Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Dissertação de Mestrado

Algumas classes de problemas de autovalores generalizados para o operador $p\&q$-Laplaciano com domínio limitado.

Jefferson de Jesus Melo Macedo

Belém - PA
2018

Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Jefferson de Jesus Melo Macedo

Algumas classes de problemas de autovalores generalizados para o operador $p\&q$-Laplaciano com domínio limitado.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Rúbia Gonçalves Nascimento

Belém - PA
2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca de Pós-Graduação do ICEN/UFPA

Macedo, Jefferson de Jesus Melo
Algumas classes de problemas de autovalores generalizados para o operador p&q-Laplaciano e domínio limitado/Jefferson de Jesus Melo Macedo; orientador, Rúbia Gonçalves Nascimento.-2018.
53f. ; 29 cm
Inclui bibliografias
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística , Belém, 2018.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Problemas de autovalores. 3. P&Q Laplaciano 4. Operador quasilinear. I. Nascimento, Rúbia Gonçalves, orient. II. Título.

. .

CDD – 22 ed. 515.3533

Jefferson de Jesus Melo Macedo

Algumas classes de problemas de autovalores generalizados para o operador $p\&q$-Laplaciano com domínio limitado.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Rúbia G. Nascimento

Profª. Drª. Rúbia G. Nascimento - Orientadora
PPGME, UFPA

Augusto César dos R Costa

Prof. Dr. Augusto C. R. Costa - Membro
PPGME, UFPA

Gelson Conceição G. dos Santos

Prof. Dr. Gelson C. G. Santos - Membro externo
SEDUC/FAM

Belém 28, de março de 2018

Resultado: APROVADO.

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Pedro e Maria, por todo apoio, amor, dedicação e, acima de tudo, por sempre acreditarem em mim.

Agradeço a minha amada Karla, assim como sua família pelo apoio, em especial aos seus avós Josedett e Carlos.

Agradeço também a Professora Rúbia pela orientação e confiança, desde a iniciação científica (na graduação) até o presente momento.

Ao meu amigo Diogo, parceiro de copo (de café) em várias madrugadas de estudo, as vésperas de prova.

E as gatas Druguinha e Lyra, e ao meu cão Gauss.

E claramente agradeço ao CNPQ, cujo o auxílio tornou tudo isso possível.

Resumo

O objetivo deste trabalho é buscar autovalores generalizados para o problema (P_λ), dado por

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda |u|^{m-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $2 \leq p < n$, $m \in \mathbb{R}$ com $m > 1$, $\lambda > 0$ é um parâmetro real, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é um funcional de classe C^1 satisfazendo algumas condições.

Seguindo os passos de Barile, S. e Figueiredo, G. [5], solucionaremos o problema utilizando argumentos dos métodos de Minimização, Ekeland e Passo da Montanha. E quando necessário estimaremos um limitante inferior real positivo para λ, o autovalor associado ao problema (P_λ).

Palavras-chave: Equações diferenciais elípticas, Problemas de autovalores, $P\&Q$ Laplaciano, Operador quasilinear.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo preliminar sobre uma classe mais geral de problemas de autovalor do tipo $p\&q$-Laplaciano, dado por:

$$(P_\lambda)\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda|u|^{m-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde λ é um parâmetro real positivo, Ω é um domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$, $2 \leq p < n$, $m \in \mathbb{R}$ com $m > 1$, em intervalos a serem estudados ao longo do trabalho.

Esta dissertação é um estudo de Barile, S. e Figueiredo, G. [5], onde os autores tratam da existência de soluções não triviais para a classe de problemas elíptico quasilinear (P_λ), onde a função $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1 satisfazendo as seguintes hipóteses:

(a_1) Existem constantes $\xi_i > 0$, $i = 0, 1, 2, 3$, $1 < p \leq q < n$ tal que

$$\xi_0 + \xi_1 t^{(q-p)/p} \leq a(t) \leq \xi_2 + \xi_3 t^{(q-p)/p}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

E ainda, desde que

$$\xi_3 t^{(q-p)/p}.t^{(p-1)/p} = \xi_3 t^{(q-1)/p},$$

temos

$$a(t)t^{(p-1)/p} \leq \xi_2 t^{(p-1)/p} + \xi_3 t^{(q-1)/p}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{1}$$

A seguir, listamos hipóteses adicionais sobre a, que serão usadas posteriormente em casos específicos.

(a_2) Existe uma constante real positiva α com $\frac{q}{p} \leq \alpha < \frac{m}{p}$ tal que

$$\frac{1}{\alpha}a(t)t \leq A(t) = \int_0^t a(s)ds, \text{ para todo } t \geq 0;$$

Note que, tal hipótese é possível desde que $q < m$.

(a_3) A função $t \to A(t^p)$, onde $t \in \mathbb{R}$ é convexa e não decrescente no intervalo $(0, +\infty)$.

(a_4) A aplicação $t \to a(t)t^{(p-2)/p}$ é crescente para todo $t \geq 0$;

(a_5) A aplicação a e a derivada a' satisfaz

$$a'(t)t < \left(\frac{q-p}{p}\right) a(t), \text{ para todo } t > 0.$$

A hipótese (a_2) fornecerá condições suficientes para mostrarmos que toda sequência $(PS)_c$ é limitada. Mais precisamente na aplicação do Teorema do Passo da Montanha.

A hipótese (a_3) nos possibilitará abordar o problema (P_λ) via método de minimização, isto é, por (a_3) o funcional energia associado ao problema é fracamente semicontínuo inferiormente.

Por outro lado, (a_4) nos garante condições necessárias para a aplicação do Princípio Variacional de Ekeland.

Enquanto que (a_5) será de fundamental importância para a existência de solução fraca, mais precisamente tal hipótese irá garantir condições necessárias para a existência de solução fraca não trivial, via Teorema do Passo da Montanha.

Observamos que a existência de soluções fracas esta diretamente ligada com as relações entre p, q e m. Desta forma há a necessidade de dividir em casos e quando necessário, dar estimativas ao parâmetro λ.

Este problema, do tipo $p\&q$-Laplaciano, envolve uma classe bem geral de operadores em que tal generalidade será ilustrada, através de alguns exemplos, pela função a:

Exemplo 0.1. *Se $a \equiv 1$, o operador é o p-laplaciano. Assim o problema (P_λ) é dado por*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{m-2} u & \textit{em } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

com $q = p$ e $\xi_0 + \xi_1 = \xi_2 + \xi_3 = 1$.

Exemplo 0.2. *Se $a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}}$ obtemos*

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda |u|^{m-2} u & \textit{em } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

com $\xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1$.

Exemplo 0.3. . *Considerando* $a(t) = 1 + \frac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$ *temos*

$$\begin{cases} -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|\nabla u|^{p})^{\frac{p-2}{p}}}\right) = \lambda |u|^{m-2}u & em\ \Omega, \\ u = 0 & sobre\ \partial\Omega. \end{cases}$$

com $q = p$, $\xi_0 + \xi_1 = 1$ *e* $\xi_2 + \xi_3 = 2$.

Problemas envolvendo operadores $p\&q$-Laplaciano tem recebido atenção especial nos últimos anos, não somente pelo seu interesse matemático, mas também porque modela situações em várias áreas das ciências, tais como em física, biofísica e química. Dentre os recentes trabalhos, podemos citar Barile, S. e Figueiredo, G. [3], onde é estudado o problema

$$-div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u)$$

onde, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 satisfazendo determinadas condições de crescimento com domínio limitado Ω. Estes mesmos autores em [4] abordam o problema

$$-div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + V(x)b(|u|^p)|u|^{p-2}u = K(x)f(u)$$

onde, $a, b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 e $V, K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções contínuas sob determinadas condições de crescimento.

No entanto, existem poucos resultados que tratam de autovalores generalizados para operadores $p\&q$-Laplaciano, dentre os resultados encontrados, podemos destacar o trabalho de Benouhiba, N. e Belyacine, Z. [6], onde os autores mostram a existência de uma família contínua de autovalores positivos generalizados associado a equação

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda g(x)|u|^{q-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^n,$$

com g não-negativa e $1 < p < m = q < p^*$.

Outro estudo interessante e mais geral sobre autovalores associados às equações do tipo $p\&q$-Laplaciano, é fornecido por Montreanu, D. e Tanaka, M. em [12], onde os autores consideraram o seguinte problema

$$-\mu\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda(\mu m_p(x)|u|^{p-2}u + m_q(x)|u|^{q-2}u) \quad \text{em } \Omega,$$

com Ω suave e limitado em $\mathbb{R}^n$, $\mu > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, m_p, m_q limitados em Ω.

Quanto ao trabalho de Barile e Figueiredo [5], o qual nos propomos a estudar, tem por motivação lidar com o problema mais geral (P_λ), abrangendo problemas de autovalores, incluindo os casos com operadores $p\&q$-Laplaciano.

Capítulo 1

Definições e Resultados Básicos

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados, que serão utilizados ao longo deste trabalho. Assim como os métodos da teoria dos pontos críticos, que nos permitirá abordar o problema (P_λ).

1.1 Funcional semicontínuo inferiormente

Nessa seção, apresentaremos algumas definições e teoremas sobre funcional semicontínuo inferiormente.

Definição 1.1. *Seja E um espaço topológico. A função $\phi : E \to \mathbb{R}$ é dita ser **semicontínua inferiormente** se, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $\phi^{-1}(\lambda, +\infty)$ é aberto em E, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Note que, toda função contínua $\phi : E \to \mathbb{R}$ é um funcional semicontínuo inferiormente.

Definição 1.2. *Seja E um espaço topológico. A função $\phi : E \to \mathbb{R}$ é dita ser **sequencialmente semicontínua inferiormente** se, para toda função $(x_n) \subset E$, tal que, $x_n \to x$, tem se*

$$\phi(x) \leq \liminf \phi(x_n)$$

O teorema a seguir nos garante que em um espaço métrico a noção de semicontínuo inferiormente coincide com a noção de sequencialmente semicontínuo inferiormente (Veja a demonstração em [9]).

Teorema 1.1. *Se E é um espaço métrico, então $\phi : E \to \mathbb{R}$ é semicontínuo inferiormente se, e somente se, é sequencialmente semicontínua inferiormente.*

Definição 1.3. *Seja E um espaço normado. Uma função $\phi : E \to \mathbb{R}$ é um funcional* ***fracamente semicontínuo inferiormente*** *quando ϕ é um funcional semicontínuo inferiormente considerando-se X com sua topologia fraca.*

Definição 1.4. *Seja E um espaço vetorial. A função $\phi : E \to \mathbb{R}$ é dito ser* ***convexo*** *se*

$$\phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y) \quad \forall x, y \in E, \quad \forall t \in (0,1).$$

A partir das definições acima, podemos enunciar o importante resultado que pode ser encontrado em [9]:

Teorema 1.2. *Seja E é um espaço de banach e $\phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional convexo. Então a noção de (fortemente) semicontínuo inferiormente coincide com a noção de fracamente semicontínuo inferiormente.*

Em outras palavras, se E é um espaço de banach e $\phi : E \to \mathbb{R}$ é contínua e convexa. Então ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente se, e somente se, toda sequência $(x_n) \subset E$, tal que, $x_n \rightharpoonup x$ temos

$$\phi(x) \leq \liminf \phi(x_n).$$

1.2 Noções de diferenciabilidade

A seguir apresentaremos algumas noções de diferenciabilidade para o funcional $I : E \to \mathbb{R}$, onde E é um espaço de Banach.

Definição 1.5. *O funcional I é dito ser Gâteaux diferenciável em u, se existe um funcional linear $T_u \in E'$, tal que,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - f(x)}{t} = T_u v, \quad \forall v.$$

Onde funcional linear T_u é chamado derivada de Gâteaux de I em u.

Isto é, se para algum $u \in E$ o limite

$$\frac{\partial I}{\partial v}(u) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} I(u+tv) = \lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t}$$

existe, dizemos que I tem derivada direcional de u na direção de v. Assim I é Gâteaux diferenciável em u se, e somente se, toda derivada direcional $\frac{\partial I}{\partial v}(u)$ existe e é um funcional linear limitado, o qual denotamos por

$$DI(u) : v \mapsto \frac{\partial I}{\partial v}(u).$$

Definição 1.6. *O funcional I é dito ser Fréchet diferenciável em u quando existe um funcional linear $T \in E'$, tal que,*

$$\lim_{||v|| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Tv}{||v||} = 0.$$

O qual denotamos por $I'(u)$.

Isto é, I é Fréchet diferenciável se a derivada de Gateaux existe uniformemente em v sobre uma esfera unitária de E. E além disso, se I é Fréchet diferenciável temos $I'(u) = DI(u)$.

Definição 1.7. *Se A é um conjunto aberto em E, dizemos que funcional I é de classe C^1 em A ou simplesmente $I \in C^1(A, \mathbb{R})$ quando é Fréchet diferenciável em todo ponto $u \in E$ e o operador $I' : A \to E'$ é contínuo.*

Em outras palavras, $I \in C^1(A)$ se, a derivada de Gateaux existe e o operador $DI : E \to E'$ existe e é continuo.

1.3 Algumas ferramentas clássicas da teoria dos pontos críticos

O método de minimização consistem em mostrar que todo funcional, que satisfaz determinadas condições, é limitado inferiormente e tem seu ínfimo atingido. Assim, enunciamos o seguinte resultado:

Teorema 1.3. *Seja E um espaço de Hilbert ou Banach reflexivo e $\phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional tal que:*

i) ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente.

ii) ϕ é coercivo, isto é, $\phi(u) \to +\infty$ quando $||u|| \to +\infty$.

Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in E$ tal que

$$\phi(u_0) = \inf_E \phi.$$

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em [11].

O próximo resultado trata-se de um teorema provado por Ekeland em 1972 (veja [8]), o qual é uma poderosa ferramenta na busca de soluções fracas, para uma ampla classe de problemas.

Teorema 1.4. *(Princípio variacional de Ekeland) Sejam X um espaço Métrico Completo e $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente. Suponhamos que ϕ seja limitado inferiormente e sejam $\epsilon > 0$, $\lambda > 0$ e $u \in X$ dados tais que*

$$\phi(u) \leq \inf_X \phi + \frac{\epsilon}{2}.$$

Então existe $u_\epsilon \in X$ tal que

(a) $\phi(u_\epsilon) \leq \phi(u)$;

(b) $d(u, u_\epsilon) \leq \frac{1}{\lambda}$;

(c) Para cada $w \neq u_\epsilon \in X$, $\phi(u_\epsilon) < \phi(w) + \epsilon\lambda d(u_\epsilon, w)$.

De modo a apresentar uma consequência do Princípio Variacional de Ekeland, de fundamental importância para este trabalho, precisaremos da seguintes definições:

Definição 1.8. *Sejam E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Dizemos que a sequência $(u_n) \subset E$ é Palais-Smale nível c para I, ou simplesmente, (u_n) é $(PS)_c$ para I, se existirem $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n) \subset E$ tais que*

$$I(u_n) \to c$$

e

$$I'(u_n) \to 0.$$

Dizemos que I satisfaz a condição $(PS)_c$, se toda sequência $(PS)_c$ possui uma subsequência que converge forte em E.

Corolário 1.1. *Sejam E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 limitado inferiormente. Então, existe (u_n) uma sequência Palais-Smale no nível c para I, onde $c = \inf_{u \in E} I(u)$.*

A partir daqui, quando nos referirmos do Princípio Variacional de Ekeland, mas precisamente estaremos nos referindo do seguinte resultado:

Corolário 1.2. *Sejam E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 limitado inferiormente. Se I satisfaz a condição $(PS)_c$ com $c = \inf_{u \in E} I(u)$, então c é atingido em um ponto $u_0 \in E$, e u_0 é ponto crítico de I.*

Agora apresentaremos o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosseti e Rabinowitz, cuja a demonstração pode ser encontrada em [2].

Proposição 1.1. *Sejam E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que:*

(i) Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tal que

$$I(u) \geq \alpha > 0 \quad \textit{para todo} \quad u \in E, \textit{ se } ||u|| = \rho;$$

(ii) Existe $e \in E$ tal que $||e|| > \rho$ e $I(e) < 0$.

Seja

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{[0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E), \textit{ tal que } \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Se I satisfaz a condição $(PS)_c$, então c é um valor crítico de I, isto é, existe $u \in E$ tal que

$$I(u) = c \textit{ e } I'(u) = 0.$$

Capítulo 2

Estrutura Variacional

Neste capítulo estudaremos a estrutura variacional do problema (P_λ), isto é, temos por objetivo associar ao problema (P_λ) um funcional J_λ, de modo que os pontos críticos do funcional sejam soluções fracas para o problema. Mas desde que, o problema em questão é do tipo $p\&q$-Laplaciano, é natural precisarmos de alguns resultados preliminares sobre os espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,q}(\Omega)$.

2.1 O espaço normado $W_0^{1,q}(\Omega)$.

No que segue $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $p \leq q$. Assim resulta na inclusão dos espaços de Sobolev $W_0^{1,q}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, pois desde que $p \leq q$ temos

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

assim

$$W_0^{1,q}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega).$$

Logo,

$$W_0^{1,q}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,q}(\Omega)$$

Portanto, consideramos como espaço funcional o espaço $W_0^{1,q}(\Omega)$ dotado da norma

$$||u||_{W_0^{1,q}} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^q\right)^{1/q}.$$

Lembrando que a norma clássica em $W^{1,q}(\Omega)$ dada por

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^q dx + \int_\Omega |u|^q dx\right)^{1/q}$$

é equivalente a norma $||\cdot||_{W_0^{1,q}}$ em $W_0^{1,q}(\Omega)$.

De fato, desde que Ω é aberto limitado, pela desigualdade de Poincaré existe uma constante positiva $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^q dx + \int_\Omega |u|^q dx &\leq \int_\Omega |\nabla u|^q dx + C\int_\Omega |\nabla u|^q dx \\ &= (C+1)\int_\Omega |\nabla u|^q dx. \end{aligned}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Observe que também podemos munir o espaço $W_0^{1,q}(\Omega)$, com a norma $||\cdot||$ dada por

$$||u|| = ||u||_{W_0^{1,p}} + ||u||_{W_0^{1,q}}.$$

Note que $||\cdot||$ é equivalente a norma $||\cdot||_{W_0^{1,q}}$.

Vale recordar que $W_0^{1,q}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^r(\Omega)$ para todo $r \in [1, q^*]$ e

$$W_0^{1,p}(\Omega) \text{ ésta imerso compactamente em } L^r(\Omega) \text{ para todo } r \in [1, q^*). \tag{2.1}$$

Ver Apêndice, Teorema 3.16.

Na sequência denotamos por $||\cdot||_{L^r}$ a norma clássica em $L^r(\Omega)$.

2.2 Funcional energia.

Dado o problema (P_λ)

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda |u|^{m-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Recordamos que $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ é uma solução fraca para o problema (P_λ), se u satisfaz a seguinte expressão

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{m-2}uv dx = 0, \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,q}(\Omega). \tag{2.2}$$

Assim, as soluções fracas do problema são pontos críticos do funcional $J_\lambda : W_0^{1,q}(\Omega) \to \mathbb{R}$ se, e somente se, o funcional satisfaz

$$\langle J'_\lambda(u), v\rangle = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{m-2}uv dx = 0,$$

para todo $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$. Logo, um candidato natural a funcional associado ao problema (P_λ), no sentido das derivadas de Gâteaux, é dado por

$$J_\lambda(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx.$$

Tal funcional é chamado funcional energia do problema (P_λ) e segue da condição de crescimento subcrítico (a_1), que o funcional energia J_λ e a expressão (2.2) são bem definidos, onde

$$A(t) = \int_0^t a(s)ds.$$

Agora, verificaremos que J_λ é de fato, o funcional associado ao problema.

Proposição 2.1. *O funcional* $J_\lambda : W_0^{1,q}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$J_\lambda(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx$$

está bem definido e é de classe $C^1(W_0^{1,q}(\Omega), \mathbb{R})$, *com*

$$J'_\lambda(u)v = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx - \lambda\int_\Omega |u|^{m-2}uv dx,$$

para todo $u, v \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Demonstração. Fazendo

$$J_1(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx \quad \text{e} \quad J_2(u) = \frac{1}{m}\int_\Omega |u|^m dx,$$

temos

$$J_\lambda(u) = J_1(u) - \lambda J_2(u).$$

Logo, basta verificar que $J_1, J_2 \in C^1(W_0^{1,q}(\Omega), \mathbb{R})$. Para tal, mostraremos que a derivada de Gateaux de J_1 e J_2 existem e são contínuas. De fato, primeiramente para J_1, considere $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$, $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(s) = A(|\nabla(u + stv)|^p)\frac{1}{p}.$$

Onde:

a) $f'(s) = t.a(|\nabla(u + stv)|^p).|\nabla(u + stv)|^{p-2}v$;

b) $f(1) = \frac{1}{p}A(|\nabla(u + tv)|^p)$;

$c)$ $f(0) = \frac{1}{p}A(|\nabla u|^p)$.

Sendo f diferenciável em $[0,1]$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(\lambda),$$

ou seja,

$$\frac{1}{p}A(|\nabla(u+tv)|^p) - \frac{1}{p}A(|\nabla(u)|^p) = t.a(|\nabla(u+\lambda tv)|^p).|\nabla(u+\lambda tv)|^{p-2}.\nabla(u+\lambda tv).\nabla v.$$

Observe que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{p}A(|\nabla(u+tv)|^p) - \frac{1}{p}A(|\nabla(u)|^p)}{t} = a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v. \tag{2.3}$$

Da desigualdade (1) temos

$$\begin{aligned} |a(|\nabla u|^p).|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v| &\leq (\xi_2|\nabla u|^{p-2} + \xi_3|\nabla u|^{q-2})|\nabla u||\nabla v| \\ &= \xi_2|\nabla u|^{p-1}|\nabla v| + \xi_3|\nabla u|^{q-1}|\nabla v|, \end{aligned}$$

onde claramente $|\nabla u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ e $|\nabla v| \in L^p(\Omega)$.
Logo, pela desigualdade de Hölder temos

$$\xi_2|\nabla u|^{p-1}|\nabla v| \in L^1(\Omega).$$

Analogamente,

$$\xi_3|\nabla u|^{q-1}|\nabla v| \in L^1(\Omega).$$

Portanto, (2.3) é integrável e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{\frac{1}{p}A(|\nabla(u+tv)|) - \frac{1}{p}A(|\nabla u|^p)}{t}dx = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx,$$

ou seja, existe a derivada de Gateaux de J_1 em u com

$$J_1'(u)v = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Verificaremos agora a continuidade de $J_1'(u)v$. Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ temos

$$|\nabla u_n| \to |\nabla u| \quad \text{em} \quad L^p(\Omega).$$

Pelo Teorema de Vainberg, existe uma subsequência (a qual denotaremos simplesmente por (u_n)) e uma função $g \in L^p(\Omega)$ tal que

$$|\nabla u_n(x)| \to |\nabla u(x)| \quad \text{q.t.p. em } \Omega \tag{2.4}$$

e

$$|\nabla u_n| \leq g, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Note que para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $||v|| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |J_1'(u_n)v - J_1'(u)v| &= \left| \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v dx - \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u||\nabla v|dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder com expoente $\frac{p}{p-1}$ e p obtemos

$$|J_1'(u_n)v - J_1'(u)v| \leq \left(\int_\Omega |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} ||J_1'(u_n)v - J_1'(u)v|| &:= \sup_{||v|| \leq 1} |[J_1'(u_n) - J_1'(u)]\, v| \\ &\leq \left(\int_\Omega |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Observe que pela continuidade de a e por (2.4) temos

$$\begin{aligned} & |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u| \\ = \ & |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u + a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u - \\ & -a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u| \\ \leq \ & |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}||\nabla u_n - \nabla u| + |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2} - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}||\nabla u| \\ = \ & o_n(1). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Isto é,

$$|a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}} \to 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

Desde que $|\nabla u_n|^p \to |\nabla u|^p$, pela continuidade de a temos

$$|a(|\nabla u_n|^p)| \to a(|\nabla u|^p),$$

isto é, $|a(|\nabla u_n|^p)| \leq k$. Assim, de (2.5) temos

$$\begin{aligned}
& |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}} \\
\leq\ & \left[|a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n| + |a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u|\right]^{\frac{p}{p-1}} \\
\leq\ & \left[k(||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n| + |\nabla u|^{p-2}\nabla u||)\right]^{\frac{p}{p-1}} \\
=\ & k^{\frac{p}{p-1}}(||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n| + |\nabla u|^{p-2}\nabla u||)^{\frac{p}{p-1}} \\
\leq\ & k^{\frac{p}{p-1}}2^{\frac{1}{p-1}}(|\nabla u_n|^p + |\nabla u|^p) \\
\leq\ & k^{\frac{p}{p-1}}2^{\frac{1}{p-1}}(g^p + |\nabla u|^p) \ \ \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}}dx = 0.$$

Por (2.6) concluímos que

$$||J_1'(u_n) - J_1'(u)|| \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to 0,$$

ou seja, $J_1'(u_n) \to J_1'(u)$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))'$. Implicando que $J_1 \in C^1(W_0^{1,q}(\Omega), \mathbb{R})$.

Verificaremos agora que $J_2 \in C^1(W_0^{1,q}(\Omega), \mathbb{R})$. Para tal verificaremos que a derivada de Gateaux de J_2 existe e é contínua. Consideremos $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$, e $u, v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ e a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = \frac{1}{m}|u + stv|^m.$$

Temos que:

a) $f'(s) = t|u + stv|^{m-2}(u + stv)v$;

b) $f(1) = \frac{1}{m}|u + tv|^m$;

c) $f(0) = \frac{1}{m}|u|^m$.

Desde que f é diferenciável em $(0, 1)$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(\lambda),$$

ou seja,

$$\frac{1}{t}(\frac{1}{m}|u + tv|^m - \frac{1}{m}|u|^m) = |u + stv|^{m-2}(u + stv)v.$$

Note que,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{m}|u+tv|^m-\frac{1}{m}|u|^m}{t}=|u(x)|^{m-2}u(x)v(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e

$$\left|\frac{\frac{1}{m}|u+tv|^m-\frac{1}{m}|u|^m}{t}\right|\leq (|u|+|v|)^{m-1}|v|,$$

onde $(|u|+|v|)^{m-1}\in L^{\frac{m}{m-1}}(\Omega)$ e $|v|\in L^m(\Omega)$. Logo, por Hölder $(|u|+|v|)^{m-1}|v|\in L^1(\Omega)$. Portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{\frac{1}{m}|u+tv|^m-\frac{1}{m}|u|^m}{t}dx=\int_\Omega |u|^{m-2}uvdx.$$

Assim, concluímos

$$\begin{aligned} J_2'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{J_2(u+tv)-J(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{\frac{1}{m}|u+tv|^m-\frac{1}{m}|u|^m}{t}dx=\int_\Omega |u|^{m-2}.u.vdx. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Portanto, existe a derivada de Gateaux de J_2 em u com

$$J_2'(u)v=\int_\Omega |u|^{m-2}uvdx \quad \forall v\in W_0^{1,q}(\Omega).$$

Precisamos verificar agora a continuidade da derivada de Gateaux de J_2. Considere $(u_n)\subset W_0^{1,q}(\Omega)$ tal que $u_n\to u$ em $W_0^{1,q}(\Omega)$. Desde que $m\in[1,q^*)$, por imersão compacta temos

$$|u_n|\to|u| \quad \text{em } L^m(\Omega).$$

e segue do Teorema de Vainberg, que existe uma subsequência (u_n) e uma função $g\in L^m(\Omega)$ tais que

$$|u_n(x)|\to|u(x)| \quad \text{em } \Omega \tag{2.9}$$

e

$$|u_n|\leq g, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \tag{2.10}$$

para todo $v\in W_0^{1,q}(\Omega)$ com $||v||\leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |J_2'(u_n)v-J_2'(u)v| &\leq \left|\int_\Omega |u_n|^{m-2}u_nvdx-\int_\Omega |u|^{m-2}uvdx\right| \\ &= \left|\int_\Omega (|u_n|^{m-2}u_n-|u|^{m-2}u)vdx\right| \\ &\leq \int_\Omega ||u_n|^{m-2}u_n-|u|^{m-2}u||v|dx, \end{aligned}$$

e pela desigualdade de Hölder com expoente $\frac{p}{p-1}$ e p obtemos

$$\begin{aligned}
|J_2'(u_n)v - J_2'(u)v| &\leq \left(\int_\Omega ||u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u|^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} ||v|| \\
&\leq \left(\int_\Omega ||u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u|^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
||J_2'(u_n)v - J_2'(u)v|| &:= \sup_{||v||\leq 1} |J_2'(u_n)v - J_2'(u)v| \\
&\leq \left(\int_\Omega ||u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u|^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Note que de (2.9)

$$\begin{aligned}
||u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u| &= ||u_n|^{m-2}u_n - |u_n|^{m-2}u + |u_n|^{m-2}u - |u|^{m-2}u| \\
&\leq |u_n|^{m-2}|u_n - u| + ||u_n|^{m-2} - |u|^{m-2}||u| = O_n(1) \quad \text{q.t.p.}
\end{aligned}$$

enquanto que de (2.10) temos

$$||u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u|^{\frac{p}{p-1}} \leq 2^{\frac{1}{p-1}}\left(g^p + |u|^p\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Onde $g^p, |u|^p \in L^1(\Omega)$ e portanto, $2^{\frac{1}{p-1}}\left(g^p + |u|^p\right) \in L^1(\Omega)$.

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega ||u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u|^{\frac{p}{p-1}}dx = 0.$$

De (2.11), concluímos que

$$||J_2'(u_n) - J_2'(u)|| \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

ou seja,

$$J_2'(u_n) \to J_2'(u) \quad \text{em} \quad \left(W_0^{1,q}(\Omega)\right)'.$$

Mostrando que $J_2 \in C^1(W_0^{1,q}(\Omega), \mathbb{R})$. □

Lembremos agora, a definição de autovalor.

Definição 2.1. *Dizemos que λ é um autovalor do problema (P_λ) quando*

$$\int_\Omega a(|\nabla\phi|^p)|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\nabla v = \int_\Omega \lambda|\phi|^{p-2}\phi v.$$

A função $\phi \neq 0$ é chamada de autofunção do operador p&q*-Laplaciano associada ao autovalor λ.*

Nesse sentido, temos que, se λ é um autovalor, a autofunção correspondente $\phi \in W_0^{1,q}(\Omega)\backslash\{0\}$ é uma solução fraca não trivial para o problema (P_λ).

Em particular, denotamos por $\lambda_1(q)$(respectivamente $\psi_1(q)$) o principal autovalor (respectivamente a autofunção) para o problema q-Laplaciano $-\Delta_q u = \lambda(q)|u|^{q-2}u$ (com $1 < p \leq q < n$).

Capítulo 3

O Problema (P_λ).

Neste capítulo, buscaremos soluções fracas para o problema (P_λ), por meio do método de Minimização e/ou Princípio Variacional de Ekeland ou Teorema do Passo da Montanha. Ao longo deste capítulo ficará claro que a disposição de m com relação ao intervalo p, q, determinará diferentes classes de problemas, assim como seu método de resolução. Em dados momentos será necessário dar estimativas para o parâmetro λ, de modo a garantir a existência de soluções fracas não-triviais.

Assim é natural estudarmos essas classes de problemas separadamente. Logo, consideraremos os seguintes casos:

Caso 1: $1 < m \leq 2 \leq p \leq q < q^*$;

Caso 2: $2 \leq p < m < q < q^*$ ou $2 \leq p < m = q < m^* = q^*$;

Caso 3: $2 \leq p \leq q < m < q^*$.

Claramente, os casos expostos acima "contém subcasos", que serão estudados a seguir.

Caso 1: $1 < m \leq 2 \leq p \leq q < q^*$.

Dentro do Caso 1 há quatro possibilidades a serem estudadas. Assim iremos começar por:

Caso 1.1 - $1 < m \leq 2 < p = q < p^* = q^*$.

Verificaremos agora que o problema (P_λ) possui solução fraca para todo $\lambda > 0$, isto é, λ é um autovalor generalizado para o problema (P_λ). Para tal utilizaremos o método de

Minimização (Ver Teorema 1.3), isto é, verificaremos que o funcional energia J_λ é fracamente semicontínuo inferiormente e coercivo, logo terá ponto de mínimo. Em seguida verificaremos que tal ponto é não-nulo, ou seja, uma solução fraca não trivial de (P_λ).

Teorema 3.1. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfazendo (a_1) e (a_3) com $1 < m \leq 2 < p = q < p^* = q^*$. Então para todo $\lambda > 0$ o problema (P_λ) possui pelo menos uma solução fraca, ou seja, qualquer $\lambda > 0$ é um autovalor generalizado para o problema (P_λ).*

Demonstração. Primeiramente, observe que, por (a_1) temos

$$\begin{aligned} a(|\nabla u|^p) &\geq \xi_0 + \xi_1(|\nabla u|^p)^{(q-p)/p} \\ &= \xi_0 + \xi_1(|\nabla u|)^{(q-p)} \\ &= \xi_0 + \xi_1. \end{aligned}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo, tomando $t = |\nabla u|^p$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^t a(s)ds &\geq \int_0^t \xi_0 + \xi_1 ds \\ A(|\nabla u|^p) &\geq (\xi_0 + \xi_1)|\nabla u|^p. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$A(|\nabla u|^p) \leq (\xi_2 + \xi_3)|\nabla u|^p.$$

Assim por (a_1) e imersão continua de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^m(\Omega), \quad \forall m \in [1, p^*)$ temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\ &\geq \frac{1}{p}\int_\Omega (\xi_0 + \xi_1)|\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\ &= \frac{(\xi_0 + \xi_1)}{p}||u||^p_{W_0^{1,p}} - \frac{\lambda}{m}||u||^m_{L^m} \\ &\geq \frac{(\xi_0 + \xi_1)}{p}||u||^p_{W_0^{1,p}} - \frac{\lambda}{m}C||u||^m_{W_0^{1,p}}. \end{aligned}$$

Denotando por

$$\varphi(||u||_{W_0^{1,p}}) = \frac{(\xi_0 + \xi_1)}{p}||u||^p_{W_0^{1,p}} - \frac{\lambda}{m}C||u||^m_{W_0^{1,p}}$$

e $||u||_{W_0^{1,p}} = t > 0$, seque da continuidade das normas, que $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é um funcional contínuo e desde que $m < p$, é imediato que $\varphi(t)/t \to +\infty$ quando $t \to +\infty$ e $J_\lambda(u) \geq$

$\varphi(||u||_{W_0^{1,p}})$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Assim, para todo $K > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que $\varphi(t)/t \geq K$ para todo $t > t_0$. Portanto,

$$J_\lambda(u) \geq \varphi(||u||_{W_0^{1,p}}) \geq K||u||_{W_0^{1,p}} > Kt_0,$$

se $||u||_{W_0^{1,p}} > t_0$.

Se $||u||_{W_0^{1,p}} \leq t_0$ temos pela continuidade de φ, que existe $\bar{C}$, tal que,

$$J_\lambda \geq \bar{C} = min\{\varphi(t) : 0 \leq t \leq t_0\}.$$

Isso implica que para todo $\lambda > 0$, J_λ é limitado inferiormente. Mais além,

$$J_\lambda(u)/||u||_{W_0^{1,p}} \to +\infty \quad \text{com} \quad ||u||_{W_0^{1,p}} \to +\infty,$$

ou seja, J_λ é coercivo.

Agora provaremos que J_λ é fracamente semicontínuo inferiormente em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

De fato, para toda sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, por imersão compacta (2.1) temos que $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$ para todo $r \in [1, p^*)$ e, desde que $m < p < p^*$, segue que

$$\int_\Omega |u_n|^m dx \to \int_\Omega |u|^m dx, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Mais além, de (a_3) temos que $t \mapsto A(t^p)$ é convexo e contínuo, assim o funcional é fracamente semicontínuo inferiormente, isto é

$$\int_\Omega A(|\nabla u|^p) dx \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int_\Omega A(|\nabla(u_n)|^p) dx.$$

Assim obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \inf J_\lambda(u_n) &= \frac{1}{p} \lim_{n\to+\infty} \inf \int_\Omega A(|\nabla(u_n)|^p) dx - \frac{\lambda}{m} \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |u_n|^m dx \\
&\geq \frac{1}{p} \int_\Omega A(|\nabla u|^p) dx - \frac{\lambda}{m} \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |u_n|^m dx \\
&= \frac{1}{p} \int_\Omega A(|\nabla u|^p) dx - \frac{\lambda}{m} \int_\Omega |u|^m dx \\
&= J_\lambda(u).
\end{aligned}$$

Consequentemente pelo Teorema 1.3, nós temos a existência de um ponto mínimo $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$J_\lambda(w) = \min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} J_\lambda(u).$$

Portanto, w é uma solução fraca para nosso problema.

Para mostrar que w é uma solução não trivial, consideremos $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $t^* > 0$ suficientemente pequeno, de modo que

$$\begin{aligned} J_\lambda(w) &\leq J_\lambda(t^*v) \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla t^* v|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |t^*v|^m dx \\ &\leq \frac{(\xi_2+\xi_3)(t^*)^p}{p}||v||^p_{W_0^{1,p}} - \frac{\lambda(t^*)^m}{m}||v||^m_m < 0 = J_\lambda(0), \end{aligned}$$

para todo $\lambda > 0$. Então, concluímos que $w \neq 0$. □

Ainda para o mesmo problema (P_λ), mas trocando a hipótese (a_3) por (a_4), verificaremos a existência de solução fraca não trivial, via argumentos do Princípio Variacional de Ekeland (Corolário 1.2), isto é, desde que J_λ é limitado inferiormente e se verificado que o funcional satisfaz a condição $(PS)_c$ com $c = \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} J_\lambda(u)$. Então existe $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tal que $J_\lambda(w) = c$ e $J'_\lambda(w) = 0$, é uma solução fraca para (P_λ). E analogamente ao resultado anterior, temos que este ponto crítico é uma solução não trivial.

Teorema 3.2. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfazendo (a_1) e (a_4) com $1 < m \leq 2 < p = q < p^* = q^*$. Então, para todo $\lambda > 0$ o problema (P_λ) possui pelo menos uma solução fraca não trivial ou, equivalentemente, qualquer $\lambda > 0$ é um autovalor generalizado para (P_λ).*

Demonstração. Desde que $J_\lambda \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, usando os mesmos argumentos feitos na demonstração do teorema anterior, seque que o funcional é limitado inferiormente e coercivo em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Assim pelo Corolário 1.1, existe (u_n), uma sequência Palais-Smale no nível c, onde $c = \inf_{u \in E} I(u)$.

Precisamos verificar agora se J_λ satisfaz a condição $(PS)_c$. De fato, note que pela coercividade do funcional, (u_n) é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$ (Caso contrário $J_\lambda(u_n) \to +\infty$ se $||u_n||_{W_0^{1,p}} \to +\infty$), assim existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a subsequência (u_n) converge fraco para u em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Nosso objetivo é provar a convergência forte de u_n para u em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Para tal escrevemos

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(u_n) - J'(u), u_n - u\rangle &= \int_\Omega \left(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right).(\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &\quad -\lambda\int_\Omega \left(|u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u\right)(u_n - u)dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Desde que, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, $J'_\lambda(u) \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$ e (u_n) é uma sequência $(PS)_c$, segue que $J'_\lambda(u_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$ em $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$, logo

$$\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u\rangle = o_n(1), \tag{3.2}$$

por imersão compacta (2.1) e pela continuidade de $\int_\Omega |u|^{m-2}uvdx$ temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(|u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u\right)(u_n - u)dx &= \int_\Omega |u_n|^m dx - \int_\Omega |u_n|^{m-2}u_n u dx \\
&\quad - \int_\Omega |u|^{m-2}u u_n dx + \int_\Omega |u|^m dx \\
&= o_n(1). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

De imediato, por (3.1),(3.2) e (3.3), temos

$$\int_\Omega \left(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right).(\nabla u_n - \nabla u)dx = o_n(1).$$

Agora, para todo $t \geq 0$, por (a_1) e por (a_4) obtemos a seguinte desigualdade (Ver Apêndice, Proposição 3.2)

$$C|x-y|^q \leq \left\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y\right\rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, n \geq 1.$$

Assim obtemos,

$$\begin{aligned}
C\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^q dx &\leq \int_\Omega \left(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right).(\nabla u_n - \nabla u)dx, \\
&= o_n(1)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$||u_n - u||_{W_0^{1,q}} = o_n(1).$$

Portanto, $J_\lambda(u) = c$ e $J'_\lambda(u) = 0$, isto é, u é uma solução fraca de (P_λ).

Segue da parte final da demonstração do Teorema 3.1 que u é não trivial. □

Caso 1.2 - $1 < m \leq 2 < p < q < q^*$.

Semelhante ao Teorema 3.1 utilizaremos o Método de minimização para mostrar a existência de solução fraca para o problema. Ressaltando que haverá pequenas mudanças, ao verificar que o funcional J_λ é limitado inferiormente e a solução fraca obtida é não trivial, devido as alterações na condição de crescimento com $p < q$. Mas, mesmo que $p < q$, iremos mostrar que $\lambda > 0$ é um autovalor generalizado para (P_λ).

Teorema 3.3. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfazendo (a_1) e (a_3) com $1 < m \leq 2 < p < q < q^*$. Então, todo $\lambda > 0$ é um autovalor generalizado para (P_λ), ou seja, para todo $\lambda > 0$ o problema (P_λ) possui pelo menos uma solução fraca não trivial.*

Demonstração. Integrando o lado esquerdo de (a_1) temos

$$\xi_0 t + \frac{p}{q}\xi_1 t^{q/p} \leq A(t),$$

isto é,

$$\frac{\xi_0}{p}|\nabla u|^p + \frac{\xi_1}{q}|\nabla u|^q \leq \frac{1}{p}A(|\nabla u|^p).$$

Logo,

$$\frac{\xi_0}{p}||u||^p_{W_0^{1,p}} + \frac{\xi_1}{q}||u||^q_{W_0^{1,q}} \leq \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx. \tag{3.4}$$

Analogamente pelo lado direito de (a_1) obtemos

$$\frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx \leq \frac{\xi_2}{p}||u||^p_{W_0^{1,p}} + \frac{\xi_3}{q}||u||^q_{W_0^{1,q}}, \quad \forall u \in W_0^{1,q}(\Omega). \tag{3.5}$$

De (3.4) e usando as imersões continuas de Sobolev, segue que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\ &\geq \frac{\xi_0}{p}||u||^p_{W_0^{1,p}} + \frac{\xi_1}{q}||u||^q_{W_0^{1,q}} - \frac{\lambda}{m}||u||^m_{L^m} \\ &\geq \frac{\xi_1}{q}||u||^q_{W_0^{1,q}} - \frac{\lambda}{m}C||u||^m_{W_0^{1,q}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Semelhante à demonstração do Teorema 3.1, denotamos $\varphi(||u||_{W_0^{1,q}})$ o lado direito da desigualdade (3.6), temos que J_λ é limitado inferiormente em $W_0^{1,q}(\Omega)$ para todo $\lambda > 0$. Mais além J_λ é também coercivo e, segue de imersão compacta (2.1) e de (a_3), que J_λ é fracamente semicontínuo inferiormente em $W_0^{1,q}(\Omega)$. Portanto, existe um ponto mínimo $w \in W_0^{1,q}(\Omega)$ tal que

$$J_\lambda(w) = \inf_{u \in W_0^{1,q}(\Omega)} J_\lambda(u)$$

e então w é uma solução para (P_λ).

Agora, tome $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ e $t^* > 0$ suficientemente pequeno, por (3.5) temos

$$J_\lambda(w) \leq J_{\lambda(t^* v)} \leq \frac{\xi_2 (t^*)^p}{p}||v||^p_{W_0^{1,p}} + \frac{\xi_3 (t^*)^q}{q}||v||^q_{W_0^{1,q}} - \frac{\lambda (t^*)^m}{m}||v||^m_{L^m} < 0$$

para todo $\lambda > 0$. Então, a solução encontrada w é não trivial. $\square$

A seguir, substituiremos a hipótese (a_3) por (a_4) e verificaremos que o problema (P_λ) possui solução fraca não trivial para todo $\lambda > 0$, por meio do Princípio Variacional de Ekeland.

Teorema 3.4. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz (a_1) e (a_4) com $1 < m < p < q < q^*$. Então, para todo $\lambda > 0$ o problema (P_λ) possui pelo menos uma solução fraca não trivial ou, equivalentemente, qualquer $\lambda > 0$ é um autovalor generalizado para (P_λ).*

Demonstração. Segue da demonstração do Teorema 3.3 que $J_\lambda \in C^1(W_0^{1,q}(\Omega), \mathbb{R})$ é limitado inferiormente e coercivo em $W_0^{1,q}(\Omega)$, resta mostrar que J_λ satisfaz a condição Palais-Smale com nível $c = \inf_{u \in W_0^{1,q}(\Omega)} J_\lambda(u)$, para tal assumiremos a hipótese (a_4).

De fato, seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$, segue da coercividade de J_λ que (u_n) é limitada. Então existe $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, tal que u_n converge fraco para u (a menos de uma subsequência) em $W_0^{1,q}(\Omega)$. Observe agora que por (2.1), pelo lado esquerdo de (a_1), para todo $t \geq 0$, isto é, $a(t) \geq \xi_0 + \xi_1 t^{(q-p)/p}$ e por (a_4) temos

$$C|x-y|^q \leq \left\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y \right\rangle$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Então, como na prova do Teorema 3.2 obtemos

$$C||u_n - u||^q_{W_0^{1,q}} \leq \int_\Omega \left(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)(\nabla u_n - \nabla u)dx = o_n(1)$$

portanto $||u_n - u||_{W_0^{1,q}} = o_n(1)$, e segue da demonstração anterior que u é não trivial. □

Caso 1.3 - $2 \leq m = p = q < m^* = p^* = q^*$.

Agora tomando $m = p = q$ obtemos um problema de autovalor para um operador p-laplaciano dado por

$$(P_\lambda) = \begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= \lambda |u|^{p-2}u \quad em \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad sobre \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma vez que são necessárias técnicas mais específicas para resolver o problema (P_λ) não homogêneo, buscamos exibir um limitante inferior para todo autovalor associado ao problema. Assim temos o seguinte resultado:

Teorema 3.5. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz* (a_1) *com* $2 \leq m = p = q < m^* = p^* = q^*$*. Então existe* $\lambda^* > 0$ *tal que, todo autovalor* $\lambda > 0$ *do problema* (P_λ) *é limitado inferiormente por* λ^**, isto é,* $\lambda \geq \lambda^*$*.*

Demonstração. De fato, suponhamos que $u \neq 0$ é uma solução para o problema (P_λ), então

$$\langle J'_\lambda(u), u\rangle = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla u dx - \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}u.u dx = 0$$

Logo,

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx = \lambda \int_\Omega |u|^p dx. \tag{3.7}$$

Pela hipótese (a_1)

$$(\xi_0 + \xi_1)|\nabla u|^p \quad \leq \quad a(|\nabla u|^p).|\nabla u|^p,$$

logo,

$$\int_\Omega (\xi_0 + \xi_1)|\nabla u|^p dx \quad \leq \quad \int_\Omega a(|\nabla u|^p).|\nabla u|^p dx, \tag{3.8}$$

isto é, de 3.7 e 3.8 temos

$$\int_\Omega (\xi_0 + \xi_1)|\nabla u|^p dx \leq \lambda \int_\Omega |u|^p dx = \lambda ||u||^p_{L^p},$$

por imersão de Sobolev obtemos

$$(\xi_0 + \xi_1)||u||^p_{W_0^{1,p}} \leq \frac{\lambda}{\lambda_1(p)}||u||^p_{W_0^{1,p}},$$

isto é,

$$(\xi_0 + \xi_1)\lambda_1(p) \leq \lambda.$$

Portanto, existe apenas solução trivial para $0 < \lambda < (\xi_0 + \xi_1)\lambda_1(p) = \lambda^*$ onde $\lambda_1(p)$ denota o primeiro autovalor para o problema p-Laplaciano $-\Delta_p u = \lambda(p)|u|^{p-2}u$. □

Caso 1.4 - $2 < m = p < q < q^*$

Aqui lidamos com o seguinte problema $(p\&q)$-Laplaciano, com operador (P_λ) dado por

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= \lambda |u|^{p-2}u \quad em \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad sobre \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

A seguir verificaremos no Teorema 3.6 que o problema (P_λ) não possui solução fraca para $0 < \lambda < \lambda^*$ onde λ^* é um real positivo.

Teorema 3.6. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz* (a_1) *com* $1 < m = p < q < q^*$. *Então, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema* (P_λ) *não possui solução fraca não trivial para todo* $\lambda \in (0, \lambda^*]$; *isto é, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o intervalo* $(0, \lambda^*]$ *não contém nenhum autovalor generalizado de* (P_λ).

Demonstração. De fato, se $u \neq 0$ é uma solução para o problema (P_λ), então

$$\langle J'_\lambda(u), u\rangle = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla u dx - \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}u.u dx = 0$$

Logo,

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx = \lambda \int_\Omega |u|^p dx. \tag{3.9}$$

Pela hipótese (a_1)

$$\xi_0 t \leq \xi_0 t + \xi_1 t^{q/p} \leq a(t)t.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \xi_0|\nabla u|^p &\leq a(|\nabla u|^p).|\nabla u|^p \\ \int_\Omega \xi_0|\nabla u|^p dx &\leq \int_\Omega a(|\nabla u|^p).|\nabla u|^p dx. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Logo, de 3.9, 3.10 e por imersão de Sobolev temos

$$\xi_0||u||^p_{1,p} \leq \frac{\lambda}{\lambda_1(p)}||u||^p_{1,p},$$

isto é,

$$\xi_0\lambda_1(p) = \lambda^* \leq \lambda.$$

Portanto, se $0 < \lambda \leq \lambda^*$ temos $u = 0$, isto é, λ não é autovalor. □

Agora utilizando os argumentos do Método de Minimização, verificaremos que para λ suficientemente grande, (P_λ) possui solução fraca não trivial.

Teorema 3.7. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz* (a_1) *com* $1 < m = p < q < q^*$. *Então, existe* $\lambda^{**} > 0$ *tal que, todo* λ *pertencente ao conjunto* $(\lambda^{**}, +\infty)$ *é um autovalor generalizado de* (P_λ).

Demonstração. Pela hipótese (a_1) e $p < q$ temos (3.4), isto é,

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p dx \geq \frac{\xi_0}{p}||u||^p_{W_0^{1,p}} + \frac{\xi_1}{q}||u||^q_{W_0^{1,q}} - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p dx$$

observe que para todo $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, temos por imersão de Sobolev

$$||u||^p_p \leq C||u||^p_q \leq \frac{C}{\lambda_1(q)}||u||^p_{W_0^{1,q}}$$

onde $\lambda_1(q)$ denota o autovalor principal do problema q-laplaciano $-\Delta_q u = \lambda(q)|u|^{q-2}u$. Logo,

$$J_\lambda(u) \geq \frac{\xi_1}{q}||u||^q_{W_0^{1,q}} - \frac{\lambda}{p}\frac{C}{\lambda_1(q)}||u||^p_{W_0^{1,q}}, \quad \forall u \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

Então segue da demonstração do Teorema 3.3, que J_λ é limitado inferiormente e coercivo em $W_0^{1,q}(\Omega)$ para todo $\lambda > 0$. Por imersões (2.1) e por (a_3), temos que J_λ é fracamente semicontínuo inferiormente. Logo existe $w \in W_0^{1,q}(\Omega)$ tal que

$$J_\lambda(w) = \min_{u \in W_0^{1,q}(\Omega)} J_\lambda(u).$$

Consequentemente, w é uma solução para (P_λ). Vamos agora verificar que w é solução não trivial, seja $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ e $t^* > 0$ suficientemente pequeno de modo que a hipótese (a_1) implica

$$J_\lambda(w) \leq J_\lambda(t^* v) \leq \frac{\xi_2(t^*)^p}{p}||v||^p_{W_0^{1,p}} + \frac{\xi_3(t^*)^q}{q}||v||^q_{W_0^{1,q}} - \frac{\lambda(t^*)^p}{p}||v||^p_p < 0$$

para $\lambda > 0$ suficientemente grande. Mais precisamente, podemos escolher $\lambda > \xi_2\lambda_1(p)$ onde $\lambda_1(p)$ denota o principal autovalor do problema p-laplaciano $-\Delta_p u = \lambda(p)|u|^{p-2}u$. De fato, tomando $\varphi_1(p)$ uma autofunção regular e positiva associada a $\lambda_1(p)$ tal que $||\varphi_1(p)||^p_p = 1$, por (a_1) temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(w) &\leq J_\lambda(t^*\varphi_1(p)) \leq \frac{\xi_2(t^*)^p}{p}||\varphi_1(p)||^p_{W_0^{1,p}} + \frac{\xi_3(t^*)^q}{q}||\varphi_1(p)||^q_{W_0^{1,q}} - \frac{\lambda(t^*)^p}{p}||\varphi_1(p)||^p_p \\ &= \frac{\xi_2(t^*)^p}{p}\lambda_1(p)||\varphi_1(p)||^p_p - \frac{\lambda(t^*)^p}{p}||\varphi_1(p)||^p_p + \frac{\xi_3(t^*)^q}{q}||\varphi_1(p)||^q_{W_0^{1,q}} \\ &= (t^*)^p\left(\frac{\xi_2\lambda_1(p) - \lambda}{p}\right) + \frac{\xi_3(t^*)^q}{q}||\varphi_1(p)||^q_{W_0^{1,q}} < 0 \end{aligned}$$

para t suficientemente pequeno e $p < q$. □

Agora, adicionando a hipótese (a_4), teremos como consequência do princípio variacional de Ekeland a existência de um mínimo não trivial para J_λ. Isto é, (P_λ) possui solução fraca não trivial.

Teorema 3.8. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz* (a_1) *e* (a_4) *com* $1 < m = p < q < q^*$. *Então, o problema* (P_λ) *possui pelo menos uma solução fraca não trivial para todo* $\lambda > 0$ *limitado inferiormente por uma constante positiva ou, equivalentemente, existe* $\lambda^{**} > 0$ *tal que, todo* $\lambda \in (\lambda^{**}, +\infty)$ *é um autovalor generalizado para* (P_λ).

Demonstração. Segue do Teorema 3.7 que $J_\lambda \in C^1(W_0^{1,q}(\Omega), \mathbb{R}^n)$, é limitado inferiormente e coercivo em $W_0^{1,q}(\Omega)$, basta então verificar que J_λ satisfaz a condição $(PS)_c$ com $c = \inf\limits_{u \in W_0^{1,q}\Omega} J_\lambda(u)$.
De fato, seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$, segue da coercividade de J_λ que (u_n) é limitada. Então existe $u \in W_0^{1,q}$, tal que, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,q}(\Omega)$.

Assim, de (a_1),(a_4) e (2.1); seguindo a demonstração do Teorema 3.4 obtemos

$$\begin{aligned} C||u_n - u||^q_{W_0^{1,q}} &\leq \int_\Omega \left(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)(\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &= o_n(1), \end{aligned} \tag{3.11}$$

isto é, $||u_n - u||_{W_0^{1,q}} = o_n(1)$. Portanto em consequência do Princípio Variacional de Ekeland, existe $w \in W_0^{1,q}(\Omega)$, tal que $c = J_\lambda(w) = \inf_{u \in W_0^{1,q}(\Omega)} J_\lambda(u)$, onde w é ponto crítico de J_λ, e segue da demonstração do Teorema 3.7 que w é solução não trivial para $\lambda > \lambda^{**}$.

□

Caso 2: $2 < p < m < q < q^*$ ou $2 < p < m = q < m^* = q^*$.

Primeiramente estudaremos o caso $2 < p < m < q$ e em seguida o caso $2 < p < m = q$.

Caso 2.1 - $2 < p < m < q < q^*$.

Verificaremos agora a existência de uma constante positiva λ^*, tal que, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$, a única solução para o problema (P_λ) é a trivial, isto é, $u \equiv 0$.

Teorema 3.9. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz* (a_1) *com* $1 < p < m < q < q^*$. *Então, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema* (P_λ) *não possui solução fraca não trivial para todo* $\lambda \in (0, \lambda^*)$*; isto é, qualquer* $\lambda \in (0, \lambda^*)$ *não é um autovalor generalizado para* (P_λ).

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe u uma solução fraca não trivial do problema (P_λ). Então
$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx = \lambda \int_\Omega |u|^m dx.$$
Pelo lado esquerdo de (a_1) e desigualdade de Poincaré temos

$$\xi_0 C||u||_p^p + \xi_1 C'||u||_q^q \leq \xi_0 ||u||^p_{W_0^{1,p}} + \xi_1 ||u||^q_{W_0^{1,q}} \leq \lambda ||u||_m^m$$

onde C e C' denota a constante de Poincaré. Desde que $p < m < q$, pela desigualdade de interpolação temos
$$||u||_m^m \leq ||u||_p^{\theta p} ||u||_q^{(1-\theta)q},$$
com $\theta \in (0,1)$ e $\frac{1}{m} = \frac{\theta}{p} + \frac{(1-\theta)}{q}$ de modo que, pela desigualdade de Young, temos

$$||u||_m^m \leq \theta ||u||_p^p + (1-\theta)||u||_q^q.$$

Consequentemente
$$(\lambda\theta - \xi_0 C)||u||_p^p + (\lambda(1-\theta) - \xi_1 C')||u||_q^q \geq 0$$
e se escolhermos λ tal que
$$\lambda < \min\left\{\frac{\xi_0 C}{\theta}, \frac{\xi_1 C'}{(1-\theta)}\right\} = \lambda^*$$
obtemos a contradição. Então, $u \equiv 0$ é a única solução de (P_λ). □

Por outro lado, verificaremos que, para λ suficientemente grande, o funcional J_λ é fracamente semicontínuo inferiormente, e também coercivo em $W_0^{1,q}(\Omega)$, isto é, pelo Método de Minimização existe uma solução fraca não trivial para o problema (P_λ). Assim, enunciamos o seguinte resultado de existência:

Teorema 3.10. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz (a_1) e (a_3) com $1 < p < m < q < q^*$. Então, existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (P_λ) possui ao menos uma solução fraca não trivial para $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, suficientemente grande.*

Demonstração. De fato, desde que $m \in [1, q^*)$, segue de (3.4) e por imersão de Sobolev
$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\ &\geq \frac{\xi_0}{p}||u||^p_{W_0^{1,p}} + \frac{\xi_1}{q}||u||^q_{W_0^{1,q}} - \frac{\lambda}{m}||u||^m_{L^m} \\ &\geq \frac{\xi_1}{q}||u||^q_{W_0^{1,q}} - \frac{\lambda}{m}C||u||^m_{W_0^{1,q}}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

para todo $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$. Assim como na demonstração do Teorema 3.3, denotamos o lado direito da desigualdade por $Q(||u||_{W_0^{1,q}})$ verificamos que J_λ é coercivo e, por imersão compacta (2.1) e crescimento subcrítico (1), é fracamente semicontínuo inferiormente em $W_0^{1,q}(\Omega)$ para todo $\lambda > 0$. Portanto existe um ponto mínimo $w \in W_0^{1,q}(\Omega)$ tal que

$$J_\lambda(w) = \inf_{u \in W_0^{1,q}(\Omega)} J_\lambda(u)$$

isto é, w é uma solução fraca para o problema (P_λ), para todo $\lambda > 0$.

Verificaremos agora que a solução é não trivial para λ suficientemente grande. De fato, fixado $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ temos

$$J_\lambda(w) \leq J_\lambda(v) \leq \frac{\xi_2}{p}||v||^p_{W_0^{1,p}} + \frac{\xi_3}{q}||v||^q_{W_0^{1,q}} - \frac{\lambda}{m}||v||^m_{L^m} < 0,$$

para λ adequado, ou seja, w é uma solução não trivial para problema. $\square$

Observe que diferente dos casos anteriores não é possível estipular uma constante λ^{**}, de forma a garantir que todo $\lambda \geq \lambda^{**}$ seja um autovalor generalizado para o problema (P_λ).

Agora substituindo a hipótese (a_3) por (a_4), utilizaremos o Principio Variacional de Ekeland para demonstrar o seguinte resultado

Teorema 3.11. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz* (a_1) *e* (a_4) *com* $1 < p < m < q < q^*$. *Então, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema* (P_λ) *possui ao menos uma solução fraca não trivial para* $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, *suficientemente grande.*

Demonstração. Pela demonstração do Teorema 3.4 temos que $J_\lambda \in C^1(W_0^{1,q}(\Omega), \mathbb{R}^n)$ é limitado inferiormente e coercivo em $W^{1,q}(\Omega)$, e também se verifica que J_λ satisfaz a condição Palais-Smale com nível $c = \inf_{u \in W_0^{1,q}(\Omega)} J_\lambda(u)$.

Assim, por consequência do Princípio Variacional de Ekeland (Ver Apêndice, Corolário 1.2), existe $w \in W_0^{1,q}(\Omega)$, tal que $c = J_\lambda(w) = \inf_{u \in W_0^{1,q}(\Omega)} J_\lambda(u)$, onde w é ponto crítico de J_λ, e segue da demonstração do Teorema 3.10 que w é solução não trivial para λ suficientemente grande.

$\square$

Caso 2.2 - $2 < p < m = q < m^* = q^*$**.**

Nesta seção buscaremos soluções fracas para o problema (P_λ), dado por:

$$(P_\lambda) = \begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) & = & \lambda |u|^{q-2}u & em & \Omega, \\ u & = & 0 & sobre & \partial\Omega, \end{cases}$$

via Teorema do Passo da Montanha. Mas, semelhante aos casos anteriores, verificaremos a existência de um limitante inferior para todo autovalor λ associado ao problema, ou seja, (P_λ) possui apenas solução trivial, sempre que $0 < \lambda \leq \lambda^*$, onde λ^* é um real positivo. Logo, segue o seguinte resultado:

Teorema 3.12. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfazendo (a_1) com $1 < p < m = q < m^* = q^*$. Então, existe $\lambda^* > 0$ tal que, o problema (P_λ) não possui solução fraca não trivial para todo $\lambda \in (0, \lambda^*]$, isto é, existe $\lambda^* > 0$, tal que, o intervalo $(0, \lambda^*]$ não contém autovalor generalizado de (P_λ).*

Demonstração. Suponha que u é uma solução fraca não trivial, isto é,

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx = \lambda \int_\Omega |u|^q dx.$$

Pelo lado esquerdo da hipótese (a_1) temos

$$\begin{array}{rcl} \xi_0|\nabla u|^p + \xi_1|\nabla u|^q & \leq & a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p \\ \xi_0||u||^p_{W_0^{1,p}} + \xi_1||u||^q_{W_0^{1,q}} & \leq & \displaystyle\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx, \end{array}$$

ou ainda,

$$\xi_0||u||^p_{W_0^{1,p}} + \xi_1||u||^q_{W_0^{1,q}} \leq \lambda \int_\Omega |u|^q dx.$$

Logo, por imersão de Sobolev obtemos

$$\xi_1||u||^q_{W_0^{1,q}} \leq \frac{\lambda}{\lambda_1(q)}||u||^q_{W_0^{1,q}},$$

isto é, se u é não trivial temos

$$\xi_1\lambda_1 = \lambda^* < \lambda.$$

Assim, concluímos que se $0 < \lambda \leq \lambda^*$ então $u = 0$. □

Em busca de uma maior completeza deste estudo, verificaremos a seguir, que se a função a satisfaz a hipótese (a_5), teremos outro limitante inferior para o autovalor λ associado ao problema (P_λ), isto é, para todo $\lambda \in (0, g^*)$ a única solução para o problema (P_λ) é a trivial. Mas para tal considere o seguinte resultado:

Lema 3.1. *Para todo $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ temos*

$$||u||_q^q \leq C||u||_{W_0^{1,p}}^{qt}||u||_{W_0^{1,q}}^{q(1-t)},$$

onde $t \in (0,1)$ e C é uma constante real positiva.

Demonstração. Note que para $p < q < q^*$ e $t \in (0,1)$ temos

$$\frac{1}{q} = \frac{t}{p} + \frac{(1-t)}{q^*},$$

isto é, $\frac{p}{qt}$ e $\frac{q^*}{q(1-t)}$ são expoentes conjugados com $t \in (0,1)$.
Assim, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pela desigualdade de Holder temos

$$\int_\Omega |u|^q dx = \int_\Omega |u|^{qt}|u|^{q(1-t)}dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{qt}{p}} \left(\int_\Omega |u|^{q^*}dx\right)^{\frac{q(1-t)}{q^*}},$$

isto é,

$$||u||_q^q \leq ||u||_p^{qt}||u||_{q^*}^{q(1-t)}.$$

Por imersão contínua de Sobolev temos

$$||u||_q^q \leq ||u||_p^{qt}||u||_{q^*}^{q(1-t)} \leq C||u||_{W_0^{1,p}}^{qt}||u||_{W_0^{1,q}}^{q(1-t)}.$$

□

Proposição 3.1. *Assumindo as hipóteses (a_1), (a_3) e (a_5), se $\lambda > \lambda^*$ onde $\lambda^* \geq \xi_1\lambda_1$ temos que λ é autovalor de (P_λ), isto é, para cada $\lambda > \lambda^*$ existe uma solução fraca não trivial associada.*

Demonstração. De fato, considere o funcional $g : W_0^{1,q}(\Omega) - \{0\} \to \mathbb{R}^n$ e o real $g*$ dados por

$$g(u) = \frac{\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |u|^q dx}, \quad g* = \inf_{u \in W_0^{1,q}(\Omega), u \neq 0} g(u),$$

onde, para qualquer $u \in W_0^{1,q}(\Omega) - \{0\}$, por (a_1) temos

$$\xi_0 \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \xi_1 \int_\Omega |\nabla u|^q dx \leq \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
g(u) &= \frac{\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |u|^q dx} \\
&\geq \inf_{u\in W_0^{1,q}(\Omega)} \frac{\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |u|^q dx} \\
&\geq \inf_{u\in W_0^{1,q}(\Omega)} \frac{\xi_0\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \xi_1\int_\Omega |\nabla u|^q dx}{\int_\Omega |u|^q dx} \\
&\geq \inf_{u\in W_0^{1,q}(\Omega)} \frac{\xi_1\int_\Omega |\nabla u|^q dx}{\int_\Omega |u|^q dx} \\
&= \frac{\xi_1\int_\Omega |\lambda_1(q) u_1|^q dx}{\int_\Omega |u_1|^q dx} \\
&= \xi_1\lambda_1(q),
\end{aligned}$$

onde $\lambda_1(q)$ é o autovalor associado a u_1. Assim segue do resultado acima que g é limitado inferiormente em $W_0^{1,q}(\Omega) - \{0\}$ e $g*$ é um real positivo.

Agora suponhamos que exista $\lambda > 0$ e uma solução fraca não trivial associada $v_\lambda \in W_0^{1,q}(\Omega)$, para o problema (P_λ), de modo que $\lambda < g*$. Logo,

$$\int_\Omega a(|\nabla v_\lambda|^p)|\nabla v_\lambda|^p dx - \lambda\int_\Omega |v_\lambda|^q dx = 0.$$

Assim temos

$$g* > \lambda = \frac{\int_\Omega a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^p dx}{\int_\Omega |v|^q dx} \geq \inf_{u\in W_0^{1,q}(\Omega)} \frac{\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |u|^q dx} = g*$$

o que é uma contradição. Logo, não existe autovalor no intervalo $(0, g*)$, e como já foi visto $g* \geq \xi_1\lambda_1(q)$.

Afirmação: $g*$ não é autovalor para o problema (P_λ). Para a verificação desta afirmação, mostraremos que o ínfimo de g é atingido e chegaremos a um absurdo, ao supor que g^* é atingido com uma solução não trivial.

De fato, observe que g é C^1 e fracamente semicontínuo inferiormente, e também limitado inferiormente. Assim seja (u_n) uma sequência minimizante em $W_0^{1,q}(\Omega) - \{0\}$ tal que $g^* = \lim_{n\to+\infty} g(u_n)$. Note que (u_n) é limitada pois, desde que $g(u_n)$ é uma sequência real convergente temos que é limitada, isto é, $g(u_n) \leq C$. Por outro lado, do Lema (3.1) e (a_1) obtemos

$$g(u_n) \geq \frac{\xi_0||u_n||^p_{W_0^{1,p}} + \xi_1||u_n||^q_{W_0^{1,q}}}{||u_n||^{qt}_{W_0^{1,p}}||u_n||^{q(1-t)}_{W_0^{1,q}}}$$

Consequentemente (u_n) é limitada, caso contrário $g(u_n) \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, o que é uma contradição, já que, $g(u_n) \leq C$. Então existe $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,q}(\Omega)$ e, por g ser fracamente semicontínuo inferiormente temos

$$g(u) \leq \lim \inf_{n \to +\infty} g(u_n),$$

e portanto $g(u) = g*$.
Supondo $u \neq 0$ teremos que u é um ponto critico para g, ou seja, $\langle g'(u), v\rangle = 0$ para todo $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$.
Note que, denotando $\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx = A(u)$ e $\int_\Omega |u|^q dx = B(u)$, teremos a derivada de Gateux de $g(u)$ dada por

$$g'(u)v = \frac{A'(u)vB(u) - A(u)B'(u)v}{B(u)^2}.$$

Desde que u é ponto crítico de g temos

$$A'(u)vB(u) = A(u)B'(u)v,$$

ou ainda

$$A'(u)v = g(u)B'(u)v.$$

Pela regra do produto e da cadeia temos

$$\begin{aligned} A'(u)v &= \int_\Omega pa'(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v |\nabla u|^p + pa(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx \\ &= p\int_\Omega (a'(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p + a(|\nabla u|^p))|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx \end{aligned}$$

e

$$B'(u)v = q\int_\Omega |u|^{q-2}uvdx.$$

Logo,

$$p\int_\Omega [a'(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p + a(|\nabla u|^p)]|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = g^* q\int_\Omega |u|^{q-2}uvdx,$$

e, desde que supomos, por contradição, que g^* é um autovalor com $u \neq 0$ a autofunção associada, temos

$$\left\langle J'_{g^*}(u), v\right\rangle = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx - g^*\int_\Omega |u|^{q-2}uvdx = 0$$

isto é,

$$\int_\Omega [pa'(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p - (q-p)a(|\nabla u|^p)]|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = 0$$

para todo $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$. Pela hipótese (a_5)

$$pa'(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p < (q-p)a(|\nabla u|^p),$$

daí concluímos que $u = 0$, e assim obtemos a contradição. Portanto $g*$ não é um autovalor para (P_λ).

$\square$

A seguir verificaremos que o funcional energia J_λ associado ao problema (P_λ), satisfaz as geometrias do Teorema Passo da Montanha (versão de Ambrosetti-Rabinowitz). E de modo a garantir a existência de solução fraca, verificaremos também, que o funcional satisfaz a condição $(PS)_c$.

Lema 3.2. *Assumindo* (a_1) *e* $1 < p < m = q < m^* = q^*$. *Então, para cada* $\lambda > \xi_3\lambda_1(q)$, *o funcional* J_λ *satisfaz as seguintes condições:*

(J_1) *Existem* $p, \alpha > 0$ *tal que*

$$J_\lambda(u) \geq \alpha, \text{ para todo } u \in W_0^{1,q}(\Omega) \text{ de modo que } ||u|| = \rho;$$

(J_2) *Existe* $e \in W_0^{1,q}(\Omega)$, *tal que,* $||e|| > \rho$ *verificando* $J_\lambda(e) < 0$.

Demonstração. (J_1) Seja $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ e lembrando que $||u|| = ||u||_{W_0^{1,p}} + ||u||_{W_0^{1,q}}$. Por (a_1) e o Lema (3.1) temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{\xi_0}{p}||u||^p_{W_0^{1,p}} + \frac{\xi_1}{q}||u||^q_{W_0^{1,q}} - \frac{\lambda}{q}||u||^q_{L^q} \\ &\geq \frac{\xi_1}{q}||u||^q_{W_0^{1,q}} - \frac{\lambda}{q}||u||^q_{L^q} \\ &\geq \frac{\xi_1}{q}||u||^q_{W_0^{1,q}} - \frac{\lambda}{q}C||u||^{q(1-t)}_{W_0^{1,q}}||u||^{qt}_{W_0^{1,p}} \\ &= \frac{\xi_1}{q}||u||^{q(1-t)}_{W_0^{1,q}}(||u||^{qt}_{W_0^{1,q}} - \lambda C'||u||^{qt}_{W_0^{1,p}}), \end{aligned}$$

escolhendo

$$||u||_{W_0^{1,p}} = \epsilon$$

temos

$$J_\lambda(u) \geq \frac{\xi_1}{q}||u||^{q(1-t)}_{W_0^{1,q}}(||u||^{qt}_{W_0^{1,q}} - \lambda C'\epsilon^{qt}).$$

Claramente, para $||u||_{W_0^{1,q}} = (1 + \lambda C' \epsilon^{qt})^{\frac{1}{qt}}$ obtemos

$$J_\lambda(u) \geq \alpha = \frac{\xi_1}{q}(1 + \lambda C' \epsilon^{qt})\frac{1-t}{t} > 0$$

para todo $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ tal que $||u|| = \rho = (1 + \lambda C' \epsilon^{qt})^{\frac{1}{qt}} + \epsilon$.

(J_2) Denotamos por ϕ a autofunção normalizada, associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(q)$ de um problema q-Laplaciano como abaixo

$$-div(|\nabla \phi|^{q-2}\nabla \phi) = \lambda_1(q)|\phi|^{q-2}\phi, \text{ em } \Omega,$$

e $\int_\Omega |\nabla \phi|^q dx = 1$. Assim, tomando $t > 0$, por $\int_\Omega |\phi|^q dx = \frac{1}{\lambda_1}$, temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(t\phi) &\leq \frac{t^p}{p}\xi_2||\phi||^p_{W_0^{1,p}} + \frac{t^q}{q}\xi_3||\phi||^q_{W_0^{1,q}} - \lambda\frac{t^q}{q}||\phi||^q_q \\ &\leq \frac{t^p}{p}\xi_2||\phi||^p_{W_0^{1,p}} + \frac{t^q}{q}\xi_3\lambda_1||\phi||^q_q - \lambda\frac{t^q}{q}||\phi||^q_q \\ &\leq \frac{t^p}{p}\xi_2||\phi||^p_{W_0^{1,p}} + \frac{t^q}{q}\left(\xi_3 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right). \end{aligned}$$

Desde que $\lambda \geq \xi_3\lambda_1(q)$ então $J_\lambda(t\phi) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Logo, existe $t^* > 0$ tal que $J_\lambda(t^*\phi) < 0$, onde denotamos $t^*\phi = e$.

□

Logo, pelo Teorema do Passo da Montanha existe uma sequência Palais-Smale de nível

$$c = \inf_{\eta \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\lambda(\eta(t)),$$

com $\Gamma = \{\eta \in C([0,1], W_0^{1,q}(\Omega)) : \eta(0) = 0 \text{ e } J_\lambda(\eta(t)) \leq 0\}$. A partir daqui, buscamos provar que J_λ satisfaz a condição $(PS)_c$, seguindo um roteiro padrão, começando pela limitação da sequência Palais-Smale (u_n). Mas note que

$$c + o_n \geq J_\lambda(u_n) - \frac{1}{q}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \frac{1}{q}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx$$

não garante a limitação da sequência (u_n), pois sendo $m = q$ não temos a garantia da hipótese (a_2), logo não sabemos se existe α tal que

$$\frac{1}{\alpha}a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p \leq A(|\nabla u_n|^p)$$

de modo que $\frac{1}{p\alpha} - \frac{1}{q} > 0$ como veremos mais detalhadamente no Teorema (3.14).
Assim, adicionando como hipótese a limitação da sequência $(PS)_c$, existe uma subsequência

$u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,q}(\Omega)$. Desde que $p < q$ e por (a_1),(a_4) e (2.1), seguindo o roteiro da demonstração do Teorema 3.4 temos a convergência forte

$$C||u_n - u||^q_{W_0^{1,q}} \leq \int_\Omega \left(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)(\nabla u_n - \nabla u)dx = o_n(1).$$

Portanto u é ponto crítico de J_λ, para todo $\lambda > \lambda^{**} = max\{\xi_1\lambda_1(q), \xi_3\lambda_1(q)\}$.

Assim, enunciamos o seguinte resultado

Teorema 3.13. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfazendo $(a_1), (a_4)$ e (a_5) com $1 < p < m = q < m^* = q^*$ e toda sequência $(PS)_c$ limitada em X. Então, existe $\lambda^{**} > 0$ tal que o problema (P_λ) admite tanto uma solução fraca **trivial** quanto uma não trivial para todo $\lambda \in (\lambda^{**}, +\infty)$. Em particular, $(\lambda^{**}, +\infty)$ com $\lambda^{**} > 0$ contém um autovalor generalizado para (P_λ).*

Caso 3: $2 < p \leq q < m < q^*$.

Para a demonstração dos próximos teoremas utilizaremos o seguinte lema:

Lema 3.3. *Assumindo (a_1). Então, para cada $\lambda > 0$, o funcional J_λ satisfaz as seguintes condições:*

(J_1) *Existem $\rho, \alpha > 0$ tal que*

$$J_\lambda(u) \geq \alpha, \ \ \textit{para todo} \ \ u \in W_0^{1,q}(\Omega) : ||u|| = \rho;$$

(J_2) *Existe $e \in W_0^{1,q}(\Omega)$, tal que, $||e|| > \rho$ verificando $J_\lambda(e) < 0$.*

Demonstração. (J_1) Por (a_1) temos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{\xi_0}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{\xi_1}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\ &\geq C_1(||u||^p_{W_0^{1,p}} + ||u||^q_{W_0^{1,q}}) - \frac{\lambda}{m}||u||^m_m. \end{aligned}$$

Tomando $0 < ||u|| = \rho < 1$, desde que $p \leq q$ temos $||u||^q_{W_0^{1,p}} \leq ||u||^p_{W_0^{1,p}}$ portanto

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq C_1(||u||^q_{W_0^{1,p}} + ||u||^q_{W_0^{1,q}}) - C_m\lambda||u||^m. \\ &= C_2||u||^q - C_m\lambda||u||^m. \\ &= C_2\rho^q - C_m\lambda\rho^m > 0. \end{aligned}$$

(J_2) Fixado $v \in C_0^\infty(\Omega)$ com $v > 0$ em Ω, a partir de (a_1) temos

$$J_\lambda(tv) \leq \frac{t^p \xi_2}{p} \int_\Omega |\nabla v|^p dx + \frac{t^q \xi_3}{q} \int_\Omega |\nabla v|^q dx - \frac{\lambda t^m}{m} \int_\Omega |v|^m dx.$$

Desde que $p \leq q < m$ existe $\bar{t} > 1$ tal que $e = \bar{t}v$ satisfazendo $J_\lambda(e) < 0$ e $||e|| > \rho$.

$\square$

Caso 3.1 - $2 < p = q < m < p^* = q^*$.

Teorema 3.14. *Assumindo $(a_1), (a_2)$ e (a_4) e $1 < p = q < m < p^* = q^*$. Então para todo $\lambda > 0$ existe uma solução fraca trivial e uma não trivial para (P_λ). Em particular, existe um conjunto continuo de autovalores generalizados positivos para (P_λ).*

Demonstração. Segue do Lema 3.3, que J_λ satisfaz a geometria do Passo da Montanha. Então existe uma sequência Palais-Smale (u_n), tal que,

$$J_\lambda(u_n) \to c$$

e

$$J'_\lambda(u_n) \to 0,$$

com

$$c = \inf_{\eta \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\lambda(\eta(t))$$

com $\Gamma = \{\eta \in C([0,1], W_0^{1,q}(\Omega)) : \eta(0) = 0 \text{ e } J_\lambda(\eta(t)) \leq 0\}$.

Verificaremos agora que satisfaz a condição $(PS)_c$. De fato, de (a_1) e (a_2) temos

$$\begin{aligned} c - o_n &\geq J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m} \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle \\ &\geq \frac{1}{p} \int_\Omega A(|\nabla u_n|^p) dx - \frac{1}{m} \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p) |\nabla u_n|^p dx \\ &\overset{(a_2)}{\geq} \left(\frac{1}{p\alpha} - \frac{1}{m} \right) \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p) |\nabla u_n|^p dx \\ &\overset{(a_1)}{\geq} C_1 ||u_n||^q_{W_0^{1,q}} + C_2 ||u_n||^q_{W_0^{1,q}} \\ &= (C_1 + C_2) ||u_n||^q_{W_0^{1,q}}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

isto é, (u_n) é limitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$. Logo $u_n \rightharpoonup u$ a menos de uma subsequência.

Portanto seguindo os passos da demonstração do Teorema 3.4 temos a convergência forte $u_n \to u$ em $W_0^{1,q}(\Omega)$, onde, $f(u) = c > 0$ e $|f'(u)| = 0$, isto é, u é uma solução fraca não trivial para J_λ. $\square$

Caso 3.2 - $2 < p < q < m < p^* = q^*$.

Teorema 3.15. *Assumindo $(a_1), (a_2)$ e (a_4) e $1 < p < q < m < q^*$. Então para todo $\lambda > 0$ existe uma solução fraca trivial e uma não trivial para (P_λ). Em particular, existe um conjunto continuo de autovalores generalizados positivos para (P_λ).*

Demonstração. Assim como no teorema anterior temos pelo Lema 3.3 que existe uma sequência Palais-Smale (u_n), tal que,

$$J_\lambda(u_n) \to c$$

e

$$J'_\lambda(u_n) \to 0,$$

com

$$c = \inf_{\eta \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\lambda(\eta(t))$$

com $\Gamma = \{\eta \in C([0,1], W_0^{1,q}(\Omega)) : \eta(0) = 0 \text{ e } J_\lambda(\eta(t)) \leq 0\}$.
Verificaremos agora que (u_n) é limitada, suponhamos por contradição que não seja, isto é, $||u_n|| \to \infty$. Assim, temos as seguintes possibilidades:

1. $||u_n||_{W_0^{1,p}} \leq K$ e $||u_n||_{W_0^{1,q}} \to \infty$;
2. $||u_n||_{W_0^{1,p}} \to \infty$ e $||u_n||_{W_0^{1,q}} < K$;
3. $||u_n||_{W_0^{1,p}} \to \infty$ e $||u_n||_{W_0^{1,q}} \to \infty$.

Note que por (a_1) e (a_2) temos

$$c - o_n \geq J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle \geq C_1||u_n||^p_{W_0^{1,p}} + C_2||u_n||^q_{W_0^{1,q}}$$

o que contradiz os casos $1 - 3$. Logo, $||u_n||_{W_0^{1,p}}$ e $||u_n||_{W_0^{1,q}}$ são limitados, isto é, $||u_n||$ é limitado.
Portanto, pela demonstração do Teorema 3.14, temos que exite $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ uma solução fraca não trivial para o problema (P_λ). □

Apêndice

Apresentaremos aqui alguns resultados importantes usados nesta dissertação.

Teorema 3.16. *(Ver Teorema 9.16, [7]) Seja Ω limitado e de C^1. Então temos as seguintes imersões compactas:*

- $W_0^{1,q}(\Omega) \subset L^r(\Omega) \quad \forall r \in [1, q^*), \quad$ *onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}, \quad$ *se* $\quad p \leq n$*;*

- $W_0^{1,q}(\Omega) \subset L^r(\Omega) \quad \forall r \in [q, +\infty) \quad$ *se* $\quad p = n$*;*

- $W_0^{1,q}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}) \quad$ *se* $\quad p \geq n$*.*

Em particular $W_0^{1,q} \subset L^q(\Omega)$ *com imersão compacta para todo* q*(e todo* n*).*

Teorema 3.17. ***(Convergência Dominada de Lebesgue)***
Seja E *um conjunto mensurável do* $\mathbb{R}^n$ *e seja* (f_j) *uma sequência de funções mensuráveis tal que*

$$f_j(x) \to f(x) \text{ quase em toda parte em } E,$$

onde f *é uma função mensurável. Se existir uma função* $g \in L^1(E)$ *tal que*

$$|f_j(x)| \leq g(x) \text{ quase em toda parte em } E,$$

então

$$\lim_{j \to \infty} \int_E f_j(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

Teorema 3.18. ***(Vainberg)***
Sejam (f_j) *uma sequência de funções em* $L^q(\Omega)$ *e* $f \in L^q(\Omega)$ *tais que*

$$f_j \to f \text{ em } L^q(\Omega).$$

Então, existe $(f_{j_k}) \subset (f_j)$ *e uma função* $g \in L^q(\Omega)$ *tal que*

$$|f_{j_k}(x)| \leq g(x) \text{ quase em toda parte em } \Omega$$

e

$$f_{j_k}(x) \to f(x) \text{ quase em toda parte em } \Omega.$$

Proposição 3.2. *(Ver [10], Lema 2.4) Seja* $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *uma função de classe* C^1 *tal que, satisfaz as hipóteses* (a_1) *e* (a_4)*. Então para* $p \leq q$ *temos*

$$C|x-y|^q \leq \left\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y \right\rangle,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

Demonstração. Observe que pelo produto interno no $\mathbb{R}^n$ temos

$$\left\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} (a(|x|^p)|x|^{p-2}x_j - a(|y|^p)|y|^{p-2}y_j)(x_j - y_j)$$

e para todo $z, \xi \in \mathbb{R}^n$ temos pela derivada parcial do produto

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j &= (p-2)|z|^{p-4}\sum_{i,j=1}^{n} a(|z|^p)z_iz_j\xi_i\xi_j + \sum_{i,j=1}^{n} a(|z|^p)|z|^{p-2}\delta_{i,j}\xi_i\xi_j \\ &\quad + p\sum_{i,j=1}^{n} a'(|z|^p)|z|^{2p-4}z_iz_j\xi_i\xi_j.\end{aligned}$$

Desde que

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_iz_j\xi_i\xi_j = \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\xi_i\right)^2$$

temos

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j = \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\xi_j\right)^2 |z|^{p-4}[(p-2)a(|z|^p)+pa'(|z|^p)|z|^p]+a(|z|^p)|z|^{p-2}|\xi| \tag{3.14}$$

Por (a_4) temos $t \to a(t^p)t^{p-2}$ crescente, isto é,

$$0 < [(p-2)a(|z|^p) + pa'(|z|^p)|z|^p]|z|^{p-3}. \tag{3.15}$$

De (3.14) e (3.15) temos

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j \geq a(|z|^p)|z|^{p-2}|\xi|^2. \tag{3.16}$$

Note que, se $|y| \geq |x|$ temos

$$|y| \geq \frac{1}{2}|x-y| \quad \text{ou ainda} \quad |y| - \frac{1}{4}|x-y| \geq \frac{1}{4}|x-y|.$$

Logo, para $t \in [0, \frac{1}{4}]$ temos

$$|y + t(x-y)| \geq |y| - t|x-y| \geq \frac{1}{4}|x-y|,$$

tomando $z = y + t(x-y)$ e $\xi = x - y$. Pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_j &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_j \frac{d}{dt}(z_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_j\xi_i.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_j\xi_i \qquad (3.17) \\
= &\left[\sum_{j=1}^{n}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_j\right]_0^1 \\
= &\left[\sum_{j=1}^{n}(a(|y+t(x-y)|^p)|y+t(x-y)|^{p-2}(y_j + t(x_j - y_j)))(x_j - y_j)\right]_0^1 \\
= &\sum_{j=1}^{n}(a(|x|^p)|x|^{p-2}x_j - a(|y|^p)|y|^{p-2}y_j)(x_j - y_j)
\end{aligned}$$

Segue de (3.16) e para todo $t \in [0, \frac{1}{4}]$

$$\left\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x - y\right\rangle \geq a(|y-t(x-y)|^p)|y-t(x-y)|^{p-2}|x-y|^2$$

por (a_1) obtemos

$$\begin{aligned}
a(|y-t(x-y)|^p)|y-t(x-y)|^{p-2}|x-y|^2 &\geq (\xi_0 + \xi_1|y+t(x-y)|^{q-p})|y-t(x-y)|^{p-2}|x-y|^2 \\
&\geq \xi_1|y+t(x-y)|^{q-p}|y-t(x-y)|^{p-2}|x-y|^2 \\
&= \xi_1|y+t(x-y)|^{q-2}|x-y|^2 \\
&= \frac{\xi_1}{4}|x-y|^{q-2}|x-y|^2 \\
&\geq C|x-y|^q. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Provando a tese. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] R.R. Abreu, *Existência de Soluções Positivas para uma Classe de Problemas com Falta de Compacidade envolvendo o Operador p-Laplaciano*, Trabalho de dissertação. PPGME-UFPA, (2009).

[2] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and apllications*, J. Functional Analysis. 14 (1973), 349-381.

[3] S. Barile, G.M. Figueiredo, *Existence of a least energy nodal solution for a class of p&q-singular elliptic equations*, Adv. Nonlinear Stud. 14(2) (2014), 511-530.

[4] S. Barile, G.M. Figueiredo, *Existence of least energy positive, negative and nodal solutions for a class of p&q-problems with potentials vanishing at infinity*, J. Math. Anal. Appl. 427 (2015), 1205-1233.

[5] S. Barile, G.M. Figueiredo, *Some classes of eigenvalues problems for generalized p&q-Laplacian type operators on bounded domains*, Nonlinear Analysis 119 (2015),457-468.

[6] N. Benouhiba, Z. Belyacine, *A class of eigenvalue problems for the (p, q)-Laplacian in $\mathbb{R}^n$*, J. Math. Anal. Appl. 50 (2012),727-737.

[7] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011).

[8] I. Ekeland, *On The Variational Principle*, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.

[9] D. Figueiredo, *Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Tata Institute of Fundamental Research, 81 (1989).

[10] G.M. Figueiredo, *Existence of positive solutions for a class of p&q elliptic problems with critical growth on* $\mathbb{R}^n$, J. Math. Anal. Appl. 378 (2011), 507-518.

[11] G.M. Figueiredo, *Uma introdução à teoria dos pontos críticos*, PPGME-UFPA (2015).

[12] D. Montreanu, M. Tanaka, *On a positive solution for* (p, q)*-Laplace equation with indefinite weight*, Minimax Theory Appl. 1(1) (2014).