

$$\lambda_{max}^A = \lambda_m^A = \max_{v\neq 0} \frac{\boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}}. \tag{1.30}$$

Demonstração: Ver [5].

Teorema 1.3 *(Danskin). Suponha que $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, onde $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, Y é um conjunto compacto de um espaço topológico F, e o gradiente $\nabla_x f(x,y)$ existe e é contínuo. Então, a função*

$$\phi(x) = \max_{y\in Y} f(x,y)$$

é contínua e tem derivada direcional em toda direção h dada pela fórmula a seguir

$$D_h\phi(x) = \max_{y\in Y(x)} \nabla_x f(x,y)^T h,$$

onde $Y(x) = \{y \in Y | \phi(x) = f(x,y)\}$ é o conjunto de maximizadores na definição de $\phi(x)$.

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.4 *Os autovalores da matriz $M(\sigma^j)$ em (1.15) para um índice j genérico, satisfaz:*
1.$|\lambda_i^{M(\sigma^j)}| < 1, i = 1,\ldots,m,$ *onde m é a dimensão de $M(\sigma^j)$, se $\sigma^j < 2$;*
2.$|\lambda_i^{M(\sigma^j)}| \geq 1,$ *para alguns i se $\sigma^n \geq 2$, para qualquer j.*

Demonstração: No **Lema** 1.1.2 provamos que $\lambda_i^M = -1$ quando $\sigma^n = 2$. Agora, vamos mostrar que os autovalores $\lambda_{min}^{M(\sigma^j)}$ e $\lambda_{max}^{M(\sigma^j)}$ são funções monotonicamente decrescentes de σ^j. Note que a matriz $M(\sigma^j)$ é semelhante a uma matriz simétrica $\hat{M}(\sigma^j)$. Do **Lema** 1.1.1 temos que $\lambda_i^{A(\sigma^j)} > 0$ para $\sigma^j > -\frac{1}{2}$ e consequentemente a matriz simétrica $A(\sigma^j)$ é definida positiva. Então existe $A^{\frac{1}{2}}(\sigma^j)$ simétrica e definida positiva tal que $A^{\frac{1}{2}}(\sigma^j)A^{\frac{1}{2}}(\sigma^j) = A(\sigma^j)$. Assim

$$A^{\frac{1}{2}}(\sigma^j)M(\sigma^j)A^{-\frac{1}{2}}(\sigma^j) = A^{-\frac{1}{2}}(\sigma^j)B(\sigma^j)A^{-\frac{1}{2}}(\sigma^j) = \hat{M}(\sigma^j), \tag{1.31}$$

que é simétrica e, consequentemente, tem apenas autovalores reais.

Do **Teorema** 1.2, temos

$$\lambda_{min}^{\hat{M}(\sigma^j)} = \min_{\mathbf{v}\neq 0} \frac{\mathbf{v}^T\hat{M}(\sigma^j)\mathbf{v}}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} = \min_{\mathbf{w}\neq 0} \frac{\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{B})\mathbf{w}}{\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{A})\mathbf{w}}, \tag{1.32}$$

usando a transformação linear definida positiva $\mathbf{w} = A^{-\frac{1}{2}}(\sigma^j)\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$.

Agora mostraremos que, $\lambda_{min}^{M(\sigma^j)}$ é uma função monotonicamente decrescente de σ^j, para todo $\sigma^j \geq 0$.

A expressão (1.32) pode ser reescrita do seguinte modo

$$\lambda_{min}^{\hat{M}(\sigma^j)} = \min_{\|\mathbf{w}\|=1} \frac{\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{B})\mathbf{w}}{\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{A})\mathbf{w}}. \tag{1.33}$$

Define-se o conjunto compacto, $C = \{x \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{w}\| = 1\}$ e a função

$$\sigma^j > 0, \mathbf{w} \in C \mapsto g((\sigma^j), \mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{B})\mathbf{w}}{\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{A})\mathbf{w}}.$$

Esta função é contínua e continuamente diferenciável em relação a σ^j, satisfazendo as hipóteses do teorema de Danskin (**Teorema** 1.3). Dessa, maneira pode-se calcular a derivada direcional a direita a partir de

$$\frac{d\lambda_{min}^{\hat{M}(\sigma^j)}}{d(\sigma^j)^+} = \min_{\mathbf{w}\in W(\sigma^j)} \frac{d}{d(\sigma^j)^+} g(\sigma^j, \mathbf{w}),$$

onde $W(\sigma) = \left\{\mathbf{w} \in C/\phi(\sigma^j) = g(\sigma^j, \mathbf{w})\right\}$ é um conjunto compacto.

Calculando a derivada, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d(\sigma^j)^+}g(\sigma^j,\mathbf{w}) &= \frac{d}{d(\sigma^j)}g(\sigma^j,\mathbf{w}) \\
&= \frac{(\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{B})\mathbf{w})'(\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{A})\mathbf{w}) - (\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{B})\mathbf{w})(\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{A})\mathbf{w})'}{[\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{A})\mathbf{w}]^2} \\
&= \frac{(\mathbf{w}^T\hat{B}\mathbf{w})(\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{A})\mathbf{w}) - (\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{B})\mathbf{w})(\mathbf{w}^T\hat{A}\mathbf{w})}{[\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{A})\mathbf{w}]^2} \\
&= \frac{(\mathbf{w}^T\hat{B}\mathbf{w} + \mathbf{w}^T\hat{B}\mathbf{w}\mathbf{w}^T\sigma^j\hat{A}\mathbf{w}) - (\mathbf{w}^T\hat{A}\mathbf{w} + \mathbf{w}^T\sigma^j\hat{B}\mathbf{w}\mathbf{w}^T\hat{A}\mathbf{w})}{[\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{A})\mathbf{w}]^2} \\
&= \frac{\mathbf{w}^T(\hat{B}-\hat{A})\mathbf{w}}{[\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{A})\mathbf{w}]^2}.
\end{aligned}$$

Note que a matriz $(\hat{B}-\hat{A})$ é dada por

$$\hat{B}-\hat{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}_{m\times m} . \tag{1.34}$$

do **Teorema** 1.1, calculamos seus autovalores como

$$\lambda_i^{\hat{B}-\hat{A}} = -2 + 2\cos\left(\frac{i\pi}{m}\right), \quad para \quad i = 1,\ldots,m, \tag{1.35}$$

e então $\mathbf{w}^T(\hat{B}-\hat{A})\mathbf{w} < 0$ para todo $\mathbf{w} \in C$. Em particular, para todo $\mathbf{w} \in W(\sigma^j)$,

$$\frac{d}{d(\sigma^j)^+}g(\sigma^j,\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^T(\hat{B}-\hat{A})\mathbf{w}}{[\mathbf{w}^T(I+\sigma^j\hat{A})\mathbf{w}]^2} < 0,$$

como $I+\sigma^j\hat{A}$ é definida positiva. Desde que $W(\sigma^j)$ é compacto, concluímos que

$$\frac{d\lambda_{min}^{\hat{M}(\sigma^j)}}{d(\sigma^j)^+} < 0.$$

Portanto, usando o fato que $M(\sigma^j)$ e $\hat{M}(\sigma^j)$ são semelhantes, provamos que

$$\frac{d\lambda_{min}^{\hat{M}(\sigma^j)}}{d(\sigma^j)} = \frac{d\lambda_{min}^{M(\sigma^j)}}{d(\sigma^j)} < 0. \tag{1.36}$$

Para o máximo autovalor, aplicamos o mesmo argumento, simplesmente substituindo o mínimo pelo máximo no **Teorema** 1.2 e, então

$$\frac{d\lambda_{max}^{\hat{M}(\sigma^j)}}{d(\sigma^j)} = \frac{d\lambda_{max}^{M(\sigma^j)}}{d(\sigma^j)} < 0, \tag{1.37}$$

isto é, $\lambda_{max}^{M(\sigma^j)}$ também é um função monotonicamente decrescente de σ^j.

Assim sendo, para todo $\sigma^j > 0$, tem-se que $\lambda_{min}^{M(\sigma^j)}$ e $\lambda_{max}^{M(\sigma^j)}$ são funções monotonicamente decrescentes de σ^j.

Agora $\lambda_{min}^{M(0)} = 1$, para $i = 1, \dots, m$, o que significa que $\lambda_{min}^{M(0)} = \lambda_{max}^{M(0)} = 1$. Como $\frac{d\lambda_{max}^{M(\sigma^j)}}{d(\sigma^j)} < 0$, $\lambda_{max}^{M(\sigma^j)}$ é sempre menor que 1 para todos σ^j.

Portanto, para $\sigma^j < 2$ temos $|\lambda_i^{M(\sigma^j)}| < 1, i = 1, \dots, m$, enquanto, $|\lambda_i^{M(\sigma^j)}| \geq 1$, para alguns i se $\sigma^j \in [2, \infty)$. □

Após realizar o estudo dos autovalores de cada matriz de iteração $M(\sigma^j)$, analisaremos sob quais condições pode-se garantir que o produto

$$M(\sigma^n)M(\sigma^{n-1})...M(\sigma^2)M(\sigma^1) \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Teorema 1.5 *Se* $\gamma = \sum_{j=1}^{\infty} |\sigma^{j+1} - \sigma^j| < \infty, 0 \leq \sigma^j \leq 2$ *e há um* $\varepsilon > 0$ *onde* $\varepsilon \leq \sigma^j \leq 2 - \varepsilon$ *para todo* j*, então* $M(\sigma^n)M(\sigma^{n-1}) \dots M(\sigma^2)M(\sigma^1) \to 0$ *com* $n \to \infty$*.*

Demonstração: Note que para o caso do esquema de Crank-Nicolson com condições de contorno explícitas, a partir de (1.11), podemos escrever a matriz $\hat{B}$ da seguinte forma

$$\hat{B} = -\hat{A} - (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_m\mathbf{e}_m^T), \tag{1.38}$$

resultando nas equações (1.9) – (1.10), e para um índice genérico j,

$$M(\sigma^j) = A^{-1}(\sigma^j)B(\sigma^j).$$

Desde que $\hat{A}$ é simétrica, seja Q uma matriz ortogonal tal que $Q^T\hat{A}Q = D$ (D diagonal). Os autovalores de $\hat{A}$ [definidos em (1.11)], estão todos no intervalo $[0, 2]$ como pode ser verificado usando o **Teorema** 1.1. Desta maneira, as entradas na diagonal de D são os autovalores de A, e assim estão no intervalo $[0, 2]$. Então, $Q^T\hat{B}Q = -Q^T\hat{A}Q - (Q^T\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^TQ + Q^T\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m^TQ) = -D - (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_m\mathbf{q}_m^T)$. Note que, tanto $\hat{A}$ quanto $\hat{B}$ são simétricos, de modo que $A(\sigma^j)$ e $B(\sigma^j)$ também são simétricos, embora $M(\sigma^j)$ não seja, a menos que $\sigma^j = 0$.

Note que, agora podemos escrever $M(\sigma^j)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
M(\sigma^j) &= \Big(I + \sigma^j QDQ^T\Big)^{-1}\Big(I - \sigma^j QDQ^T - \sigma^j Q(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_m\mathbf{q}_m^T)Q^T\Big) \\
&= Q\Big(I + \sigma^j D\Big)^{-1}\Big(I - \sigma^j D - \sigma^j \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T - \sigma^j \mathbf{q}_m\mathbf{q}_m^T\Big)Q^T \\
&= Q\Big(I + \sigma^j D\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(I + \sigma^j D\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(I - \sigma^j D - \sigma^j \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T - \sigma^j \mathbf{q}_m\mathbf{q}_m^T\Big) \\
&\quad \times\Big(I + \sigma^j D\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(I + \sigma^j D\Big)^{\frac{1}{2}}Q^T \\
&= Q\Big(I + \sigma^j D\Big)^{-\frac{1}{2}}N(\sigma^j)\Big(I + \sigma^j D\Big)^{\frac{1}{2}}Q^T,
\end{aligned}$$

onde

$$N(\sigma^j) = \Big(I + \sigma^j D\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(I - \sigma^j D - \sigma^j \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T - \sigma^j \mathbf{q}_m\mathbf{q}_m^T\Big)\Big(I + \sigma^j D\Big)^{-\frac{1}{2}}.$$

Assim, $M(\sigma^j)$ é semelhante a $N(\sigma^j)$, e $N(\sigma^j)$ é simétrico, produzindo

$$\rho(M(\sigma^j)) = \rho(N(\sigma^j)) = \|N(\sigma^j)\|_2.$$

Do **Teorema** 1.4 vimos que $\rho(M(\sigma^j)) < 1$ para $0 < \sigma^j < 2$.

Diante disso, podemos usar esses resultados para vincular o produto:

$$\begin{aligned}
& M(\sigma^n)M(\sigma^{n-1})\ldots M(\sigma^2)M(\sigma^1) \\
=\; & Q\Big(I + \sigma^n D\Big)^{-\frac{1}{2}}N(\sigma^n)\Big(I + \sigma^n D\Big)^{\frac{1}{2}}Q^T \\
& Q\Big(I + \sigma^{n-1} D\Big)^{-\frac{1}{2}}N(\sigma^{n-1})\Big(I + \sigma^{n-1} D\Big)^{\frac{1}{2}}Q^T \\
& \vdots \\
& Q\Big(I + \sigma^1 D\Big)^{-\frac{1}{2}}N(\sigma^1)\Big(I + \sigma^1 D\Big)^{\frac{1}{2}}Q^T
\end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
& M(\sigma^n)M(\sigma^{n-1})\ldots M(\sigma^2)M(\sigma^1) \\
=\; & Q\Big(I + \sigma^n D\Big)^{-\frac{1}{2}}N(\sigma^n)\Big(I + \sigma^n D\Big)^{\frac{1}{2}} \\
& \Big(I + \sigma^{n-1} D\Big)^{-\frac{1}{2}}N(\sigma^{n-1})\Big(I + \sigma^{n-1} D\Big)^{\frac{1}{2}} \\
& \vdots \\
& \Big(I + \sigma^1 D\Big)^{-\frac{1}{2}}N(\sigma^1)\Big(I + \sigma^1 D\Big)^{\frac{1}{2}}Q^T
\end{aligned}$$

Então

$$
\begin{aligned}
& \Big\| M(\sigma^n)M(\sigma^{n-1})\dots M(\sigma^2)M(\sigma^1)\Big\|_2 \\
\leq\; & \Big\|\Big(I+\sigma^n D\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big\|_2 \|N(\sigma^n)\|_2 \Big\|\Big(I+\sigma^n D\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(I+\sigma^{n-1} D\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big\|_2 \\
& \|N(\sigma^{n-1})\|_2 \Big\|\Big(I+\sigma^{n-1} D\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(I+\sigma^{n-2} D\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big\|_2 \dots \\
& \|N(\sigma^2)\|_2 \Big\|\Big(I+\sigma^2 D\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(I+\sigma^1 D\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big\|_2 \|N(\sigma^1)\|_2 \Big\|\Big(I+\sigma^1 D\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_2 \\
=\; & \prod_{j=1}^{n}\|N(\sigma^j)\|_2 \prod_{j=1}^{n-1}\Big\|\Big(I+\sigma^{j+1} D\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(I+\sigma^j D\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big\|_2 \\
& \Big\|\Big(I+\sigma^n D\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big\|_2 \Big\|\Big(I+\sigma^1 D\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_2 .
\end{aligned}
$$

O seguinte limite é facilmente obtido

$$
\begin{aligned}
& \Big\|\Big(I+\sigma^{j+1} D\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(I+\sigma^j D\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big\|_2 = \max_{k=1,\dots,m}\left|\frac{1+\lambda_k\sigma^{j+1}}{1+\lambda_k\sigma^j}\right|^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \max_{0\leq\lambda\leq 2}\left|\frac{1+\lambda\sigma^{j+1}}{1+\lambda\sigma^j}\right|^{\frac{1}{2}} = \max\left(1, \left|\frac{1+2\sigma^{j+1}}{1+2\sigma^j}\right|^{\frac{1}{2}}\right) \\
& = \exp\left(\frac{1}{2}\max(0, \log(1+2\sigma^{j+1})-\log(1+2\sigma^j))\right) \\
& \leq \exp\left(\frac{1}{2}\Big|\log(1+2\sigma^{j+1})-\log(1+2\sigma^j)\Big|\right).
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\prod_{j=1}^{n-1}\Big\|\Big(I+\sigma^{j+1} D\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(I+\sigma^j D\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big\|_2 \leq \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\Big|\log(1+2\sigma^{j+1})-\log(1+2\sigma^j)\Big|\right).
$$

Agora a função $f : [0,2] \to [0, \log 5]$ dada por $f(\sigma) = \log(1+2\sigma)$ é uma função Lipschitz com a constante de Lipschitz 2. Portanto

$$
\prod_{j=1}^{n-1}\Big\|\Big(I+\sigma^{j+1} D\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(I+\sigma^j D\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big\|_2 \leq \exp\left(\sum_{j=1}^{n-1}|\sigma^{j+1}-\sigma^j|\right).
$$

Usando a suposição que

$$
\sum_{j=1}^{n-1}|\sigma^{j+1}-\sigma^j| \leq \gamma,
$$

temos

$$
\Big\| M(\sigma^n)M(\sigma^{n-1})\dots M(\sigma^2)M(\sigma^1)\Big\|_2 \leq \sqrt{5}\, e^{\gamma}\prod_{j=1}^{n-1}\|N(\sigma^j)\|_2 = \sqrt{5}\, e^{\gamma}\prod_{j=1}^{n}\rho(M(\sigma^j)).
$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \leq \sigma^j \leq 2 - \varepsilon$ para infinitos j. Seja $\mu = \max_{\varepsilon \leq \sigma \leq 2-\varepsilon} \rho(M(\sigma))$. Note que $\mu < 1$ desde que o máximo exista e $\rho(M(\sigma)) < 1$ para todo $0 < \sigma < 2$. Além disso, seja $k(n) = |\{j/\varepsilon \leq \sigma^j \leq 2 - \varepsilon, 1 \leq j \leq n\}|$. Note que $k(n) \to \infty$ quando $n \to \infty$. Então $\prod_{j=1}^{n} \rho(M(\sigma^j)) \leq \mu^{k(n)} \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, $\|M\|_2 \to 0$ quando $n \to \infty$. □

Teorema 1.6 *O método Crank-Nicolson com condições de contorno explícitas,* (1.9) – (1.10) *aplicado para resolver o problema* (8) – (10) *em uma malha deslocada é estável se*

$$0 < \sigma^j < 2, j = 1, \ldots, n, \tag{1.39}$$

e σ^j são limitados por zero e dois infinitamente.

Demonstração: A prova é imediata combinando os **Teoremas** 1.4 e 1.5. □

Uma vez que a análise de estabilidade dos esquemas de Euler segue muito perto da análise feita para o esquema de Crank - Nicolson, ressaltamos que alguns detalhes serão ocultados, visto que os mesmos já foram tratados para o estudo de Crank - Nicolson.

Para o método de Euler implícito com, $\sigma^n = (d^{n+1})\delta t/(\delta x^2)$, temos

$$u_0^{n+1} = -u_1^{n+1} \text{ e } u_{m+1}^{n+1} = -u_m^{n+1}, \tag{1.40}$$

para as condições de contorno implícitas, e

$$u_0^{n+1} = -u_1^{n} \text{ e } u_{m+1}^{n+1} = -u_m^{n}, \tag{1.41}$$

para o caso de condições de contorno explícitas.

Para o método de Euler explícito, as condições de contorno explícitas em (15) são

$$u_0^{n} = -u_1^{n} \text{ e } u_{m+1}^{n} = -u_m^{n} \tag{1.42}$$

Para este esquema, σ^n é definido por $\sigma^n = (d^n)\delta t/(\delta x)^2$.

1.1.2 Método de Euler explícito com condições de contorno explícitas

Para este caso, usando (1.42) obtemos $A(\sigma^n) = I$ e

$$B(\sigma^n) = I + \sigma^n \tilde{B}, \tag{1.43}$$

onde

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}_{m\times m} \tag{1.44}$$

Assim, temos que $M(\sigma^n) = B(\sigma^n)$.

Teorema 1.7 *Seja* $0 < \sigma^j < \frac{1}{2}$ *para todo* j, *e* σ^j *é limitado por zero e* $\frac{1}{2}$. *Então*

$$M(\sigma^n)M(\sigma^{n-1})\dots M(\sigma^2)M(\sigma^1) \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Demonstração: Tome $\varepsilon > 0$ de modo que $\varepsilon \le \sigma^j \le \frac{1}{2} - \varepsilon$ para todo j.

Usando o fato de que $M(\sigma^j) = I + \sigma^j \tilde{B}$, para um índice genérico j, e que $\tilde{B}$ é simétrica, definimos

$$M = \prod_{j=1}^{n} M(\sigma^j) = \prod_{j=1}^{n} Q(I + \sigma^j D)Q^T = Q\left[\prod_{j=1}^{n}(I + \sigma^j D)\right]Q^T. \tag{1.45}$$

Os autovalores de M são dados por

$$\lambda_i^M = \prod_{j=1}^{n}(1 + \sigma^j \lambda_i^{\tilde{B}}) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - 4\sigma^j \sin^2\left(\frac{i\pi}{2m}\right)\right),\ i = 1, \dots, m, \tag{1.46}$$

os autovalores de $\tilde{B}$ obtidos no último termo são obtidos a partir do **Teorema** 1.1. Desde que M é simétrica, $\|M\|_2$ é o autovalor de magnitude máxima de M; isto é

$$\|M\|_2 = \max_{i=1,2,\dots,m} \prod_{j=1}^{n}\left|1 - 4\sigma^j \sin^2\left(\frac{i\pi}{2m}\right)\right|. \tag{1.47}$$

Para vincular este produto usamos a desigualdade bem conhecida

$$2\theta/\pi \le sin\theta \le \min(\theta, 1) \text{ para } 0 \le \theta \le \pi/2.$$

Note que $i = m$ temos $i\pi/(2m) = \pi/2$ e $\sin(i\pi/2m) = 1$, enquanto, $1 \le i \le m - 1$ resulta em $1/m \le i/m \le \sin(i\pi/2m) < 1$. Então para todo j e $1 \le i \le m$,

$$\begin{aligned} \left|1 - 4\sigma^j \sin^2\left(\frac{i\pi}{2m}\right)\right| &\le \max(|1 - 4\sigma^j/m|, |1 - 4\sigma^j|) \\ &\le \max(|1 - 4\varepsilon/m|, |1 - 4(\frac{1}{2} - \varepsilon)|) \\ &= |1 - 4\varepsilon/m|. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Portanto

$$\|M\|_2 \leq |1 - 4\varepsilon/m|^n \to 0, \tag{1.49}$$

quando $n \to \infty$, como queríamos demonstrar.

Teorema 1.8 *O método de Euler explícito com condições de contorno explícitas em* (1.43) *aplicado para resolver o problema* (8) − (10) *em uma malha deslocada é estável se*

$$0 < \sigma^j < 1/2,\ j = 1, \ldots, n. \tag{1.50}$$

Demonstração: A prova é imediata do **Teorema** 1.7. □

Na sequência, enunciamos outros resultados analisados em [9].

1.1.3 Método de Crank-Nicolson com condições de contorno implícitas

Teorema 1.9 *O método de Crank-Nicolson com condições de contorno implícitas aplicado para resolver o problema* (8) − (10) *em uma malha deslocada é incondicionalmente estável.*

Demonstração: Ver [9].

1.1.4 Método de Euler implícito com condições de contorno explícitas

Teorema 1.10 *O método de Euler implícito aplicado para resolver o problema* (8) − (10) *em uma malha deslocada é incondicionalmente estável.*

Demonstração: Ver [9].

Capítulo 2

Método de Euler Explícito

Neste capítulo, analisamos com detalhes algumas propriedades na energia do sistema discreto homogêneo (21) – (23). Particularmente, provamos a conservação bem como a positividade da energia totalmente discreta, com condições de contorno de Dirichlet, em seguida com condições de contorno do tipo (17).

2.1 Energia Totalmente Discreta

Inicialmente, apresentamos na íntegra os principais resultados obtidos por Negreanu e Zuazua [7], no que diz respeito à conservação e positividade da energia do sistema discreto homogêneo (21) – (23). A inserção de tais resultados é de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Seguindo [7], definimos a energia numérica totalmente discreta associada com as equações em diferenças finitas (21) – (23), por:

$$E_n = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^{J} \left[\left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n} - \phi_j^{n}}{\Delta x} \right) \right] \tag{2.1}$$

Proposição 2.1 *(Conservação da Energia) Para todo* Δt, $\Delta x \in (0,1)$ *a energia totalmente discreta* (2.1), *satisfaz* $E_n = E_0, \forall n = 1, 2, ..., N$

Demonstração: Tomemos a equação (21)

$$\frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - d(t_n) \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

multiplicando-a por $\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}}{2}$ e somando em j, com $1 \leq j \leq J$, temos

$$\underbrace{\Delta x \sum_{j=1}^{J} \left[\frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} . \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2} \right]}_{(I)} \underbrace{- d(t_n) \Delta x \sum_{j=1}^{J} \left[\frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} . \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2} \right]}_{(II)} = 0$$

Inicialmente, consideremos (I). Fazendo alguns cálculos obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x}{2\Delta t^2} \sum_{j=1}^{J} \left(\phi_j^{n+1} + \phi_j^{n-1} \right) \left(\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1} \right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t^2} \sum_{j=1}^{J} 2\phi_j^n \left(\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1} \right) \\ = \; & \frac{\Delta x}{2\Delta t^2} \sum_{j=1}^{J} \left[\left| \phi_j^{n+1} \right|^2 - \left| \phi_j^{n-1} \right|^2 - 2\phi_j^n \phi_j^{n+1} + 2\phi_j^n \phi_j^{n-1} \right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

Somando e subtraindo o somatório $\frac{\Delta x}{2\Delta t^2} \sum_{j=1}^{J} \left| \phi_j^n \right|^2$ em (2.2), obtemos

$$\begin{aligned} = \; & \frac{\Delta x}{2\Delta t^2} \sum_{j=1}^{J} \left[\left| \phi_j^{n+1} \right|^2 - 2\phi_j^n \phi_j^{n+1} + \left| \phi_j^n \right|^2 - \left| \phi_j^{n-1} \right|^2 + 2\phi_j^n \phi_j^{n-1} - \left| \phi_j^n \right|^2 \right] \\ = \; & \frac{\Delta x}{2\Delta t^2} \sum_{j=1}^{J} \left[\left| \phi_j^{n+1} \right|^2 - 2\phi_j^n \phi_j^{n+1} + \left| \phi_j^n \right|^2 - \left(\left| \phi_j^{n-1} \right|^2 - 2\phi_j^n \phi_j^{n-1} + \left| \phi_j^n \right|^2 \right) \right] \\ = \; & \frac{\Delta x}{2\Delta t^2} \sum_{j=1}^{J} \left(\left| \phi_j^{n+1} - \phi_j^n \right|^2 - \left| \phi_j^{n-1} - \phi_j^n \right|^2 \right) \end{aligned}$$

Reescrevemos a última igualdade acima do seguinte modo

$$= \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^{J} \left| \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} \right|^2 - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^{J} \left| \frac{\phi_j^n - \phi_j^{n-1}}{\Delta t} \right|^2 . \tag{2.3}$$

Consideremos (II)

$$-d(t_n) \Delta x \sum_{j=1}^{J} \left[\frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} . \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2} \right] \tag{2.4}$$

e reescrevemos do seguinte modo

$$-\frac{d(t_n)\Delta x}{2\Delta x^2} \sum_{j=1}^{J} \left[(\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) + (\phi_{j-1}^n - \phi_j^n) \right] . \left[(\phi_{j+1}^{n-1} - \phi_j^{n-1}) - (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}) + (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n-1}) \right]$$

fazendo a distributiva e organizando os termos de maneira adequada, obtem-se

$$- \quad \frac{d(t_n)\Delta x}{2\Delta x^2} \sum_{j=1}^{J} \left[(\phi_{j+1}^{n-1} - \phi_j^{n-1})(\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) - (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1})(\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) \right] \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} - \quad & \frac{d(t_n)\Delta x}{2\Delta x^2} \sum_{j=1}^{J} \Big[(\phi_{j+1}^{n-1} - \phi_j^{n-1})(\phi_{j-1}^n - \phi_j^n) - (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1})(\phi_{j-1}^n - \phi_j^n) \\ & + (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_{j+1}^{n-1})(\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) + (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_{j+1}^{n-1})(\phi_{j-1}^n - \phi_j^n) \Big] \end{aligned} \tag{2.6}$$

Denotamos (2.6) por S e reescrevemos do seguinte modo

$$
\begin{aligned}
S \quad = \quad & \frac{d(t_n)\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\sum_{j=1}^{J}\phi_j^n\phi_j^{n+1}-\sum_{j=1}^{J}\phi_j^n\phi_j^{n-1}+\sum_{j=1}^{J}\phi_j^{n-1}\phi_{j-1}^n-\sum_{j=1}^{J}\phi_j^{n+1}\phi_{j-1}^n-\sum_{j=1}^{J}\phi_{j+1}^{n+1}\phi_{j+1}^n\right.\\
&\left.+\sum_{j=1}^{J}\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n+\sum_{j=1}^{J}\phi_{j+1}^n\phi_{j+1}^{n-1}-\sum_{j=1}^{J}\phi_{j+1}^{n-1}\phi_j^n\right] \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}\phi_{j+1}^n\right) &= -\sum_{j=1}^{J}\left(\phi_j^{n+1}\phi_j^n\right)+\phi_1^{n+1}\phi_1^n-\phi_{J+1}^{n+1}\phi_{J+1}^n\\
\sum_{j=1}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n\right) &= \sum_{j=1}^{J}\left(\phi_j^{n+1}\phi_{j-1}^n\right)-\phi_1^{n+1}\phi_0^n+\phi_{J+1}^{n+1}\phi_J^n\\
\sum_{j=1}^{J}\left(\phi_{j+1}^n\phi_{j+1}^{n-1}\right) &= \sum_{j=1}^{J}\left(\phi_j^n\phi_j^{n-1}\right)-\phi_1^n\phi_1^{n-1}+\phi_{J+1}^n\phi_{J+1}^{n-1}\\
-\sum_{j=1}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n-1}\phi_j^n\right) &= -\sum_{j=1}^{J}\left(\phi_j^{n-1}\phi_{j-1}^n\right)+\phi_1^{n-1}\phi_0^n-\phi_{J+1}^{n-1}\phi_J^n
\end{aligned}
$$

Dessa maneira, podemos reescrever S como

$$
\begin{aligned}
S \quad = \quad & \frac{d(t_n)\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\phi_j^n\phi_j^{n+1}\right)-\sum_{j=1}^{N}\left(\phi_j^n\phi_j^{n-1}\right)+\sum_{j=1}^{N}\left(\phi_j^{n-1}\phi_{j-1}^n\right)-\sum_{j=1}^{N}\left(\phi_j^{n+1}\phi_{j-1}^n\right)\right.\\
&-\sum_{j=1}^{N}\left(\phi_j^{n+1}\phi_j^n\right)+\sum_{j=1}^{N}\left(\phi_j^{n+1}\phi_{j-1}^n\right)+\sum_{j=1}^{N}\left(\phi_j^n\phi_j^{n-1}\right)-\sum_{j=1}^{N}\left(\phi_j^{n-1}\phi_{j-1}^n\right)\\
&\left.+\phi_1^{n+1}\phi_1^n-\phi_{J+1}^{n+1}\phi_{J+1}^n-\phi_1^{n+1}\phi_0^n+\phi_{J+1}^{n+1}\phi_J^n-\phi_1^n\phi_1^{n-1}+\phi_{J+1}^n\phi_{J+1}^{n-1}+\phi_1^{n-1}\phi_0^n-\phi_{J+1}^{n-1}\phi_J^n\right]
\end{aligned}
$$

simplificando e usando as condições de contorno de *Dirichlet* $\phi_0^n = \phi_{J+1}^n = 0, \forall n = 1, ..., N$, obtemos

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{d(t_n)\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\phi_1^{n+1}\phi_1^n-\phi_1^n\phi_1^{n-1}\right]\\
&= \frac{d(t_n)\Delta x}{2\Delta x^2}\left[(\phi_1^{n+1}-\phi_0^{n+1})(\phi_1^n-\phi_0^n)-(\phi_1^n-\phi_0^n)(\phi_1^{n-1}-\phi_0^{n-1})\right] \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Assim, combinando (2.3), (2.5) e (2.8), temos

$$\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^n}{\Delta t}\right)^2+\frac{d(t_n)\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^{n}}{\Delta x}\right)$$
$$-\quad\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_j^{n}-\phi_j^{n-1}}{\Delta t}\right)^2-\frac{d(t_n)\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n-1}-\phi_j^{n-1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^{n}}{\Delta x}\right).$$

Pela definição de energia (2.1), obtemos:

$$E_n = E_{n-1}, \forall n = 1, 2, ..., N$$

Portanto, $E_n = E_0, \forall n = 1, 2, ..., N$.

Proposição 2.2 *(Positividade) Se $\Delta t \leq \Delta x$, então para toda solução não-trivial do sistema discreto* $(21) - (23)$ *e para todo $n = 1, 2, 3, ..., N$ tem-se*

$$\frac{E_n}{\Delta x} \geq \frac{1}{4(\Delta x)^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)^2+\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n}\right)^2\right] \tag{2.9}$$

Demonstração: Tendo em vista que $\Delta t \leq \Delta x$, usando as condições de contorno de *Dirichlet* $\phi_0^n = \phi_{J+1}^n = 0$ e as identidades abaixo

$$\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n+1}\right)^2=\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}\right)^2 \tag{2.10}$$

$$\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n}\right)^2=\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n}\right)^2 \tag{2.11}$$

$$\sum_{j=0}^{J}\phi_{j+1}^{n+1}\phi_{j+1}^{n}=\sum_{j=0}^{J}\phi_j^{n+1}\phi_j^{n} \tag{2.12}$$

Temos

$$\frac{E_n}{\Delta x} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^n}{\Delta t}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^n}{\Delta x}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^n}{\Delta x}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^n}{\Delta x}\right)$$

$$= \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}\right)\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\left(\phi_j^{n+1}\right)^2 - 2\phi_j^{n+1}\phi_j^n + \left(\phi_j^n\right)^2\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}\phi_{j+1}^n - \phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n - \phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n + \phi_j^{n+1}\phi_j^n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\,(\Delta x)^2}\left\{\sum_{j=0}^{J}\left(\left(\phi_j^{n+1}\right)^2 - \phi_j^{n+1}\phi_j^n + \left(\phi_j^n\right)^2 + \phi_{j+1}^{n+1}\phi_{j+1}^n - \phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n - \phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n\right)\right\}$$

Usando (2.12) na igualdade anterior, temos

$$\frac{E_n}{\Delta x} \quad\geq\quad \frac{1}{2\,(\Delta x)^2}\left\{\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n+1}\right)^2 + \sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^n\right)^2 - \sum_{j=0}^{J}\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n - \sum_{j=0}^{J}\phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n\right\}$$

Dividindo os termos dos somatórios acima por $\frac{1}{2}$ e usando as identidades (2.10) e (2.11), segue

$$= \quad \frac{1}{4\,(\Delta x)^2}\sum_{j=0}^{J}\left(\left[\left(\phi_j^{n+1}\right)^2 - 2\phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n + \left(\phi_{j+1}^n\right)^2\right] + \left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}\right)^2 - 2\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n + \left(\phi_j^n\right)^2\right]\right)$$

$$= \frac{1}{4(\Delta x)^2}\left[\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^n\right)^2 + \left(\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^n\right)^2\right]$$

Portanto,

$$\frac{E_n}{\Delta x} \quad\geq\quad \frac{1}{4(\Delta x)^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^n\right)^2 + \left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^n\right)^2\right] \geq 0$$

2.2 Energia Totalmente Discreta - Conservação e Positividade da Energia em Malha Deslocada

Nesta seção, mostramos que a energia (2.1) também preserva suas propriedades de conservação e positividade, quando usamos condições de contorno do tipo (17). Desse modo, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.3 *Para todo* Δt, $\Delta x \in (0,1)$ *a energia totalmente discreta* (2.1)*, satisfaz* $E_n = E_0, \forall n = 1, 2, ..., N$

Demonstração: Tomemos a equação (21)

$$\frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - d(t_n)\frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

multiplicando-a por $\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2}$ e somando em j, com $1 \leq j \leq J$, temos

$$\underbrace{\Delta x \sum_{j=1}^{J} \left[\frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} . \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2} \right]}_{(I)} \underbrace{-d(t_n)\Delta x \sum_{j=1}^{J} \left[\frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} . \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2} \right]}_{(II)} = 0$$

Vamos dividir os cálculos em duas partes. Inicialmente, consideremos (I). Fazendo alguns cálculos obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x}{2\Delta t^2} \sum_{j=1}^{J} \left(\phi_j^{n+1} + \phi_j^{n-1}\right)\left(\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}\right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t^2} \sum_{j=1}^{J} 2\phi_j^n \left(\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}\right) \\ = \; & \frac{\Delta x}{2\Delta t^2} \sum_{j=1}^{J} \left[\left|\phi_j^{n+1}\right|^2 - \left|\phi_j^{n-1}\right|^2 - 2\phi_j^n \phi_j^{n+1} + 2\phi_j^n \phi_j^{n-1} \right] \end{aligned} \tag{2.13}$$

Somando e subtraindo o somatório $\frac{\Delta x}{2\Delta t^2} \sum_{j=1}^{J} \left|\phi_j^n\right|^2$ em (2.13), obtemos

$$\begin{aligned} = \; & \frac{\Delta x}{2\Delta t^2} \sum_{j=1}^{J} \left[\left|\phi_j^{n+1}\right|^2 - 2\phi_j^n \phi_j^{n+1} + \left|\phi_j^n\right|^2 - \left|\phi_j^{n-1}\right|^2 + 2\phi_j^n \phi_j^{n-1} - \left|\phi_j^n\right|^2 \right] \\ = \; & \frac{\Delta x}{2\Delta t^2} \sum_{j=1}^{J} \left[\left|\phi_j^{n+1}\right|^2 - 2\phi_j^n \phi_j^{n+1} + \left|\phi_j^n\right|^2 - \left(\left|\phi_j^{n-1}\right|^2 - 2\phi_j^n \phi_j^{n-1} + \left|\phi_j^n\right|^2 \right) \right] \\ = \; & \frac{\Delta x}{2\Delta t^2} \sum_{j=1}^{J} \left(\left|\phi_j^{n+1} - \phi_j^n\right|^2 - \left|\phi_j^{n-1} - \phi_j^n\right|^2 \right) \end{aligned}$$

Reescrevemos a última igualdade acima do seguinte modo

$$= \quad \frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n}}{\Delta t}\right|^2 - \frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_j^{n}-\phi_j^{n-1}}{\Delta t}\right|^2. \tag{2.14}$$

Agora, consideremos (II),

$$-d(t_n)\Delta x\sum_{j=1}^{J}\left[\frac{\phi_{j+1}^n-2\phi_j^n+\phi_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}.\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}}{2}\right] \tag{2.15}$$

reescrevemos do seguinte modo

$$\frac{-d(t_n)\Delta x}{2\Delta x^2}\left\{\sum_{j=1}^{J}\left(\phi_{j+1}^n-\phi_j^n\right)\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}\right)-\sum_{j=1}^{J}\left(\phi_j^n-\phi_{j-1}^n\right)\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}\right)\right\} \tag{2.16}$$

fazendo a distributiva em (2.16), segue que

$$\begin{aligned} & \frac{-d(t_n)\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^n-\phi_j^n\right)\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}\right)+\underbrace{\frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi_1^n-\phi_0^n\right)\left(\phi_0^{n+1}-\phi_0^{n-1}\right)}_{I_1^n} \\ + \quad & \frac{d(t_n)\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^n-\phi_j^n\right)\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)\underbrace{-\frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi_{J+1}^n-\phi_J^n\right)\left(\phi_{J+1}^{n+1}-\phi_{J+1}^{n-1}\right)}_{I_2^n} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Utilizando as condições de contorno do tipo (17),

$$\begin{aligned} \phi_0^{n+1} &= -\phi_1^n \qquad (i) \\ \phi_0^{n} &= -\phi_1^n \qquad (ii) \\ \phi_{J+1}^{n+1} &= -\phi_J^n \qquad (iii) \\ \phi_{J+1}^{n} &= -\phi_J^n \qquad (iv) \end{aligned}$$

conseguimos algumas relações. De (i) segue que

$$\phi_0^n = -\phi_1^{n-1}$$

e da condição (ii), segue que

$$\phi_0^{n-1} = -\phi_1^{n-1}$$

assim, obtemos

$$\phi_0^n = \phi_0^{n-1} \qquad (v)$$

Novamente de (i) e (ii), temos

$$\phi_0^{n+1} = -\phi_1^n = \phi_0^n \qquad (vi)$$

Substituindo (v) e (vi) em (I_1^n), temos

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi_1^n-\phi_0^n\right)\left(\phi_0^{n+1}-\phi_0^{n-1}\right)=\frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi_1^n-\phi_0^n\right)\left(\phi_0^n-\phi_0^n\right)=0$$

Analogamente, da condição de contorno (iii), segue que

$$\phi_{J+1}^n=-\phi_J^{n-1}$$

e da condição (iv), segue que

$$\phi_{J+1}^{n-1}=-\phi_J^{n-1}$$

assim, temos

$$\phi_{J+1}^n=\phi_{J+1}^{n-1} \qquad (vii)$$

Novamente, de (iii) e (iv), temos

$$\phi_{J+1}^{n+1}=-\phi_J^n=\phi_{J+1}^n \qquad (viii)$$

Substituindo (vii) e $(viii)$ em (I_2^n), segue

$$-\frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi_{J+1}^n-\phi_J^n\right)\left(\phi_{J+1}^{n+1}-\phi_{J+1}^{n-1}\right)=-\frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi_{J+1}^n-\phi_J^n\right)\left(\phi_{J+1}^n-\phi_{J+1}^n\right)=0$$

Logo, organizando os termos resultantes em (2.17), teremos

$$\begin{aligned}
&\frac{d(t_n)\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{\Delta x^2}\right)\left[-\phi_j^{n+1}+\phi_j^{n-1}+\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n-1}\right]\\
=\;&\frac{d(t_n)\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{\Delta x}\right)\\
-\;&\frac{d(t_n)\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n-1}-\phi_j^{n-1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{\Delta x}\right)
\end{aligned}\tag{2.18}$$

Para finalizar, somamos (2.14) e (2.18), resultando em

$$\begin{aligned}
=\;&\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^n}{\Delta t}\right|^2+\frac{d(t_n)\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{\Delta x}\right)\\
-\;&\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_j^n-\phi_j^{n-1}}{\Delta t}\right|^2-\frac{d(t_n)\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n-1}-\phi_j^{n-1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{\Delta x}\right).
\end{aligned}$$

Pela definição de energia (2.1), obtemos:

$$E_n=E_{n-1},\forall n=1,2,...,N$$

Assim, $E_n = E_0, \forall n = 1, 2, ..., N$. Completando a demonstração da proposição.

A propriedade a seguir, nos mostra que a energia E_n é definida positiva. Para tanto, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.4 *Se $\Delta t \leq \Delta x$, então para toda solução não-trivial do sistema discreto* (21)−(23) *e para todo $n = 1, 2, 3, ..., N$ tem-se*

$$\frac{E_n}{\Delta x} \geq \frac{1}{4(\Delta x)^2} \sum_{j=0}^{J} \left[\left(\phi_j^{n+1} - \phi_{j+1}^n \right)^2 + \left(\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^n \right)^2 \right] \tag{2.19}$$

Demonstração: Considerando $\Delta t \leq \Delta x$, as condições de contorno $\phi_0^n = -\phi_1^n, \phi_{J+1}^n = -\phi_J^n, \phi_0^{n+1} = -\phi_1^n$ e $\phi_{J+1}^{n+1} = -\phi_J^n$ e as identidades

$$\sum_{j=0}^{J} \left(\phi_j^{n+1} \right)^2 = \sum_{j=0}^{J} \left(\phi_{j+1}^{n+1} \right)^2 + \left(\phi_0^{n+1} \right)^2 - \left(\phi_{J+1}^{n+1} \right)^2 \tag{2.20}$$

$$\sum_{j=0}^{J} \left(\phi_j^n \right)^2 = \sum_{j=0}^{J} \left(\phi_{j+1}^n \right)^2 + \left(\phi_0^n \right)^2 - \left(\phi_{J+1}^n \right)^2 \tag{2.21}$$

$$\sum_{j=0}^{J} \left(\phi_{j+1}^{n+1} \phi_{j+1}^n \right) = \sum_{j=0}^{J} \left(\phi_j^{n+1} \phi_j^n \right) - \left(\phi_0^{n+1} \phi_0^n \right) + \left(\phi_{J+1}^{n+1} \phi_{J+1}^n \right) \tag{2.22}$$

temos da energia que:

$$\frac{E_n}{\Delta x} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J} \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J} \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} \right)$$

$$\geq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J} \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta x} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J} \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} \right)$$

$$= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J} \left(\phi_j^{n+1} - \phi_j^n \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J} \left(\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1} \right) \left(\phi_{j+1}^n - \phi_j^n \right) \right]$$

$$= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J} \left(\left(\phi_j^{n+1} \right)^2 - 2\phi_j^{n+1} \phi_j^n + \left(\phi_j^n \right)^2 \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J} \left(\phi_{j+1}^{n+1} \phi_{j+1}^n - \phi_{j+1}^{n+1} \phi_j^n - \phi_j^{n+1} \phi_{j+1}^n + \phi_j^{n+1} \phi_j^n \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left\{ \sum_{j=0}^{J} \left(\left(\phi_j^{n+1} \right)^2 - \phi_j^{n+1} \phi_j^n + \left(\phi_j^n \right)^2 + \phi_{j+1}^{n+1} \phi_{j+1}^n - \phi_{j+1}^{n+1} \phi_j^n - \phi_j^{n+1} \phi_{j+1}^n \right) \right\}$$

Usando a identidade (2.22) e as condições de contorno, segue que

$$= \frac{1}{2\left(\Delta x\right)^2}\left\{\sum_{j=0}^{J}\left(\left(\phi_j^{n+1}\right)^2 - \phi_j^{n+1}\phi_j^n + \left(\phi_j^n\right)^2 + \phi_j^{n+1}\phi_j^n - \phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n - \phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n\right)\right.$$
$$\left. - \left(\phi_0^n\right)^2 + \left(\phi_{J+1}^{n+1}\right)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{2\left(\Delta x\right)^2}\left\{\sum_{j=0}^{J}\left(\left(\phi_j^{n+1}\right)^2 + \left(\phi_j^n\right)^2 - \phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n - \phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n\right) - \left(\phi_0^n\right)^2 + \left(\phi_{J+1}^{n+1}\right)^2\right\}$$

Dividindo os termos do somatório por $\frac{1}{2}$ e usando as identidades (2.20) e (2.21), temos

$$= \frac{1}{2\left(\Delta x\right)^2}\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\left[\left(\phi_j^{n+1}\right)^2 - 2\phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n + \left(\phi_{j+1}^n\right)^2\right] + \left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}\right)^2 - 2\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n + \left(\phi_j^n\right)^2\right]\right)$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\left[\left(\phi_0^{n+1}\right)^2 - \left(\phi_{J+1}^{n+1}\right)^2 + \left(\phi_0^n\right)^2 - \left(\phi_{J+1}^n\right)^2\right] - \left(\phi_0^n\right)^2 + \left(\phi_{J+1}^{n+1}\right)^2}_{I_3^n}$$

Aplicando novamente as condições de contorno em (I_3^n), temos

$$\frac{1}{2}\left(\phi_0^n\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\phi_{J+1}^{n+1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\phi_0^n\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\phi_{J+1}^{n+1}\right)^2 - \left(\phi_0^n\right)^2 + \left(\phi_{J+1}^{n+1}\right)^2 = 0$$

Assim,

$$\frac{E_n}{\Delta x} \geq \frac{1}{2(\Delta x)^2}\left\{\frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^n\right)^2 + \left(\phi_j^{n+1} - \phi_{j+1}^n\right)^2\right)\right\}$$

Portanto,

$$\frac{E_n}{\Delta x} \geq \frac{1}{4(\Delta x)^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_j^{n+1} - \phi_{j+1}^n\right)^2 + \left(\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^n\right)^2\right] \geq 0$$

Capítulo 3

Métodos Numéricos Implícitos

Neste capítulo vamos considerar uma família de esquemas discretos uniformemente controláveis em Δx e Δt, sistema $(24)-(26)$ e mostraremos que sua energia dada por

$$E_n = \frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^n}{\Delta t}\right)^2 + \alpha\left[\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^n}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^n}{\Delta x}\right)\right]^2 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{\Delta x}\right)\right] \tag{3.1}$$

preserva as propriedades de (conservação e positividade).

3.1 Conservação da Energia

Proposição 3.1 *Para todo* Δt, $\Delta x \in (0,1)$ *a energia* (3.1) *das soluções do sistema discreto* $(24)-(26)$ *é conservada em todos os passos de tempo, isto é,* $E_n = E_0$, $\forall n = 1, ..., N$

Demonstração: Tomemos a equação (24)

$$\frac{\phi_j^{n+1}-2\phi_j^n+\phi_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - \frac{\phi_{j+1}^n-2\phi_j^n+\phi_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$
$$-\alpha\left[\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-2\phi_j^{n+1}+\phi_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} - 2\left(\frac{\phi_{j+1}^n-2\phi_j^n+\phi_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}\right) + \frac{\phi_{j+1}^{n-1}-2\phi_j^{n-1}+\phi_{j-1}^{n-1}}{(\Delta x)^2}\right] = 0$$

note que, para as duas primeiras parcelas da equação acima, o resultado já foi provado na **proposição** 2.1 do capítulo anterior. Para isto, concentraremos nossa prova apenas na última parcela da mesma.

Podemos reescrever tal parcela do seguinte modo

$$-\frac{\alpha}{(\Delta x)^2}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-2\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)+\left(\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_{j-1}^{n}\right)\right]$$
$$-\frac{\alpha}{(\Delta x)^2}\left[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)+2\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)-\left(\phi_{j-1}^{n}-\phi_{j-1}^{n-1}\right)\right]$$

Multiplicando-a por $\frac{(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n)}{2}+\frac{(\phi_j^{n}-\phi_j^{n-1})}{2}$ e somando em j, com $1\le j\le J$, temos

$$\underbrace{\frac{-\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-2\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)+\left(\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_{j-1}^{n}\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n\right)}{2}+\frac{\left(\phi_j^{n}-\phi_j^{n-1}\right)}{2}\right]}_{(I)}$$

$$\underbrace{\frac{-\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)+2\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)-\left(\phi_{j-1}^{n}-\phi_{j-1}^{n-1}\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n\right)}{2}+\frac{\left(\phi_j^{n}-\phi_j^{n-1}\right)}{2}\right]}_{(II)}=0$$

Fazendo a distribuição no produto acima, obtemos

$$\underbrace{\frac{-\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-2\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)+\left(\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_{j-1}^{n}\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n\right)}{2}\right]}_{I_{1,n}}$$

$$\underbrace{\frac{-\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-2\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)+\left(\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_{j-1}^{n}\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_j^{n}-\phi_j^{n-1}\right)}{2}\right]}_{I_{2,n}}$$

$$\underbrace{\frac{-\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)+2\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)-\left(\phi_{j-1}^{n}-\phi_{j-1}^{n-1}\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n\right)}{2}\right]}_{I_{3,n}}$$

$$\underbrace{\frac{-\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)+2\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)-\left(\phi_{j-1}^{n}-\phi_{j-1}^{n-1}\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_j^{n}-\phi_j^{n-1}\right)}{2}\right]}_{I_{4,n}}=0$$

Façamos agora alguns cálculos e simplificações nos termos acima. Primeiramente, consideremos $I_{1,n}$

$$I_{1,n} = -\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-2\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)+\left(\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_{j-1}^{n}\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)}{2}\right]$$

$$= -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]$$

$$-\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[-\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)+\left(\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_{j-1}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]$$

Usando as condições de contorno de Dirichlet (6), obtemos:

$$= -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]$$

$$+\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)\right]$$

$$= \frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\Big[-\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)+\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)^2+\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)^2$$

$$-\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\Big]$$

$$I_{1,n} = \frac{\alpha\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}}{\Delta x}\right)\right]^2 \tag{3.2}$$

Consideremos agora $I_{4,n}$ dado abaixo

$$I_{4,n} = -\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)+2\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)-\left(\phi_{j-1}^{n}-\phi_{j-1}^{n-1}\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)}{2}\right]$$

$$= -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)+\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right]$$

$$-\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)-\left(\phi_{j-1}^{n}-\phi_{j-1}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right]$$

Novamente usamos as condições de contorno de Dirichlet (6) e obtemos:

$$= -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)+\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right]$$
$$-\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)-\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)\right]$$
$$= -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)+\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)^2+\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)^2\right.$$
$$\left.-\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)\right]$$
$$I_{4,n} = -\frac{\alpha\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}}{\Delta x}\right)\right]^2$$

Combinando $I_{1,n}$ e $I_{4,n}$ temos,

$$\frac{\alpha\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left\{\left[\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}}{\Delta x}\right)\right]^2-\left[\left(\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}}{\Delta x}\right)\right]^2\right\} \quad (3.3)$$

Dessa maneira, somando (3.3) aos resultados provados anteriormente no capítulo 2 (**proposição** 2.1) e organizando os termos, tem-se

$$\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left\{\left(\frac{\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}}{\Delta t}\right)^2+\alpha\left[\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}}{\Delta x}\right)\right]^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j}^{n+1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j}^{n}}{\Delta x}\right)\right\}-\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left\{\left(\frac{\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}}{\Delta t}\right)^2\right.$$
$$\left.+\alpha\left[\left(\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}}{\Delta x}\right)\right]^2+\left(\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j}^{n}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi_{j+1}^{n-1}-\phi_{j}^{n-1}}{\Delta x}\right)\right\}=0,$$

donde temos que

$$E_n - E_{n-1} = 0 \Rightarrow E_n = E_0, \forall n = 1,2,3,...,N$$

para

$$E_n = \frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\frac{\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}}{\Delta t}\right)^2+\alpha\left[\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}}{\Delta x}\right)\right]^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j}^{n+1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j}^{n}}{\Delta x}\right)\right]$$

Somando os termos restantes $I_{2,n}$ e $I_{3,n}$ e fazendo alguns ajustes, observamos que os mesmos se anulam

$$
\begin{aligned}
= \quad & -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\Big[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)-2\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\\
& +\left(\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_{j-1}^{n}\right)\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\Big]+\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\Big[\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\\
& -2\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)+\left(\phi_{j-1}^{n}-\phi_{j-1}^{n-1}\right)\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\Big]\\
= \quad & -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\Big[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)-2\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\\
& +\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)\Big]+\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\Big[\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\\
& -2\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)+\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)\Big]=0
\end{aligned}
$$

Proposição 3.2 *Se* $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{1-4\alpha}}$, $\forall \alpha \in [0;1/4)$ *então para toda solução não-trivial do sistema discreto* $(24)-(26)$ *e para todo* $n = 1,2,...,N$, *temos*

$$\frac{E_n}{\Delta x} \geq \frac{\beta}{4}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)^2+\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n}\right)^2\right] \geq 0$$

onde $\beta = min\left\{\frac{1-4\alpha}{\Delta x^2}, \frac{1}{\Delta x^2}\right\}$.

Demonstração: Considerando $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{1-4\alpha}}$, $\forall \alpha \in [0;1/4)$, as condições de contorno $\phi_0^n = \phi_{J+1}^n = 0$ e as identidades abaixo

$$\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n+1}\right)^2 = \sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}\right)^2 \tag{3.4}$$

$$\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n}\right)^2 = \sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n}\right)^2 \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=0}^{J}\phi_{j+1}^{n+1}\phi_{j+1}^{n} = \sum_{j=0}^{J}\phi_j^{n+1}\phi_j^{n} \tag{3.6}$$

Da energia E_n temos que:

$$\begin{aligned}\frac{E_n}{\Delta x} &= \frac{1}{2\Delta t^2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n}\right)^2+\frac{\alpha}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n}\right)\right]^2\\ &+ \frac{1}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}\right)\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^{n}\right)\end{aligned}$$

Usando o critério de estabilidade $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{1-4\alpha}}$, $\forall \alpha \in [0;1/4)$, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{E_n}{\Delta x} &\geq \frac{1}{2}.\left(\frac{1-4\alpha}{\Delta x^2}\right)\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n}\right)^2+\frac{\alpha}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n}\right)\right]^2\\ &+ \frac{1}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}\right)\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^{n}\right)\end{aligned}$$

Fazendo $\beta = min\left\{\frac{1-4\alpha}{\Delta x^2}, \frac{1}{\Delta x^2}\right\}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{E_n}{\Delta x} &\geq \beta\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}\right)\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^{n}\right)\right\}\\ &+ \frac{\alpha}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n}\right)\right]^2\end{aligned}$$

$$\geq \;\; \beta\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}\right)\left(\phi_{j+1}^n-\phi_j^n\right)\right\}$$

$$= \;\; \beta\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\left(\phi_j^{n+1}\right)^2-2\phi_j^{n+1}\phi_j^n+\left(\phi_j^n\right)^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}\phi_{j+1}^n-\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n-\phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n+\phi_j^{n+1}\phi_j^n\right)\right\}$$

$$= \;\; \beta\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_j^{n+1}\right)^2-\phi_j^{n+1}\phi_j^n+\left(\phi_j^n\right)^2+\phi_{j+1}^{n+1}\phi_{j+1}^n-\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n-\phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n\right]\right\}$$

Usando a identidade (3.6), segue que

$$= \;\; \frac{\beta}{2}\left\{\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_j^{n+1}\right)^2-\phi_j^{n+1}\phi_j^n+\left(\phi_j^n\right)^2+\phi_j^{n+1}\phi_j^n-\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n-\phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n\right]\right\}$$

$$= \;\; \frac{\beta}{2}\left\{\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_j^{n+1}\right)^2+\left(\phi_j^n\right)^2-\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n-\phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n\right]\right\}$$

Dividindo os termos do somatório por $\frac{1}{2}$ e usando as identidades (3.4) e (3.5), obtemos

$$= \;\; \frac{\beta}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\left[\left(\phi_j^{n+1}\right)^2-2\phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n+\left(\phi_{j+1}^n\right)^2\right]+\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}\right)^2-2\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n+\left(\phi_j^n\right)^2\right]\right)\right\}$$

Donde, resulta que

$$\frac{E_n}{\Delta x} \;\; \geq \;\; \frac{\beta}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^n\right)^2+\left(\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^n\right)^2\right)\right\}$$

Portanto,

$$\frac{E_n}{\Delta x} \;\; \geq \;\; \frac{\beta}{4}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^n\right)^2+\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^n\right)^2\right]\geq 0$$

3.2 Conservação da Energia em Malha Deslocada

Proposição 3.3 *Para todo Δt, $\Delta x \in (0,1)$ a energia* (3.1) *das soluções do sistema discreto* $(24)-(26)$ *é conservada em todos os passos de tempo, isto é,* $E_n = E_0$, $\forall n = 1, ..., N$

Demonstração: Tomemos a equação

$$\frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$
$$-\alpha\left[\frac{\phi_{j+1}^{n+1} - 2\phi_j^{n+1} + \phi_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} - 2\left(\frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}\right) + \frac{\phi_{j+1}^{n-1} - 2\phi_j^{n-1} + \phi_{j-1}^{n-1}}{(\Delta x)^2}\right] = 0$$

novamente ressaltamos que, para as duas primeiras parcelas da equação acima, o resultado já foi verificado na **proposição** 2.3 do capítulo anterior. Para isto, concentraremos nossa prova apenas na última parcela da mesma.

Assim, podemos reescrever tal parcela do seguinte modo

$$-\frac{\alpha}{(\Delta x)^2}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_{j+1}^n\right) - 2\left(\phi_j^{n+1} - \phi_j^n\right) + \left(\phi_{j-1}^{n+1} - \phi_{j-1}^n\right)\right]$$
$$-\frac{\alpha}{(\Delta x)^2}\left[-\left(\phi_{j+1}^n - \phi_{j+1}^{n-1}\right) + 2\left(\phi_j^n - \phi_j^{n-1}\right) - \left(\phi_{j-1}^n - \phi_{j-1}^{n-1}\right)\right]$$

multiplicando-a por $\frac{(\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)}{2} + \frac{(\phi_j^n - \phi_j^{n-1})}{2}$ e somando em j, com $1 \leq j \leq N$, temos

$$\underbrace{\frac{-\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_{j+1}^n\right) - 2\left(\phi_j^{n+1} - \phi_j^n\right) + \left(\phi_{j-1}^{n+1} - \phi_{j-1}^n\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_j^{n+1} - \phi_j^n\right)}{2} + \frac{\left(\phi_j^n - \phi_j^{n-1}\right)}{2}\right]}_{(I)}$$
$$\underbrace{\frac{-\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[-\left(\phi_{j+1}^n - \phi_{j+1}^{n-1}\right) + 2\left(\phi_j^n - \phi_j^{n-1}\right) - \left(\phi_{j-1}^n - \phi_{j-1}^{n-1}\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_j^{n+1} - \phi_j^n\right)}{2} + \frac{\left(\phi_j^n - \phi_j^{n-1}\right)}{2}\right]}_{(II)} = 0$$

Fazendo a distribuição no produto acima, obtemos

$$\underbrace{\frac{-\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-2\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)+\left(\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_{j-1}^{n}\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)}{2}\right]}_{I_{1,n}^{*}}$$

$$\underbrace{\frac{-\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-2\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)+\left(\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_{j-1}^{n}\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)}{2}\right]}_{I_{2,n}^{*}}$$

$$\underbrace{\frac{-\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)+2\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)-\left(\phi_{j-1}^{n}-\phi_{j-1}^{n-1}\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)}{2}\right]}_{I_{3,n}^{*}}$$

$$\underbrace{\frac{-\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)+2\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)-\left(\phi_{j-1}^{n}-\phi_{j-1}^{n-1}\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)}{2}\right]}_{I_{4,n}^{*}}=0$$

Façamos agora alguns cálculos e simplificações nos termos acima

$$I_{1,n}^{*}=-\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-2\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)+\left(\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_{j-1}^{n}\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)}{2}\right]$$

$$=-\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]$$

$$-\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[-\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)+\left(\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_{j-1}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right] \tag{3.7}$$

Usando as identidades abaixo:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]\\
=\;&-\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]\\
&+\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{1}^{n+1}-\phi_{1}^{n}\right)-\left(\phi_{0}^{n+1}-\phi_{0}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{0}^{n+1}-\phi_{0}^{n}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[-\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)+\left(\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_{j-1}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]\\
=\;&\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)\right]\\
&-\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{J+1}^{n+1}-\phi_{J+1}^{n}\right)+\left(\phi_{J}^{n+1}-\phi_{J}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{J+1}^{n+1}-\phi_{J+1}^{n}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

e substituindo-as em (3.7), obtemos:

$$
\begin{aligned}
= & -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right] \\
& +\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{1}^{n+1}-\phi_{1}^{n}\right)-\left(\phi_{0}^{n+1}-\phi_{0}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{0}^{n+1}-\phi_{0}^{n}\right)\right] \\
& +\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)-\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)\right] \\
& -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{J+1}^{n+1}-\phi_{J+1}^{n}\right)+\left(\phi_{J}^{n+1}-\phi_{J}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{J+1}^{n+1}-\phi_{J+1}^{n}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\Big[-\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)+\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)^2+\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)^2 \\
& -\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)\Big]+\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{1}^{n+1}-\phi_{1}^{n}\right)-\left(\phi_{0}^{n+1}-\phi_{0}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{0}^{n+1}-\phi_{0}^{n}\right)\right] \\
& -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{J+1}^{n+1}-\phi_{J+1}^{n}\right)+\left(\phi_{J}^{n+1}-\phi_{J}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{J+1}^{n+1}-\phi_{J+1}^{n}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{1,n}^{*} = & \frac{\alpha\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}}{\Delta x}\right)\right]^2 \\
+ & \frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{1}^{n+1}-\phi_{1}^{n}\right)-\left(\phi_{0}^{n+1}-\phi_{0}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{0}^{n+1}-\phi_{0}^{n}\right)\right] \\
- & \frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{J+1}^{n+1}-\phi_{J+1}^{n}\right)+\left(\phi_{J}^{n+1}-\phi_{J}^{n}\right)\right]\left[\left(\phi_{J+1}^{n+1}-\phi_{J+1}^{n}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Usando as condições de contorno $\phi_0^{n+1}=\phi_0^n=-\phi_1^n$ e $\phi_{J+1}^{n+1}=\phi_{J+1}^n=-\phi_J^n$ nos termos pontuais de $I_{1,n}^*$, temos

$$
I_{1,n}^{*}=\frac{\alpha\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}}{\Delta x}\right)\right]^2 \tag{3.10}
$$

Consideremos $I_{4,n}^*$ dado abaixo

$$
\begin{aligned}
I_{4,n}^{*} = & -\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)+2\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)-\left(\phi_{j-1}^{n}-\phi_{j-1}^{n-1}\right)\right]\left[\frac{\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)}{2}\right] \\
= & -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)+\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right] \\
& -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)-\left(\phi_{j-1}^{n}-\phi_{j-1}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Usando as identidades abaixo:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)+\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right] \\
= & -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)+\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right] \\
& +\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{1}^{n}-\phi_{1}^{n-1}\right)-\left(\phi_{0}^{n}-\phi_{0}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{0}^{n}-\phi_{0}^{n-1}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)+\left(\phi_{j-1}^{n}-\phi_{j-1}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right] \\
= & -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)-\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)\right] \\
& +\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{J+1}^{n}-\phi_{J+1}^{n-1}\right)+\left(\phi_{J}^{n}-\phi_{J}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{J+1}^{n}-\phi_{J+1}^{n-1}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

e substituindo-as em (3.11), obtemos:

$$
\begin{aligned}
= & -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)+\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right] \\
& +\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{1}^{n}-\phi_{1}^{n-1}\right)-\left(\phi_{0}^{n}-\phi_{0}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{0}^{n}-\phi_{0}^{n-1}\right)\right] \\
& -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)-\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)\right] \\
& +\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{J+1}^{n}-\phi_{J+1}^{n-1}\right)+\left(\phi_{J}^{n}-\phi_{J}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{J+1}^{n}-\phi_{J+1}^{n-1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\Big[-\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)+\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)^2+\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)^2 \\
& -\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)\Big]+\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{1}^{n}-\phi_{1}^{n-1}\right)-\left(\phi_{0}^{n}-\phi_{0}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{0}^{n}-\phi_{0}^{n-1}\right)\right] \\
& +\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{J+1}^{n}-\phi_{J+1}^{n-1}\right)+\left(\phi_{J}^{n}-\phi_{J}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{J+1}^{n}-\phi_{J+1}^{n-1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{4,n}^{*} = & -\frac{\alpha\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}}{\Delta x}\right)\right]^2 \\
+ & \frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{1}^{n}-\phi_{1}^{n-1}\right)-\left(\phi_{0}^{n}-\phi_{0}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{0}^{n}-\phi_{0}^{n-1}\right)\right] \\
+ & \frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{J+1}^{n}-\phi_{J+1}^{n-1}\right)+\left(\phi_{J}^{n}-\phi_{J}^{n-1}\right)\right]\left[\left(\phi_{J+1}^{n}-\phi_{J+1}^{n-1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Usando novamente as condições de contorno $\phi_0^{n+1}=\phi_0^n=-\phi_1^n$ e $\phi_{J+1}^{n+1}=\phi_{J+1}^n=-\phi_J^n$, nos termos pontuais de $I^*_{4,n}$, temos

$$I^*_{4,n} = -\frac{\alpha\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\frac{\phi^n_{j+1}-\phi^{n-1}_{j+1}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi^n_j-\phi^{n-1}_j}{\Delta x}\right)\right]^2 \tag{3.14}$$

Combinando $I^*_{1,n}$ e $I^*_{4,n}$ temos,

$$\frac{\alpha\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left\{\left[\left(\frac{\phi^{n+1}_{j+1}-\phi^n_{j+1}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi^{n+1}_j-\phi^n_j}{\Delta x}\right)\right]^2-\left[\left(\frac{\phi^n_{j+1}-\phi^{n-1}_{j+1}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi^n_j-\phi^{n-1}_j}{\Delta x}\right)\right]^2\right\} \tag{3.15}$$

Dessa maneira, somando (3.15) aos resultados provados anteriormente no capítulo 1 (**proposição** 2.3) e organizando os termos, tem-se

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left\{\left(\frac{\phi^{n+1}_j-\phi^n_j}{\Delta t}\right)^2+\alpha\left[\left(\frac{\phi^{n+1}_{j+1}-\phi^n_{j+1}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi^{n+1}_j-\phi^n_j}{\Delta x}\right)\right]^2\right.\\&\left.+\left(\frac{\phi^{n+1}_{j+1}-\phi^{n+1}_j}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi^n_{j+1}-\phi^n_j}{\Delta x}\right)\right\}-\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left\{\left(\frac{\phi^n_j-\phi^{n-1}_j}{\Delta t}\right)^2\right.\\&\left.+\alpha\left[\left(\frac{\phi^n_{j+1}-\phi^{n-1}_{j+1}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi^n_j-\phi^{n-1}_j}{\Delta x}\right)\right]^2+\left(\frac{\phi^n_{j+1}-\phi^n_j}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi^{n-1}_{j+1}-\phi^{n-1}_j}{\Delta x}\right)\right\}=0,\end{aligned}$$

donde temos que

$$E_n - E_{n-1} = 0 \Rightarrow E_n = E_0, \forall n = 1,2,3,...,N$$

para

$$\begin{aligned}E_n &= \frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\frac{\phi^{n+1}_j-\phi^n_j}{\Delta t}\right)^2+\alpha\left[\left(\frac{\phi^{n+1}_{j+1}-\phi^n_{j+1}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\phi^{n+1}_j-\phi^n_j}{\Delta x}\right)\right]^2\right.\\&\left.+\left(\frac{\phi^{n+1}_{j+1}-\phi^{n+1}_j}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi^n_{j+1}-\phi^n_j}{\Delta x}\right)\right]\end{aligned}$$

Somando os termos restantes $I_{2,n}$ e $I_{3,n}$ e fazendo alguns ajustes, observamos que os mesmos se anulam

$$\begin{aligned}&= -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi^{n+1}_{j+1}-\phi^n_{j+1}\right)\left(\phi^n_j-\phi^{n-1}_j\right)-2\left(\phi^{n+1}_j-\phi^n_j\right)\left(\phi^n_j-\phi^{n-1}_j\right)\right.\\&\left.+\left(\phi^{n+1}_{j-1}-\phi^n_{j-1}\right)\left(\phi^n_j-\phi^{n-1}_j\right)\right]+\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi^n_{j+1}-\phi^{n-1}_{j+1}\right)\left(\phi^{n+1}_j-\phi^n_j\right)\right.\\&\left.-2\left(\phi^n_j-\phi^{n-1}_j\right)\left(\phi^{n+1}_j-\phi^n_j\right)+\left(\phi^n_{j-1}-\phi^{n-1}_{j-1}\right)\left(\phi^{n+1}_j-\phi^n_j\right)\right]\end{aligned} \tag{3.16}$$

usando as identidades

$$
\begin{aligned}
-\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_{j-1}^{n}\right)\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right] &= -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)\right] \\
&+ \frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}+\left[\left(\phi_{J}^{n+1}-\phi_{J}^{n}\right)\left(\phi_{J+1}^{n}-\phi_{J+1}^{n-1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\phi_{j-1}^{n}-\phi_{j-1}^{n-1}\right)\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right] &= \frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)\right] \\
&- \frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}+\left[\left(\phi_{J}^{n}-\phi_{J}^{n-1}\right)\left(\phi_{J+1}^{n+1}-\phi_{J+1}^{n}\right)\right]
\end{aligned}
$$

e as condições de contorno $\phi_0^{n+1}=\phi_0^n=-\phi_1^n$ e $\phi_{J+1}^{n+1}=\phi_{J+1}^n=-\phi_J^n$ nos termos pontuais de (3.16), obtemos.

$$
\begin{aligned}
= \; & -\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)-2\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\right. \\
& \left.+\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)\right]+\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}+\left[\left(\phi_{J}^{n+1}-\phi_{J}^{n}\right)\left(\phi_{J+1}^{n}-\phi_{J+1}^{n-1}\right)\right] \\
& +\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j+1}^{n-1}\right)\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)-2\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)\right. \\
& \left.+\left(\phi_{j}^{n}-\phi_{j}^{n-1}\right)\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)\right]-\frac{\alpha\Delta x}{2\Delta x^2}+\left[\left(\phi_{J}^{n}-\phi_{J}^{n-1}\right)\left(\phi_{J+1}^{n+1}-\phi_{J+1}^{n}\right)\right]=0
\end{aligned}
$$

Proposição 3.4 *(Positividade da Energia) Se* $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{1-4\alpha}}$, $\forall\alpha \in [0;1/4)$ *então para toda solução não-trivial do sistema discreto* $(24)-(26)$ *e para todo* $n=1,2,...,N$*, temos*

$$
\frac{E_n}{\Delta x} \;\geq\; \frac{\beta}{4}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}\right)^2+\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j}^{n}\right)^2\right]\geq 0
$$

onde $\beta = min\left\{\frac{1-4\alpha}{\Delta x^2},\frac{1}{\Delta x^2}\right\}$.

Demonstração: Considerando $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{1-4\alpha}}$, $\forall\alpha \in [0;1/4)$, as condições de contorno $\phi_0^n =$

$-\phi_1^n, \phi_{J+1}^n = -\phi_J^n, \phi_0^{n+1} = -\phi_1^n$ e $\phi_{J+1}^{n+1} = -\phi_J^n$ e as identidades abaixo

$$\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n+1}\right)^2 = \sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}\right)^2 + \left(\phi_0^{n+1}\right)^2 - \left(\phi_{J+1}^{n+1}\right)^2 \tag{3.17}$$

$$\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n}\right)^2 = \sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n}\right)^2 + \left(\phi_0^{n}\right)^2 - \left(\phi_{J+1}^{n}\right)^2 \tag{3.18}$$

$$\sum_{j=0}^{J}\phi_{j+1}^{n+1}\phi_{j+1}^{n} = \sum_{j=0}^{J}\phi_j^{n+1}\phi_j^{n} - \left(\phi_0^{n+1}\phi_0^{n}\right) + \left(\phi_{J+1}^{n+1}\phi_{J+1}^{n}\right) \tag{3.19}$$

Da energia E_n temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{E_n}{\Delta x} &= \frac{1}{2\Delta t^2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n\right)^2 + \frac{\alpha}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^n\right)-\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n\right)\right]^2 \\
&+ \frac{1}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}\right)\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^{n}\right)
\end{aligned}$$

Usando o critério de estabilidade $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{1-4\alpha}}$, $\forall\alpha \in [0; 1/4)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{E_n}{\Delta x} &\geq \frac{1}{2}.\left(\frac{1-4\alpha}{\Delta x^2}\right)\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n\right)^2 + \frac{\alpha}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^n\right)-\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n\right)\right]^2 \\
&+ \frac{1}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}\right)\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^{n}\right)
\end{aligned}$$

Fazendo $\beta = min\left\{\frac{1-4\alpha}{\Delta x^2}, \frac{1}{\Delta x^2}\right\}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{E_n}{\Delta x} &\geq \beta\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}\right)\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^{n}\right)\right\} \\
&+ \frac{\alpha}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^n\right)-\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n\right)\right]^2
\end{aligned}$$

$$\geq \beta\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}\right)\left(\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^{n}\right)\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\left(\phi_j^{n+1}\right)^2 - 2\phi_j^{n+1}\phi_j^n + \left(\phi_j^n\right)^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1}\phi_{j+1}^n - \phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n - \phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n + \phi_j^{n+1}\phi_j^n\right)\right\} \\
&= \beta\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_j^{n+1}\right)^2 - \phi_j^{n+1}\phi_j^n + \left(\phi_j^n\right)^2 + \phi_{j+1}^{n+1}\phi_{j+1}^n - \phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n - \phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n\right]\right\}
\end{aligned}$$

Usando a identidade (3.19) e as condições de contorno, segue que

$$= \frac{\beta}{2}\left\{\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_j^{n+1}\right)^2 - \phi_j^{n+1}\phi_j^n + \left(\phi_j^n\right)^2 + \phi_j^{n+1}\phi_j^n - \phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n - \phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n\right] - \left(\phi_0^n\right)^2 + \left(\phi_{J+1}^{n+1}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{\beta}{2}\left\{\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_j^{n+1}\right)^2 + \left(\phi_j^n\right)^2 - \phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n - \phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n\right] - \left(\phi_0^n\right)^2 + \left(\phi_{J+1}^{n+1}\right)^2\right\}$$

Dividindo os termos do somatório por $\frac{1}{2}$ e usando as identidades (3.17) e (3.18), temos

$$\begin{aligned} = \frac{\beta}{2}\Bigg\{&\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\left[\left(\phi_j^{n+1}\right)^2 - 2\phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n + \left(\phi_{j+1}^n\right)^2\right] + \left[\left(\phi_{j+1}^{n+1}\right)^2 - 2\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n + \left(\phi_j^n\right)^2\right]\right) \\ &+\frac{1}{2}\left[\left(\phi_0^{n+1}\right)^2 - \left(\phi_{J+1}^{n+1}\right)^2 + \left(\phi_0^n\right)^2 - \left(\phi_{J+1}^n\right)^2\right] - \left(\phi_0^n\right)^2 + \left(\phi_{J+1}^{n+1}\right)^2\Bigg\}\end{aligned}$$

Aplicando novamente as condições de contorno na parcela final da equação acima, temos

$$\frac{1}{2}\left(\phi_0^n\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\phi_{J+1}^{n+1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\phi_0^n\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\phi_{J+1}^{n+1}\right)^2 - \left(\phi_0^n\right)^2 + \left(\phi_{J+1}^{n+1}\right)^2 = 0$$

Assim,

$$\frac{E_n}{\Delta x} \geq \frac{\beta}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{J}\left(\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^n\right)^2 + \left(\phi_j^{n+1} - \phi_{j+1}^n\right)^2\right)\right\}$$

Portanto,

$$\frac{E_n}{\Delta x} \geq \frac{\beta}{4}\sum_{j=0}^{J}\left[\left(\phi_j^{n+1} - \phi_{j+1}^n\right)^2 + \left(\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^n\right)^2\right] \geq 0$$

Capítulo 4

Conclusões

Iniciamos este trabalho fazendo uma descrição dos resultados alcançados em [9], a qual fazem referência sobre o estudo da estabilidade de esquemas numéricos para equação de difusão com coeficiente dependente do tempo. Com o problema totalmente discretizado em diferenças finitas e aplicando malha deslocada, os métodos analisados Crank - Nicolson e Euler (implícito e explícito) com diferentes combinações de condições de contorno, porém adequadas a cada método, mantiveram o seu comportamento esperado, com exceção do método de Crank - Nicolson com condições de contorno explícitas, que apesar de ser conhecido na literatura como um método implícito incondicionalmente instável tornou-se condicionalmente estável com a seguinte condição de estabilidade $0 < \sigma^j < 2$.

Devido a este fato, o qual nos motivou a realização deste estudo, passamos a analisar o comportamento do problema proposto $(18) - (20)$ onde tomamos o esquema numérico totalmente discreto em diferenças finitas. A priori, nosso intuito era realizar uma análise muito próxima da apresentada em [9], porém, deparamo-nos com algumas barreiras que tornaram tal análise "inviável", sob a perspectiva pretendida. Diante disso, passamos para o estudo das propriedades da energia do método explícito na busca de entender o comportamento da mesma quando analisada sob condições de contorno do tipo (17), para tanto verificamos que as propriedades de conservação da energia e positividade da energia mantiveram o comportamento semelhante quando o mesmo problema é aplicado com condições de Dirichlet. Na sequência, realizamos o mesmo estudo para a energia do sistema $(24) - (26)$ dado em [1], onde mostramos que as propriedades analisadas também são preservadas. Além disso, neste último sistema analisado, o critério de estabilidade $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{1-4\alpha}}, \forall \alpha \in [0; 1/4)$ é uma condição necessária para a positividade da energia.

Como continuidade deste trabalho, objetivamos analisar os métodos de Euler implítico e Crank - Nicolson em malha deslocada, aplicando as condições de contorno adequadas, uma vez que acreditamos que a condição de estabilidade para esses métodos, encontrada em [9], seja uma condição necessária para a positividade da energia e, dessa maneira, ampliar os resultados no que diz respeito à estabilidade para o tipo de problema proposto. Uma proposta mais ousada, também, é a busca de metodologias numéricas para analisar o comportamento de problemas com equações onde o coeficiente não depende do tempo, mais sim do espaço, o que torna a análise muito mais complexa.

Referências Bibliográficas

[1] A. MÜNCH, C.R. ACAD. Sci. Paris, Ser. I 336 (2004).

[2] CUMINATO, J. A.; JUNIOR, M. M. **Discretização de Equações Diferenciais Parciais - técnicas de diferenças finitas**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[3] DANSKIN, J.M.: **The theory of max-min with applications**. SIAM J. Appl. Math. **14**, 641-664 (1966).

[4] HARLOW, F. H.; WELCH, J. E. **Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface**. New Jersey, 2012.

[5] HORN, R.A., JOHNSON, C.R.: **Matrix Analysis**. Cambridge University Press, Cambridge (1996).

[6] INFANTE, J.A., ZUAZUA, E. **Boundary Observability for the Space-discretizations of the One-dimensional Wave Equation**. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 33. 407 - 438. (1999).

[7] NEGREANU, M.; ZUAZUA, E. **Uniform boundary controllability of a discrete 1-D wave equation**. Madrid, 2002.

[8] OISHI, C.M.; **Análise e implementação de métodos implícitos e de projeção para escoamentos com superfície livre**. USP - São Carlos, 2008.

[9] OISHI, C.M., YUAN, J.Y. CUMINATO, J.A. & STEWART, D.E. (2014) **Stability analysis of Crank-Nicolson and Euler schemes for time-dependent diffusion equations**. *BIT Numerical Mathematics.* **5**, 487-513.

[10] PEROT, B.; NALLAPATI, R. **A moving unstructured medh method for the simulation of incompressible free surface flows**. [S.l.], 2003.

[11] TVEITO, A.;WINTHER, R. **Introduction to partial differential equations: a computation approach**. Nova York; Springer, 1998.

[12] YUEH, W.C.: **Eigenvalues of several tridiagonal matrices**. Appl. Math. E-Notes 5, 66 − 74 (2005).