UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Existência e Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos Não-Locais com Condição de Fronteira Integrais

Diogo Moan Lobato Tavares

BELÉM
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Diogo Moan Lobato Tavares

Existência e Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos Não-Locais com Condição de Fronteira Integrais

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e, defendida por Diogo Moan Lobato Tavares como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Joelma Morbach.

BELÉM

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

T231e Tavares, Diogo Moan Lobato
Existência e Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos Não-Locais com Condição de Fronteira Integrais / Diogo Moan Lobato Tavares. — 2018
75 f. : il. color

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística (PPGME), Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.
Orientação: Profa. Dra. Joelma Morbach

1. Kirchhoff. 2. Condição de Fronteira Integral. 3. Condição de Neumann. 4. Teoria de Morse. 5. Variedade de Nehari. I. Morbach, Joelma, *orient.* II. Título

---

CDD 515.353

Diogo Moan Lobato Tavares

Existência e Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos Não-Locais com Condição de Fronteira Integrais

Esta dissertação foi julgada e aprovada para a obtenção do título de Mestre em Matemática no Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Joelma Morbach - Orientadora(PPGME/UFPA)

Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa (UFCG)-Membro externo

Profa. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento (PPGME/PDM/UFPA)-Membro interno

Augusto César dos R. Costa

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa(PPGME/PDM/UFPA)-Membro interno

Belém 19, de junho de 2018

Resultado: APROVADO.

À minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me concedido vida, saúde e perseverança para realizar este trabalho.

A meu pai Moacir Simões Tavares.

À minha mãe Ana Maria Leite Lobato.

À minha orientadora professora Joelma Morbach.

À minha namorada Emily por todo o apoio e carinho.

A meu filho Dimitri que foi uma grande inspiração.

A todos os demais professores e à coordenação deste programa que de alguma forma contribuíram para a conclusão desta pós-graduação.

À Universidade Federal do Pará.

A todos os amigos do curso que contribuíram nas horas de estudo e de descontração. Em especial a Jefferson, meu amigo nesta caminhada desde a graduação.

A todos os meus familiares e amigos, pelos incentivos e pela confiança atribuída à minha pessoa.

Resumo

Neste estudo, usaremos métodos variacionais aliados a Teoria de Morse para investigar a existência e multiplicidade de soluções para Problemas Elípticos Não-Locais com Condição de Fronteira Integrais do tipo

$$(P) = \begin{cases} M(||u||^2)(-\Delta u + u) & = & f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ M(||u||^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} & = & g(x,u)\displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções dadas e satisfazendo certas condições apresentados oportunamente dependendo do caso. Além disso, consideramos

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds \quad \text{e} \quad G(x,t) = \int_0^t g(x,s)ds.$$

Palavras chave: Kirchhoff, Condição de Fronteira Integral, Condição de Neumann, Teoria de Morse, Variedade de Nehari.

Abstract

In this study, we will use variational methods allied to Morse Theory to investigate existence and multiplicity of solutions for Non-Local Elliptic Problems with Integral Border Condition of type

$$(P) = \begin{cases} M(||u||^2)(-\Delta u + u) &= f(x,u) \qquad\qquad \text{em } \Omega, \\ M(||u||^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= g(x,u)\displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma \quad \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded and regular domain, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are given functions satisfying certain conditions presented timely depending on the case. In addition, we consider

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds \quad \text{e} \quad G(x,t) = \int_0^t g(x,s)ds.$$

Keywords: Kirchhoff, Integral Border Condition, Neumann Condition, Morse Theory, Nehari Manifold.

Índice de Notações

$\overline{\Omega}$, $\mid \Omega \mid$ e $\partial\Omega$ são, respectivamente, o fecho, a medida e a fronteira do conjunto Ω.

$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ u \text{ é mensurável e } \displaystyle\int_\Omega |u|^2 dx < +\infty \right\}.$

$\|u\|_2 = \left(\displaystyle\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma usual em $L^2(\Omega)$.

$\langle u, v \rangle = \displaystyle\int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv) dx$ é o produto interno usual em $W^{1,2}(\Omega)$.

$\|u\| = \left(\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma usual em $W^{1,2}(\Omega)$.

$W_0^{1,2}(\Omega)$ é espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$ tal que $\nabla u \in L^2(\Omega)$ e $\displaystyle\int_{\partial\Omega} u dx = 0$.

$\langle u, v \rangle_0 = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ é o produto interno usual em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

$\|u\|_0 = \left(\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma usual em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

$S(\Omega, 2, q) = \displaystyle\inf_{u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) dx}{\left(\displaystyle\int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma \right)^{2/q}}$ é a melhor constante de Sobolev da imersão compacta $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$.

$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o operador Laplaciano aplicado a função u.

$u_n \longrightarrow u$ convergência forte (em norma)

$u_n \rightharpoonup u$ convergência fraca

Sumário

Introdução

Neste trabalho, utilizaremos Métodos Variacionais e Teoria de Morse para investigar existência e multiplicidade de solução para problemas elípticos não-locais sob condições de fronteira integrais do tipo Kirchhoff sob a forma

$$(P)\begin{cases} M(||u||^2)(-\Delta u + u) &= f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ M(||u||^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= g(x,u)\displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções dadas e satisfazendo certas condições apresentadas dependendo do caso. Em todos os casos consideraremos

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds \quad \text{e} \quad G(x,t) = \int_0^t g(x,s)ds.$$

O problema (P) é denominado não-local devido a presença do termo $M(||u||^2)$ não ser calculado pontualmente. Algumas classes interessantes de problemas do tipo Kirchhoff com condição de fronteira integrais, tais como (P), foram estudadas de diversas formas em [22]. Grande parte dos trabalhos relacionados a Equação de Kirchhoff estudaram-na sob condições de fronteira homogêneas de Dirichlet. O primeiro a utilizar argumentos de Análise Não-Linear para explorar os problemas não-locais do tipo Kirchhoff foi Lions em [20]. Ressaltamos que existem diversos trabalhos sobre a equação de Kirchhoff usando método variacional, ver por exemplo [2], [3], [10], [11], [5], [16], [24] e [21] dentre outros.

Além de ser do tipo Kirchhoff, uma outra característica de (P) é ter fronteira do tipo integral. Wang [27] estuda problemas de Dirichlet com condição de fronteira integral da forma

$$\begin{cases} Lu = -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u(x) = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u(y)dy & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

em que o núcleo $K(x,y)$ é uma dada função. São estudados por Wang problemas de autovalor como, por exemplo,

$$\begin{cases} L\varphi = \lambda\varphi & \text{em } \Omega, \\ \varphi = K\displaystyle\int_\Omega \varphi(y)dy & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.2}$$

em que $\lambda > 0$ é um parâmetro real e $K(x,y) = K$ é constante, existência de soluções para os casos linear e semilinear usando Princípios de Comparação e Teoria de Semigrupos. Em Kavallaris-Tzanetis [17] é estudado o problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \dfrac{\lambda f(u)}{\left(\displaystyle\int_\Omega f(u)dx\right)^p} & \text{em } \Omega \times (0,+\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + \beta u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{0.3}$$

onde $0 \leq \beta = \beta(x) < +\infty$, $\beta \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$, $\alpha > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um domínio limitado, $p > 0$ e f é uma função positiva, crescente e limitada, λ é um parâmetro com características físicas. Por exemplo, quando $N = 1$ e $p = 2$, a equação (0.3) modela o aquecimento Ohmico[1] e, nesse caso, λ é proporcional ao quadrado da diferença de potencial aplicado entre os extremos do circuito considerado.

Dessa forma, tais problemas são abordados devido o fato de ter uma variedade relevante de situações físicas que acarretam algumas dificuldades matemáticas interessantes e que podem contribuir para resolver problemas aplicados a melhorar certos processos tecnológicos.

[1] A demanda por produtos minimamente processados de alta qualidade tem aumentado nas últimas décadas. O aquecimento Ohmico se destaca como uma promissora tecnologia para substituir o tratamento térmico convencional, tais como a pasteurização e a esterilização comercial. O aquecimento Ohmico é um processo onde se aplica corrente elétrica, por meio de eletrodos, com o objetivo de aquecer o produto. O calor gera-se internamente devido à resistência elétrica do mesmo, em que a taxa de geração de calor depende da diferença de potencial (voltagem) aplicada, e da condutividade elétrica do produto.

Mais especificamente nesta dissertação, motivado por [19] e [7], usaremos Métodos Variacionais para mostrar a existência de solução para os problemas semilineares

$$(P1)\begin{cases} M(||u||^2)(-\Delta u + u) = f(u) & \text{em } \Omega, \\ M(||u||^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = f(u)\displaystyle\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$(P2)\begin{cases} M(||u||^2)(-\Delta u + u) = |u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ M(||u||^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda|u|^{q-2}u\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para o problema $(P1)$ foi possível aplicar a Teoria de Morse para mostrar multiplicidade de solução. No entanto, com o problema $(P2)$ tivemos dificuldade em aplicar a Teoria de Morse, principalmente pelo fato do ponto 0 não ser um ponto critico não-degenerado do funcional associado ao problema $(P2)$.

Inicialmente, no capítulo 1 fazemos a caracterização variacional de ambos os problemas, em seguida, apresentamos alguns conceitos e resultados da Teoria dos Pontos Críticos que serão utilizados no trabalho como Princípio Variacional de Ekeland, Teorema do Passo da Montanha e Variedade de Nehari. Também apresentamos uma noção básica a respeito da Teoria de Morse para que possamos aplicá-la no problema $(P1)$.

No capítulo 2 na seção 2.1 mostramos que existe uma solução positiva para o problema $(P1)$ utilizando o Teorema do Passo da Montanha. Já a seção 2.2 aplicamos a Teoria de Morse para mostrar a existência de pelo menos três soluções para o problema $(P1)$.

Ao longo capítulo 3, analisamos as condições sobre o problema $(P2)$ e o dividimos em três casos, onde foi possível mostrar a existência de solução para cada caso. Na seção 3.1 estudamos os dois primeiros casos, onde usamos o Princípio Variacional de Ekeland para mostrar a existência de solução não trivial para o problema. Já na seção 3.2 estudamos o terceiro caso e utilizamos a Variedade de Nehari e o Método de Fibração para encontrarmos uma solução não trivial.

Capítulo 1

Caracterização Variacional dos Problemas

Neste capítulo apresentamos um breve sumário de resultados recentes da teoria dos pontos críticos e dos métodos variacionais que utilizaremos. Faremos uma breve exposição sobre a Teoria de Morse e de como pretendemos aplicá-la. Entendemos por métodos variacionais as técnicas usadas para demonstrar que um determinado funcional atinge um ponto crítico, em que encontrar este ponto equivale a determinar uma solução fraca para uma certa equação diferencial relacionada com o funcional.

Seja X um espaço de Banach real e seja $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional continuamente diferenciável, isto é, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $u \in X$ é um ponto crítico do funcional I se

$$I'(u)\varphi = 0 \tag{1.1}$$

para toda $\varphi \in X$, em que $I'(u)$ denota a derivada de Fréchet. Nesse caso, o correspondente número $c = I(u)$ é chamado de valor crítico de I ou nível crítico de I. Veremos que na aplicação da teoria dos pontos críticos às equações diferencias, determinar um elemento $u \in X$ que verifica (1.1) é equivalente a determinar uma solução fraca para uma certa equação diferencial relacionada com o funcional.

Veremos que os problemas $(P1)$ e $(P2)$ possuem estrutura variacional. Com isso queremos dizer que tais problemas podem ser reformulados de maneira que a existência de solução pode ser obtida através da aplicação dos resultados da teoria de pontos críticos.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e regular, consideremos o problema

$$(P1)\left\{\begin{array}{rcll} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) & = & f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} & = & f(u)\displaystyle\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{1.2}$$

em que $N \geq 3$, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ são funções contínuas satisfazendo

$$\text{M é não-crescente e } M(0) = 1. \tag{M1}$$

$$\text{Existem constantes } m_2, t_2 > 0 \text{ tais que } 0 < M(t) \leq m_2, \ \text{ se } t \geq t_2. \tag{M2}$$

$$M(t^2)t \longrightarrow +\infty \text{ se } t \longrightarrow +\infty. \tag{M3}$$

$$f(0) = 0, \ f(t) > 0 \text{ se } t > 0 \text{ e } |f(-t)| \leq f(t) \text{ se } t > 0. \tag{f1}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = l, \text{ em que } l > 0. \tag{f2}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = 0 \text{ onde } 2 < q < 2^* = \frac{2N}{N-2} \text{ ou } 2 < q < 2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}. \tag{f3}$$

Sejam $\lambda_1 < \lambda_2 < ...$ os autovalores de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$ Suponhamos também que

$$\lambda_j < f'(0) - 1 < \lambda_{j+1}, \ \text{ para algum } j \geq 1. \tag{f4}$$

Multiplicando ambos os membros das equações em $(P1)$ por uma função teste $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ e integrando temos

$$(i) \quad -M(\|u\|^2)\int_\Omega \Delta u\varphi dx + M(\|u\|^2)\int_\Omega u\varphi dx = \int_\Omega f(u)\varphi dx$$

$$(ii) \quad M(\|u\|^2)\int_{\partial\Omega} \varphi\frac{\partial u}{\partial\eta}d\sigma = \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma\right).$$

Aplicando a identidade de Green em (i) temos

$$-M(\|u\|^2)\left(-\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx + \int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial u}{\partial\eta}d\sigma\right) + M(\|u\|^2)\int_\Omega u\varphi dx = \int_\Omega f(u)\varphi dx$$

e segue de (ii) que

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx - \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma\right) + M(\|u\|^2)\int_\Omega u\varphi dx - \int_\Omega f(u)\varphi dx = 0.$$

Assim, uma solução fraca para o problema $(P1)$ é definida como sendo uma função $u \in W^{1,2}(\Omega)$ que verifica a identidade integral acima para toda função teste $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Desta forma uma solução fraca para o problema $(P1)$ é ponto crítico do funcional $I : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ se, e somente se, o funcional satisfaz

$$I'(u)\varphi = M(\|u\|^2)\int_\Omega (\nabla u\nabla\varphi + u\varphi)\, dx - \int_\Omega f(u)\varphi dx - \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma\right). \tag{1.3}$$

para toda função teste $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Logo, um candidato natural a funcional associado ao problema $(P1)$, cuja a derivada no sentido de Frechet dada por (1.3), é da forma

$$I(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(u)dx - \frac{1}{2}\left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)^2 \tag{1.4}$$

Com

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds \quad \text{e} \quad F(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

Proposição 1.1. *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ funções contínuas satisfazendo as hipóteses $(M1)$, $(M2)$, $(M3)$, $(f1)$, $(f2)$ e $(f3)$. Então o funcional $I : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado em (1.4) é de classe $C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$, com*

$$I'(u)\varphi = M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi + u\varphi dx - \int_\Omega f(u)\varphi dx - \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma$$

$\forall u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Demonstração. Consideremos $I(u) = \dfrac{1}{2}J_1(u) - J_2(u) - \dfrac{1}{2}J_3(u)$ onde

$$J_1(u) = \hat{M}(\|u\|^2),\ J_2(u) = \int_\Omega F(u)dx \text{ e } J_3(u) = \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)^2.$$

Mostraremos que $J_1, J_2, J_3 \in C_1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$J_1'(u) = 2M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi + u\varphi dx,$$

$$J_2'(u) = \int_\Omega f(u)\varphi dx$$

e

$$J_3'(u) = 2\left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma.$$

Calcularemos, inicialmente, a derivada de Gateaux DJ_1. Para isso, definimos $H_1(u) = \|u\|^2$, assim temos que $DJ_1(u)\varphi = M(\|u\|^2)DH_1(u)\varphi$.

$$\begin{aligned}
\frac{H_1(u+t\varphi) - H_1(u)}{t} &= \frac{\|u+t\varphi\|^2 - \|u\|^2}{t}\\
&= \frac{\langle u+t\varphi, u+t\varphi\rangle - \|u\|^2}{t}\\
&= \frac{\|u\|^2 + 2t\langle u,\varphi\rangle + t^2\|\varphi\|^2 - \|u\|^2}{t}\\
&= \frac{1}{t}\left[2t\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi + u\varphi dx + t^2\|\varphi\|^2\right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$DH_1(u)\varphi = \lim_{t\to 0}\frac{H_1(u+t\varphi) - H_1(u)}{t} = 2\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi + u\varphi dx. \tag{1.5}$$

Mostraremos agora que H_1 é contínuo, com isso DJ_1 é contínuo. Seja (u_n) uma sequência em $W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$.

Assim, para cada $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ com $\|\varphi\| \leq 1$, aplicando a desigualdade de Hölder, desigualdade triangular e que $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ temos

$$
\begin{aligned}
|[DH_1(u_n) - DH_1(u)]\,\varphi| &= \left|2\int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi + u_n\varphi dx - 2\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi + u\varphi dx\right| \\
&\leq 2\int_\Omega |\nabla(u_n - u)\nabla\varphi + (u_n - u)\varphi| dx \\
&\leq 2\int_\Omega |\nabla(u_n - u)\nabla\varphi| + |(u_n - u)\varphi| dx \\
&= 2\int_\Omega |\nabla(u_n - u)\nabla\varphi| dx + 2\int_\Omega |(u_n - u)\varphi| dx \\
&\leq 2\|\nabla(u_n - u)\|^2_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|u_n - u\|^2_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 2\|(u_n - u)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}\|\varphi\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} + 2C\|u_n - u\|^2\|\varphi\|^2 \\
&\leq 2\|(u_n - u)\|^2\|\varphi\|^2 + 2C\|u_n - u\|^2\|\varphi\| \\
&\leq \left[2\|\varphi\|^2 + 2C\|\varphi\|^2\right]\|u_n - u\|^2 \\
&\leq [2 + 2C]\,\|u_n - u\|^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, usando a norma em $(W^{1,2}(\Omega))'$, concluímos que

$$\|DH_1(u_n) - DH_1(u)\| := \sup_{||\varphi||\leq 1} |DH_1(u_n)\varphi - DH_1(u)\varphi| \leq [2 + 2C]\|u_n - u\|.$$

Logo, $DH_1(u_n) \to DH_1(u)$ em $(W^{1,2}(\Omega))'$ quando $u_n \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Portanto, operador DH_1 é contínuo e deste modo, DJ_1 é contínuo e temos que $DJ_1 = J_1'$. Assim $J_1 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ e por (1.5), temos

$$J_1'(u)\varphi = DJ_1(u)\varphi = 2M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi + u\varphi dx. \tag{1.6}$$

Agora, vamos calcular a derivada de Gateaux DJ_2. Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, para cada $u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, consideremos a função $h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $h(s) = F(u+st\varphi)$. Observe que $h'(s) = f(u + st\varphi)t\varphi$, $h(1) = F(u + t\varphi)$ e $h(0) = F(u)$.

Desde que h é contínuo e diferenciável em $(0, 1)$. Temos, do Teorema do Valor Médio, que existe $c \in (0, 1)$ tal que $h(1) - h(0) = h'(c)$, o que implica

$$\left|\frac{F(u + t\varphi) - F(u)}{t}\right| = |f(u + ct\varphi)||\varphi|.$$

Considerando as condições de crescimento de f e usando a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}
|f(u+ct\varphi)||\varphi| &\leq ((\varepsilon+l)|u+ct\varphi| + C_\varepsilon|u+ct\varphi|^{q-1})|\varphi| \\
&\leq (\varepsilon+l)|\varphi||u+ct\varphi| + C_\varepsilon|\varphi||u+ct\varphi|^{q-1} \\
&\leq (\varepsilon+l)|\varphi||u| + (\varepsilon+l)|\varphi||ct\varphi| + c_\varepsilon|\varphi|(|u|+|ct\varphi|)^{q-1}.
\end{aligned}$$

Observe que, como $c \in (0,1)$ e por hipótese $0 < |t| < 1$, temos $|f(u+ct\varphi)||\varphi \leq \varepsilon|\varphi||u| + \varepsilon|\varphi|^2 + c_\varepsilon|\varphi|(|u|+|\varphi|)^{q-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
|f(u+ct\varphi)||\varphi &\leq (\varepsilon+l)|\varphi||u| + (\varepsilon+l)|\varphi|^2 + c_\varepsilon|\varphi|c'(|u|^{q-1}+|\varphi|^{q-1}) \\
&\leq (\varepsilon+l)|\varphi||u| + (\varepsilon+l)|\varphi|^2 + c'_\varepsilon|\varphi||u|^{q-1} + c'_\varepsilon|\varphi|^q.
\end{aligned}$$

Note que $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), 1 \leq s < 2^*$, utilizando a desigualdade de Hölder, $\varepsilon|\varphi||u| + \varepsilon|\varphi|^2 + c'_\varepsilon|\varphi||u|^{q-1} + c'_\varepsilon|\varphi|^q \in L^1(\Omega)$. De fato, pois

$$\begin{aligned}
\varphi \in W^{1,2}(\Omega) &\implies \varphi \in L^2(\Omega),\ \text{logo } |\varphi|^2 \in L^1(\Omega) \\
\varphi \in W^{1,2}(\Omega) &\implies \varphi \in L^q(\Omega),\ \text{logo } |\varphi|^q \in L^1(\Omega),\ 2 < q < 2^* \\
u,\varphi \in W^{1,2}(\Omega) &\implies u,\varphi \in L^2(\Omega),\ \text{assim por Hölder } |u||\varphi| \in L^1(\Omega) \\
u \in W^{1,2}(\Omega) &\implies u \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega),\ \text{logo } |u|^{q-1} \in L^q(\Omega),\ 2 < q < 2^* \\
\varphi \in W^{1,2}(\Omega) &\implies \varphi \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega).
\end{aligned}$$

Como q e $q/(q-1)$ são expoentes conjugados temos por Hölder que $|u|^{q-1}|\varphi| \in L^1(\Omega)$.

Sendo $L^1(\Omega)$ um espaço vetorial, temos $(\varepsilon+l)|\varphi||u| + (\varepsilon+l)|\varphi|^2 + c'_\varepsilon|\varphi||u|^{q-1} + c'_\varepsilon|\varphi|^q \in L^1(\Omega)$ como queríamos mostrar.

Além disso, como f é contínua, ao tomarmos uma sequência $|t_n| \to 0$ quando $n \to +\infty$, encontramos

$$f(u(x) + ct_n\varphi(t))\varphi(x) \to f(u(x))\varphi(x) \text{ pontualmente em } \Omega.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned} DJ_2(u)\varphi &= \lim_{t_n\to 0} \frac{J_2(u+t_n\varphi)-J_2(u)}{t_n} \\ &= \lim_{t_n\to 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega F(u+t_n\varphi) - \int_\Omega F(u)}{t_n} \\ &= \lim_{t_n\to 0} \int_\Omega f(u+ct_n\varphi)\varphi \\ &= \int_\Omega f(u)\varphi. \end{aligned}$$

De onde concluímos

$$DJ_2(u)\varphi = \int_\Omega f(u)\varphi. \tag{1.7}$$

Mostraremos agora que o operador DJ_2 é contínuo. Seja (u_n) uma sequência em $W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, assim das imersões contínuas, $u_n \to u$ em $L^s(\Omega)$ com $1 \leq s < 2^*$ no caso $N \geq 3$.

Do Teorema de Vainberg (ver apêndice), existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $g \in L^s(\Omega)$ onde $1 \leq s < 2^*$ tal que $u_{n_j}(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω e $|u_{n_j}(x)| \leq g(x)$ quase sempre em Ω.

Desde que f é contínua, usando a desigualdade triangular, a limitação da f e a limitação de $|u_{n_j}(x)|$ por $g(x)$ quase sempre, obtemos

$$\begin{aligned} |f(u_{n_j}(x)) - f(u(x))|^{\frac{q}{q-1}} &\leq \left[|f(u_{n_j}(x)) + f(u(x))|\right]^{\frac{q}{q-1}} \\ &\leq \left[(\varepsilon+l)|u_{n_j}(x)| + C_\varepsilon|u_{n_j}(x)|^{q-1}\right. \\ &+ \left.(\varepsilon+l)|u_n(x)| + C_\varepsilon|u_n(x)|^{q-1}\right]^{\frac{q}{q-1}} \\ &\leq \left[(\varepsilon+l)|g(x)| + C_\varepsilon|g(x)|^{q-1} + (\varepsilon+l)|g(x)| + C_\varepsilon|g(x)|^{q-1}\right]^{\frac{q}{q-1}} \\ &\leq \left[2(\varepsilon+l)|g(x)| + 2C_\varepsilon|g(x)|^{q-1}\right]^{\frac{q}{q-1}} \\ &\leq C_{1\varepsilon}g(x)^{\frac{q}{q-1}} + C_{2\varepsilon}g(x)^q. \end{aligned}$$

Como $2 < q < 2^*$ e das imersões contínuas, se tomarmos em particular $g \in L^q(\Omega)$ temos $g \in L^{\frac{q}{q-1}}$, logo $C_{1\varepsilon}g(x)^{\frac{q}{q-1}} + C_{2\varepsilon}g(x)^q \in L^1(\Omega)$.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$|f(u_{n_j}(x)) - f(u(x))|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)} \to 0.$$

Deste modo, para todo $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que $||\varphi|| \leq 1$, encontramos

$$\begin{aligned} |[DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u)]\varphi| &= \left| \int_\Omega f(u_{n_j})\varphi - \int_\Omega f(u)\varphi \right| \\ &\leq \int_\Omega |f(u_{n_j}) - f(u)||\varphi|. \end{aligned}$$

Desde que $q/(q-1)$ e q são expoentes conjugados, da desigualdade de Hölder,

$$|[DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u)]\varphi| \leq |f(u_{n_j}) - f(u)|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)} |\varphi|_{L^q(\Omega)}.$$

Das imersões contínuas de Sobolev temos

$$\begin{aligned} |[DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u)]\varphi| &\leq |f(u_{n_j}) - f(u)|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)} C||\varphi|| \\ &\leq C|f(u_{n_j}) - f(u)|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)} \end{aligned}$$

Portanto, usando a norma em $(W^{1,2}(\Omega))'$, concluímos que

$$\begin{aligned} |DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u)| &:= \sup_{||\varphi|| \leq 1} |[DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u)]\varphi| \\ &\leq C|f(u_{n_j}) - f(u)|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)}, \end{aligned}$$

implicando

$$\lim_{j \to +\infty} DJ_2(u_{n_j}) = DJ_2(u).$$

Logo, $DJ_2(u_n) \to DJ_2(u)$ quando $u_n \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, assim o operador DJ_2 é contínuo e deste modo $DJ_2 = J_2'$. Portanto, $J_2 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ e por (1.7), temos

$$J_2'(u)\varphi = DJ_2(u)\varphi = \int_\Omega f(u)\varphi. \tag{1.8}$$

Para calcular a derivada de Gateaux DJ_3, definamos $H_3(u) = \int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma$. Assim temos $DJ_3(u)\varphi = \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right) DH_3(u)\varphi$.

Observe que o calculo para mostrar que $H_3 \in C^1(W^{1,2}(\partial\Omega), \mathbb{R})$ é análogo a mostrar que $J_2 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$, logo $J_3 \in C^1(W^{1,2}(\partial\Omega), \mathbb{R})$ e temos

$$J_3'(u\varphi) = DJ_3(u)\varphi = 2\left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma \tag{1.9}$$

Assim, sendo $I'(u)\varphi = \frac{1}{2}J_1'(u)\varphi - J_2'(u)\varphi - \frac{1}{2}J_3'(u)\varphi$ para todo $u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, por (1.6), (1.8) e (1.9) concluímos que

$$I'(u)\varphi = M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi + u\varphi dx - \int_\Omega f(u)\varphi dx - \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma$$

Dessa forma, pontos críticos do funcional I correspondem a soluções fracas do problema $(P1)$.

Com intuito de aplicar a Teoria de Morse mostraremos na proposição a seguir que o funcional $I \in C^2(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$

Proposição 1.2. *Sejam f e M nas mesma condições da Proposição 1.1 com $M' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, funções contínuas. Então o funcional $I : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$I(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(u)dx - \frac{1}{2}\left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)$$

é de classe $C^2(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$, com

$$\begin{aligned} I''(u)(\varphi,\psi) &= 2M'(\|u\|^2)\langle u,\psi\rangle\langle u,\varphi\rangle + M(\|u\|^2)\langle\psi,\varphi\rangle - \int_\Omega f'(u)\varphi\psi dx \\ &- \left(\int_{\partial\Omega} f(u)\psi d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma\right) - \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\int_{\partial\Omega} f'(u)\varphi\psi d\sigma \end{aligned}$$

Demonstração. Consideremos

$$I'(u)\varphi = \phi_1(u) - \phi_2(u) - \phi_3(u)$$

onde

$$\phi_1(u) = M(\|u\|^2)\langle u,\varphi\rangle \text{ e } \phi_2(u) = \int_\Omega f(u)\varphi dx \text{ e } \phi_3(u) = \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma.$$

Mostraremos que $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\begin{aligned}
\phi_1'(u) &= 2M'(\|u\|^2)\langle u,\psi\rangle\langle u,\varphi\rangle + M(\|u\|^2)\langle \psi,\varphi\rangle, \\
\phi_2'(u) &= \int_\Omega f'(u)\varphi\psi dx \text{ e} \\
\phi_3'(u) &= \left(\int_{\partial\Omega} f(u)\psi d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma\right) + \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} f'(u)\varphi\psi d\sigma\right).
\end{aligned}$$

Inicialmente vamos calcular a derivada de Gateaux $D\phi_1$, para isso definamos $\omega_1(u) = \langle u,\varphi\rangle$ e pelo Proposição 1.1 temos que $D\phi_1(u)\psi = 2M'(\|u\|^2)\langle u,\psi\rangle\langle u,\varphi\rangle + M(\|u\|^2)D\omega_1(u)\psi$.

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_1(u+t\psi)-\omega_1(u)}{t} &= \frac{\displaystyle\int_\Omega \nabla(u+t\psi)\nabla\varphi + (u+t\psi)\varphi - \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi + u\varphi}{t} \\
&= \frac{\displaystyle\int_\Omega t\nabla\psi\nabla\varphi + t\psi\varphi}{t} \\
&= \frac{t}{t}\int_\Omega \nabla\psi\nabla\varphi + \psi\varphi \\
&= \int_\Omega \nabla\psi\nabla\varphi + \psi\varphi.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$D\omega_1(u)\psi = \lim_{t\to 0}\frac{\omega_1(u+t\psi)-\omega_1(u)}{t} = \int_\Omega \nabla\psi\nabla\varphi + \psi\varphi dx. \tag{1.10}$$

Mostraremos agora que ω_1 é contínuo, com isso $D\phi_1$ é contínuo. Seja (u_n) uma sequência em $W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$.

Assim, para cada $\psi \in W^{1,2}(\Omega)$ com $\|\psi\| \le 1$, temos

$$|[D\omega_1(u_n) - D\omega_1(u)]\,\psi| = \left|\int_\Omega \nabla\psi\nabla\varphi + \psi\varphi dx - \int_\Omega \nabla\psi\nabla\varphi + \psi\varphi dx\right| = 0.$$

Deste modo concluímos que

$$\|D\omega_1(u_n) - D\omega_1(u)\| := \sup_{||\psi|| \leq 1} |D\omega_1(u_n)\psi - D\omega_1(u)\psi| = 0.$$

Logo, $D\omega_1(u_n) \to D\omega_1(u)$ em $(W^{1,2}(\Omega))'$ quando $u_n \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Portanto, operador $D\omega_1$ é contínuo e deste modo, $D\phi_1$ é contínuo e temos que $D\phi_1 = \phi_1'$. Assim $\phi_1 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ e por (1.10), temos

$$\phi_1'(u)\psi = D\phi_1(u)\psi = 2M'(\|u\|^2) \langle u, \psi \rangle \langle u, \varphi \rangle + M(\|u\|^2) \langle \psi, \varphi \rangle . \tag{1.11}$$

Calcularemos a derivada de Gateaux $D\phi_2$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, para cada $u, \varphi\psi \in W^{1,2}(\Omega)$, consideremos a função $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $h(s) = f(u + st\psi)\varphi$. Observe que $h(s)' = f'(u + st\psi)t\psi\varphi$, $h(1) = f(u + t\psi)\varphi$ e $h(0) = f(u)\varphi$.

Desde que h é contínuo e diferenciável em $(0, 1)$, temos do teorema do valor médio que existe $c \in (0, 1)$ tal que $h(1) - h(0) = h'(c)$, o que implica

$$\left| \frac{f(u + t\psi)\varphi - f(u)\varphi}{t} \right| = |f'(u + ct\psi)||\psi||\varphi|.$$

Considerando as condições de crescimento de f dado e usando a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} |f'(u + ct\psi)||\psi||(\varepsilon + l)| &\leq (\varepsilon + (q-1)C_\varepsilon |u + ct\psi|^{q-2})|\psi||\varphi| \\ &\leq (\varepsilon + l)|\psi||\varphi| + (q-1)C_\varepsilon|\psi||\varphi||u + ct\psi|^{q-2} \\ &\leq (\varepsilon + l)|\psi||\varphi| + (q-1)C_\varepsilon|\psi||\varphi|(|u| + |ct\psi|)^{q-2}. \end{aligned}$$

Observe que, como $c \in (0, 1)$ e por hipótese $0 < |t| < 1$, então $|f(u + ct\psi)||\psi||\varphi| \leq (\varepsilon + l)|\psi||\varphi| + (q-1)C_\varepsilon|\psi||\varphi|(|u| + |ct\psi|)^{q-2}$. Assim,

$$\begin{aligned} |f'(u + ct\psi)||\psi||\varphi| &\leq (\varepsilon + l)|\psi||\varphi| + CC_\varepsilon|\psi||\varphi|(|u|^{q-2} + |\psi|^{q-2}) \\ &\leq (\varepsilon + l)|\psi||\varphi| + CC_\varepsilon|\psi||\varphi||u|^{q-2} + CC_\varepsilon|\psi|^{q-1}|\varphi|. \end{aligned}$$

Note que $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), 1 \leq s < 2^*$, utilizando a desigualdade de Hölder como no Proposição 1.1, temos $(\varepsilon + l)|\psi||\varphi| + CC_\varepsilon|\psi||\varphi||u|^{q-2} + CC_\varepsilon|\psi|^{q-1}|\varphi| \in L^1(\Omega)$.

Além disso, como por hipótese f' é contínua ao tomarmos uma sequência $|t_n| \to 0$ quando $n \to +\infty$, encontramos

$$f(u(x) + ct_n\psi(t))\psi(x)\varphi(x) \to f(u(x))\psi(x)\varphi(x) \text{ pontualmente em } \Omega.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}
D\phi_2(u)\psi &= \lim_{t_n \to 0} \frac{\phi_2(u + t_n\psi) - \phi_2(u)}{t_n} \\
&= \lim_{t_n \to 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega f(u + t_n\psi)\varphi - \int_\Omega f(u)\varphi}{t_n} \\
&= \lim_{t_n \to 0} \int_\Omega f'(u + ct_n\psi)\psi\varphi \\
&= \int_\Omega f'(u)\psi\varphi.
\end{aligned}$$

De onde concluímos

$$D\phi_2(u)\psi = \int_\Omega f'(u)\psi\varphi. \tag{1.12}$$

Mostremos que o operador $D\phi_2$ é contínuo. Seja (u_n) uma sequência em $W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, assim das imersões contínuas, $u_n \to u$ em $L^s(\Omega)$ com $1 \leq s < 2^*$ no caso $N \geq 3$.

Do teorema de Vainberg, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $g \in L^s(\Omega)$ onde $1 \leq s < 2^*$ tal que $u_{n_j}(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω e $|u_{n_j}(x)| \leq g(x)$ quase sempre em Ω.

Desde que f' é contínua, usando a desigualdade triangular, a limitação da f' e a limitação de $|u_{n_j}(x)|$ por $g(x)$ quase sempre, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|f'(u_{n_j}(x))\psi(x)\varphi(x) - f'(u(x))\psi(x)\varphi(x)\right| &= \left|[f'(u_{n_j}(x)) - f'(u(x))]\psi(x)\varphi(x)\right| \\
&\leq |f'(u_{n_j}(x)) + f'(u(x))||\psi(x)||\varphi(x)| \\
&\leq [(\varepsilon + l) + (q-1)C_\varepsilon|u_{n_j}(x)|^{q-2}]|\psi(x)||\varphi(x)| \\
&+ [(\varepsilon + l) + (q-1)C_\varepsilon|u(x)|^{q-2}]|\psi(x)||\varphi(x)| \\
&\leq [(\varepsilon + l) + (q-1)C_\varepsilon|g(x)|^{q-2}]|\psi(x)||\varphi(x)| \\
&+ [(\varepsilon + l) + (q-1)C_\varepsilon|g(x)|^{q-2}]|\psi(x)||\varphi(x)| \\
&= [2(\varepsilon + l) + 2(q-1)C_\varepsilon|g(x)|^{q-2}]\,|\psi(x)||\varphi(x)|
\end{aligned}$$

como $2 < q < 2^*$ e das imersões contínuas, se tomarmos em particular $g \in L^q(\Omega)$ temos $|g|^{q-2} \in L^{\frac{q}{q-2}}$. Logo, utilizando a desigualdade de Hölder como na Proposição 1.1, temos $2(\varepsilon + l)|\psi(x)||\varphi(x)| + 2(q-1)C_\varepsilon|g(x)|^{q-2}|\psi(x)||\varphi(x)| \in L^1(\Omega)$.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\left|f'(u_{n_j}(x))\psi(x)\varphi(x) - f'(u(x))\psi(x)\varphi(x)\right|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Deste modo, para todo $\psi \in W^{1,2}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned}
|[D\phi_2(u_{n_j}) - D\phi_2(u)]\psi| &= \left|\int_\Omega f'(u_{n_j})\psi\varphi - \int_\Omega f'(u)\psi\varphi\right| \\
&\leq \int_\Omega |[f(u_{n_j} - f(u))]||\psi||\varphi|.
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando a norma em $(W^{1,2}(\Omega))'$, concluímos que

$$\begin{aligned}
|D\phi_2(u_{n_j}) - D\phi_2(u)| &:= \sup_{||\psi|| \in W^{1,2}(\Omega)} |[D\phi_2(u_{n_j}) - D\phi_2(u)]\psi| \\
&\leq \left|f'(u_{n_j}(x))\psi(x)\varphi(x) - f'(u(x))\psi(x)\varphi(x)\right|_{L^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

implicando em

$$\lim_{j \to +\infty} D\phi_2(u_{n_j}) = D\phi_2(u).$$

Logo, $D\phi_2(u_n) \to D\phi_2(u)$ quando $u_n \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, assim o operador $D\phi_2$ é contínuo e deste modo $D\phi_2 = \phi_2'$. Portanto $\phi_2 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ e por 1.12, temos

$$\phi_2'(u)\psi = D\phi_2(u)\psi = \int_\Omega f'(u)\psi\varphi. \tag{1.13}$$

Agora para calcular da deriva Gateaux ϕ_3, definamos $\omega_3(u) = \displaystyle\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma$. Assim temos $D\phi_3(u)\psi = \left(\displaystyle\int_{\partial\Omega} f(u)\psi d\sigma\right)\left(\displaystyle\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma\right) + \left(\displaystyle\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right) D\omega_3(u)\psi$.

Observe que o cálculo para mostrar que $\omega_3 \in C^1(W^{1,2}(\partial\Omega), \mathbb{R})$ é análogo a mostrar que $\phi_2 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$. Logo, $\phi_3 \in C^1(W^{1,2}(\partial\Omega), \mathbb{R})$ e temos

$$\phi_3'(u)\psi = D\phi_3(u)\psi = \left(\int_{\partial\Omega} f(u)\psi d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma\right) + \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} f'(u)\psi\varphi d\sigma\right). \tag{1.14}$$

Assim, sendo $I''(u)(\varphi, \psi) = \phi_1'(u) - \phi_2'(u) - \phi_3'(u)$ para todo $\varphi, \psi \in W^{1,2}(\Omega)$, por (1.11), (1.13) e (1.14) concluímos que

$$\begin{aligned} I''(u)(\varphi,\psi) &= 2M'(\|u\|^2)\langle u,\psi\rangle\langle u,\varphi\rangle + M(\|u\|^2)\langle\psi,\varphi\rangle - \int_\Omega f'(u)\varphi\psi dx \\ &- \left(\int_{\partial\Omega} f(u)\psi d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma\right) - \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} f'(u)\varphi\psi d\sigma\right). \end{aligned}$$

■

Considere o problema

$$(P2)\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = |u|^{p-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda |u|^{q-2}u \displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.15}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado e regular, $\alpha, \lambda > 0$ e $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$.

Multiplicando ambos os membros das equações em (1.15) por uma função teste $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ e integrando temos

$$(i) \ \ -M(\|u\|^2)\int_\Omega \Delta u\varphi dx + M(\|u\|^2)\int_\Omega u\varphi dx = \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx,$$

$$(ii)\ \ M(\|u\|^2)\int_{\Omega}\varphi\frac{\partial u}{\partial\eta}d\sigma=\lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right).$$

Aplicando a identidade de Green em (i) temos

$$-M(\|u\|^2)\left(-\int_{\Omega}\nabla u\nabla\varphi dx+\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial u}{\partial\eta}d\sigma\right)+M(\|u\|^2)\int_{\Omega}u\varphi dx=\int_{\Omega}|u|^{p-2}u\varphi dx$$

e segue de (ii) que

$$\begin{aligned}0\ &=\ M(\|u\|^2)\int_{\Omega}\nabla u\nabla\varphi dx-\lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right)\\ &+\ M(\|u\|^2)\int_{\Omega}u\varphi dx-\int_{\Omega}|u|^{p-2}u\varphi dx.\end{aligned}$$

Assim, uma solução fraca para o problema $(P2)$ é definida como sendo uma função $u\in W^{1,2}(\Omega)$ que verifica a identidade integral acima para toda função teste $\varphi\in W^{1,2}(\Omega)$.

Desta forma uma solução fraca para o problema $(P2)$ é um pondo crítico do funcional $E_{\lambda,\alpha}:W^{1,2}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$ se, e somente se, o funcional satisfaz

$$\begin{aligned}\langle E'_{\alpha,\lambda}(u),\varphi\rangle\ &=\ M(\|u\|^2)\int_{\Omega}(\nabla u\nabla\varphi+u\varphi)dx-\int_{\Omega}|u|^{p-2}u\varphi dx\\ &-\ \lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right)\end{aligned}\tag{1.16}$$

para toda $\varphi\in W^{1,2}(\Omega)$. Logo, um candidato natural a funcional associado ao problema $(P2)$, cuja a derivada no sentido de Frechet dada por (1.16), é da forma

$$E_{\lambda,\alpha}(u)=\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2)-\frac{1}{p}\int_{\Omega}|u|^p dx-\frac{\lambda}{2}\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)^2\tag{1.17}$$

Com

$$\widehat{M}(t)=\int_0^t M(s)ds.$$

Proposição 1.3. *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ em que $N\geq 3$, $\alpha,\lambda>0$, e $1<q<2$, $M:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ uma função contínua com $M(t)=t^\alpha$ e $\widehat{M}=\displaystyle\int_0^t M(s)ds$.*

Então o funcional $E_{\lambda,\alpha} : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dado por*

$$\begin{aligned} E_{\lambda,\alpha}(u) &= \frac{1}{2}\hat{M}(\|u\|^2) - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{\lambda}{2}\left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)^2 \\ &= \frac{1}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{\lambda}{2}\left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)^2 \end{aligned}$$

é de classe $C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$*, com*

$$\left\langle E'_{\lambda,\alpha}(u), \varphi\right\rangle = \|u\|^{2\alpha}\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi + u\varphi dx - \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx - \lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right)$$

$\forall u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$*.*

Demonstração. Consideremos

$$E_{\lambda,\alpha}(u) = J_1(u) - J_2(u) - \frac{\lambda}{2}J_3(u)$$

onde

$$J_1(u) = \frac{1}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)},$$

$$J_2(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx$$

e

$$J_3(u) = \left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)^2.$$

Mostraremos que $J_1, J_2, J_3 \in C_1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$J_1'(u) = \|u\|^{2\alpha}\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi + u\varphi dx,$$

$$J_2'(u) = \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx$$

e

$$J_3'(u) = 2\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)\int_{\partial\Omega}|u|^{q-2}u\varphi d\sigma.$$

Segue da proposição 1.1 que a derivada de Gateaux DJ_1 existe e o operador DJ_1 é contínuo, assim $DJ_1 = J_1'$. Portanto $J_1 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ e temos

$$J_1'(u)\varphi = DJ_1(u)\varphi = \|u\|^{2\alpha} \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + u\varphi dx. \tag{1.18}$$

Agora vamos calcular a derivada de Gateaux DJ_2. Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, para cada $u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, consideremos a função $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $h(s) = \frac{1}{p}|u + st\varphi|^p$. Observe que $h(s)' = t|u + st\varphi|^{p-2}(u + st\varphi)\varphi, h(1) = \frac{1}{p}|u + t\varphi|^p$ e $h(0) = \frac{1}{p}|u|^p$.

Desde que h é contínuo e diferenciável em $(0,1)$, temos do Teorema do Valor Médio que existe $c \in (0,1)$ tal que $h(1) - h(0) = h'(c)$, o que implica

$$\frac{1}{p}|u + t\varphi|^p - \frac{1}{p}|u|^p = t|u + ct\varphi|^{p-2}(u + ct\varphi)\varphi.$$

Assim,

$$\frac{1}{pt}|u + t\varphi|^p - \frac{1}{p}|u|^p = |u + ct\varphi|^{p-2}(u + ct\varphi)\varphi$$

e

$$\left|\frac{1}{pt}[|u + t\varphi|^p - |u|^p]\right| \leq (|u + \varphi|)^{p-1}|\varphi|, \text{ em } L^1(\Omega).$$

Note que ao tomarmos uma sequência $|t_n| \to 0$ quando $n \to +\infty$, encontramos

$$\frac{1}{pt_n}[|u(x) + t_n\varphi(x)|^p - |u(x)|^p] \to |u(x)|^{p-2}u(x)\varphi(x), \text{ q.s. em } \Omega$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned} DJ_2(u)\varphi &= \lim_{t_n \to 0} \frac{J_2(u + t_n\varphi) - J_2(u)}{t_n} \\ &= \lim_{t_n \to 0} \frac{\frac{1}{p}\int_\Omega |u + t_n\varphi|^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p}{t_n} \\ &= \lim_{t_n \to 0} \frac{\int_\Omega |u + t_n\varphi|^p - |u|^p}{pt_n} \\ &= \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi. \end{aligned}$$

De onde concluímos

$$DJ_2(u)\varphi = \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi. \tag{1.19}$$

Mostraremos agora que o operador DJ_2 é contínuo. Seja (u_n) uma sequência em $W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, assim das imersões contínuas, $u_n \to u$ em $L^s(\Omega)$ com $1 \leq s < 2^*$ no caso $N \geq 3$.

Do Teorema de Vainberg, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $g \in L^s(\Omega)$ onde $1 \leq s < 2^*$ tal que $u_{n_j}(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω e $|u_{n_j}(x)| \leq g(x)$ quase sempre em Ω.

Usando a desigualdade triangular, a limitação da $|u_{n_j}(x)|$ por $g(x)$ quase sempre, obtemos

$$\begin{aligned} |(|u_{n_j}(x)|^{p-2}u_{n_j}(x) - |u(x)|^{p-2}u(x))|^{\frac{p}{p-1}} &\leq \left[|u_{n_j}(x)|^{p-1} + u(x)|^{p-1}\right]^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq C(|g(x)|^p + |u(x)|^p). \end{aligned}$$

Como $2 < p < 2^*$ e das imersões contínuas, se tomarmos em particular $g \in L^p(\Omega)$, logo $C(|g(x)|^p + |u(x)|^p) \in L^1(\Omega)$.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\|(|u_{n_j}(x)|^{p-2}u_{n_j}(x) - |u(x)|^{p-2}u(x))\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \to 0.$$

Deste modo, para todo $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que $||\varphi|| \leq 1$, encontramos

$$\begin{aligned} |[DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u)]\varphi| &= \left|\int_\Omega |u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j}\varphi - \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi\right| \\ &= \left|\int_\Omega (|u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u)\varphi\right| \\ &\leq \int_\Omega |(|u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u)||\varphi|. \end{aligned}$$

Como $|(|u_{n_j}|^{p-2}u_{n_j} - |u|^{p-2}u)| \in L^{\frac{p}{p-1}}$ e $|\varphi| \in L^p(\Omega)|$ desde que $p/(p-1)$ e p são expoentes conjugados, da desigualdade de Hölder,

$$|[DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u)]\varphi| \leq \|(|u_{n_j}(x)|^{p-2}u_{n_j}(x) - |u(x)|^{p-2}u(x))\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}.$$

Das imersões contínuas de Sobolev temos

$$\begin{aligned} |[DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u)]\varphi| &\leq \|(|u_{n_j}(x)|^{p-2}u_{n_j}(x) - |u(x)|^{p-2}u(x))\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} C\|\varphi\| \\ &\leq C\|(|u_{n_j}(x)|^{p-2}u_{n_j}(x) - |u(x)|^{p-2}u(x))\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Portanto aplicando a norma em $(W^{1,2}(\Omega))'$, concluímos que

$$\begin{aligned} |DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u)| &:= \sup_{||\varphi||\leq 1} |[DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u)]\varphi| \\ &\leq C\|(|u_{n_j}(x)|^{p-2}u_{n_j}(x) - |u(x)|^{p-2}u(x))\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}, \end{aligned}$$

implicando em

$$\lim_{j\to+\infty} DJ_2(u_{n_j}) = DJ_2(u).$$

Logo, $DJ_2(u_n) \to DJ_2(u)$ quando $u_n \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, assim o operador DJ_2 é contínuo e deste modo $DJ_2 = J_2'$. Portanto, $J_2 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ e por (1.19), temos

$$J_2'(u)\varphi = DJ_2(u)\varphi = \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi. \tag{1.20}$$

Agora para calcular a derivada de Gateaux DJ_3, definamos $H_3(u) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma$. Assim temos $DJ_3(u)\varphi = 2\left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right) DH_3(u)\varphi$.

Observe que o cálculo para mostrar que $H_3 \in C^1(W^{1,2}(\partial\Omega), \mathbb{R})$ é análogo a mostrar que $J_2 \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$, logo $J_3 \in C^1(W^{1,2}(\partial\Omega), \mathbb{R})$ e temos

$$J_3'(u\varphi) = DJ_3(u)\varphi = 2\left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right) \int_{\partial\Omega} |u|^{q-2}u\varphi d\sigma. \tag{1.21}$$

Assim, sendo $\left\langle E'_{\lambda,\alpha}(u), \varphi\right\rangle = J_1'(u\varphi) - J_2'(u)\varphi - \lambda J_3'(u)\varphi$ para todo $u\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, por (1.18), (1.20) e (1.21) concluímos que

$$\left\langle E'_{\lambda,\alpha}(u), \varphi\right\rangle = ||u||^{2\alpha} \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi + u\varphi dx - \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx - \lambda\left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u| d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right).$$

Dessa forma, pontos críticos do funcional $E_{\lambda,\alpha}$ correspondem a soluções fracas do problema $(P2)$.

1.1 Princípio Variacional de Ekeland

O Princípio Variacional de Ekeland trata-se de um teorema provado por Ekeland em 1972 (ver [14]) e é uma forte ferramenta para resolver uma ampla classe de equações diferencias elípticas. Utilizaremos este teorema, mais precisamente uma de suas consequências para mostrar que o problema $(P2)$ possui uma solução não trivial para os casos 1 e 2 que serão apresentados no capítulo 3.

Antes de enunciarmos o Princípio Variacional de Ekeland definimos um funcional semicontínuo inferiormente.

Definição 1.1. *Seja X um espaço topológico, a função $\phi : X \to \mathbb{R}$ é dita ser semicontínua inferiormente se, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $\phi^{-1}(\lambda, +\infty)$ é aberto em X, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Teorema 1.1. *(Princípio Variacional de Ekeland) Sejam X um espaço Métrico Completo e $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente. Suponhamos que ϕ seja limitado inferiormente e sejam $\varepsilon > 0$, $\varepsilon > 0$ e $u \in X$ dados tais que*

$$\phi(u) \leq \inf_X \phi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

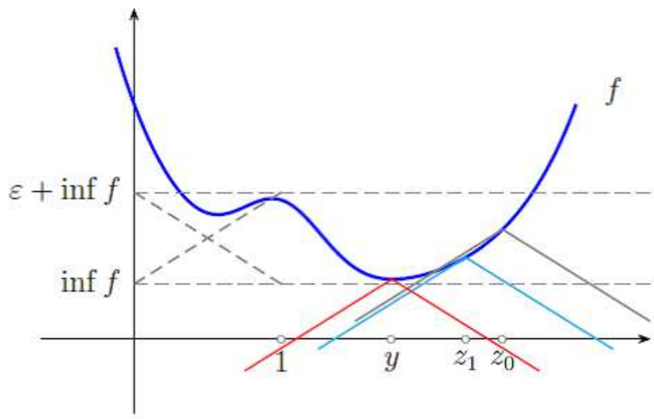
Então existe $u_\varepsilon \in X$ tal que

(a) $\phi(u_\varepsilon) \leq \phi(u)$;

(b) $d(u, u_\varepsilon) \leq \frac{1}{\lambda}$;

(c) *Para cada* $w \neq u_\varepsilon \in X$, $\phi(u_\varepsilon) < \phi(w) + \varepsilon\lambda d(u_\varepsilon, w)$.

O Princípio Variacional de Ekeland apresenta uma forma de aproximação do ínfimo ao garantir que, para $\varepsilon > 0$, a função f possui um cone suporte da forma $f(y) - \varepsilon\|x - y\|$. Uma forma de verificar como isto acontece geometricamente é ilustrada na figura seguinte.



Começando com um ponto y_0 tal que $f(y_0) < \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$ e com cone $f(y_0) - \varepsilon \|x - y_0\|$. Se este cone não é suporte para f então existe um ponto

$$y_1 \in A_1 = \{x \in X : f(x) \geq f(y_0) - \varepsilon \|x - y_0\|\}$$

tal que

$$f(y_1) < \inf_{x \in A} f(x) + \frac{1}{2}\left(f(y_0) - \inf_{x \in A} f(x)\right).$$

Se $f(y_1) - \varepsilon \|x - y_1\|$ não é cone suporte para f, então repetimos o processo. Esse procedimento finalmente determina um cone suporte para f ou gera uma sequencia de subconjuntos fechados $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ cujos os diâmetros tendem a zero. No último caso, definimos $\{y\} = \cap_{i=1}^{+\infty} A_i$, deste modo obtemos o cone suporte $f(y) - \varepsilon \|x - y\|$.

Para apresentar uma consequência importante do Princípio Variacional de Ekeland para este trabalho, precisaremos da seguinte definição:

Definição 1.2. *Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que a seqüência $(u_n) \in X$ é Palais-Smale no nível c para I se as seguintes convergências ocorrem:*

$$I(u_n) \longrightarrow c \text{ e } I'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Dizemos que o funcional I satisfaz a condição Palais-Smale no nível c se toda seqüencia Palais-Smale no nível c possui subseqüência convergente em X.

Corolário 1.1. *Sejam X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1*

limitado inferiormente. Então, existe uma sequência Palais-Smale (u_n) *no nível* c *para* I, *onde* $c = \inf_{u \in X} I(u)$.

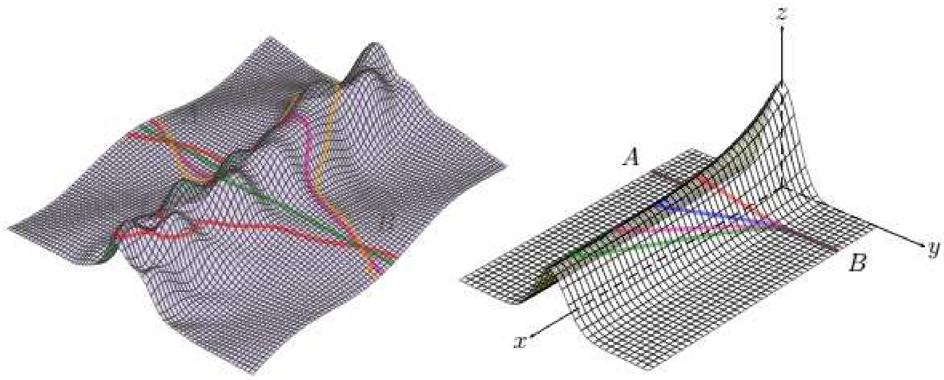
Mais adiante, quando nos referirmos ao Princípio Variacional de Ekeland, mais precisamente estaremos nos referindo ao próximo resultado que pode ser encontrado em [13] e [15].

Corolário 1.2. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $I : X \to \mathbb{R}$ *um funcional de classe* C^1 *limitado inferiormente. Se* I *satisfaz a condição* $(PS)_c$ *com* $c = \inf_{u \in X} I(u)$, *então* c *é atingido em um ponto* $u_0 \in X$, *e* u_0 *é ponto crítico de* I.

1.2 Teorema do Passo da Montanha

O Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz pode ser encontrado [4], o usaremos para mostrar que o problema $(P1)$ possui uma solução positiva. A seguir veremos uma ideia geométrica do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz, logo após o enunciaremos.

Suponhamos que alguém se encontra no interior de uma montanha em um ponto A a uma altura h_0, rodeado por uma cadeia de montanhas de alturas superiores ou iguais a h_0, e se deseja atingir o ponto B situado fora da cadeia de montanhas a uma altura $h_1 < h_0$, então parece existir um "melhor caminho" passando pela cadeia de montanhas e ligando A até B. Um procedimento para determiná-lo é o de considerar, entre todos os caminhos unindo os pontos A e B, aquele que sobe à mínima altura. Mais especificamente, avaliamos a máxima altura de cada caminho unindo os pontos A e B; em seguida, avaliamos o mínimo entre esses valores máximos. Veremos em seguida que é fundamental considerar alguma hipótese de compacidade sobre essa classe de caminhos, pois como sugere a figura da direita, o melhor caminho pode escapar para o infinito e o valor de minimax pode não ser atingido.



Teorema 1.2. *(Teorema do Passo da Montanha): Sejam X um espaço de Banach real, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição de Palais-Smale. Suponha que $I(0) = 0$ e que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(I1) Existem constantes $\alpha,\ \rho > 0$ tais que $I\,|_{B_\rho} \geq \alpha$ e

(I2) Existe um $e \in X \setminus \overline{B_\rho}$ tal que $I(e) \leq 0$. Então, I possui um valor crítico $c \geq \alpha$, com

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} I(u)$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0 \ e \ \gamma(1) = e\}.$$

1.3 Variedade de Nehari

No início dos anos 1960, Nehari introduziu um método que se tornou muito útil na teoria de pontos críticos e que atualmente recebe o nome de método da variedades de Nehari, o qual utilizaremos para mostrar que o problema $(P2)$ possui uma solução não trivial para o caso 3. A ideia original de Nehari consiste em estudar um problema de valor de fronteira para certas equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda ordem em um intervalo aberto (a, b) e mostrar que a equação possui uma solução não trivial que pode ser obtida através de um problema de minimização com vínculo.

Comecemos fazendo uma breve descrição do Método de Nehari. Para isso, seja X um espaço de Banach e $\Phi : X \mapsto \mathbb{R}$ um funcional tal que $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. A derivada de Fréchet de Φ no ponto $u \in X$, denotada por $\Phi'(u)$, é um elemento do espaço dual X' e denotamos essa derivada avaliada em $\varphi \in X$ por $\Phi'(u)\varphi$. Suponhamos que $u \neq 0$ é um ponto crítico do funcional, isto é, $\Phi'(u) = 0$. Então necessariamente o elemento $u \in X$ está contido no conjunto

$$\mathcal{N} := \{u \in W^{1,2}(\Omega); \langle \Phi'(u)_{\lambda,\alpha}, u\rangle = 0\}.$$

Logo, o conjunto $\mathcal{N}$ é um vínculo natural para o problema de determinar pontos críticos não triviais do funcional Φ. O conjunto $\mathcal{N}$ é chamado de variedade de Nehari. Denotamos o ínfimo na variedade de Nehari por

$$m = \inf_{u \in \mathcal{N}} \Phi(u).$$

Sob hipóteses apropriadas para o funcional Φ podemos esperar que o valor m seja atingido em algum elemento $u_0 \in \mathcal{N}$ e que u_0 seja um ponto crítico.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\Phi(0) = 0$. Suponhamos ainda que para cada $w \in S_1(0) := \{w \in X : \|w\| = 1\}$ a função $\alpha_w(s) = \Phi(sw)$ atinge um único máximo denotado por $s_w \in (0, +\infty)$ tal que $\alpha'_w > 0$ sempre que $0 < s < s_w$, e $\alpha'_w(s) < 0$ sempre que $s > s_w$ e $s_w \geq \delta$ para algum número $\delta > 0$ independente de $w \in S_1(0)$. Então $\alpha'_w(s_w) = \Phi'(s_w w)w = 0$. Portanto, $s_w w$ é o único ponto na semi-reta $s \mapsto sw$, com $s > 0$, que intercepta o conjunto $\mathcal{N}$. Além disso, $\mathcal{N}$ é limitado fora da origem, $\mathcal{N} \subset X$ é um subconjunto fechado e existe uma bijeção radial entre $\mathcal{N}$ e $S_1(0)$. Mais ainda, se s_w é limitado em subconjuntos compactos de $S_1(0)$, então esta bijeção é de fato um homeomorfismo. Claramente, o número m definido acima, se atingido, deve ser positivo e $u_0 \in \mathcal{N}$ é um ponto crítico sempre que $\Phi(u_0) = m$. Notamos ainda que, como a aplicação $s \mapsto \alpha_w(s)$ é crescente para todo $w \in S_1(0)$ e para $0 < s < \delta$, então a origem é um mínimo local e, portanto, também é um ponto crítico de Φ. Como $u \neq 0$ é uma solução para a equação $\Phi'(u) = 0$ que tem energia mínima no conjunto de todas as soluções não triviais, dizemos que u_0 é uma solução de energia mínima. Suponhamos adicionalmente às hipótese já feitas sobre X que este seja um espaço de Hilbert e que $\Phi \in C^2(X, \mathbb{R})$. Então

$$\alpha''_w(s_w) = \Phi''(s_w w)(w, w) = s_w^2 \Phi''(u, u) \geq 0,$$

em que $u = s_w w \in \mathcal{N}$. Se $\Phi''(u)(u, u) < 0$. para todo $u \in \mathcal{N}$, então definimos $G(u) := \Phi'(u)u$, temos que

$$G'(u)u = \Phi''(u)(u, u) + \Phi'(u)(u) = \Phi''(u)(u, u) \leq 0,$$

para $u \in \mathcal{N}$. Com $\mathcal{N} = \{u \in X - \{0\} : G(u) = 0\}$, segue do teorema da função implícita que $\mathcal{N}$ é uma variedade de classe C^1 de co-dimensão 1 e que $X = T_u(\mathcal{N}) \oplus \mathbb{R}u$ para cada $u \in \mathcal{N}$. Portanto, nesse caso podemos ver facilmente que qualquer $u \in \mathcal{N}$ tal que $\Phi(u) = c$, isto é, qualquer minimizante para o funcional Φ restrito a variedade de Nehari, verifica a equação $\Phi'(u) = 0$. De maneira geral, um $u \in X$ é um ponto crítico não trivial de Φ se, e somente se, $u \in \mathcal{N}$ e u é um ponto é um ponto crítico da restrição de Φ a $\mathcal{N}$. Em vista dessa propriedade, podemos aplicar a teoria de pontos críticos a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ de modo a determinar os pontos críticos do funcional Φ. O resultado que aplicaremos será enunciado a seguir e pode ser encontrado em [9]

Teorema 1.3. *Suponha que u_0 é um mínimo ou máximo local para $E_{\lambda,\alpha}$ em $\mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$, então se u_0 não pertence a $\mathcal{N}^0_{\lambda,\alpha}$, então u_0 é um ponto crítico de $E_{\lambda,\alpha}$ em $W^{1,2}(\Omega)$*

1.4 Teoria de Morse

A Teoria de Morse é uma importante ferramenta no estudo de multiplicidade de pontos críticos para o funcional energia associado a um problema Elíptico, e portanto, no estudo de multiplicidade de soluções do problema desde que este possua as características desejáveis para aplicação dos resultados. Nesta teoria, o comportamento de um funcional de classe C^1 definido sobre um espaço de Banach próximo de um de seus pontos críticos isolados é descrito por seus grupos críticos, que são grupos de homologia de um certo par topológico. Neste trabalho não entraremos em detalhes sobre como utilizar a Teoria de Morse de modo geral, mas pretendemos falar minimamente dos conceitos necessários ao entendimento da aplicação da teoria de Morse que faremos mais adiante. Conforme mostramos anteriormente, o problema $(P1)$ possui caracterização variacional e que seu funcional associado é de classe C^2, dessa forma basta garantirmos algumas condições sob as quais os grupos críticos tenham dimensão finita e se anulem para dimensões grandes.

Seja H um espaço de Hilbert e $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear de classe $C^2(H, \mathbb{R})$. Denotaremos por K_f o conjunto dos pontos críticos de f. A teoria de Morse "clássica"preocupa-se de estabelecer relações entre a topologia do domínio do funcional f e a "estrutura"do conjunto de pontos críticos de f quando estes são não-degenerados, ou seja, em um subconjunto de K_f. Lembrando que se Ω é um aberto de espaço de Hilbert H e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável num ponto $u \in K_f$, então a diferencial segunda de f em u é uma aplicação bilinear simétrica $(d^2f)(u) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ ou equivalentemente uma aplicação linear simétrica $(d^2f)(u) : H \longrightarrow H^\star \simeq H$ Vejamos algumas definições necessárias ao entendimento da aplicação que faremos.

Definição 1.3. *Seja H um espaço de Hilbert e $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear de classe $C^2(H, \mathbb{R})$ e $u \in K_f$ um ponto crítico de f.*

(a) Chama-se índice do ponto crítico u denotado por $m(f, u)$ a dimensão (possivelmente infinita) de um subespaço maximal sobre o qual $(d^2f)(u)$ é definida negativa.

(b) O ponto crítico u é dito um ponto crítico não-degenerado se $(d^2f)(u)$ é inversível (com inversa contínua).

Os pontos críticos não degenerados são completamente classificados pelo Lema de Morse. Quanto aos pontos críticos degenerados, a situação é diferente. O resultado que aplicaremos será enunciado a seguir e pode ser encontrado em [23]

Teorema 1.4. *Seja $f \in C^2(X; \mathbb{R})$ limitada inferiormente. Assuma que f satisfaz a condição Palais-Smale e que u_0 é um ponto crítico não degenerado de f que não é ponto de mínimo com índice de Morse finito. Então f tem pelo menos três ponto críticos.*

Capítulo 2

Problema de Neumann Não-Local com Termo de Kirchhoff Não-Crescente

2.1 Introdução

Começaremos mostrando, via Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz, a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = f(u)\displaystyle\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $N \geq 3$, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ são funções contínuas satisfazendo

$$M \text{ é não-crescente e } M(0) = 1. \tag{M1}$$

$$\text{Existem constantes } m_2, t_2 > 0 \text{ tais que } 0 < M(t) \leq m_2, \text{ se } t \geq t_2. \tag{M2}$$

$$M(t^2)t \longrightarrow +\infty \text{ se } t \longrightarrow +\infty. \tag{M3}$$

$$f(0) = 0,\ f(t) > 0 \text{ se } t > 0 \text{ e } |f(-t)| \leq f(t) \text{ se } t > 0. \tag{f1}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = l, \text{ em que } l > 0. \tag{f2}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = 0 \text{ onde } 2 < q < 2^* = \frac{2N}{N-2} \text{ ou } 2 < q < 2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}. \tag{f3}$$

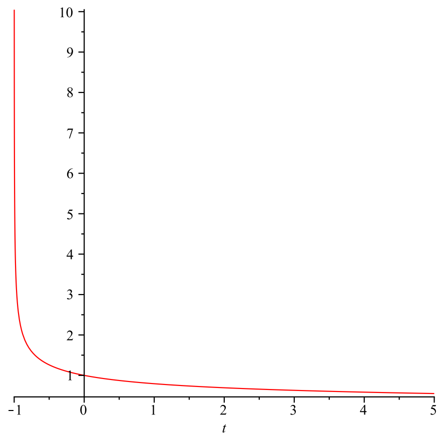
Sejam $\lambda_1 < \lambda_2 < ...$ os autovalores de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$. Suponhamos também que

$$\lambda_j < f'(0) - 1 < \lambda_{j+1}, \text{ para algum } j \geq 1. \tag{f4}$$

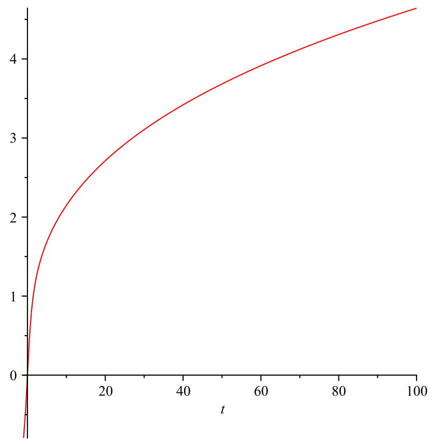
Exemplos de funções M que satisfazem as hipóteses (M1), (M2), (M3) é a função

$$M(t) = \frac{1}{(1+t)^\alpha} \text{ com } 0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Para $\alpha = \dfrac{1}{3}$ temos que o gráfico de $M(t)$ é dado por



e o gráfico de $M(t^2)t$ é o seguinte:

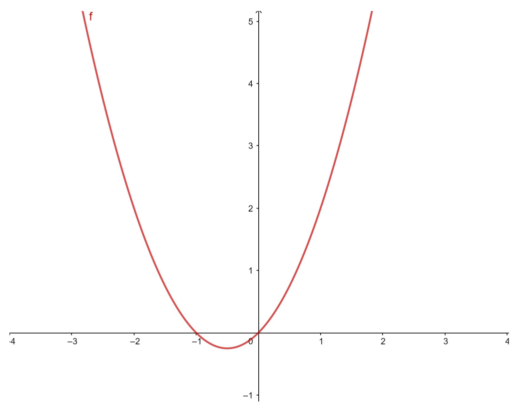


Exemplos de funções que satisfazem as condições de f é a função

$$f(t) = x^n + lx$$

com $1 < n \in \mathbb{N}$, $n < q-1$ e $l > 0$.

Para $n = 2$ e $l = 1$ temos que o gráfico de $f(t)$ é dado por



Como $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(\xi)d\xi$ e $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(\xi)d\xi$, associamos ao problema (2.1) o funcional energia

$$I(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(u)dx - \frac{1}{2}\left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)^2.$$

Já vimos que e o funcional $I : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e

$$I'(u)\varphi = M(\|u\|^2)\int_\Omega (\nabla u\nabla\varphi + u\varphi)dx - \int_\Omega f(u)\varphi dx - \left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)\int_{\partial\Omega} f(u)\varphi d\sigma$$

para toda $u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Teorema 2.1. *Suponhamos que M satisfaça as hipóteses (M1), (M2), (M3) e que f satisfaça a condição de Ambrosetti-Rabinowitz e as hipóteses (f1), (f2) e (f3). Então o problema (2.1) possui uma solução fraca positiva.*

Demonstração. Vamos mostrar que o funcional I satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha.

Afirmação 1: **O funcional I satisfaz a primeira geometria do T.P.M.**

De fato, observemos inicialmente que, em vista de $(M1)$ e da continuidade de M, existem $m_1, t_1 > 0$ tais que $M(t) \geq m_1$ se $0 \leq t \leq t_1$. Assim, sendo $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que $0 < \|u\| = \varrho < t_1$ então

$$\widehat{M}(\|u\|^2) = \int_0^{\|u\|^2} M(\xi)d\xi \geq m_1\|u\|^2.$$

Daí,

$$I(u) \geq \frac{m_1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(u)dx - \frac{1}{2}\left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)^2.$$

Como $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} = l$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 \leq f(t) < \varepsilon|t| + l|t|$ se $|t| < \delta$. Por outro lado, desde que $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que $0 \leq f(t) < \varepsilon|t|^{q-1}$ se $|t| > R$. Assim, desde que f é contínua no intervalo compacto $[\delta, R]$, então existe $K > 0$ tal que $0 \leq f(t) < K|t|^{q-1}$ para todo $t \in [\delta, R]$. E, por (f1), temos $|f(-t)| < f(t)$, se $t > 0$. Portanto, $f(t) < (\varepsilon + l)|t| + C_\varepsilon|t|^{q-1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$F(t) < \frac{(\varepsilon + l)}{2}t^2 + C'_\varepsilon|t|^q,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e, assim,

$$\int_\Omega F(u)dx < \frac{(\varepsilon + l)}{2}\int_\Omega u^2dx + C'_\varepsilon\int_\Omega |u|^q dx,$$

para toda $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Segue das imersões de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^t(\Omega)$ para todo $1 \leq t < 2^*$ que

$$\int_\Omega u^2 dx = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|u\|^2$$

assim como

$$\int_\Omega u^q dx = \|u\|^q_{L^q(\Omega)} \leq C_2 \|u\|^q.$$

Logo,

$$\int_\Omega F(u) dx < \frac{(\varepsilon + l)}{2} C_1 \|u\|^2 + C'_\varepsilon C_2 \|u\|^q$$

para toda $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Quando consideramos apenas a fronteira de Ω também vale que

$$\int_{\partial\Omega} F(u) d\sigma < \frac{(\varepsilon + l)}{2} \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma + C_\varepsilon \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma$$

para toda $u \in W^{1,2}(\Omega)$. O que implica em

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial\Omega} F(u) d\sigma \right)^2 &\leq \left((\varepsilon + l) \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma + C_\varepsilon \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma \right)^2 \\ &\leq 2(\varepsilon + l) \left(\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma \right)^2 + 2C_\varepsilon \left(\int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma \right)^2. \end{aligned}$$

E desde que, também, são válidas as imersões contínuas de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^r(\partial\Omega)$ para todo $1 \leq r < 2_*$. Tomando $1 \leq q < 2_*$ temos que

$$\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma = \|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_3 \|u\|^2 \Longrightarrow \left(\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma \right)^2 \leq C_3 \|u\|^4$$

assim como,

$$\int_{\partial\Omega} u^q d\sigma = \|u\|^q_{L^q(\partial\Omega)} \leq C_4 \|u\|^q \Longrightarrow \left(\int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma \right)^2 \leq C_4 \|u\|^{2q}.$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \left(\int_{\partial\Omega} F(u) d\sigma \right)^2 < (\varepsilon + l) C_3 \|u\|^4 + C_\varepsilon C_4 \|u\|^{2q}$$

para toda $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Portanto,

$$I(u) \geq \frac{m_1}{2}\|u\|^2 - \left(\underbrace{\frac{(\varepsilon+l)}{2}C_1}\|u\|^2 + \underbrace{C'_\varepsilon C_2}\|u\|^q\right) - \left(\underbrace{(\varepsilon+l)C_3}\|u\|^4 + \underbrace{C_\varepsilon C_4}\|u\|^{2q}\right).$$

Para não carregar a notação denotaremos de modo mais simples as constantes da desigualdade anterior, assim,

$$I(u) \geq \frac{m_1}{2}\|u\|^2 - (\varepsilon+l)\|u\|^2 - C_\varepsilon\|u\|^q - (\varepsilon+l)\|u\|^4 - C_\varepsilon\|u\|^{2q}.$$

Assim, supondo $2 < q < 2_*$ temos

$$I(u) \geq \left(\frac{m_1}{2} - (\varepsilon+l)\right)\|u\|^2\left(1 - C_\varepsilon\|u\|^{q-2} - (\varepsilon+l)\|u\|^2 - C_\varepsilon\|u\|^{2q-2}\right)$$

Sendo $0 < \varepsilon < \dfrac{m_1}{2}$ e tomando l e $0 < \|u\| = \varrho < t_1$ suficientemente pequeno tal que

$$1 - C_\varepsilon\varrho^{q-2} - \varepsilon\varrho^2 - C_\varepsilon\varrho^{2q-2} > 0$$

e

$$\frac{m_1}{2} - (\varepsilon+l) > 0$$

teremos

$$I(u) \geq \left(\frac{m_1}{2} - (\varepsilon+l)\right)\varrho^2\left(1 - C_\varepsilon\varrho^{q-2} - (\varepsilon+l)\varrho^2 - C_\varepsilon\varrho^{2q-2}\right) = r > 0,$$

sempre que $\|u\| = \varrho$. Assim, a primeira geometria do Teorema do Passo da Montanha é satisfeita.

Afirmação 2: **O funcional I satisfaz a segunda geometria do T.P.M.**

Desde que f satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz: *Existe* $2 < \mu < q$ *tal que*

$0 < \mu F(t) \leq tf(t)$ *para todo* $t > 0$, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{f(t)}{F(t)} &\geq \frac{\mu}{t}, \quad \text{para todo} \quad t > 0 \\
\int_1^t \frac{f(s)}{F(s)} ds &\geq \mu \int_1^t \frac{1}{s} ds, \quad \text{para todo} \quad t \geq 1 \\
\ln F(s)|_1^t &\geq \mu[\ln s]_1^t \\
\ln F(t) - \ln F(1) &\geq \mu[\ln t - \ln 1] \\
\ln\left(\frac{F(t)}{F(1)}\right) &\geq \ln t^{\mu}, \quad \text{para todo} \quad t \geq 1 \\
\frac{F(t)}{F(1)} &\geq t^{\mu}, \quad \text{para todo} \quad t \geq 1 \\
F(t) &\geq F(1)t^{\mu}, \quad \text{para todo} \quad t \geq 1.
\end{aligned}
$$

Logo, se $0 \leq t < 1$, então $F(t) > -K$ e para todo $t > 0$ teremos $2F(t) \geq F(1)t^{\mu} - K$. Assim, $F(t) > C_1 t^{\mu} - C_2$ para todo $t > 0$.

Fixemos uma função $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ com $\psi > 0$ em $\overline{\Omega}$. Assim, para $t > 0$, teremos

$$
I(t\psi) = \frac{1}{2}\widehat{M}(t^2\|\psi\|^2) - \int_{\Omega} F(t\psi)dx - \frac{1}{2}\left(\int_{\partial\Omega} F(t\psi)d\sigma\right)^2.
$$

Se considerarmos $\psi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ teremos $\psi(x) = 0$ em $\partial\Omega$, de onde segue que, $t\psi(x) = 0$ em $\partial\Omega$ e desde que $F(0) = 0$, obtém-se

$$
\int_{\partial\Omega} F(t\psi)d\sigma = 0.
$$

Neste caso,

$$
\begin{aligned}
I(t\psi) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(t^2\|\psi\|^2) - \int_\Omega F(t\psi)dx \\
&< \frac{1}{2}\widehat{M}(t^2\|\psi\|^2) - C_1 t^\mu \int_\Omega |\psi|^\mu dx + C_2|\Omega| \\
&< \frac{1}{2}\int_0^{t_2} M(s)ds + \frac{1}{2}\int_{t_2}^{t^2\|\psi\|^2} M(s)ds - C_1 t^\mu \int_\Omega |\psi|^\mu dx + C_2|\Omega| \\
&< \frac{1}{2}m_2 \int_{t_2}^{t^2\|\psi\|^2} ds - C_1 t^\mu \int_\Omega |\psi|^\mu dx + C_2|\Omega| + C_3 \\
&< \frac{1}{2}m_2 t^2\|\psi\|^2 - C_1 t^\mu \int_\Omega |\psi|^\mu dx + C
\end{aligned}
$$

Como $\mu > 2$ tem-se que $I(t\psi) \longrightarrow -\infty$ se $t \longrightarrow +\infty$.

Portanto, existe $t_0 > 0$ tal que $I(t_0\psi) < 0$ com $\|t_0\psi\| > \varrho$ e a segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha é satisfeita.

Afirmação 3: **O funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale**.

De fato, seja $(u_n) \in W^{1,2}(\Omega)$ uma seqüencia Palais-Smale para I, isto é,

$$I(u_n) \longrightarrow C \ \text{ e } \ I'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Desse modo, $|I(u_n)| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, teremos

$$|I'(u_n)u_n| \leq \|I'(u_n)\| \cdot \|u_n\| \leq C \cdot \|u_n\|.$$

Seja $\beta > 0$ a ser escolhido. Temos que

$$
\begin{aligned}
I(u_n) - \frac{1}{\beta}I'(u_n)u_n &\leq |I(u_n)| + \frac{1}{\beta}|I'(u_n)u_n| \\
&\leq C + \frac{1}{\beta}\|u_n\|.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
C+\frac{1}{\beta}\|u_n\| &\geq I(u_n)-\frac{1}{\beta}I'(u_n)u_n\\
&= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2)-\int_\Omega F(u_n)dx-\frac{1}{2}\left(\int_{\partial\Omega}F(u_n)d\sigma\right)^2\\
&- \frac{1}{\beta}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2-\frac{1}{\beta}\int_\Omega f(u_n)u_ndx-\frac{1}{\beta}\left(\int_{\partial\Omega}F(u_n)d\sigma\right)\int_{\partial\Omega}f(u_n)u_nd\sigma\\
&= \left(\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2)-\frac{1}{\beta}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2\right)+\int_\Omega\left[\frac{1}{\beta}f(u_n)u_n-F(u_n)\right]dx\\
&+ \left(\int_{\partial\Omega}F(u_n)d\sigma\right)\left[\int_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{\beta}f(u_n)u_n-\frac{1}{2}F(u_n)\right]d\sigma\right].
\end{aligned}
$$

Sendo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\beta}f(t)t-\frac{1}{2}F(t) &\geq 0\\
f(t)t &\geq \frac{\beta}{2}F(t).
\end{aligned}
$$

Da condição de Ambrosetti-Rabinowitz temos que $f(t)t \geq \mu F(t)$ com $2<\mu<q<2^*$. Assim, $f(t)t \geq \mu F(t) \geq \dfrac{\mu}{2}F(t)$ pois $f(t)\geq 0$ para todo $t>0$ e então $F(t)\geq 0$ para todo $t>0$. Logo, tomando $\beta=\mu$ teremos

$$
\begin{aligned}
C+\frac{1}{\mu}\|u_n\| &\geq \left(\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2)-\frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2\right)+\int_\Omega\left[\frac{1}{\mu}f(u_n)u_n-F(u_n)\right]dx\\
&+ \left(\int_{\partial\Omega}F(u_n)d\sigma\right)\left[\int_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{\mu}f(u_n)u_n-\frac{1}{2}F(u_n)\right]d\sigma\right].
\end{aligned}
$$

Como $f(u_n)u_n \geq \mu F(u_n) \geq \frac{\mu}{2}F(u_n)$ obtém-se que

$$
\begin{aligned}
C+\frac{1}{\mu}\|u_n\| &\geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2)-\frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\|u_n\|^2}M(\xi)d\xi-\frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2.
\end{aligned}
$$

Desde que M é contínua, pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $0 < \xi_n < \|u_n\|^2$ tal que

$$\int_0^{\|u_n\|^2} M(\xi)d\xi = M(\xi_n)\|u_n\|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} C + \frac{1}{\mu}\|u_n\| &\geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \\ &= \frac{1}{2}M(\xi_n)\|u_n\|^2 - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2. \end{aligned}$$

Desde que M é não-crescente, temos $M(\xi_n) \geq M(\|u_n\|^2)$, de onde segue que

$$\begin{aligned} C + \frac{1}{\mu}\|u_n\| &\geq \frac{M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2}{2} - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{C}{\|u_n\|} + \frac{1}{\mu} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) M(\|u_n\|^2)\|u_n\|.$$

Por (M3), (u_n) é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$. Assim, a menos de subseqüências obtemos

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &\longrightarrow \theta \text{ em } \mathbb{R}, \\ u_n &\rightharpoonup u \text{ em } W^{1,2}(\Omega), \\ u_n &\longrightarrow u \text{ em } L^s(\Omega),\ 1 \leq s < 2^* \\ u_n &\longrightarrow u \text{ em } L^s(\Omega),\ 1 \leq s < 2_*, \\ u_n(x) &\longrightarrow u(x) \text{ q. s. em } \Omega. \end{aligned}$$

Como M é contínua, temos

$$M(\|u_n\|^2) \longrightarrow M(\theta) > 0 \text{ em } \mathbb{R}.$$

Logo, existe $k > 0$ tal que $M(\|u_n\|^2) \geq k > 0$ para n grande.

Afirmação 4: **Podemos considerar não-negativa toda seqüencia Palais-Smale para este problema**.

De fato, sendo (u_n) limitada, a seqüencia $u_n^- = u_n^+ - u_n$ é também limitada. Dessa forma,

$$I'(u_n)u_n^- \longrightarrow 0,$$

ou seja,

$$M(\|u_n\|^2)\int_\Omega (\nabla u_n \nabla u_n^- + u_n u_n^-)dx - \int_\Omega f(u_n)u_n^- dx - \left(\int_{\partial\Omega} F(u_n)d\sigma\right)\int_{\partial\Omega} f(u_n)u_n^- d\sigma \longrightarrow 0.$$

Desde que $u_n = u_n^+ - u_n^-$, temos por (f2) e (f3) que

$$M(\|u_n\|^2)\int_\Omega (\nabla u_n^- \nabla u_n^- + u_n^- u_n^-)dx \longrightarrow 0.$$

Logo,

$$M(\|u_n\|^2)\|u_n^-\|^2 \longrightarrow 0.$$

Portanto,

$$\|u_n^-\|^2 \longrightarrow 0, \text{ já que } M(\|u_n\|^2) \longrightarrow M(\theta) > 0 \text{ em } \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Assim, podemos considerar $u_n = u_n^+ + o_n(1)$, o que implica em

$$\|u_n\|^2 = \|u_n^+\|^2 + o_n(1). \tag{2.3}$$

Desde que $\widehat{M}$ é contínua temos

$$\widehat{M}(\|u_n\|^2) = \widehat{M}(\|u_n^+\|^2) + o_n(1), \text{ ou seja, } I(u_n) = I(u_n^+) + o_n(1).$$

Vejamos que também vale

$$I'(u_n) = I'(u_n^+) + o_n(1).$$

De fato, desde que M é contínua temos

$$M(\|u_n\|^2) = M(\|u_n^+\|^2) + o_n(1).$$

De (2.2) temos que, a menos de subseqüência,

$$\frac{\partial u_n^-(x)}{\partial x} \longrightarrow 0 \text{ q. s. em } \Omega.$$

Logo,

$$\frac{\partial u_n(x)}{\partial x} - \frac{\partial u_n^+(x)}{\partial x} \longrightarrow 0 \text{ q. s. em } \Omega \text{ e então } \nabla u_n(x) - \nabla u_n^+(x) \longrightarrow 0 \text{ q. s. em } \Omega.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_n(x) - \nabla u_n^+(x)|^2 dx &\leq \int_\Omega \left(|\nabla u_n(x)| + |\nabla u_n^+(x)|\right)^2 dx \\
&\leq C\left(\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_n^+(x)|^2 dx\right) \\
&\leq C\left(\int_\Omega (|\nabla u_n(x)|^2 + u_n(x)^2) dx + \int_\Omega (|\nabla u_n^+(x)|^2 + u_n^+(x)^2) dx\right) \\
&\leq C_1 \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

pois (u_n) é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$.

Assim, usando o Lema A.1 de Brezis-Lieb temos

$$\int_\Omega (\nabla u_n \nabla \varphi + u_n \varphi) dx = \int_\Omega (\nabla u_n^+ \nabla \varphi + u_n^+ \varphi) dx + o_n(1). \tag{2.4}$$

Portanto, $I'(u_n) = I'(u_n^+) + o_n(1)$. Assim, desta identidade e de $I(u_n) = I(u_n^+) + o_n(1)$, segue-se que (u_n^+) é uma seqüência Palais-Smale. Logo qualquer seqüência Palais-Smale pode ser considerada uma seqüência não-negativa, ou seja, $(u_n) \geq 0$ e conseqüentemente $u \geq 0$.

Desde que $u_n \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^s(\Omega), \; 1 \leq s < 2^*$, segue-se que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^2(\Omega),$$

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em} \ \ L^q(\Omega).$$

E do fato de

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \ \ \text{q. s. em} \ \ \Omega.$$

segue a existência de funções $g \in L^2(\Omega)$ e $h \in L^q(\Omega)$ tais que

$$|u_n(x)| \leq g(x) \quad \text{q. s. em} \quad \Omega, \ \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

$$|u_n(x)| \leq h(x) \quad \text{q. s. em} \quad \Omega, \ \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso,

$$f(u_n(x))u_n(x) \longrightarrow f(u(x))u(x) \ \text{q. s. em} \ \ \Omega \quad \text{pois } f \text{ é contínua}$$

e

$$|f(u_n(x))u_n(x)| \leq (\varepsilon + l)|u_n|^2 + C_\varepsilon |u_n|^q \leq (\varepsilon + l)g(x)^2 + C_\varepsilon h(x)^q.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega f(u_n(x))u_n(x)dx \longrightarrow \int_\Omega f(u(x))u(x)dx.$$

De modo análogo,

$$\int_\Omega f(u_n(x))u(x)dx \longrightarrow \int_\Omega f(u(x))u(x)dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= I'(u_n)u_n - I'(u_n)u + M(\|u_n\|^2)\left(\langle u, u\rangle - \langle u_n, u\rangle\right) \\
&= M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 - M(\|u_n\|^2)\langle u_n, u\rangle + M(\|u_n\|^2)\left(\langle u, u\rangle - \langle u_n, u\rangle\right) \\
&- \int_\Omega f(u_n)u_n dx - \left(\int_{\partial\Omega} F(u_n)d\sigma\right)\int_{\partial\Omega} f(u_n)u_n d\sigma \\
&+ \int_\Omega f(u_n)u dx + \left(\int_{\partial\Omega} F(u_n)d\sigma\right)\int_{\partial\Omega} f(u_n)u d\sigma \\
&= M(\|u_n\|^2)\left(\langle u_n, u_n\rangle - 2\langle u_n, u\rangle + \langle u, u\rangle\right) + o_n(1) \\
&= M(\|u_n\|^2)\|u_n - u\|^2 + o_n(1).
\end{aligned}$$

Logo, $u_n \longrightarrow u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, pelo Teorema do Passo da Montanha u é ponto crítico do funcional I e, portanto, solução do problema (2.1). Desde que $I(u) = c > 0$, segue que $u \not\equiv 0$. ■

2.2 Multiplicidade de soluções para o problema P1 via Teoria de Morse

Nesta seção, mostraremos como o método variacional aliado a teoria de Morse pode ser aplicado no estudo de multiplicidade de soluções para o problema (2.1).

Teorema 2.2. *Sob as hipóteses $(M1)$, $(M2)$, $(M3)$ e que f satisfaça a condição de Ambrosetti-Rabinowitz e as hipóteses $(f1)$, $(f2)$, $(f3)$ e $(f4)$. Então o problema (2.1) possui pelo menos três soluções.*

A fim de demonstrar o Teorema 2.2 utilizaremos o Teorema 1.4 do Apêndice, para isso precisamos mostrar alguns resultados e que o funcional I seja limitado inferiormente, o que não é o caso como já vimos na demonstração de que I satisfaz a segunda geometria do passo da montanha.

Assim, verificamos que o funcional I é limitado inferiormente em $\overline{B}_\rho(0)$.

Lema 2.1. *O funcional I é limitado inferiormente em $\overline{B}_\rho(0)$, onde $\rho = \|t_0\psi\|$*
Demonstração. *Para mostrar que o funcional I satisfaz a primeira geometria do passo da montanha verificamos que*

$$I(u) \geq \left(\frac{m_1}{2} - (\varepsilon + l)\right) \|u\|^2 \left(1 - C_\varepsilon \|u\|^{q-2} - (\varepsilon + l)\|u\|^2 - C_\varepsilon \|u\|^{2q-2}\right)$$

e segue da segunda geometria do passo da montanha que existe $t_0 > 0$ em $\mathbb{R}$ e $\psi > 0$ em $\overline{\Omega}$ tal que $I(t_0\psi) < 0$ com $\rho = \|t_0\psi\| > \varrho$.

Logo,

$$I(u) \geq I(t_0\psi) \geq \left(\frac{m_1}{2} - (\varepsilon + l)\right) \rho^2 \left(1 - C_\varepsilon \rho^{q-2} - (\varepsilon + l)\rho^2 - C_\varepsilon \rho^{2q-2}\right) = R$$

para toda $u \in \overline{B}_\rho(0)$ *em que* R *é uma constante negativa.* ■

Lema 2.2. *A origem de* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *é um ponto crítico não degenerado de* I.

Demonstração.

$$I(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(u)dx - \frac{1}{2}\left(\int_{\partial\Omega} F(u)d\sigma\right)^2$$

temos

$$I''(0)(\varphi,\psi) = M(\|0\|^2)\int_\Omega \nabla\varphi\nabla\psi + \varphi\psi dx - \int_\Omega f'(0)\varphi\psi dx.$$

Para mostrar que 0 *é um ponto não degenerado, devemos mostrar que*

$$L = I''(0) : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$$

dado por

$$I''(0)(\varphi,\psi) = \langle L\varphi, \psi\rangle$$

é invertível.

O Teorema A.6 garante a existência de uma aplicação linear e contínua $T : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ *tal que*

$$\langle T\varphi, \psi\rangle = \int_\Omega f'(0)\varphi\psi dx.$$

Assim, se indicarmos por Id *a aplicação identidade de* $W_0^{1,2}(\Omega)$, *podemos escrever*

$$I''(0)(\varphi,\psi) = \langle Id\varphi, \psi\rangle - \langle T\varphi, \psi\rangle\,,$$

ou melhor

$$I''(0)(\varphi,\psi) = \langle (Id - T)\varphi, \psi\rangle$$

Portanto $L = Id - T$. *Claramente o operador* $Id - T$ *é linear contínuo e simétrico. Vamos mostar que* T *é um operador compacto.*

Seja ψ_n *uma sequência limitada em* $W_0^{1,2}(\Omega)$. *Pela imersão compacta* $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, *existe uma subsequência* φ_{n_j} *de* $\varphi_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *tal que*

$$\varphi_{n_j} \to \varphi_n \text{ em } L^2(\Omega).$$

Vamos mostrar que $T\varphi_{n_j} \to T\varphi_n$ *em* $L^2(\Omega)$. *Note que*

$$\begin{aligned} \|T\varphi_{n_j} - T\varphi\|_0^2 &= \left\langle T\varphi_{n_j} - T\varphi, T\varphi_{n_j} - T\varphi \right\rangle \\ &= \left\langle T\varphi_{n_j}, T\varphi_{n_j} - T\varphi \right\rangle - \left\langle T\varphi, T\varphi_{n_j} - T\varphi \right\rangle \\ &= \int_\Omega f'(0)\varphi_{n_j}(T\varphi_{n_j} - T\varphi)dx - \int_\Omega f'(0)\varphi(T\varphi_{n_j} - T\varphi)dx, \end{aligned}$$

ou melhor,

$$\|T\varphi_{n_j} - T\varphi\|_0^2 = \int_\Omega f'(0)(\varphi_{n_j} - \varphi)(T\varphi_{n_j} - T\varphi)dx.$$

Usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|T\varphi_{n_j} - T\varphi\|_0^2 \leq f'(0)\|\varphi_{n_j} - \varphi\|_{L^2(\Omega)}\|T\varphi_{n_j} - T\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pela desigualdade de Poincaré,

$$\|T\varphi_{n_j} - T\varphi\|_0^2 \leq f'(0)\|\varphi_{n_j} - \varphi\|_{L^2(\Omega)} C\|T\varphi_{n_j} - T\varphi\|_0$$

de onde segue que

$$\|T\varphi_{n_j} - T\varphi\|_0 \leq Cf'(0)\|\varphi_{n_j} - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \to 0,$$

logo $T\varphi_{n_j} \to T\varphi$ *em* $W_0^{1,2}(\Omega)$. *Portanto* T *é um operador compacto. Pela alternativa de Fredholm (Proposição A.2) mostraremos que* $Id - T$ *é bijetivo, basta mostrar que o mesmo é injetivo, isto é,* $Ker(Id - T) = \{0\}$. *Se* $\varphi \in Ker(Id - T)$, *temos*

$$\langle (Id - T)\varphi, \psi \rangle = 0, \ \forall \psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

implicando que

$$\int_\Omega \nabla\varphi\nabla\psi + \varphi\psi dx = \int_\Omega f'(0)\varphi\psi dx, \ \forall \psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

donde segue que $\varphi \in Ker(Id - T)$ *é solução do problema de autovalor*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + \varphi &= f'(0)\varphi \quad \text{em } \Omega, \\ \varphi &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Desde que $f'(0) \neq 0$ *temos que* $\varphi = 0$*. Logo* $L = Id - T$ *é linear contínuo e bijetivo. Além disso, pelo Teorema da Aplicação Aberta,* $L = Id - T$ *é um isomorfismo linear. Portanto* 0 *é um ponto critico não degenerado de* I*.* ■

Lema 2.3. *O índice de Morse de* I *em* $u_0 = 0$ *é maior do que ou igual a* 1*, ou seja,* $m(I, 0) \geq 1$*.*

Demonstração. O índice de Morse de I em 0 é o supremo das dimensões de subespaços de $W_0^{1,2}(\Omega)$, sobre os quais $I''(0)$ é negativo definido, isto é, $I''(0)(\varphi, \psi) < 0$. Sabemos que

$$I''(0)(\varphi, \varphi) = \langle L\varphi, \varphi \rangle = \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2 dx - f'(0) \int_\Omega |\varphi|^2 dx.$$

Assim, se φ_i é uma autofunção de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$associado ao autovalor λ_i temos

$$I''(0)(\varphi_i, \varphi_i) = \int_\Omega |\varphi_i|^2(\lambda_i + 1 - f'(0))dx < 0$$

para todo $1 \leq i \leq j$, onde j é dado na hipótese (f_4). Portanto $m(I, 0) \geq j \geq 1$. ■

Demonstração. (do Teorema 2.2)

Desde de que $I \in C^2(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ satisfaz a condição Palais-Smale, segue do Lema 2.1 que I é limitado em $\overline{B}_\rho(0)$ e dos Lemas 2.2 e 2.3 que $u_0 = 0$ é ponto crítico não degenerado de I que não é ponto de mínimo com índice de Morse j finito. Pelo Teorema 1.4, I tem pelo menos três pontos críticos. ■

Capítulo 3

Solução Para o Problema (P2) Via Variedade de Nehari e Método de Fibração

Neste capítulo, usaremos além do Princípio Variacional de Ekeland, conhecimentos a respeito da variedade de Nehari e fibração para estudar o problema

$$\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) & = & |u|^{p-2}u & \text{em} & \Omega, \\ M(\|u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} & = & \lambda |u|^{q-2}u \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma & \text{em} & \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $N \geq 3$, $\alpha, \lambda > 0$ e $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $M(t) = t^\alpha$ com $\alpha > 0$ e $t \geq 0$, que pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \|u\|^{2\alpha}(-\Delta u + u) & = & |u|^{p-2}u & \text{em} & \Omega, \\ \|u\|^{2\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} & = & \lambda |u|^{q-2}u \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma & \text{em} & \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Seja $E_{\lambda,\alpha} : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcional energia associado ao problema (3.1). Assim,

$$E_{\lambda,\alpha}(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{\lambda}{2}\left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)^2 \tag{3.2}$$

para toda $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Logo,

$$E_{\lambda,\alpha}(u) = \frac{1}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{\lambda}{2}\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)^2 \tag{3.3}$$

para toda $u \in W^{1,2}(\Omega)$, pois

$$\widehat{M}(t) = \frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}$$

para todo $t \geq 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} \langle E'_{\alpha,\lambda}(u), \varphi\rangle &= \|u\|^{2\alpha}\int_\Omega (\nabla u \nabla\varphi + u\varphi)dx - \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx \\ &- \lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

para toda $u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Logo, $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é solução do problema (3.1) se, e somente se, u é ponto crítico de $E_{\alpha,\lambda}$.

Teorema 3.1. *O funcional $E_{\lambda,\alpha}$ possui ao menos um ponto crítico não-trivial, isto é, o problema (*3.1*) possui ao menos uma solução fraca não-trivial.*

Demonstração. Inicialmente relembremos as imersões compactas de Sobolev do espaço $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^t(\Omega)$ para $1 < t < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ cuja melhor constante satisfaz

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^t(\Omega)} &\leq S_t^{-\frac{1}{2}}\|u\| \\ S_t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^t(\Omega)} &\leq \|u\| \\ S_t^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |u|^t dx\right)^{\frac{1}{t}} &\leq \|u\| \\ S_t^{\frac{t}{2}}\left(\int_\Omega |u|^t dx\right) &\leq \|u\|^t \\ \left(\int_\Omega |u|^t dx\right) &\leq S_t^{-\frac{t}{2}}\|u\|^t \end{aligned} \tag{3.5}$$

e também as imersões compactas de Sobolev do espaço $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^r(\partial\Omega)$ para $1 < r <$

$2_* = \dfrac{2(N-1)}{N-2}$ cuja melhor constante satisfaz

$$\begin{aligned} S_r^T \|u\|_{L^r(\partial\Omega)} &\leq \|u\|^2 \\ S_r^T \left(\int_{\partial\Omega} |u|^r d\sigma \right)^{\frac{2}{r}} &\leq \|u\|^2 \\ \left(\int_{\partial\Omega} |u|^r d\sigma \right) &\leq (S_r^T)^{-\frac{r}{2}} \|u\|^r. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Assim,

$$\int_\Omega |u|^p dx \leq S_p^{-\frac{p}{2}} \|u\|^p; \text{ para toda } u \in W^{1,2}(\Omega) \tag{3.7}$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} |u|^q d\sigma \leq \frac{1}{q} (S_q^T)^{-\frac{q}{2}} \|u\|^q; \text{ para toda } u \in W^{1,2}(\Omega) \tag{3.8}$$

$$\left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} |u|^q d\sigma \right)^2 \leq \frac{1}{q^2} (S_q^T)^{-q} \|u\|^{2q}; \text{ para toda } u \in W^{1,2}(\Omega). \tag{3.9}$$

De onde segue que

$$E_{\lambda,\alpha}(u) \geq \frac{1}{2(\alpha+1)} \|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p} S_p^{-\frac{p}{2}} \|u\|^p - \frac{\lambda}{2} \frac{1}{q^2} (S_q^T)^{-q} \|u\|^{2q} \tag{3.10}$$

para toda $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Observemos que estamos considerando $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$. De modo que temos de estudar alguns casos:

3.1 Solução via Princípio Variacional de Ekland

Caso 1: $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $2q < p < 2(\alpha+1)$.

Neste caso, segue de (3.10) que o funcional energia é limitado inferiormente. Em verdade, $E_{\lambda,\alpha}$ é coercivo.

Afirmação 1: O funcional $E_{\lambda,\alpha}$ satisfaz a condição de Palais-Smale. (3.11)

De fato, seja $(u_n) \in W^{1,2}(\Omega)$ uma seqüencia tal que $|E_{\lambda,\alpha}(u_n)| \leq C$ e $E'_{\lambda,\alpha}(u_n) \longrightarrow 0$. Assim,

$$C \geq E_{\lambda,\alpha}(u_n) \quad \geq \quad \left(\frac{1}{2(\alpha+1)}\|u_n\|^{2(\alpha+1)-p} - \frac{1}{p}S_p^{-\frac{p}{2}}\right)\|u_n\|^p - \frac{\lambda}{2}\frac{1}{q^2}(S_q^T)^{-q}\|u_n\|^{2q} \tag{3.12}$$

Logo, (u_n) é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$ pois $p > 2q$. Além disso, temos que

$$\langle E'_{\alpha,\lambda}(u), \varphi\rangle \quad = \quad \langle \|u_n\|^{2\alpha}u_n, \varphi\rangle - \langle Tu_n, \varphi\rangle \tag{3.13}$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Em que $T : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow W^{1,2}(\Omega)$ é um operador compacto dado por

$$\langle Tu, \varphi\rangle = \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx - \lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right) \tag{3.14}$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

De fato, para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ fixada consideramos inicialmente o funcional

$$\begin{aligned} J_u : W^{1,2}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto J_u(\varphi) \end{aligned}$$

em que $J_u(\varphi) = \displaystyle\int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx + \lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right)$.

Observemos que J_u está bem definido e claramente é linear, por causa das propriedades da integral.

Agora, aplicando as desigualdades (3.7), (3.8) vindas do teorema do traço e desigualdades de Sobolev, bem como a desigualdade de Hölder, teremos

$$\begin{aligned}
|J_u(\varphi)| &= \left|\int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx + \lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right)\right| \\
&\leq \left|\int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx\right| + \left|\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right|\left|\int_{\partial\Omega}|u|^{q-2}u\varphi d\sigma\right| \\
&\leq \int_\Omega |u|^{p-1}|\varphi| dx + \lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{q-1}|\varphi| d\sigma\right) \\
&\leq S_{2(p-1)}^{1-p}\|u\|^{p-1}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \left(\tfrac{1}{q}(S_q^T)^{-\frac{q}{2}}\|u\|^q(S_{2(q-1)}^T)^{1-q}\|u\|^{2(q-1)}\right)\|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq S_{2(p-1)}^{1-p}\|u\|^{p-1}C_1 \cdot \|\varphi\| + \left(\tfrac{1}{q}(S_q^T)^{-\frac{q}{2}}\|u\|^q(S_{2(q-1)}^T)^{1-q}\|u\|^{2(q-1)}\right)C_2 \cdot \|\varphi\| \\
&\leq \left[S_{2(p-1)}^{1-p}\|u\|^{p-1} \cdot C_1 + \left(\tfrac{1}{q}(S_q^T)^{-\frac{q}{2}}\|u\|^q(S_{2(q-1)}^T)^{1-q}\|u\|^{2(q-1)}\right)C_2\right]\|\varphi\|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|J_u(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

De onde segue que J_u é limitado, ou seja, temos um funcional linear e contínuo em $W^{1,2}(\Omega)$. Logo pelo Teorema da Representação de Riez, para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ dado, existe um único $v := Tu \in W^{1,2}(\Omega)$, tal que $J_u(\varphi) = \langle Tu, \varphi \rangle$, isto é,

$$\langle v, \varphi \rangle = \int_\Omega |u|^{p-2} u\varphi dx + \lambda \left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} |u|^q d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} |u|^{q-2} u\varphi d\sigma \right)$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Dessa forma temos um operador

$$\begin{aligned} T : W^{1,2}(\Omega) &\longrightarrow W^{1,2}(\Omega) \\ u &\longmapsto v := Su \end{aligned}$$

em que $\langle Tu, \varphi \rangle = J_u(\varphi)$, o qual está bem definido e é linear. Além disso, este operador é compacto. Com efeito, tomemos $(u_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u \in W^{1,2}(\Omega)$ e façamos $v_n = Tu_n$ e $v = Tu$. Assim, usando os cálculos que fizemos para mostrar que J_u é limitado, temos que

$$\begin{aligned} \|Tu_n - Tu\|^2 &= \langle T(u_n - u), T(u_n - u) \rangle \\ &= |J_{(u_n - u)}(Tu_n - Tu)| \\ &\leq \left[K_1 \cdot \|u_n - u\|_L^{p-1} + K_2 \|u_n - u\|^{3q-2} \right] \|Tu_n - Tu\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|Tu_n - Tu\| \;\leq\; \left[K_1 \cdot \|u_n - u\|_{L_2(\Omega)}^{p-1} + K_2 \|u_n - u\|_{L_2(\partial\Omega)}^{3q-2} \right]$$

Como as imersões de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$ são compactas, então $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,2}(\Omega)$ implica em $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$ e $u_n \to u$ em $L^2(\partial\Omega)$ eventualmente para uma subseqüências. Portanto, $Tu_n \longrightarrow Tu$ em $W^{1,2}(\Omega)$ e daí T é compacto. Voltando a identidade (3.14) teremos que

$$E'_{\alpha,\lambda}(u_n) = \|u_n\|^{2\alpha}u_n - Tu_n. \tag{3.15}$$

Como (u_n) é uma seqüencia (PS), tem-se que $E'_{\lambda,\alpha}(u_n) \longrightarrow 0$, ou seja, $\|u_n\|^{2\alpha}u_n - Tu_n \longrightarrow 0$. Como (u_n) é uma seqüencia limitada em $W^{1,2}(\Omega)$ segue-se que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,2}(\Omega)$ e $\|u_n\| \longrightarrow \widehat{a} \geq 0$, possivelmente para subseqüências.

Se $\widehat{a} = 0$ então $u_n \longrightarrow 0$ em $W^{1,2}(\Omega)$.

Se $\widehat{a} > 0$ então $\|u_n\| \geq \frac{\widehat{a}}{2} > 0$ se n for suficientemente grande. Observemos que

$$u_n = \frac{1}{\|u_n\|^{2\alpha}}[\|u_n\|^{2\alpha}u_n - Tu_n + Tu_n].$$

Desde que $\|u_n\|^{2\alpha}u_n - Tu_n \longrightarrow 0$, (Tu_n) converge pois T é compacto e $\|u_n\|^{2\alpha} \longrightarrow \widehat{a}^{2\alpha} \geq 0$ teremos que (u_n) converge (possivelmente para uma subseqüência).

Agora, se $u \in W^{1,2}(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, $t > 0$ então

$$\begin{aligned} E_{\lambda,\alpha}(tu) &= \frac{t^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{t^p}{p}\int_\Omega \|u\|^p dx - \frac{\lambda}{2}t^{2q}\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)^2 \\ &= t^{2q}\left[\frac{t^{2(\alpha+1)-2q}}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{t^{p-2q}}{p}\int_\Omega \|u\|^p dx - \frac{\lambda}{2}\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)^2\right] \end{aligned}$$

Desde que $2q < p < 2(\alpha+1)$, segue-se que $E_{\lambda,\alpha}(tu) < 0$ se t for suficientemente pequeno. Desse modo o mínimo de $E_{\lambda,\alpha}$ é não trivial, ou seja, o problema possui solução fraca não trivial.

Caso 2: $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $p < 2q < 2(\alpha+1)$.

Tal como no caso 1, segue de (3.10) que o funcional energia é limitado inferiormente, coercivo e satisfaz a condição (PS).

Assim, existe $(u_n) \in W^{1,2}(\Omega)$ uma seqüencia Palais-Smale satisfeita por $E_{\lambda,\alpha}$, isto é, $|E_{\lambda,\alpha}(u_n)| \leq C$ e $E'_{\lambda,\alpha}(u_n) \longrightarrow 0$, fazendo $p = 2r$ e $2q = s$ teremos $2r < s < 2(\alpha+1)$ e basta fazer uma substituição e tudo se processará como no caso 1.

3.2 Solução Via Nehari e Fibração

Caso 3: $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $p = 2q > 2(\alpha+1)$.

Neste caso vamos ter

$$\begin{aligned} E_{\lambda,\alpha}(tu) &= \frac{t^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{t^p}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{\lambda}{2}t^{2q}\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)^2 \\ &= \frac{t^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{t^p}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{\lambda}{2}t^{p}\left(\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q}|u|^q d\sigma\right)^2. \end{aligned}$$

Assim, $E_{\lambda,\alpha}(tu) \longrightarrow -\infty$ se $t \longrightarrow +\infty$ e, portanto, $E_{\lambda,\alpha}$ não é limitado inferiormente. Também temos que

$$\begin{aligned} E_{\lambda,\alpha}(u) &\geq \frac{1}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}S_p^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p - \frac{\lambda}{2}\frac{1}{q^2}(S_q^T)^{-q}\|u\|^p \\ &\geq \frac{1}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \left[\frac{1}{p}S_p^{-\frac{p}{2}} + \frac{\lambda}{2}\frac{1}{q^2}(S_q^T)^{-q}\right]\|u\|^p. \end{aligned}$$

Façamos $\varrho = \|u\|$. Logo,

$$\begin{aligned} E_{\lambda,\alpha}(u) &\geq \frac{1}{2(\alpha+1)}\varrho^{2(\alpha+1)} - \left[\frac{1}{p}S_p^{-\frac{p}{2}} + \frac{\lambda}{2}\frac{1}{q^2}(S_q^T)^{-q}\right]\varrho^p \\ &= \left[\frac{1}{2(\alpha+1)} - \left(\frac{1}{p}S_p^{-\frac{p}{2}} + \frac{\lambda}{2}\frac{1}{q^2}(S_q^T)^{-q}\right)\varrho^{p-2(\alpha+1)}\right]\varrho^{2(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Portanto, se $\varrho > 0$ for suficientemente pequeno, então $E_{\lambda,\alpha} \geq r > 0$ se $\|u\| = \varrho$. De onde conclui-se que, neste caso, $E_{\lambda,\alpha}$ satisfaz a Geometria do Passo da Montanha.

Poderíamos verificar que $E_{\lambda,\alpha}$ satisfaz a condição (PS) e usando o Teorema do Passo da Montanha concluiríamos que $E_{\lambda,\alpha}$ possui ponto crítico não trivial. No entanto, vamos usar neste caso a variedade de Nehari e o método da fibração para chegar ao resultado.

O método da aplicação fibração introduzido por Drabek e Pohozaev em [12] e posteriormente estudado por Brown e Zhang em [9] relaciona o funcional associado ao problema com uma função real. Com as informações sobre esta função conseguimos uma demonstração simples do resultado desejado.

Definamos

$$\mathcal{N}_{\lambda,\alpha} := \{u \in W^{1,2}(\Omega); \langle E'(u)_{\lambda,\alpha}, u\rangle = 0\}. \tag{3.16}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\langle E'_{\alpha,\lambda}(u), \varphi\rangle &= \|u\|^{2\alpha}\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi)dx - \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx \\ &- \lambda\left(\int_{\partial\Omega}\frac{2}{p}|u|^{\frac{p}{2}}d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{\frac{p}{2}-2}u\varphi d\sigma\right)\end{aligned}$$

para toda $u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. De modo que

$$\langle E'_{\alpha,\lambda}(u), u\rangle = \|u\|^{2\alpha+2} - \int_\Omega |u|^p dx - \frac{2\lambda}{p}\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{\frac{p}{2}}d\sigma\right)^2.$$

Assim, $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$ se, e somente se, $\langle E'(u)_{\lambda,\alpha}, u\rangle = 0$, ou seja, $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$ se, e somente se

$$\|u\|^{2\alpha+2} = \int_\Omega |u|^p dx + \frac{2\lambda}{p}\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{\frac{p}{2}}d\sigma\right)^2. \tag{3.17}$$

Além disso, se $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$ então

$$\begin{aligned}E_{\lambda,\alpha}(u) &= \frac{1}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{\lambda}{2}\left(\int_{\partial\Omega}\frac{2}{p}|u|^{\frac{p}{2}}d\sigma\right)^2 \\ &= \frac{1}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{2\lambda}{p^2}\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{\frac{p}{2}}d\sigma\right)^2 \\ &= \frac{1}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{1}{p}\left(\|u\|^{2\alpha+2} - \int_\Omega |u|^p dx\right) \\ &= \left(\frac{1}{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}\right)\|u\|^{2(\alpha+1)} > 0.\end{aligned}$$

Como $p > 2(\alpha+1)$, segue-se que $E_{\lambda,\alpha}$ é limitado inferiormente e coercivo em $\mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$.

Definamos

$$m := \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}} E_{\lambda,\alpha}(u).$$

Afirmação 2: $\mathcal{N}_{\lambda,\alpha} \neq \varnothing$.

De fato, para mostrar a validade desta afirmação, definamos o funcional fibração

$$\begin{aligned} K_{u,\alpha} : (0,+\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto K_{u,\alpha}(t) := E_{\lambda,\alpha}(tu) \end{aligned}$$

para toda $u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$. Assim,

$$K_{u,\alpha}(t) = E_{\lambda,\alpha}(tu) \quad = \quad \frac{t^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{t^p}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{\lambda t^p}{2}\left(\int_{\partial\Omega} \frac{2}{p}|u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2$$

e

$$K'_{u,\alpha}(t) = t^{2\alpha+1}\|u\|^{2(\alpha+1)} - t^{p-1}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{2\lambda t^{p-1}}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2.$$

De onde segue que

$$\begin{aligned} tK'_{u,\alpha}(t) &= t^{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - t^p\int_\Omega |u|^p dx - \frac{2\lambda t^p}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2 \\ &= \|tu\|^{2(\alpha+1)} - \int_\Omega |tu|^p dx - \frac{2\lambda}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |tu|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2 \\ &= \langle E'_{\alpha,\lambda}(tu), tu\rangle, \quad \text{com} \quad t > 0. \end{aligned}$$

Portanto, $tu \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$ se, e somente se, t é ponto crítico de $K_{u,\alpha}$. Agora, $K'_{u,\alpha}(t) = 0$ se, e somente se,

$$t^{2\alpha+1}\|u\|^{2(\alpha+1)} = \left[\int_\Omega |u|^p dx + \frac{2\lambda}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2\right] t^{p-1}.$$

Desde que $p > 2(\alpha+1)$ temos $p-1 > 2\alpha+1$ e, portanto, o único ponto crítico $t_{u,\alpha} > 0$ de $K_{u,\alpha}$ é dado por

$$t_{u,\alpha} = \left[\frac{\|u\|^{2(\alpha+1)}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{2\lambda}{p}\|u\|^p_{L^{\frac{p}{2}}(\partial\Omega)}}\right]^{\frac{1}{p-2(\alpha+1)}}.$$

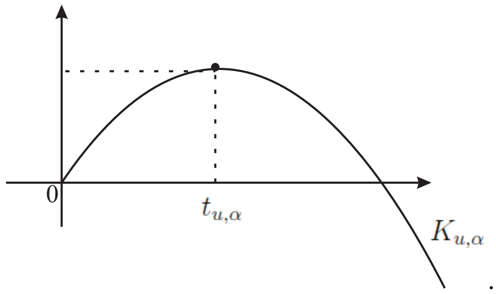
Observemos que

$$K_{u,\alpha}(t) = \frac{t^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)}\|u\|^{2(\alpha+1)} - \left(\frac{1}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{2\lambda}{p^2}\|u\|^p_{L^{\frac{p}{2}}(\partial\Omega)}\right) t^p.$$

Desde que $p > 2(\alpha+1)$ temos

$$\begin{aligned} K_{u,\alpha}(t) &> 0 \text{ se } t > 0 \text{ for pequeno} \\ K_{u,\alpha}(t) &\to -\infty \text{ se } t \to +\infty \\ K'_{u,\alpha}(t) &> 0 \text{ se } 0 < t < t_{u,\alpha} \\ K'_{u,\alpha}(t) &< 0 \text{ se } t > t_{u,\alpha}. \end{aligned}$$

Logo, o comportamento de $K_{u,\alpha}$ é como na figura a seguir



De onde concluímos que $\mathcal{N}_{\lambda,\alpha} \neq \varnothing$.

Agora, uma questão que surge naturalmente, é se $m > 0$. Observemos que se $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$, então

$$\|u\|^{2(\alpha+1)} = \int_\Omega |u|^p dx + \frac{2\lambda}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^p dx &\leq S_p^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p; \text{ para toda } u \in W^{1,2}(\Omega) \\ \int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma &\leq \left(S^T_{\frac{p}{2}}\right)^{-\frac{p}{4}} \|u\|^{\frac{p}{2}}; \text{ para toda } u \in W^{1,2}(\Omega) \\ \left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2 &\leq \left(S^T_{\frac{p}{2}}\right)^{-\frac{p}{2}} \|u\|^p; \text{ para toda } u \in W^{1,2}(\Omega). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|u\|^{2(\alpha+1)} &\leq S_p^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p + \left(S^T_{\frac{p}{2}}\right)^{-\frac{p}{2}}\|u\|^p\\ &= \left[S_p^{-\frac{p}{2}} + \left(S^T_{\frac{p}{2}}\right)^{-\frac{p}{2}}\right]\|u\|^p.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u\| \geq \frac{1}{\left[S_p^{-\frac{p}{2}} + \left(S^T_{\frac{p}{2}}\right)^{-\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p-2(\alpha+1)}}}.$$

para toda $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$. Usando uma expressão já vista de $E_{\lambda,\alpha}(u)$ temos

$$E_{\lambda,\alpha}(u) = \left(\frac{1}{2(\alpha+1)} - \frac{1}{p}\right)\|u\|^{2(\alpha+1)} \geq C > 0.$$

Façamos a decomposição de $\mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$ da seguinte maneira:

$$K'_{u,\alpha}(t_u) = 0 \text{ se e somente se } t_u u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$$

o que equivale a

$$K'_{u,\alpha}(1) = 0 \text{ se e somente se } u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$$

Assim, é natural decompormos $\mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$ em pontos de mínimos locais, máximos locais e pontos de inflexão

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^+_{\lambda,\alpha} &= \{u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}; K''_{u,\alpha}(1) > 0\}\\ \mathcal{N}^-_{\lambda,\alpha} &= \{u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}; K''_{u,\alpha}(1) < 0\}\\ \mathcal{N}^0_{\lambda,\alpha} &= \{u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}; K''_{u,\alpha}(1) = 0\}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{N}_{\lambda,\alpha} = \mathcal{N}^+_{\lambda,\alpha} \cup \mathcal{N}^-_{\lambda,\alpha} \cup \mathcal{N}^0_{\lambda,\alpha}.$$

No entanto, temos que $K'_{u,\alpha}(1) = 0$ se e somente se $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\alpha}$, o que ocorre se, e somente,

$$\|u\|^{2(\alpha+1)} = \int_\Omega |u|^p dx + \frac{2\lambda}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2. \qquad (3.18)$$

Mas

$$K''_{u,\alpha}(t) = (2\alpha+1)t^{2\alpha}\|u\|^{2(\alpha+1)} - (p-1)t^{p-2}\left[\int_\Omega |u|^p dx + \frac{2\lambda}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2\right]$$

e, então,

$$K''_{u,\alpha}(1) = (2\alpha+1)\|u\|^{2(\alpha+1)} - (p-1)\left[\int_\Omega |u|^p dx + \frac{2\lambda}{p}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^{\frac{p}{2}} d\sigma\right)^2\right].$$

Usando a identidade (3.18) temos que

$$\begin{aligned} K''_{u,\alpha}(1) &= (2\alpha+1)\|u\|^{2(\alpha+1)} - (p-1)\left[\int_\Omega |u|^p dx + \|u\|^{2(\alpha+1)} - \int_\Omega |u|^p dx\right] \\ &= (2\alpha+1)\|u\|^{2(\alpha+1)} - (p-1)\|u\|^{2(\alpha+1)} \\ &= \left[(2\alpha+1) - (p-1)\right]\|u\|^{2(\alpha+1)} \\ &= \left[2(\alpha+1) - p\right]\|u\|^{2(\alpha+1)} < 0. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{N}^+_{\lambda,\alpha} = \mathcal{N}^0_{\lambda,\alpha} = \varnothing$ e daí $\mathcal{N}_{\lambda,\alpha} = \mathcal{N}^-_{\lambda,\alpha}$.

Portanto pelo teorema 1.3 temos que o o funcional $E_{\lambda,\alpha}$ possui um ponto crítico $u \in W^{1,2}(\Omega)$. ■

Apêndice A

Conceitos e resultados

Definição A.1. *Sejam X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional, I é dito ser Fréchet diferenciável em $u \in X$ quando existe um funcional linear $T \in X'$, tal que,*

$$\lim_{||v||\to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Tv}{||v||} = 0.$$

A derivada de Fréchet no ponto u, quando existe, é única. Vamos denotá-la por $I'(u)$.

Definição A.2. *Se A é um conjunto aberto em X, dizemos que funcional I é de classe C^1 em A ou simplesmente $I \in C^1(A, \mathbb{R})$ quando é Fréchet diferenciável em todo ponto $u \in X$ e o operador $I' : A \to X'$ é contínuo.*

Definição A.3. *Sejam X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional, I é dito ser Gâteaux diferenciável em u, se existe um funcional linear $T_u \in X'$, tal que,*

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(u+tv) - f(x)}{t} = T_u v, \quad \forall v \in X.$$

A derivada de Gâteaux no ponto u, quando existe, é única. Vamos denotá-la por $DI(u)$. Mais além, I é de classe C^1 em A se, a derivada de Gateaux existe e o operador $DI : E \to X'$ existe e é continuo.

Teorema A.1. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se (x_n) é uma seqüencia limitada em X, então existem uma subseqüência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ e $x \in X$ tais que $x_{n_j} \longrightarrow x$ em X.*

Demonstração. Ver [8].

Teorema A.2. *(da Convergência Dominada de Lebesgue): Seja (f_n) uma seqüencia de funções em $L^1(\Omega)$ e suponha que:*

(a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *q.t.p. em* Ω;

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\displaystyle\int_\Omega f_n dx \longrightarrow \int_\Omega f dx$.

Demonstração. Ver [6].

Teorema A.3. *(de Vainberg): Seja (f_n) uma seqüencia de funções em $L^p(\Omega)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subseqüência $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ tal que*

(a) $f_{n_j}(x) \longrightarrow f_n(x)$ *q.t.p. em* Ω;

(b) Existe $h \in L^p(\Omega)$ *tal que* $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\displaystyle\int_\Omega f_n dx \longrightarrow \int_\Omega f dx$.

Demonstração. Ver [8].

Lema A.1. *(de Brezis-Lieb): Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$ e $(f_n) \subset L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ com $p > 1$. Suponha que $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω e exita $C > 0$, tal que*

$$\int |f_n|^p \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\int f_n \varphi \to \int f \varphi, \ \forall \varphi \in L^q(\Omega)$$

onde, $1/p + 1/q = 1$.

Demonstração. Ver [18].

Teorema A.4. *(Teorema de Rellich-Kondrachov): Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um domínio limitado de classe C^1. Então as seguintes afirmações são válidas* *(i) Se* $p < N$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para* $1 \leq q < p^*$ *em que* $1/p^* = 1/p - 1/N$*;*

(ii) Se $p = N$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para* $1 \leq q < +\infty$*;*

(iii) Se $p > N$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$*. Além disso, as imersões são compactas.*

Demonstração. Ver [8]

Proposição A.1. *(Identidade de Green). Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto com fronteira* $\partial\Omega$ *de classe* C^1 *e* $u, \varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$*. Então*

$$-\int_\Omega \varphi \Delta u dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma.$$

Demonstração. Ver [18]

Teorema A.5. *(Desigualdade de Hölder) Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq P < +\infty$ *e* $1/p + 1/q = 1$*. Então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [6]

Teorema A.6. *(Teorema da Representação de Riesz-Fréchet): Sejam* H *um espaço de Hilbert e* $f \in H'$*, existe* $u \in H$ *tal que*

$$f(v) = \langle u, v \rangle, \forall v \in H.$$

Além disso,

$$|f|_{h'} = \|u\|_H.$$

Demonstração. Ver [8]

Proposição A.2. *(Alternativa de Fredholm): Sejam E um espaço de Banach e $T : E \to E$ um operador compacto. Então*

(i) $Ker(I-T)$ *tem dimensão finita;*

(ii) $R(I-T)$ *é fechado em* E *e* $R(I-T) = Ker(I-T^*)^{\perp}$*;*

(iii) $Ker(I-T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I-T) = E$*;*

(iv) $dim(Ker(I-T)) = dim(Ker(I-T^*))$*.*

Demonstração. Ver [8]

Teorema A.7. *(Desigualdade de Poincaré): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado em relação a alguma direção do $\mathbb{R}^N$. Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \ \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [8]

O próximo resultado esta demostrado em [1]

Lema A.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$ um domínio limitado com fronteira regular $\partial\Omega$. Se $1 < p < N$ e $p \leq q \leq p^* = \frac{(N-1)p}{N-p}$. Então a imersão*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$$

é contínua. Além disso, se $q < p^* = \frac{(N-1)p}{N-p}$ então a imersão é compacta.

Assim, as funções de $W^{1,2}(\Omega)$ admitem um traço em $L^q(\partial\Omega)$ e temos a desigualdade do traço Sobolev

$$S_T(\Omega, 2, q)\|u\|^2_{L^q(\partial\Omega)} \leq \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}, \ 1 \leq q \leq 2^* = \frac{2(N-1)}{N-2}.$$

Além disso, a melhor constante de Sobolev $S_T(\Omega, 2, q)$ é dada

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)dx}{\left(\displaystyle\int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma\right)^{2/q}} > 0. \tag{1.1}$$

e as funções que fazem com que esse ínfimo seja atingido são justamente as autofunções associadas ao λ_1.

Referências Bibliográficas

[1] R.A. Adams, J.J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press (2003).

[2] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, T. F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl. 49 (2005), 85-93.

[3] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, G.M. Figueiredo, *On a class of nonlocal elliptic problems with critical growth*, Differential Equations Applications 3 (2010), 409-417.

[4] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and apllications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[5] G. Anello; *On a pertubed Dirichlet problem for a nonlocal differential equation of Kirchhoff type*, Bound. Val. Prob. 2011 (2011), 1-10.

[6] R. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley-Interscience (1995).

[7] V. Benci, G. Cerami, Multiple positive solutions of some elliptic problems via the morse theory and the domain topology, Calc. Var. 2 (1994), 29-48.

[8] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011).

[9] K.J. Brown, Y. Zhang, *The Nehari manifold for a semilinear elliptic problem with a sign changing weight function,* J. Differ. Equa. 193 (2003), 481-499.

[10] F.J.S.A. Corrêa, G.M. Figueiredo, *On an elliptic equation of p-Kirchhoff-type via variational methods*, Bull. Austral. Math. Soc. 74 (2006), 263-277.

[11] F.J.S.A. Corrêa, G.M. Figueiredo, *On a p-Kirchhoff equation via Krasnoselskii's genus*, Appl. Math. Lett. 22 (2009), 819-822.

[12] P. Drabek, S.I. Pohozaev, *Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method*, Proc. Roayl Soc. Edinburgh (1997), 703-726.

[13] D. G. De Figueiredo, *Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Tata Inst. Fund. Res. Lect. Math. Phys., Springer-Verlag 81 (1989).

[14] I. Ekeland, *On The Variational Principle*, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.

[15] G.M. Figueiredo, *Uma introdução à teoria dos pontos críticos*, PPGME-UFPA (2015).

[16] J. Jin, X. Wu, *Infinitely many radial solutions for Kirchhoff-type problems in R*, J. Math. Anal. Appl. 369 (2010), 564-574.

[17] N.I. Kavallaris, D.E. Tzanetis,*On the blow-up of a non-local parabolic problem*, Appl. Math. Lett. 19 (2006), 921-925.

[18] O. Kavian, *Introduction à théorie des points critiques et applications aux problémes elleptiques*, Springer-Verlag (1993).

[19] M. Lazzo, *Morse Theory and Multiple Positive Solutions to a Neumann Problem*, Ann. Mat. Pura Appl. 168 (1995), 205-217.

[20] J.L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics, International Symposium on Continuum*, Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro (1977), Mathematics Studies, 30 (1978), 284-346.

[21] T.F. Ma, J.E. Muñoz Rivera, *Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem*, Appl. Math. Lett. 16 (2003) 243-248.

[22] J. Morbach, *Problemas Elípticos Não-Locais com Condições de Fronteira Integrais.* Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Doutorado em Matemática, Belém, (2014).

[23] D. Pereira, *Existência e multiplicidade de solução para uma classe de Equações elípticas via teoria de Morse*, Dissertação (Mestrado), CCT-UFCG (2010).

[24] K. Perera, Z. Zhang, *Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index*. J. Differ. Equ. 221, 246-255 (2006).

[25] L. Sandra, *Existência de solução para duas classes de problemas elípticos usando a aplicação fibração relacionada à Variedade de Nehari*, Dissertação (Mestrado), UFJF (2014).

[26] S. Dias, *Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de equações elípticas quase lineares*, ICEX-UFMG (2011).

[27] Y. Wang, *Solutions to nonlinear elliptic equations with a nonlocal boundary condition*, Eletron. J. Diff. Eq. 2002 (2002), 1-16.