



Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Dissertação de Mestrado

Solução ground state para sistemas acoplados de
equações de Schrödinger em \mathbb{R}^N

Diego Fernando Coentro Ferreira

Belém - PA

2018



Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Diego Fernando Coentro Ferreira

Solução ground state para sistemas acoplados de equações de Schrödinger em \mathbb{R}^N

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Rúbia Gonçalves Nascimento

Belém - PA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F383s Ferreira, Diego Fernando Coentro
 Solução ground state para sistemas acoplados de equações de Schödinger em R^N / Diego
 Fernando Coentro Ferreira. — 2018
 105 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística (PPGME),
Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Rúbia Gonçalves Nascimento

1. Solução ground state . 2. Sistema acoplado. 3. Variedade de Nehari. 4. Imersões de
Sobolev. I. Nascimento, Rúbia Gonçalves, *orient.* II. Título

CDD 515.353

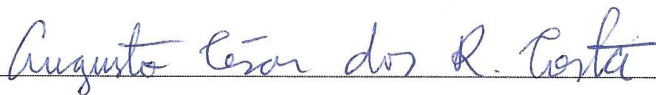
Diego Fernando Coentro Ferreira

Solução ground state para sistemas acoplados de equações de Schrödinger em \mathbb{R}^N

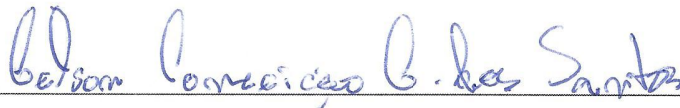
Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.



Prof^a. Dr^a. Rúbia Gonçalves Nascimento - Orientadora (PPGME/PDM/UFPA)



Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa - Membro Interno (PPGME/PDM/UFPA)



Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos - Membro externo (FACMAT/UFPA)

Data de Defesa: 18 de Setembro de 2018

Resultado: **APROVADO**

Dedicatória

A minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que em meio a todas as lutas e dificuldades me permitiu chegar até aqui.

Agradeço aos meus pais, Edson e Lourdes, por todo apoio, amor, dedicação e, acima de tudo, por sempre acreditarem em mim.

Agradeço também a Professora Rúbia pela orientação e aos professores Gelson Conceição e Augusto César por aceitarem participar da banca.

Ao meus amigos de turma, parceiros de estudos em véspera de prova.

E agradeço ao CNPQ, pelo auxílio financeiro que tornou tudo isso possível.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estabelecer resultados de existência e não existência de solução para a seguinte classe de sistemas acoplados envolvendo equações de Schrödinger não-lineares

$$(S_\mu) \begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \mu|u|^{p-2}u + \lambda(x)v, & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + V_2(x)v = |v|^{q-2}v + \lambda(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $N > 3$, $2 < p < q < 2^*$ e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev.

Seguindo os passos de J.C.A. Melo Junior. [23], solucionaremos os problemas utilizando argumentos dos métodos de Minimização baseado na variedade de Nehari para os casos de existência e utilizaremos a identidade de Pohozaev no caso de não existência de solução.

Palavras-chave: Solução ground state, Sistema acoplado, Variedade de Nehari, Imersões de Sobolev.

Abstract

The objective of this work is to establish the existence and non-existence of a solution for the following class of coupled systems involving non-linear Schrödinger equations

$$(S_\mu) \begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \mu|u|^{p-2}u + \lambda(x)v, & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + V_2(x)v = |v|^{q-2}v + \lambda(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

where $N > 3, 2 < p < q < 2^*$ and $2^* = \frac{2N}{N-2}$ is the critical exponent of Sobolev.

Following in the footsteps of J.C.A. Melo Junior. [23], we will solve the problems using arguments of methods of minimization based on the Nehari Manifold for the cases of existence and we will use Pohozaev identity in case of no solution.

Key words: Ground state solution, Coupled system, Nehari Manifold, Sobolev embedding.

Sumário

| | |
|---|----|
| Introdução | 1 |
| 1 Resultados preliminares | 6 |
| 2 Existência de Solução para o Sistema S_μ | 25 |
| 2.1 Caso Subcrítico | 25 |
| 2.2 Caso Crítico | 39 |
| 3 Existência de Solução para o Sistema \hat{S}_μ | 44 |
| 4 Resultado de não Existência de Solução para o Sistema S_μ | 58 |
| A Resultados Utilizados | 76 |
| B Funcionais Diferenciáveis | 84 |
| Bibliografia | 97 |

Introdução

O interesse deste trabalho é estabelecer resultados de existência e não existência de solução para a seguinte classe de sistemas acoplados envolvendo equações de Schrödinger não-lineares do tipo

$$(S_\mu) \begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \mu|u|^{p-2}u + \lambda(x)v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V_2(x)v = |v|^{q-2}v + \lambda(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $N > 3, 2 < p < q < 2^*$ e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev. Um dos principais resultados é provar a existência de solução ground state para o caso subcrítico, ou seja, quando, $2 < p < q < 2^*$ e para o caso crítico, quando, $2 < p < q = 2^*$. No caso crítico a existência de solução ground state está relacionada com o parametro μ introduzido na primeira equação do sistema (S_μ) .

Estudaremos duas classes de potenciais não-negativos: periódico e assintoticamente periódico. A prova dos resultados apresentados serão via métodos de minimização baseado na variedade de Nehari. Para o caso crítico, quando, $p = q = 2^*$, será utilizado a identidade de Pohozaev para provar que o sistema (S_μ) não admite solução positiva.

Além disso, estudaremos a existência de solução ground state para a seguinte classe de sistemas acoplados.

$$(\hat{S}_\mu) \begin{cases} -\Delta u + \hat{V}_1(x)u = \mu|u|^{p-2}u + \hat{\lambda}(x)v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \hat{V}_2(x)v = |v|^{q-2}v + \hat{\lambda}(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde os potenciais $\hat{V}_1(x)$, $\hat{V}_2(x)$ e $\hat{\lambda}(x)$ são assintoticamente periódicos, isto é, são limites infinitos das funções periódicas $V_1(x)$, $V_2(x)$ e $\lambda(x)$.

Esta dissertação é um estudo de J.C.A. Melo Junior [23], onde o autor trata da existência de solução ground state para a seguinte classe de sistemas acoplados

$$\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = f_1(x, u) + \lambda(x)v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V_2(x)v = f_2(x, v) + \lambda(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (0.1)$$

onde os potenciais $V_1 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $V_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ são não negativos e estão relacionados com o termo de acoplamento $\lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ por $|\lambda(x)| < \delta\sqrt{V_1(x)V_2(x)}$ para algum $\delta \in (0, 1)$.

O estudo de soluções ground state para sistemas acoplados fez grandes progressos e atraiu a atenção de muitos autores por seu grande interesse físico. As soluções do sistema (0.1) estão relacionadas com as ondas estacionárias do sistema a seguir.

$$\begin{cases} -i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\psi - V_1(x)\psi + f_1(x, \psi) + \lambda(x)\phi, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ -i\frac{\partial\phi}{\partial t} = \Delta\phi - V_2(x)\phi + f_2(x, \phi) + \lambda(x)\psi, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \end{cases} \quad (0.2)$$

onde i denota a unidade imaginária. Essa classe de sistema surge em vários ramos da física matemática e tópicos não-lineares, e pode descrever diferentes fenômenos físicos, como condensados de Bose-Einstein, mistura de Bose-Ferni, propagação em fibras ópticas birefringentes e meios fotorefrativos do tipo Kerr, ver [2,12,16,24,26] e suas referências. Para o sistema (0.2), uma solução da forma $(\psi(x, t), \phi(x, t)) = (\exp(-iEt)u(x), \exp(-iEt)v(x))$, onde E é uma constante real, é chamada de solução de onda estacionária.

Podemos notar que para o caso $\lambda \equiv 0$, $V_1 \equiv V_2 \equiv V$, $f_1 \equiv f_2 \equiv f$ e $u \equiv v$, o sistema (0.1) se reduz a seguinte classe de equações de Schrödinger

$$-\Delta u + V(x)u = f(x, u). \quad (0.3)$$

Esta classe de equações foi extensivamente estudada por diversos autores. A fim de superar a dificuldade originada pela falta de compacidade, foi introduzido várias classes de potenciais, podemos citar entre outros o trabalho de P. Rabinowitz [25], que considerou uma classe de potenciais limitados e coercivos, nesse trabalho ele aplicou métodos variacionais baseado em variantes do Teorema do Passo da Montanha para obter resultados de existência para (0.3) quando $f(x, s)$ é subcrítico ou superlinear.

Em [10], Z. Chen e W. Zou estudaram a existência de solução ground state para a seguinte classe de sistemas acoplados críticos com potenciais constantes

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = |u|^{p-2}u + \lambda v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \nu v = |v|^{2^*-2}v + \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (0.4)$$

quando $N > 3$ e $1 < p < 2^* - 1$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev. Eles provaram que existem parâmetros críticos $\mu_0 > 0$ e $\lambda_{\mu,\nu} \in \left[\sqrt{(\mu - \mu_0)\nu}, \sqrt{\mu\nu} \right]$ tais que, (0.4) tem uma solução ground state positiva quando $\lambda > \lambda_{\mu,\nu}$ e não possui solução ground state quando $\mu > \mu_0$ e $\lambda < \lambda_{\mu,\nu}$.

Sistemas acoplados de equações de Schrodinger não-lineares do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = (1 + a(x))|u|^{p-1}u + \lambda v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \nu v = (1 + b(x))|v|^{q-1}v + \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (0.5)$$

foram estudados por A. Ambrosetti [3] com dimensão $N = 1$ e A. Ambrosetti, G. Cerami, D. Ruiz [5] com $N > 2$. Em [5] os autores usaram argumentos de concentração de compacidade para provar a existência de solução ground state positivo quando $\mu = \nu = 1$, $\lambda \in (0, 1)$, $1 < p = q < 2^* - 1$, $a(x)$ e $b(x)$ se anulando no infinito. Em [11] Z. Chen e W. Zou

ampliaram e complementaram alguns resultados apresentados em [5], estudando a seguinte classe de sistemas acoplados

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f_1(x) + \lambda v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \nu v = f_2(x) + \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (0.6)$$

os autores obtiveram a existência de solução ground states radiais positivas e estimativas de energia que fornecem uma descrição de comportamento no limite, quando o parametro λ vai pra zero.

No que segue considerando em (0.1) $f_1(x, u) = \mu|u|^{p-2}u$ e $f_2(x, v) = |v|^{q-2}v$ obtemos o sistema (S_μ) , o qual será estudado dividido em três casos:

- (i) (caso subcrítico) $2 < p < q < 2^*$
- (ii) (caso crítico) $2 < p < q = 2^*$
- (iii) (caso crítico) $p = q = 2^*$

O caso subcrítico está relacionado no artigo clássico de H. Brezis e E.H. Lieb. [9], que provaram a existência de solução ground state para a seguinte classe de sistemas

$$-\Delta u_i(x) = g^i(u(x)), i = 1, 2, \dots, n, \quad (0.7)$$

onde $g^i(u) = \frac{\partial G(u)}{\partial u_i}$, para algum $G \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $N > 3$. Pode ser verificado que quando $V_1(x) = \mu$, $V_2(x) = \nu$ e $\lambda(x) = \lambda$, com $0 < \lambda < \delta\sqrt{\mu\nu}$, o sistema (S_μ) se torna um caso particular do sistema (0.7), satisfazendo todas as hipóteses requeridas para g em [9]. No entanto, vamos lidar com um termo de acoplamento mais geral e duas classes de potenciais não-negativos: periódicos e assintoticamente periódicos.

Para o sistema (\hat{S}_μ) será estudado os casos:

- (i) (caso subcrítico) $2 < p < q < 2^*$

(ii) (caso crítico) $2 < p < q = 2^*$

Nosso trabalho será estruturado da seguinte forma:

No **capítulo 1**, mostraremos alguns resultados que serão de grande ajuda para demonstrar os principais teoremas deste trabalho, para isso iremos definir solução ground state e os espaços que irão ser trabalhados, iremos introduzir a variedade de Nehari \mathfrak{N} e mostraremos algumas relações entre o funcional associado ao sistema (S_μ) e o conjunto \mathfrak{N} .

No **capítulo 2**, iremos usar resultados importantes como o Princípio Variacional de Ekeland, o Lema de Lions, o argumento de Bootstrap, desigualdade de Hölder, imersões contínuas e compactas de Sobolev, o Princípio do Máximo Forte, entre outros resultados que serão necessários para mostrar que o sistema (S_μ) possui solução ground state não-negativa e positiva para o caso subcrítico $2 < p < q < 2^*$ e para o caso crítico $2 < p < q = 2^*$, onde os potenciais $V_i(x)$ e $\lambda(x)$ são periódicos.

No **capítulo 3**, mostraremos que o sistema (\hat{S}_μ) possui solução ground state não-negativa e positiva para o caso subcrítico $2 < p < q < 2^*$ e para o caso crítico $2 < p < q = 2^*$, para isso trataremos do caso onde os potenciais $\hat{V}_i(x)$ e $\hat{\lambda}(x)$ são assintoticamente periódicos.

No **capítulo 4**, usaremos a identidade de Pohozaev para mostrar que o sistema (S_μ) não possui solução clássica positiva quando $p = q = 2^*$, onde os potenciais $V_i(x)$ e $\lambda(x)$ são periódicos.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Antes de enunciarmos e demonstrarmos os principais resultados deste trabalho, iremos neste capítulo, definir solução ground state, os espaços E_i e \hat{E}_i e estabelecer uma abordagem variacional para tratar dos sistemas (S_μ) e (\hat{S}_μ) , iremos também mostrar que os espaços E_i e \hat{E}_i estão imersos continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2, 2^*]$ e por fim, enunciar e demonstrar alguns resultados que serão de grande ajuda para a prova dos teoremas principais.

Definição 1.1. Dizemos que um par $(u, v) \in E \setminus \{(0, 0)\}$ e uma solução ground state (solução de menor energia) de (S_μ) , se (u, v) é uma solução de (S_μ) e sua energia é mínima entre as energias de todas as soluções não-triviais de (S_μ) , isto é, $I(u, v) \leq I(w, z)$ para qualquer solução não-trivial $(w, z) \in E$. Dizemos que (u, v) é não-negativa (não-positiva) se $u, v \geq 0$ ($u, v \leq 0$) e positiva (negativa) se $u, v > 0$ ($u, v < 0$).

Em virtude da presença dos potenciais $V_1(x)$, $V_2(x)$ e $\hat{V}_1(x)$, $\hat{V}_2(x)$ para $i = 1, 2$ apresentamos os seguintes espaços:

$$E_i = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V_i(x) u^2 dx < \infty \right\},$$

dotado com o produto interno

$$(u, v)_{E_i} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_i(x) u v dx,$$

com a norma

$$\|u\|_{E_i}^2 = (u, u)_{E_i} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_i(x) u^2 dx.$$

E o espaço

$$\hat{E}_i = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} \hat{V}_i(x) u^2 dx < \infty \right\},$$

dotado com o produto interno

$$(u, v)_{\hat{E}_i} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} \hat{V}_i(x) u v dx,$$

e norma dada por

$$\|u\|_{\hat{E}_i}^2 = (u, u)_{\hat{E}_i} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \hat{V}_i(x) u^2 dx.$$

Para estabelecer uma abordagem variacional para tratar do sistema (S_μ) precisamos exigir hipóteses adequadas sobre os potenciais. Para cada $i = 1, 2$ assumimos que

(V₁) $V_i, \lambda \in C^1(\mathbb{R}^N)$ são 1 periódicos em cada um x_1, \dots, x_N ,

(V₂) $V_i(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\nu_i = \inf_{u \in E_i} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_i(x) u^2 dx : \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = 1 \right\} > 0,$$

(V₃) $|\lambda(x)| \leq \delta \sqrt{V_1(x)V_2(x)}$, para algum $\delta \in (0, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$,

(V_{3'}) $0 < \lambda(x) \leq \delta \sqrt{V_1(x)V_2(x)}$.

Observação 1.1. *uma funcao e dita 1 periodica quando e periodica de periodo 1 em cada*

coordenada.

Note que (V_2) implica que E_i é imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2, 2^*]$, mais adiante iremos demonstrar este fato.

Da mesma forma para o sistema (\hat{S}_μ) precisamos exigir hipóteses adequadas sobre os potenciais. Para cada $i = 1, 2$ assumimos que

(V_4) $\hat{V}_i, \hat{\lambda} \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $\hat{V}_i(x) < V_i(x)$, $\lambda(x) < \hat{\lambda}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |V_i(x) - \hat{V}_i(x)| = 0 \text{ e } \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\hat{\lambda}(x) - \lambda(x)| = 0,$$

(V_5) $\hat{V}_i(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\hat{\nu}_i = \inf_{u \in \hat{E}_i} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \hat{V}_i(x) u^2 dx : \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = 1 \right\} > 0,$$

(V_6) $|\hat{\lambda}(x)| \leq \delta \sqrt{\hat{V}_1(x) \hat{V}_2(x)}$, para algum $\delta \in (0, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$,

(V'_6) $0 < \hat{\lambda}(x) \leq \delta \sqrt{\hat{V}_1(x) \hat{V}_2(x)}$, para algum $\delta \in (0, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

Note que (V_5) implica que \hat{E}_i é imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2, 2^*]$.

Definimos o espaço produto $E = E_1 \times E_2$, temos que E é um espaço de Hilbert quando dotado do produto interno

$$((u, v), (z, w)) = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla z + V_1(x) u z + \nabla v \nabla w + V_2(x) v w) dx,$$

com norma dada por

$$\begin{aligned} \|(u, v)\|_E^2 &= ((u, v), (u, v)) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_1(x) u^2) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V_2(x) v^2) dx = \|u\|_{E_1}^2 + \|v\|_{E_2}^2. \end{aligned}$$

Associado ao sistema (S_μ) , temos o funcional energia $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx \right) - \frac{\mu}{p} \|u\|_p^p - \frac{1}{q} \|v\|_q^q.$$

Observando que $I \in C^2(E, \mathbb{R})$, ver Lema B.1 com

$$\langle I'(u, v), (\phi, \psi) \rangle = ((u, v), (\phi, \psi)) - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\mu |u|^{p-2} u \phi + |v|^{q-2} v \psi + \lambda(x) (u \psi + v \phi) \right) dx,$$

onde $(\phi, \psi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Assim, os pontos críticos de I correspondem a soluções fracas de (S_μ) .

Da mesma forma definimos o espaço produto $\hat{E} = \hat{E}_1 \times \hat{E}_2$. Temos que \hat{E} é um espaço de Hilbert quando dotado do produto interno

$$((u, v), (z, w)) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u \nabla z + \hat{V}_1 u z + \nabla v \nabla w + \hat{V}_2 v w \right) dx$$

e norma

$$\begin{aligned} \|(u, v)\|_{\hat{E}}^2 &= ((u, v), (u, v)) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \hat{V}_1(x) u^2) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + \hat{V}_2(x) v^2) dx = \|u\|_{\hat{E}_1}^2 + \|v\|_{\hat{E}_2}^2. \end{aligned}$$

Observação 1.2. Notemos que o espaço E_i esta imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para todo $p \in [2, 2^*]$.

De fato, segue do Teorema A.2 (ver Apêndice A) que existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{H^1}. \quad (1.1)$$

Assim, basta mostrar que existe um $K > 0$, tal que

$$\|u\|_{H^1} \leq K \|u\|_{E_i}.$$

Observe que por (V_2) , temos $\nu_i \leq \|u\|_{E_i}^2 \quad \forall \quad |u|_{L^2} = 1$, tomando $\nu = \frac{u}{|u|_{L^2}}$; $u \neq 0$, temos $\nu_i |u|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{E_i}^2$,

assim,

$$\|u\|_{H^1}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\nu_i} \|u\|_{E_i}^2,$$

logo,

$$\|u\|_{H^1}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_i(x)u^2) dx + \frac{1}{\nu_i} \|u\|_{E_i}^2 = \left(1 + \frac{1}{\nu_i}\right) \|u\|_{E_i}^2,$$

ou seja,

$$\|u\|_{H^1} \leq K \|u\|_{E_i}, \quad (1.2)$$

onde $K = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\nu_i}\right)}$.

De (1.1) e (1.2), concluímos que E_i é imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2, 2^*]$.

De forma análoga se mostra que o espaço \hat{E}_i está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ com $p \in [2, 2^*]$

Observação 1.3. A hipótese (V_3) será muito utilizada daqui em diante. O próximo resultado é uma importante estimativa obtida por essa suposição e será citada e usada no restante do trabalho. Este resultado será importante para provar a existência de solução ground state não negativa para o sistema (S_μ) , quando (V_1) - (V_3) são válidos, para $2 < p < q < 2^*$ e a existência de uma Ground State positiva, quando (V'_3) é válido, para $2 < p < q < 2^*$.

Lema 1.1. Se (V_3) é válido, então temos

$$\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx > (1 - \delta) \|(u, v)\|_E^2. \quad (1.3)$$

Demonstração: Para $(u, v) \in E$, temos

$$0 \leq \left(\sqrt{V_1(x)}|u| - \sqrt{V_2(x)}|v| \right)^2 = V_1(x)u^2 - 2\sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v| + V_2(x)v^2. \quad (1.4)$$

Desde que

$$|\lambda(x)||u||v| > \lambda(x)uv,$$

segue-se que

$$-2\lambda(x)uv > -2|\lambda(x)||u||v|.$$

Assim,

$$-2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uv dx > -2 \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(x)||u||v| dx. \quad (1.5)$$

Para $\delta \in (0, 1)$, segue de (V_3) que

$$|\lambda(x)||u||v| \leq \delta \sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v|,$$

o que implica

$$-2 \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(x)||u||v| dx > -2\delta \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v| dx. \quad (1.6)$$

De (1.4), tem-se

$$-2\sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v| > -V_1(x)u^2 - V_2(x)v^2,$$

logo,

$$-2\delta \sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v| > -\delta \left(V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 \right).$$

Assim,

$$-2\delta \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v|dx > -\delta \left(\int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)u^2dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x)v^2dx \right). \quad (1.7)$$

Note que,

$$\|(u, v)\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_1(x)u^2 + |\nabla v|^2 + V_2(x)v^2)dx > \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)u^2dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x)v^2dx,$$

o que implica

$$-\delta \left(\int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)u^2dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x)v^2dx \right) > -\delta \|(u, v)\|_E^2. \quad (1.8)$$

Entao, de (1.4) - (1.8), obtemos

$$-2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx > -\delta \|(u, v)\|_E^2.$$

Somando $\|(u, v)\|_E^2$, em ambos os membros da expressao anterior, temos

$$\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx > (1 - \delta)\|(u, v)\|_E^2,$$

mostrando assim o resultado. □

Para provar a existência de solução ground state, consideremos a variedade de Nehari associada ao sistema (S_μ) , dada por

$$\mathfrak{N} = \left\{ (u, v) \in E \setminus \{(0, 0)\} : \langle I'(u, v), (u, v) \rangle = 0 \right\}.$$

Observamos que todos os pontos críticos não-triviais de I pertencem a \mathfrak{N} e definimos a energia ground state por

$$c_{\mathfrak{N}} = \inf_{(u, v) \in \mathfrak{N}} I(u, v).$$

Observe que se $(u, v) \in \mathfrak{N}$, então

$$\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q = 0,$$

implicando

$$\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx = \mu \|u\|_p^p + \|v\|_q^q. \quad (1.9)$$

O resultado seguinte a ser apresentado também será importante para provar a existência de solução ground state não negativa para o sistema (S_μ) , quando (V_1) - (V_3) são válidos, para $2 < p < q < 2^*$ e a existência de uma solução ground state positiva quando, (V'_3) é válido para $2 < p < q < 2^*$.

Lema 1.2. *Existe $\alpha > 0$, tal que, $\|(u, v)\|_E > \alpha$, para todo $(u, v) \in \mathfrak{N}$. Além disso, \mathfrak{N} é uma variedade C^1 .*

Demonstração: *Seja $(u, v) \in \mathfrak{N}$. De (1.3) e (1.9) temos*

$$(1 - \delta) \|(u, v)\|_E^2 < \|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx = \mu \|u\|_p^p + \|v\|_q^q.$$

Desde que E_i é imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ com $p \in [2, 2^*]$, obtemos

$$(1 - \delta) \|(u, v)\|_E^2 < \mu C_1 \|u\|_{E_1}^p + C_2 \|v\|_{E_2}^q.$$

Sendo

$$\|u\|_{E_i} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_i(x) u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

então

$$\|u\|_{E_i}^p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_i(x) u^2 dx \right)^{\frac{p}{2}},$$

logo,

$$\|u\|_{E_1}^p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x) u^2 dx \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Como $2 < p$, então $1 < \frac{p}{2}$, da segue que

$$\|u\|_{E_1}^p \hookrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x)v^2 dx \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Da definição de norma no espaço E e nos espaços E_i obtemos

$$\|u\|_{E_1}^p \hookrightarrow \left(\|u\|_{E_1}^2 + \|v\|_{E_2}^2 \right)^{\frac{p}{2}} = \left(\|(u, v)\|_E^2 \right)^{\frac{p}{2}} = \|(u, v)\|_E^p. \quad (1.10)$$

De forma análoga, mostra-se

$$\|v\|_{E_2}^q \hookrightarrow \|(u, v)\|_E^q. \quad (1.11)$$

Logo,

$$(1 - \delta)\|(u, v)\|_E^2 \hookrightarrow \mu C_1 \|(u, v)\|_E^p + C_2 \|(u, v)\|_E^q.$$

Escolhendo $C = \max\{\mu C_1, C_2\}$, temos

$$(1 - \delta)\|(u, v)\|_E^2 \hookrightarrow C \left(\|(u, v)\|_E^p + \|(u, v)\|_E^q \right).$$

Portanto,

$$0 < \frac{1 - \delta}{C} \hookrightarrow \|(u, v)\|_E^{p-2} + \|(u, v)\|_E^{q-2}.$$

Fixando $(u, v) \in \mathfrak{N}$ e escolhendo

$$\|(u, v)\|_E^r = \max \left\{ \|(u, v)\|_E^{p-2}, \|(u, v)\|_E^{q-2} \right\},$$

temos

$$0 < \frac{1 - \delta}{C} \hookrightarrow 2\|(u, v)\|_E^r,$$

o que implica

$$0 < \sqrt[r]{\frac{1 - \delta}{2C}} \hookrightarrow \|(u, v)\|_E.$$

Tomando $\alpha = \sqrt[r]{\frac{1-\delta}{2C}}$, conclu mos que

$$\|(u, v)\|_E > \alpha, \quad \forall (u, v) \in \aleph. \quad (1.12)$$

Agora, seja $J : E \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional C^1 de nido por

$$J(u, v) = \langle I'(u, v), (u, v) \rangle = \|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx - \mu \|u\|_p^p - \|v\|_q^q.$$

Observe que, se $(u, v) \in \aleph$, entao $J(u, v) = 0 \Rightarrow (u, v) = J^{-1}(0)$, $\aleph = J^{-1}(0)$.

Observamos que

$$\langle J'(u, v), (u, v) \rangle = 2 \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx \right) - p\mu \|u\|_p^p - q \|v\|_q^q$$

[Ver Apêndice B]. Assim,

$$\begin{aligned} \langle J'(u, v), (u, v) \rangle &= 2 \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx \right) - p\mu \|u\|_p^p - p \|v\|_q^q + p \|v\|_q^q - q \|v\|_q^q \\ &= 2 \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx \right) - p(\mu \|u\|_p^p + \|v\|_q^q) + (p - q) \|v\|_q^q. \end{aligned}$$

Segue de (1.9) que,

$$\begin{aligned} \langle J'(u, v), (u, v) \rangle &= 2 \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx \right) \\ &\quad - p \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx \right) + (p - q) \|v\|_q^q. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle J'(u, v), (u, v) \rangle = (2 - p) \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx \right) + (p - q) \|v\|_q^q.$$

Disso, de (1.3), (1.12) e o fato de que $2 < p < q$, obtemos

$$\langle J'(u, v), (u, v) \rangle \leq (2-p)(1-\delta)\|(u, v)\|_E^2 \leq (2-p)(1-\delta)\alpha < 0. \quad (1.13)$$

Portanto, 0 é um valor regular de J e \mathfrak{N} é uma variedade C^1 . \square

Observação 1.4. Se $(u_0, v_0) \in \mathfrak{N}$ for um ponto crítico do funcional $I|_{\mathfrak{N}}$, então $I'(u_0, v_0) = 0$.

De fato, note que

$$I, J \in C^1(E \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R}), (u_0, v_0) \in E \setminus \{(0, 0)\}$$

e

$$\mathfrak{N} = \left\{ (u, v) \in E \setminus \{(0, 0)\} : J(u, v) = J(u_0, v_0) \right\},$$

pois

$$J(u, v) = \langle I'(u, v), (u, v) \rangle = 0 \quad e \quad J(u_0, v_0) = \langle I'(u_0, v_0), (u_0, v_0) \rangle = 0. \quad (1.14)$$

Assim, desde que

$$\langle J'(u_0, v_0), (u_0, v_0) \rangle \neq 0$$

e I é limitado sobre \mathfrak{N} , pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange [ver Teorema A.4], existe $\eta \in \mathbb{R}$, tal que

$$I'(u_0, v_0) = \eta J'(u_0, v_0).$$

Tomando o produto escalar com (u_0, v_0) e usando (1.13) e (1.14), concluímos que $\eta = 0$.

Nosso próximo resultado será utilizado na demonstração de três dos principais resultados deste trabalho, na prova de que o sistema (S_μ) possui uma solução ground state não-negativa quando (V_1) - (V_3) são válidos e $2 < p < q < 2^*$, possui ground state positiva quando (V'_3) é válido e $2 < p < q < 2^*$, na prova de que o sistema (S_μ) possui uma solução ground state não-negativa quando (V_1) - (V_3) são válidos e $2 < p < q = 2^*$, possui ground state positiva quando (V'_3) é válido e $2 < p < q = 2^*$ e na prova da existência de solução ground state não-negativa para o sistema (\hat{S}_μ) quando (V_1) - (V_6) são válidos e de solução ground state

positiva quando (V'_6) é verdadeira.

Lema 1.3. *Suponha que (V_3) seja válido. Assim, para qualquer $(u, v) \in E \setminus \{(0, 0)\}$, existe um unico $t_0 > 0$, dependendo apenas de (u, v) , tal que*

$$(t_0 u, t_0 v) \in \mathcal{N} \quad e \quad I(t_0 u, t_0 v) = \max_{t>0} I(tu, tv).$$

Demonstração: Vamos considerar $(u, v) \in E \setminus \{(0, 0)\}$ e considerar a função $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = I(tu, tv) = \frac{1}{2} \left(\|(tu, tv)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) tu tv dx \right) - \frac{\mu}{p} \|tu\|_p^p - \frac{1}{q} \|tv\|_q^q,$$

ou seja,

$$g(t) = \frac{t^2}{2} \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) uv dx \right) - t^p \frac{\mu}{p} \|u\|_p^p - \frac{t^q}{q} \|v\|_q^q.$$

Note que

$$g'(t) = t \|(u, v)\|_E^2 - 2t \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) uv dx - t^{p-1} \mu \|u\|_p^p - t^{q-1} \|v\|_q^q$$

e

$$\begin{aligned} \langle I'(tu, tv), (tu, tv) \rangle &= \|(tu, tv)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) t^2 uv dx - \mu \|tu\|_p^p - \|tv\|_q^q \\ &= t \left(t \|(u, v)\|_E^2 - 2t \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) uv dx - \mu t^{p-1} \|u\|_p^p - t^{q-1} \|v\|_q^q \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle I'(tu, tv), (tu, tv) \rangle = t g'(t).$$

Do Lema 1.1

$$\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) uv dx > 0, \quad \forall (u, v) \in E.$$

Desde que $2 < p < q$ e

$$g(t) = \frac{t^2}{2} \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx \right) - \frac{t^p}{p} \mu \|u\|_p^p - \frac{t^q}{q} \|v\|_q^q,$$

segue-se que $g(t) < 0$, para $t > 0$ su cientemente grande. Por outro lado, fazendo uso de (1.3), das imersões de Sobolev e de (1.10) e (1.11), temos

$$g(t) > (1 - \delta) \frac{t^2}{2} \|(u, v)\|_E^2 - C_1 \frac{t^p}{p} \|(u, v)\|_E^p - C_2 \frac{t^q}{q} \|(u, v)\|_E^q,$$

ou seja,

$$g(t) > t^2 \|(u, v)\|_E^2 \left(\frac{1 - \delta}{2} - C_1 \frac{t^{p-2}}{p} \|(u, v)\|_E^{p-2} - C_2 \frac{t^{q-2}}{q} \|(u, v)\|_E^{q-2} \right) > 0,$$

desde que $t > 0$ seja su cientemente pequeno. Assim, g possui pontos de maximo em $(0, \infty)$.

Para provar a unicidade suponhamos que existem $t_1, t_2 > 0$ com $t_1 < t_2$ tais que,

$$g'(t_1) = g'(t_2) = 0.$$

Como cada ponto cr tico de g satisfaz

$$t \|(u, v)\|_E^2 - 2t \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx - t^{p-1} \mu \|u\|_p^p - t^{q-1} \|v\|_q^q = 0,$$

entao,

$$\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx = t^{p-2} \mu \|u\|_p^p + t^{q-2} \|v\|_q^q.$$

De onde segue que

$$t_1^{p-2} \mu \|u\|_p^p + t_1^{q-2} \|v\|_q^q = t_2^{p-2} \mu \|u\|_p^p + t_2^{q-2} \|v\|_q^q.$$

Assim,

$$0 = (t_1^{p-2} - t_2^{p-2})\mu\|u\|_p^p + (t_1^{q-2} - t_2^{q-2})\|v\|_q^q,$$

desde que $(u, v) \neq 0$, conclu mos que existe um unico $t_0 > 0$ dependendo apenas de (u, v) , tal que

$$\langle I'(t_0u, t_0v), (t_0u, t_0v) \rangle = t_0g'(t_0) = 0.$$

Logo,

$$(t_0u, t_0v) \in \aleph \quad e \quad I(t_0u, t_0v) = g(t_0) = \max_{t>0} g(t) = \max_{t>0} I(tu, tv).$$

□

O próximo resultado, assim como os Lemas 1.1 e 1.2, será importante para provar a existência de solução ground state não negativa para o sistema (S_μ) , quando (V_1) - (V_3) são válidos, para $2 < p \text{ e } q < 2^*$ e a existência de uma ground state positiva quando (V'_3) é válido, para $2 < p \text{ e } q < 2^*$.

Lema 1.4. Para $(u, v) \in \aleph$,

$$I(tu, tv) \text{ e } I(u, v), \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração: Da de nicao de I e de (1.9)

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \frac{1}{2} \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uv dx \right) - \frac{\mu}{p} \|u\|_p^p - \frac{1}{q} \|v\|_q^q \\ &= \frac{1}{2} (\mu \|u\|_p^p + \|v\|_q^q) - \frac{\mu}{p} \|u\|_p^p - \frac{1}{q} \|v\|_q^q \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \mu \|u\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \|v\|_q^q. \end{aligned}$$

De maneira analoga temos

$$I(tu, tv) = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^p}{p} \right) \mu \|u\|_p^p + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^q}{q} \right) \|v\|_q^q.$$

Assim,

$$I(u, v) - I(tu, tv) = \left(\frac{1-t^2}{2} + \frac{t^p-1}{p} \right) \mu \|u\|_p^p + \left(\frac{1-t^2}{2} + \frac{t^q-1}{q} \right) \|v\|_q^q,$$

para todo $(u, v) \in \mathfrak{N}$ e $t \geq 0$.

Se $t = 0$, entao

$$I(u, v) - I(0, 0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \mu \|u\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \|v\|_q^q.$$

Desde que $2 < p < q$, temos que, $I(0, 0) < I(u, v)$, $\forall (u, v) \in \mathfrak{N}$.

Agora para qualquer $r \in (2, 2^*]$, considere $\eta_r : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcao de nida por

$$\eta_r(t) = \frac{1-t^2}{2} + \frac{t^r-1}{r}.$$

Para que $I(tu, tv) < I(u, v)$, e su ciente provar que $\eta_r(t) \geq 0$. Para todo $t > 0$, note que

$$\eta_r'(t) = -t + t^{r-1}.$$

Assim, $t = 1$ e o unico ponto cr tico de η_r . Desde que,

$$\eta_r''(t) = -1 + (r-1)t^{r-2} \quad e \quad \eta_r''(1) = -2 + r > 0,$$

temos que $t = 1$ e um min mo para η_r e como $\eta_r(1) = 0$ entao,

$$\eta_r(t) \geq 0, \quad \forall t > 0.$$

□

No que segue, consideremos os nıveis de energia associados ao sistema S_μ

$$c^* = \inf_{(u,v) \in E \setminus \{(0,0)\}} \max_{t>0} I(tu, tv), \quad c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \quad e \quad c_{\aleph} = \inf_{(u,v) \in \aleph} I(u, v),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], E) : \gamma(0) = (0, 0), I(\gamma(1)) < 0\}.$$

A seguir iremos enunciar e demonstrar o último resultado deste capítulo, que será importante na prova da existência de solução ground state não-negativa para o sistema (\hat{S}_μ) quando (V_1) - (V_6) são válidos e de solução ground state positiva quando (V'_6) é válido e os potenciais $\hat{V}_i(x)$ e $\hat{\lambda}(x)$ são assintoticamente periódicos.

Lema 1.5. $0 < c_{\aleph} = c^* = c$.

Demonstração: Para qualquer $(u, v) \in \aleph$, usando (1.9) temos

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \frac{1}{2} (\mu \|u\|_p^p + \|v\|_q^q) - \frac{\mu}{p} \|u\|_p^p - \frac{1}{q} \|v\|_q^q \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx \right) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|v\|_q^q. \end{aligned}$$

Desde que $2 < p < q$, decorre de (1.3) e (1.12) que

$$I(u, v) > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) (1 - \delta) \|(u, v)\|_E^2 \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) (1 - \delta) \alpha > 0,$$

implicando que $c_{\aleph} > 0$.

Do Lema 1.4,

$$\max_{t \geq 0} I(tu, tv) = I(u, v), \quad \forall (u, v) \in \aleph.$$

Assim, segue que

$$c^* \leq \max_{t \geq 0} I(tu, tv) = I(u, v), \quad \forall (u, v) \in \aleph.$$

Tomando o n mo sobre \aleph , conclu mos que $c^* \leq c_{\aleph}$.

Por outro lado, do Lema 1.3 temos que para qualquer $(u, v) \in E \setminus \{(0, 0)\}$ existe um unico

$t_0 > 0$ de modo que $(t_0u, t_0v) \in \mathfrak{N}$. Portanto,

$$c_{\mathfrak{N}} \triangleq I(t_0u, t_0v) = \max_{t \geq 0} I(tu, tv) \quad \forall (u, v) \in E \setminus \{(0, 0)\}.$$

Tomando o inf mo sobre $E \setminus \{(0, 0)\}$, temos que $c_{\mathfrak{N}} \triangleq c^*$.

Para provar que $c^* = c$, e su ciente mostrar que $c \triangleq c^*$ e $c_{\mathfrak{N}} \triangleq c$. Pela de nicao de c^* , existe uma seqüência $(u_n, v_n)_n \subset E \setminus \{(0, 0)\}$ tal que

$$c^* \triangleq \max_{t > 0} I(tu_n, tv_n) < c^* + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbf{N}. \quad (1.15)$$

Da prova do Lema 1.3, temos que $I(tu, tv) < 0$ para todo $t > 0$ su cientemente grande. Da , segue do Lema 1.3 que existe $t_n > 0$ dependendo de (u_n, v_n) e $s_n > t_n$, tal que

$$I(t_nu_n, t_nv_n) = \max_{t > 0} I(tu_n, tv_n) \quad e \quad I(s_nu_n, s_nv_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}. \quad (1.16)$$

Para cada $n \in \mathbf{N}$ vamos considerar o caminho $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow E$ de nido por

$$\gamma_n(t) = ts_n(u_n, v_n).$$

Assim, $\gamma_n(0) = (0, 0)$ e usando (1.16) temos que $I(\gamma_n(1)) < 0$, como consequência disto, segue que $\gamma_n \in \Gamma$. Desde que

$$I(t_nu_n, t_nv_n) = \max_{t > 0} I(tu_n, tv_n),$$

entao, $\max_{t > 0} I(tu_n, tv_n)$ e uma cota superior para $I(\gamma_n(t))$. Logo, de (1.15),

$$\sup_{t \in [0, 1]} I(\gamma_n(t)) \triangleq \sup_{t > 0} I(\gamma_n(t)) \triangleq \max_{t > 0} I(tu_n, tv_n) < c^* + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Pela de nicao de c , existe uma seqüência $\gamma_n(t)$, tal que

$$c \notin \max_{t \in [0,1]} I(\gamma_n(t)) = \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma_n(t)) \notin \max_{t > 0} I(tu_n, tv_n).$$

Assim, c é uma cota inferior para $I(tu_n, tv_n)$ e como $c^* \notin \max_{t > 0} I(tu_n, tv_n)$ e o n mo, então $c \notin c^*$.

Agora, note que a variedade \mathfrak{N} separa E em dois componentes

$$H^+ = \left\{ (u, v) \in E : \langle I'(u, v), (u, v) \rangle > 0 \right\} \cup \left\{ (0, 0) \right\}$$

e

$$H^- = \left\{ (u, v) \in E : \langle I'(u, v), (u, v) \rangle < 0 \right\}.$$

Usando (1.3), imersão de Sobolev e (1.10) e (1.11) temos

$$\begin{aligned} \langle I'(u, v), (u, v) \rangle &= \|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx - \mu \|u\|_p^p - \|v\|_q^q \\ &> (1 - \delta) \|(u, v)\|_E^2 - C(\|(u, v)\|_E^p + \|(u, v)\|_E^q), \end{aligned}$$

o que implica que existe uma pequena bola em torno da origem contendo H^+ . Além disso,

$$\frac{1}{2} \langle I'(u, v), (u, v) \rangle = \frac{1}{2} \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx - \mu \|u\|_p^p - \|v\|_q^q \right).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} I(u, v) - \frac{1}{2} \langle I'(u, v), (u, v) \rangle &= \frac{1}{2} \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx \right) - \frac{\mu}{p} \|u\|_p^p - \frac{1}{q} \|v\|_q^q \\ &- \frac{1}{2} \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx \right) + \frac{\mu}{2} \|u\|_p^p - \frac{1}{2} \|v\|_q^q \\ &= -\frac{\mu}{p} \|u\|_p^p - \frac{1}{q} \|v\|_q^q + \frac{1}{2} \mu \|u\|_p^p + \frac{1}{2} \|v\|_q^q \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \mu \|u\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \|v\|_q^q > 0, \end{aligned}$$

o que implica

$$I(u, v) > \frac{1}{2} \langle I'(u, v), (u, v) \rangle, \quad \forall (u, v) \in E.$$

Assim temos, $I(u, v) > 0$ para todo $(u, v) \in H^+$. Para qualquer $\gamma \in \Gamma$, temos que $\gamma(0) = (0, 0) \in H^+$ e $I(\gamma(1)) < 0$, assim, $\gamma(1)$ não pertence a H^+ .

Notando que

$$0 > I(\gamma(1)) > \frac{1}{2} \langle I'(\gamma(1)), (\gamma(1)) \rangle,$$

então

$$\langle I'(\gamma(1)), (\gamma(1)) \rangle < 0.$$

Logo, $\gamma(1) \in H^-$. Assim, todo caminho de Γ tem que atravessar a variedade \aleph . Logo, existe $r_0 \in (0, 1)$, tal que $\gamma(r_0) \in \aleph$. Portanto,

$$c_{\aleph} \leq I(\gamma(r_0)) \leq \max_{t \in [0, 1]} I(\gamma(t)).$$

Assim, c_{\aleph} é uma cota inferior para $I(\gamma(t))$, como c é o mínimo, então $c_{\aleph} \leq c$. Assim concluímos que

$$0 < c_{\aleph} = c^* = c.$$

□

Capítulo 2

Existência de Solução para o Sistema

S_μ

Neste capítulo serão apresentados e demonstrados dois dos principais resultados deste trabalho. Aqui, serão apresentadas condições para a existência de soluções ground states para o sistema (S_μ) , no caso subcrítico $2 < p < q < 2^*$ e no caso crítico $2 < p < q = 2^*$. Em ambos os casos, iremos trabalhar com os potenciais periódicos $V_i(x)$ e $\lambda(x)$.

2.1 Caso Subcrítico

Nesta seção, mostraremos a existência de solução ground state não-negativa e positiva para o sistema (S_μ) para o caso subcrítico $2 < p < q < 2^*$.

O resultado central dessa seção é o seguinte:

Teorema 2.1. *Suponha que (V_1) - (V_3) sejam válidos, se $2 < p < q < 2^*$, então existe uma solução ground state não-negativa $(u_0, v_0) \in C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^N) \times C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^N)$ para o sistema (S_μ) , para todo $\mu > 0$. Se (V_3') é válido, então a solução ground state é positiva.*

Observação 2.1. *Pelo Princípio Variacional de Ekeland [ver Apêndice A], observemos que, existe uma seqüência $(u_n, v_n) \subset \mathfrak{N}$ de modo que*

$$I(u_n, v_n) \rightarrow c_{\mathfrak{N}} \quad e \quad I'(u_n, v_n) \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

Note que (u_n, v_n) é limitado. De fato, de (1.9), temos

$$\begin{aligned} I(u_n, v_n) &= \frac{1}{2} \left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx \right) - \frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q \\ &= \frac{1}{2} (\mu \|u_n\|_p^p + \|v_n\|_q^q) - \frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q \\ &= \frac{\mu}{2} \|u_n\|_p^p + \frac{1}{2} \|v_n\|_q^q - \frac{1}{p} \|v_n\|_q^q - \frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p + \frac{1}{p} \|v_n\|_q^q - \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) (\mu \|u_n\|_p^p + \|v_n\|_q^q) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|v_n\|_q^q \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx \right) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|v_n\|_q^q. \end{aligned}$$

Assim, desde que, $p \leq q$, segue do Lema 1.1

$$I(u_n, v_n) > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) (1 - \delta) \|(u_n, v_n)\|_E^2.$$

Desde que $(I(u_n, v_n))_n$ é uma seqüência limitada, deduzimos que $(u_n, v_n)_n$ é limitada em E , passando para uma subsequência, se necessario, temos

$$(u_n, v_n)_n \rightharpoonup (u_0, v_0) \quad \text{em } E.$$

Sendo I de classe C^1 , segue que I é contínuo, daí como $(u_n, v_n)_n \rightharpoonup (u_0, v_0)$ em E , então $I(u_n, v_n)_n \rightarrow I(u_0, v_0) = c_{\mathfrak{N}}$. Assim, temos que $(u_0, v_0) \in \mathfrak{N}$ e $I'(u_0, v_0) = 0$.

A seguir, mostraremos alguns resultados os quais precisaremos para demonstrar o resultado central dessa seção.

Proposição 2.1. *Existe uma solucao ground state para o sistema*

$$(S_\mu) \begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \mu|u|^{p-2}u + \lambda(x)v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V_2(x)v = |v|^{q-2}v + \lambda(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

Demonstração: *Vamos considerar dois casos:*

Caso 1: $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$.

Neste caso, (u_0, v_0) e um ponto critico nao-trivial do funcional energia I . Assim, $(u_0, v_0) \in \aleph$. Nos resta provar que

$$I(u_0, v_0) = c_\aleph.$$

Por de nicao

$$c_\aleph \subset I(u_0, v_0).$$

Por outro lado, pela semicontinuidade da norma, temos

$$\begin{aligned} c_\aleph + o_n(1) &= I(u_n, v_n) - \frac{1}{2} \langle I'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx \right) - \frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx \right) + \frac{\mu}{2} \|u_n\|_p^p - \frac{1}{2} \|v_n\|_q^q \\ &= -\frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q + \frac{1}{2} \mu \|u_n\|_p^p + \frac{1}{2} \|v_n\|_q^q \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \mu \|u_n\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \|v_n\|_q^q. \end{aligned}$$

Pela de nicao de solucao ground state, temos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \mu \|u_n\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \|v_n\|_q^q > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \mu \|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \|v_0\|_q^q,$$

da , segue que

$$\begin{aligned}
c_{\aleph} + o_n(1) &> \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \mu \|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \|v_0\|_q^q + o_n(1) \\
&= I(u_0, v_0) - \frac{1}{2} \langle I'(u_0, v_0), (u_0, v_0) \rangle + o_n(1) \\
&= I(u_0, v_0) + o_n(1),
\end{aligned}$$

implicando que

$$c_{\aleph} > I(u_0, v_0).$$

Assim,

$$I(u_0, v_0) = c_{\aleph}.$$

Caso 2: $(u_0, v_0) = (0, 0)$.

Afirmação 2.1. Existe uma seqüência $(y_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ e $R, \varepsilon > 0$, tais que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} (u_n^2 + v_n^2) dx > \varepsilon > 0. \quad (2.2)$$

De fato, suponhamos que (2.2) seja falsa. Assim, para qualquer $R > 0$, desde que,

$$u_n^2 \subset u_n^2 + v_n^2 \quad e \quad v_n^2 \subset u_n^2 + v_n^2,$$

pelo Lema A.2, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y)} u_n^2 dx = 0 \quad e \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y)} v_n^2 dx = 0.$$

Segue do Lema de Lions, [ver Lema A.1], que $u_n \rightarrow 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e $v_n \rightarrow 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para quaisquer $2 < p, q < 2^*$. Desde que $(u_n, v_n) \subset \aleph$, segue do Lema 1.1, (1.9) e de (1.12) que

$$0 < (1 - \delta)\alpha \leq (1 - \delta)\|(u_n, v_n)\|_E^2 \leq \|(u_n, v_n)\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)u_nv_ndx = \mu\|u_n\|_p^p + \|v_n\|_q^q \rightarrow 0.$$

Logo,

$$0 < (1 - \delta)\alpha \leq 0.$$

O que e uma contradicao, pois $\delta \in (0, 1)$, portanto (2.2) e valida.

Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $(y_n)_n \subset \mathbb{Z}^N$. Considere a sequênciã de mudanca

$$(\hat{u}_n(x), \hat{v}_n(x)) = (u_n(x + y_n), v_n(x + y_n)).$$

Uma vez que $V_1(\cdot)$, $V_2(\cdot)$ e $\lambda(\cdot)$ sao funcôes 1-periodicas, o funcional energia I e invariante por translacao da forma

$$(u, v) \mapsto (u(\cdot - z), v(\cdot - z)), z \in \mathbb{Z}^N.$$

Tomando $y_n = nz$, temos

$$V_1(x) = V_1(x + nz), V_2(x) = V_2(x + nz) \text{ e } \lambda(x) = \lambda(x + nz), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \|(\hat{u}_n, \hat{v}_n)\|_E^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n(x + nz)|^2 + V_1(x + nz)u_n^2(x + nz)) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n(x + nz)|^2 + V_2(x + nz)v_n^2(x + nz)) dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudanca de variavel $w = x + nz$, onde, para cada $i = 1, \dots, N$, temos $w_i = x_i + nz_i$.

Assim, o jacobiano e a matriz identidade

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial w_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto $\det(J) = 1$ e $dw = dx$.

Assim,

$$\|(\hat{u}_n, \hat{v}_n)\|_E = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n(w)|^2 + V_1(w)u_n^2(w) + |\nabla v_n(w)|^2 + V_2(w)v_n^2(w))dw \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Desde que w e uma variavel muda,

$$\|(\hat{u}_n, \hat{v}_n)\|_E = \|(u_n, v_n)\|_E.$$

Note ainda que

$$I(\hat{u}_n, \hat{v}_n) = \frac{1}{2} \left(\|(\hat{u}_n, \hat{v}_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x + y_n) \hat{u}_n \hat{v}_n dx \right) - \frac{\mu}{p} \|\hat{u}_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|\hat{v}_n\|_q^q.$$

Novamente fazendo a mudanca de variavel, temos

$$\begin{aligned} I(\hat{u}_n, \hat{v}_n) &= \frac{1}{2} \left(\|(\hat{u}_n, \hat{v}_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(w) \hat{u}_n \hat{v}_n dw \right) - \frac{\mu}{p} \|\hat{u}_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|\hat{v}_n\|_q^q \\ &= \frac{1}{2} \left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx \right) - \frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q \\ &= I(u_n, v_n). \end{aligned}$$

Desde que $I(u_n, v_n) \rightarrow c_N$, segue que $I(\hat{u}_n, \hat{v}_n) \rightarrow c_N$. Como, $I(\hat{u}_n \hat{v}_n) = I(u_n, v_n)$, entao, $I'(\hat{u}_n \hat{v}_n) = I'(u_n, v_n) \rightarrow 0$.

Note que (\hat{u}_n, \hat{v}_n) e limitado. De fato, de (1.9), temos

$$\begin{aligned}
I(\hat{u}_n, \hat{v}_n) &= \frac{1}{2} \left(\|(\hat{u}_n, \hat{v}_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) \hat{u}_n \hat{v}_n dx \right) - \frac{\mu}{p} \|\hat{u}_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|\hat{v}_n\|_q^q \\
&= \frac{1}{2} (\mu \|\hat{u}_n\|_p^p + \|\hat{v}_n\|_q^q) - \frac{\mu}{p} \|\hat{u}_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|\hat{v}_n\|_q^q \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \left(\|(\hat{u}_n, \hat{v}_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) \hat{u}_n \hat{v}_n dx \right) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|\hat{v}_n\|_q^q
\end{aligned}$$

Assim, desde que, $p \leq q$, segue do Lema 1.1

$$I(\hat{u}_n, \hat{v}_n) > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) (1 - \delta) \|(\hat{u}_n, \hat{v}_n)\|_E^2.$$

Como $(I(\hat{u}_n, \hat{v}_n))_n$ é uma sequência limitada, deduzimos que $(\hat{u}_n, \hat{v}_n)_n$ é limitada em E . Desta forma, existe um ponto crítico (\hat{u}, \hat{v}) de I , de modo que, passando para uma subsequência, se necessário,

$$(\hat{u}_n, \hat{v}_n) \rightharpoonup (\hat{u}, \hat{v}) \text{ em } E.$$

Assim das imersões compactas de Sobolev,

$$(\hat{u}_n, \hat{v}_n) \rightarrow (\hat{u}, \hat{v}) \text{ em } L^s(B_R(0)) \times L^s(B_R(0)), \quad \forall 1 < s < 2^*$$

Logo,

$$(\hat{u}_n, \hat{v}_n) \rightarrow (\hat{u}, \hat{v}) \text{ em } L^2(B_R(0)) \times L^2(B_R(0)).$$

Usando (2.2) obtemos,

$$\int_{B_R(0)} (\hat{u}^2 + \hat{v}^2) dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} (\hat{u}_n^2 + \hat{v}_n^2) dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} (u_n^2 + v_n^2) dx > \varepsilon > 0.$$

Portanto, $(\hat{u}, \hat{v}) \neq (0, 0)$. Procedendo de forma análoga ao caso 1, concluímos a demonstração. \square

Proposição 2.2. Existe uma solução ground state não-negativa $(\hat{u}, \hat{v}) \in C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^N) \times$

$C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^N)$ para o sistema (S_μ) .

Demonstração: Seja $(u_0, v_0) \in \aleph$ a solucao de Ground State que obtemos na Proposicao 2.1. Do Lema 1.3, existe $t > 0$ tal que $(t|u_0|, t|v_0|) \in \aleph$. Note que, se $u_0, v_0 > 0$, temos

$$I(t|u_0|, t|v_0|) = I(tu_0, tv_0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) t^p \|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) t^q \|v_0\|_q^q.$$

Se $u_0 < 0$ e $v_0 > 0$, temos

$$I(t|u_0|, t|v_0|) = I(t(-u_0), tv_0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) t^p \|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) t^q \|v_0\|_q^q = I(tu_0, tv_0).$$

Se $u_0 > 0$ e $v_0 < 0$, temos

$$I(t|u_0|, t|v_0|) = I(tu_0, t(-v_0)) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) t^p \|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) t^q \|v_0\|_q^q = I(tu_0, tv_0).$$

Se $u_0, v_0 < 0$, temos

$$\begin{aligned} I(t|u_0|, t|v_0|) &= I(t(-u_0), t(-v_0)) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) (t^p \| -u_0 \|_p^p) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) (t^q \| -v_0 \|_q^q) \\ &\subset \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) t^p \|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) t^q \|v_0\|_q^q = I(tu_0, tv_0). \end{aligned}$$

Assim, do Lema 1.4

$$I(t|u_0|, t|v_0|) \subset I(tu_0, tv_0) \subset I(u_0, v_0) = c_\aleph.$$

Implicando que $(t|u_0|, t|v_0|)$ tambem e um minimizador de I em \aleph . Portanto $(t|u_0|, t|v_0|)$ e uma solucao ground state nao-negativa para o sistema (S_μ) .

A m de provar a regularidade da solucao, vamos usar o argumento do tipo Bootstrap. Inicialmente de nimos

$$(\hat{u}, \hat{v}) = (t|u_0|, t|v_0|),$$

$$P_1(x) = \mu|\hat{u}|^{p-2}\hat{u} + \lambda(x)\hat{v} - V_1(x)\hat{u}$$

e

$$P_2(x) = |\hat{v}|^{q-2}\hat{v} + \lambda(x)\hat{u} - V_2(x)\hat{v}.$$

Note que, o sistema

$$(P) \begin{cases} -\Delta\hat{u} = P_1(x), & x \in B_1(0), \\ -\Delta\hat{v} = P_2(x), & x \in B_1(0), \end{cases}$$

onde $B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$, e um caso particular do sistema (S_μ) . Assim, (\hat{u}, \hat{v}) é uma solução fraca do problema (P) . Usando imersões de Sobolev, temos $V_1(x)\hat{u}, V_2(x)\hat{v}, \lambda(x)\hat{u}, \lambda(x)\hat{v} \in L^{2^*}(B_1(0))$, pois E_i é imerso continuamente em $L^p(B_1(0))$ com $p \in [2, 2^*]$. Além disso, note que $1 < \frac{p}{2} < \frac{2^*}{2} < 2^*$, assim, desde que $B_1(0)$ é de domínio limitado, se $\hat{u} \in L^p(B_1(0))$ com $p \in [2, 2^*]$, então $\hat{u} \in L^{\frac{p}{2}}(B_1(0))$ e, se $\hat{u} \in L^p(B_1(0))$, então $|\hat{u}|^{p-2} \in L^{\frac{p}{p-2}}(B_1(0))$. Sendo $\frac{p}{2}$ e $\frac{p}{p-2}$ expoentes conjugados, segue da desigualdade de Hölder, [ver teorema A.1], que

$$|\hat{u}|^{p-2}\hat{u} \in L^1(B_1(0)).$$

Por outro lado, se $\hat{u} \in L^p(B_1(0))$, com $p \in [2, 2^*]$, então $|\hat{u}|^{p-2}\hat{u} = \hat{u}^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}$, com $p \in [2, 2^*]$, Logo,

$$|\hat{u}|^{p-2}\hat{u} \in L^{\frac{2^*}{p-1}}.$$

Assim, segue das imersões compactas de Sobolev que,

$$|\hat{u}|^{p-2}\hat{u} \in L^r(B_1(0)), \quad \forall 1 < r < \frac{2^*}{p-1} \quad \text{e} \quad |\hat{v}|^{q-2}\hat{v} \in L^s(B_1(0)), \quad \forall 1 < s < \frac{2^*}{q-1}.$$

De nimos

$$r_1 = \frac{2^*}{q-1}.$$

Com a condição de que $p < q$, temos

$$r_1 = \frac{2^*}{q-1} \in \frac{2^*}{p-1}.$$

Como consequência disto, temos

$$|\hat{u}|^{p-2}\hat{u} \in L^{r_1}(B_1(0)).$$

Desde que $V_1(x)\hat{u}, V_2(x)\hat{v}, \lambda(x)\hat{u}, \lambda(x)\hat{v} \in L^{2^*}(B_1(0))$, $r_1 < 2^*$ e $B_1(0)$ é domínio limitado, segue, por imersão de Sobolev que, $V_1(x)\hat{u}, V_2(x)\hat{v}, \lambda(x)\hat{u}, \lambda(x)\hat{v} \in L^{r_1}(B_1(0))$, da temos

$$P_1(x), P_2(x) \in L^{r_1}(B_1(0)).$$

Por outro lado, para cada $i = 1, 2$ seja w_i o potencial newtoniano de $P_i(x)$, pelo Teorema A.5, temos $w_i \in W^{2,r_1}(B_1(0))$ e

$$\begin{cases} \Delta w_1 = P_1(x), & x \in B_1(0), \\ \Delta w_2 = P_2(x), & x \in B_1(0). \end{cases}$$

Tomando $z_1 = \hat{u} - w_1$ e $z_2 = \hat{v} - w_2$, segue que $(\hat{u} - w_1, \hat{v} - w_2) \in H^1(B_1(0)) \times H^1(B_1(0))$ e uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} \Delta z_1 = 0 & \text{em } B_1(0), \\ \Delta z_2 = 0 & \text{em } B_1(0). \end{cases}$$

Assim,

$$(\hat{u} - w_1, \hat{v} - w_2) \in C^\infty(B_1(0)) \times C^\infty(B_1(0)).$$

Note que,

$$\begin{cases} \Delta w_1 = -\Delta \hat{u}, & x \in B_1(0), \\ \Delta w_2 = -\Delta \hat{v}, & x \in B_1(0). \end{cases}$$

Assim sendo,

$$(\hat{u}, \hat{v}) \in W^{2,r_1}(B_1(0)) \times W^{2,r_1}(B_1(0)).$$

Desde que $q - 1 < 2^* - 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(q - 1)(1 + \delta) = 2^* - 1.$$

Note que,

$$\frac{2^*}{q - 1} = \frac{2^*(1 + \delta)}{2^* - 1},$$

assim,

$$r_1 = \frac{2^*(1 + \delta)}{2^* - 1} = \frac{2N(1 + \delta)}{N + 2}. \quad (2.3)$$

Da imersao de Sobolev obtemos

$$W^{2,r_1}(B_1(0)) \hookrightarrow L^{s_1}(B_1(0)), \quad \text{onde } s_1 = \frac{Nr_1}{N - 2r_1}.$$

A rmamos que existe $r_2 \in (r_1, s_1)$ tal que

$$(\hat{u}, \hat{v}) \in W^{2,r_2}(B_1(0)) \times W^{2,r_2}(B_1(0)).$$

De fato, de nindo $r_2 = \frac{s_1}{q - 1}$, temos $r_2 < s_1$, pois, $q - 1 > 1$.

Usando (2.3), obtemos

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{Nr_1}{(q - 1)(N - 2r_1)} \frac{1}{r_1} = \frac{Nr_1}{(q - 1)(N - 2r_1)} \frac{q - 1}{2^*} = \frac{Nr_1(N - 2)}{(N - 2r_1)2N},$$

ou seja,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1(N - 2)}{2(N - 2r_1)} = \frac{2N(N - 2)(1 + \delta)}{2N(N + 2 - 4 - 4\delta)} = \frac{(N - 2)(1 + \delta)}{N - 2 - 4\delta} > 1 + \delta.$$

Logo,

$$r_2 > (1 + \delta)r_1$$

implicando que $r_2 \in (r_1, s_1)$. Sendo $B_1(0)$ dom nio limitado, por imersao de Sobolev, temos

$$W^{2,r_1}(B_1(0)) \hookrightarrow L^{s_1}(B_1(0)) \hookrightarrow L^{r_2}(B_1(0)).$$

Como consequência disto, temos $p_1(x), p_2(x) \in L^{r_2}(B_1(0))$. Fazendo uso dos mesmos argumentos usados anteriormente, concluímos que

$$(\hat{u}, \hat{v}) \in W^{2,r_2}(B_1(0)) \times W^{2,r_2}(B_1(0)).$$

Da imersao de Sobolev, temos

$$W^{2,r_2}(B_1(0)) \hookrightarrow L^{s_2}(B_1(0)), \quad \text{onde } s_2 = \frac{Nr_2}{N - 2r_2}.$$

A rmamos que existe $r_3 \in (r_2, s_2)$ tal que

$$(\hat{u}, \hat{v}) \in W^{2,r_3}(B_1(0)) \times W^{2,r_3}(B_1(0)).$$

De fato, de nindo $r_3 = \frac{s_2}{q-1}$, temos $r_3 < s_2$, pois, $q-1 > 1$. Agora, note que

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{Nr_2}{(q-1)(N-2r_2)} \frac{1}{r_2} = \frac{Nr_2}{(q-1)(N-2r_2)} \frac{q-1}{s_1} = \frac{Nr_2}{N-2r_2} \frac{N-2r_1}{Nr_1} = \frac{(N-2r_1)r_2}{(N-2r_2)r_1}$$

Desde que $r_1 < r_2$, segue que $N - 2r_1 > N - 2r_2$, o que implia

$$\frac{N - 2r_1}{N - 2r_2} > 1.$$

Assim, pelo fato de $\frac{r_2}{r_1} > 1 + \delta$, obtemos

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{(N - 2r_1)r_2}{(N - 2r_2)r_1} > 1 + \delta.$$

Logo,

$$r_3 > (1 + \delta)r_2,$$

implicando que $r_3 \in (r_2, s_2)$. Sendo, $B_1(0)$ dom nio limitado, por imersao de Sobolev, temos

$$W^{2,r_2}(B_1(0)) \hookrightarrow L^{s_2}(B_1(0)) \hookrightarrow L^{r_3}(B_1(0)).$$

Como consequência disto, $p_1(x), p_2(x) \in L^{r_3}(B_1(0))$. Fazendo uso dos mesmos argumentos usados anteriormente, conclu mos que

$$(\hat{u}, \hat{v}) \in W^{2,r_3}(B_1(0)) \times W^{2,r_3}(B_1(0)).$$

Prosseguindo com os mesmos passos, apos a n -essima iteracao obtemos

$$r_{n+1} = \frac{1}{q-1} \left(\frac{Nr_n}{N-2r_n} \right).$$

Observe que $r_{n+1} \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$, portanto,

$$(\hat{u}, \hat{v}) \in W_{loc}^{2,r}(\mathbb{R}^N) \times W_{loc}^{2,r}(\mathbb{R}^N), \quad \forall 2 < r < \infty.$$

Da imersao de Sobolev, temos

$$(\hat{u}, \hat{v}) \in C^{1,\beta}(\mathbb{R}^N) \times C^{1,\beta}(\mathbb{R}^N), \quad \text{para } \beta \in (0, 1).$$

□

Proposição 2.3. Se (V'_3) e valido, entao a solucao ground state e positiva.

Demonstração: Seja $(\hat{u}, \hat{v}) \in E \setminus \{(0, 0)\}$ a solucao ground state nao-negativa que obtemos

na Proposicao 2.2. Como $(\hat{u}, \hat{v}) \neq (0, 0)$, assumimos sem perda de generalidade que $\hat{u} \neq 0$ e supomos que $\hat{v} = 0$. Assim,

$$0 = \langle I'(\hat{u}, 0), (0, \psi) \rangle = - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) \hat{u} \psi dx, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Com a condicao de que $\lambda(x)$ seja positivo, temos $\hat{u} = 0$, o que e uma contradicao, assim, $\hat{v} \neq 0$.

Tomando $(\varphi, 0)$ como uma funcao teste, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle I'(\hat{u}, \hat{v}), (\varphi, 0) \rangle = ((\hat{u}, \hat{v}), (\varphi, 0))_E - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu |\hat{u}|^{p-2} \hat{u} \varphi + \lambda(x) \hat{v} \varphi) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \hat{u} \nabla \varphi + V_1(x) \hat{u} \varphi) dx - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu |\hat{u}|^{p-2} \hat{u} \varphi + \lambda(x) \hat{v} \varphi) dx, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \hat{u} \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x) \hat{u} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mu |\hat{u}|^{p-2} \hat{u} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) \hat{u} \varphi dx > 0,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Assim, deduzimos que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(-\hat{u}) \nabla \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} [-V_1(x)] (-\hat{u}) \varphi dx \leq 0, \quad \forall \varphi > 0, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

Alem disso, uma vez que $V_1(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$- \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x) \varphi dx \leq 0, \quad \forall \varphi > 0, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Para provar que (\hat{u}, \hat{v}) e positivo supomos que existe $p \in \mathbb{R}^N$ tal que $\hat{u}(p) = 0$. Assim, com a condicao de que $-\hat{u} \leq 0$ em \mathbb{R}^N , para qualquer $R > 0$, temos da de nicao de supremo que

$$0 = \sup_{B_R(p)} (-\hat{u}) = \sup_{\mathbb{R}^N} (-\hat{u})$$

Pelo princípio do Máximo Forte, [Ver Teorema A.9], concluímos que $-\hat{u}$ é constante. Logo, como $-\hat{u}(p) = \hat{u}(p) = 0$, então $-\hat{u} \equiv 0$ em todo ponto de \mathbb{R}^N , o que é uma contradição. Portanto $\hat{u} > 0$ em \mathbb{R}^N . Analogamente podemos provar que $\hat{v} > 0$ em \mathbb{R}^N . Assim a solução ground state (\hat{u}, \hat{v}) é positiva. \square

Demonstração do Teorema 2.1: Na Proposição 2.1 provamos a existência da Solução ground state para o sistema (S_μ) . Na Proposição 2.2 foi provado que a Solução ground state é não-negativa com a condição de que (V_3) seja válido, para todo $\mu > 0$. Portanto, provamos na Proposição 2.3 que se (V'_3) é válido, então a solução ground state é positiva.

Portanto, o Teorema 2.1 segue das Proposições 2.1 - 2.3. \square

2.2 Caso Crítico

Nesta seção, mostraremos a existência de solução ground state não-negativa e positiva para o sistema (S_μ) para o caso crítico $2 < p < q = 2^*$.

O principal resultado dessa seção é o seguinte Teorema:

Teorema 2.2. *Suponha que (V_1) - (V_3) sejam válidos. Se $2 < p < q = 2^*$, então existe $\mu_0 > 0$ de modo que o sistema (S_μ) possui uma solução ground state não-negativa $(u_0, v_0) \in E$, para todo $\mu > \mu_0$. Se (V'_3) é válido, então a solução ground states é positiva.*

Para provar este teorema, necessitamos do seguinte lema:

Lema 2.1. *Existe $\mu_0 > 0$ tal que $c_{\mathbb{R}} < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$, para todo $\mu > \mu_0$.*

Demonstração: Vamos considerar $(u, v) \in E$ tal que, $u, v > 0$. Vamos denotar $u_\mu = \mu u$ e $v_\mu = \mu v$. Do Lema 1.3 para qualquer $\mu > 0$, existe um único $t_\mu > 0$ tal que $(t_\mu u_\mu, t_\mu v_\mu) \in \mathcal{N}$. Daí, segue-se de (1.9) que,

$$\|(t_\mu \mu u, t_\mu \mu v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) t_\mu \mu u t_\mu \mu v dx = \mu \|t_\mu \mu u\|_p^p + \|t_\mu \mu v\|_q^q.$$

O que implica que

$$(t_\mu \mu)^2 \|(u, v)\|_E^2 - 2(t_\mu \mu)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx = (t_\mu \mu)^p \mu \|u\|_p^p + (t_\mu \mu)^q \|v\|_q^q.$$

Assim,

$$(t_\mu \mu)^2 \|(u, v)\|_E^2 = (t_\mu \mu)^p \mu \|u\|_p^p + (t_\mu \mu)^{2^*} \|v\|_{2^*}^{2^*} + 2(t_\mu \mu)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx, \quad (2.4)$$

implicando

$$\|(u, v)\|_E^2 = (t_\mu \mu)^{p-2} \mu \|u\|_p^p + (t_\mu \mu)^{2^*-2} \|v\|_{2^*}^{2^*} + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx > (t_\mu \mu)^{2^*-2} \|v\|_{2^*}^{2^*}.$$

Assim, segue-se que, $(t_\mu \mu)_\mu$ é uma sequência limitada. Passando para uma subsequência se necessário, podemos assumir que $t_\mu \mu \rightarrow \hat{t} > 0$, quando $\mu \rightarrow \infty$.

Se $\hat{t} > 0$, então

$$(t_\mu \mu)^p \mu \|u\|_p^p + (t_\mu \mu)^{2^*} \|v\|_{2^*}^{2^*} + 2(t_\mu \mu)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx \rightarrow \infty, \quad \text{quando } \mu \rightarrow \infty.$$

Como $(t_\mu \mu)_\mu$ é uma sequência limitada, então este limite contradiz (2.4). Portanto, $t_\mu \mu \rightarrow 0$ quando $\mu \rightarrow \infty$.

Desde que $c_N = \inf_{(u,v) \in \mathbb{N}} I(u, v)$, existe $\mu_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} c_N &\leq I(t_\mu \mu u, t_\mu \mu v) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|(t_\mu \mu u, t_\mu \mu v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) t_\mu \mu u t_\mu \mu v dx \right) - \frac{\mu}{p} \|t_\mu \mu u\|_p^p - \frac{1}{2^*} \|t_\mu \mu v\|_{2^*}^{2^*} \\ &= \frac{(t_\mu \mu)^2}{2} \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx \right) - \frac{(t_\mu \mu)^p}{p} \mu \|u\|_p^p - \frac{(t_\mu \mu)^{2^*}}{2^*} \|v\|_{2^*}^{2^*} \\ &\leq \frac{(t_\mu \mu)^2}{2} \|(u, v)\|_E^2 < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}, \quad \forall \mu > \mu_0. \end{aligned}$$

□

Demonstração do Teorema 2.2: De forma analoga ao Teorema 2.1, temos uma sequência $(u_n, v_n)_n \subset \mathfrak{N}$ que satisfaz (2.1). Além disso, a sequência é limitada e $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u_0, v_0)$ em E . Temos também que (u_0, v_0) é um ponto crítico do funcional energia I . Analogamente a prova do Teorema 2.1, dividimos a prova em dois casos

Caso 1: $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$.

A demonstração deste caso é analoga a prova do caso subcrítico na Proposição 2.1

Caso 2: $(u_0, v_0) = (0, 0)$.

Seja $\mu_0 > 0$ o parâmetro que obtivemos no Lema 2.1. Assumamos que se $\mu > \mu_0$, então existe uma sequência $(y_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ e constantes $R, \varepsilon > 0$ de modo que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} (u_n^2 + v_n^2) dx > \varepsilon > 0. \quad (2.5)$$

Vamos supor que (2.5) não seja válido. Assim, para qualquer $R > 0$, pelo Lema A.2

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y)} u_n^2 dx = 0 \quad e \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y)} v_n^2 dx = 0.$$

O que implica que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y)} (u_n^2 + v_n^2) dx = 0.$$

Do Lema de Lions [ver Lema A.1] temos que, $u_n \rightarrow 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 < p < 2^*$. Note que

$$\begin{aligned} I(u_n, v_n) - \frac{1}{2} \langle I'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \rangle &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \mu \|u_n\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \|v_n\|_q^q \\ &= \frac{p-2}{2p} \mu \|u_n\|_p^p + \frac{2^*-2}{2^*2} \|v_n\|_{2^*}^{2^*} \\ &= \frac{p-2}{2p} \mu \|u_n\|_p^p + \frac{1}{N} \|v_n\|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned}$$

Por este fato, de (2.1) e do Lema de Lions, obtemos

$$\begin{aligned}
N_{c_N} + o_n(1) &= N(I(u_n, v_n)) - N\left(\frac{1}{2}\langle I'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \rangle + \frac{p-2}{2p}\mu\|u_n\|_p^p\right) \\
&= N\left(I(u_n, v_n) - \frac{1}{2}\langle I'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \rangle - \frac{p-2}{2p}\mu\|u_n\|_p^p\right) = \|v_n\|_{2^*}^{2^*}.
\end{aligned}$$

Alem disso,

$$N_{c_N} + o_n(1) = \|v_n\|_{2^*}^{2^*} + \mu\|u_n\|_p^p + \langle I'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \rangle = \|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)u_n v_n dx.$$

Seja S a melhor constante na imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx > S \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}},$$

onde

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

Se $v_n \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, entao

$$\|v_n\|_{2^*}^{2^*} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

O que implica que

$$S\|v_n\|_{2^*}^{2^*} = S \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx.$$

Assim,

$$\|v_n\|_{2^*}^{2^*} \leq \frac{1}{S} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx,$$

o que fornece

$$\|v_n\|_{2^*}^{2^*} \leq \frac{1}{S^{\frac{2^*}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \right)^{\frac{2^*}{2}}.$$

Logo,

$$\|v_n\|_{2^*}^{2^*} \leq S^{\frac{-N}{N-2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \right)^{\frac{\frac{2N}{N-2}}{2}} = S^{\frac{-N}{N-2}} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{2N}{N-2}} = S^{\frac{-N}{N-2}} \|\nabla v_n\|_2^{\frac{2N}{N-2}}.$$

Note ainda que

$$\begin{aligned} S^{\frac{-N}{N-2}} \|\nabla v_n\|_2^{\frac{2N}{N-2}} &\leq S^{\frac{-N}{N-2}} \left[\left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{2N}{N-2}} \\ &= S^{\frac{-N}{N-2}} \left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx \right)^{\frac{N}{N-2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$Nc_N + o_n(1) = \|v_n\|_{2^*}^{2^*} \leq S^{\frac{-N}{N-2}} \|\nabla v_n\|_2^{\frac{2N}{N-2}} \leq S^{\frac{-N}{N-2}} \left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx \right)^{\frac{N}{N-2}}.$$

Concluimos que

$$Nc_N + o_n(1) \leq \left(\frac{Nc_N}{S} \right)^{\frac{N}{N-2}} + o_n(1).$$

Logo, $S^{\frac{N}{N-2}} \leq \frac{(Nc_N)^{\frac{N}{N-2}}}{Nc_N} = (Nc_N)^{\frac{2}{N-2}}$. Assim, $\sqrt[N-2]{S^{\frac{N}{N-2}}} \leq Nc_N$. Portanto,

$$c_N > \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}},$$

o que contradiz o Lema 2.1. Uma vez que (2.5) é válido, podemos considerar a sequência de mudança

$$(\hat{u}_n(x), \hat{v}_n(x)) = (u_n(x + y_n), v_n(x + y_n)).$$

Agora, basta repetir os mesmos argumentos que usamos na prova do Teorema 2.1 para concluir a demonstração. \square

Capítulo 3

Existência de Solução para o Sistema

 \hat{S}_μ

Neste capítulo mostraremos a existência de solução ground state não-negativa e positiva para o sistema (\hat{S}_μ) para o caso subcrítico $2 < p < q < 2^*$ e para o caso crítico $2 < p < q = 2^*$.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Suponha que $(V_1) - (V_6)$ sejam válidos. Se $2 < p < q < 2^*$, então existe uma solução ground state não-negativa $(u_0, v_0) \in C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^N) \times C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^N)$ para o sistema (\hat{S}_μ) , para todo $\mu > 0$. Além disso, se $2 < p < q = 2^*$, então existe $\mu_0 > 0$ de modo que o sistema (\hat{S}_μ) possui uma solução ground state não-negativa para todo $\mu > \mu_0$. Se (V'_6) é válido, então as ground states são positivas.*

Recordemos o sistema

$$(\hat{S}_\mu) \begin{cases} -\Delta u + \hat{V}_1(x)u = \mu|u|^{p-2}u + \hat{\lambda}(x)v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \hat{V}_2(x)v = |v|^{q-2}v + \hat{\lambda}(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

Para a prova deste Teorema, estudaremos a existência de solução ground state para

o caso asintoticamente periodico, onde a diferenca entre $V_i(x), \lambda(x)$ e $\hat{V}_i(x), \hat{\lambda}(x)$ e a 1-periodicidade, necessaria para $V_i(x)$ e $\lambda(x)$. Assim, se $\hat{V}_i(x)$ e $\hat{\lambda}(x)$ sao potenciais periodicos, podemos proceder de forma analogo aos Teoremas 2.1 e 2.2 para conseguir uma solucao ground state para o sistema (\hat{S}_μ) . Suponhamos que eles nao sejam periodicos. Associado ao sistema (\hat{S}_μ) , temos o funcional energia

$$\hat{I}(u, v) = \frac{1}{2} \left(\|(u, v)\|_{\hat{E}}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x) u v dx \right) - \frac{\mu}{p} \|u\|_p^p - \frac{1}{q} \|v\|_q^q.$$

A Variedade Nehari associada ao sistema (\hat{S}_μ) e de nido por

$$\hat{\mathfrak{N}} = \left\{ (u, v) \in \hat{E} \setminus \{(0, 0)\} : \langle \hat{I}'(u, v), (u, v) \rangle = 0 \right\}$$

e a energia de Ground State e dada por

$$c_{\hat{\mathfrak{N}}} = \inf_{\hat{\mathfrak{N}}} \hat{I}(u, v).$$

De maneira analogo ao Lema 1.5, temos

$$\hat{I}(u, v) > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) (1 - \delta) \|(u, v)\|_{\hat{E}}^2 > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) (1 - \delta) \alpha > 0, \quad \forall (u, v) \in \hat{\mathfrak{N}}.$$

Como consequência, temos $c_{\hat{\mathfrak{N}}} > 0$.

A seguir mostraremos um resultado que estabelece uma relacao entre os n veis $c_{\hat{\mathfrak{N}}}$ e $c_{\mathfrak{N}}$.

Lema 3.1. $c_{\hat{\mathfrak{N}}} \acute{o} c_{\mathfrak{N}}$

Demonstração: Seja $(u_0, v_0) \in \mathfrak{N}$ a solucao ground state nao-negativa para o sistema (S_μ) . Realizando um processo semelhante ao que foi feito no Lema 1.3 para \hat{I} e $\hat{\mathfrak{N}}$, existe um unico $t_0 > 0$, dependendo apenas de (u_0, v_0) , de modo que $(t_0 u_0, t_0 v_0) \in \hat{\mathfrak{N}}$. Usando (V_4) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left((\hat{V}_1(x) - V_1(x))u_0^2 + (\hat{V}_2(x) - V_2(x))v_0^2 + (\lambda(x) - \hat{\lambda}(x))u_0v_0 \right) dx < 0.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\hat{V}_1(x)u_0^2 + \hat{V}_2(x)v_0^2 - \hat{\lambda}(x)u_0v_0) dx - \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u_0^2 + V_2(x)v_0^2 - \lambda(x)u_0v_0) dx < 0.$$

Como $\hat{V}_i(x) < V_i(x)$, entao $\frac{1}{2}\hat{V}_i < \frac{1}{2}V_i(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}(\hat{V}_1(x)u_0^2 + \hat{V}_2(x)v_0^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x)u_0v_0 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}(V_1(x)u_0^2 + V_2(x)v_0^2) dx \\ + \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)u_0v_0 dx < 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}(|\nabla u_0|^2 + \hat{V}_1(x)u_0^2) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}(|\nabla v_0|^2 + \hat{V}_2(x)v_0^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x)u_0v_0 dx \\ - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}(|\nabla u_0|^2 + V_1(x)u_0^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}(|\nabla v_0|^2 + V_2(x)v_0^2) dx \\ + \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)u_0v_0 dx \end{aligned}$$

O que implica

$$\frac{1}{2}\|(u_0, v_0)\|_{\hat{E}}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x)u_0v_0 dx - \frac{1}{2}\|(u_0, v_0)\|_E^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)u_0v_0 dx < 0.$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \left(\|(u_0, v_0)\|_{\hat{E}}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x)u_0v_0 dx \right) - \frac{1}{2} \left(\|(u_0, v_0)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)u_0v_0 dx \right) < 0.$$

Multiplicando por t_0^2 , a expressao acima, obtemos

$$\frac{t_0^2}{2} \left(\|(u_0, v_0)\|_{\hat{E}}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x) u_0 v_0 dx \right) - \frac{t_0^2}{2} \left(\|(u_0, v_0)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_0 v_0 dx \right) < 0.$$

Logo,

$$\hat{I}(t_0 u_0, t_0 v_0) - I(t_0 u_0, t_0 v_0) < 0.$$

Como $(t_0 u_0, t_0 v_0) \in \hat{\mathfrak{K}}$, entao $c_{\hat{\mathfrak{K}}} \in \hat{I}(t_0 u_0, t_0 v_0) < I(t_0 u_0, t_0 v_0)$

Uma vez que (u_0, v_0) e uma solucao ground state para o sistema (S_μ) e $t_0 > 0$, usando o Lema 1.4 temos

$$I(t_0 u_0, t_0 v_0) \in I(u_0, v_0) = c_{\mathfrak{K}}.$$

Concluindo a demonstracao do Lema. □

Observação 3.1. Seja $(u_n, v_n)_n \subset \hat{\mathfrak{K}}$ a sequência minimizante que satisfaz

$$\hat{I}(u_n, v_n) \rightarrow c_{\hat{\mathfrak{K}}} \quad e \quad \hat{I}'_{\hat{\mathfrak{K}}}(u_n, v_n) \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Note que (u_n, v_n) e limitado em \hat{E} . De fato, de (1.9), temos

$$\begin{aligned} \hat{I}(u_n, v_n) &= \frac{1}{2} \left(\|(u_n, v_n)\|_{\hat{E}}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x) u_n v_n dx \right) - \frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q \\ &= \frac{1}{2} (\mu \|u_n\|_p^p + \|v_n\|_q^q) - \frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \left(\|(u_n, v_n)\|_{\hat{E}}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x) u_n v_n dx \right) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|v_n\|_q^q. \end{aligned}$$

Assim, desde que, $2 < p \leq q$, segue do Lema 1.1

$$\hat{I}(u_n, v_n) > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) (1 - \delta) \|(u_n, v_n)\|_{\hat{E}}^2.$$

Desde que $(\hat{I}(u_n, v_n))_n$ e uma sequência limitada, deduzimos que $(u_n, v_n)_n$ e limitada em \hat{E} , passando para uma subsequência, se necessario, temos

$$(u_n, v_n)_n \rightharpoonup (u_0, v_0) \text{ em } \hat{E}.$$

Proposição 3.1. *O limite fraco (u_0, v_0) da seqüência minimizante $(u_n, v_n)_n$ é não-trivial.*

Demonstração: *Suponhamos que $(u_0, v_0) = (0, 0)$. Das imersões compactas*

$$u_n \rightarrow 0 \text{ e } v_n \rightarrow 0 \text{ em } L_{loc}^p(\mathbb{R}^N), \quad \forall 2 \leq p < 2^*$$

e dos resultados de medida

$$u_n(x) \rightarrow 0 \text{ e } v_n(x) \rightarrow 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Resulta da condição (V_4) que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$|V_1(x) - \hat{V}_1(x)| < \varepsilon, |V_2(x) - \hat{V}_2(x)| < \varepsilon, |\hat{\lambda}(x) - \lambda(x)| < \varepsilon, \text{ para } |x| > R, \quad (3.2)$$

pois, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |V_i(x) - \hat{V}_i(x)| = 0$ e $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\hat{\lambda}(x) - \lambda(x)| = 0$.

Note que,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x) - \hat{V}_1(x)) u_n^2 dx \right| \leq \int_{B_R(0)} |V_1(x) - \hat{V}_1(x)| u_n^2 dx + C_\varepsilon \int_{B_R(0)^c} u_n^2 dx.$$

Desde que \hat{E}_i é imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ com $p \in [2, 2^*]$, temos

$$C_\varepsilon \int_{B_R(0)^c} u_n^2 dx \leq C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx = C_\varepsilon \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq C_\varepsilon \|u_n\|_{\hat{E}_1}^2.$$

Uma vez que $B_R(0)$ é compacta e $V_1(x), \hat{V}_1(x) \in C^1(\mathbb{R}^N)$, existe $C_1, \hat{C}_1 > 0$, tais que $|V_1(x)| \leq C_1$ e $|\hat{V}_1(x)| \leq \hat{C}_1, \forall x \in B_R(0)$. Da definição de norma em L_{loc}^∞ , temos

$$\|V_1\|_{L_{loc}^\infty} = \inf\{C_1; |V_1(x)| \leq C_1, x \in B_R(0)\} \text{ e } \|\hat{V}_1\|_{L_{loc}^\infty} = \inf\{\hat{C}_1; |\hat{V}_1(x)| \leq \hat{C}_1, x \in B_R(0)\}.$$

Usando a desigualdade triangular, temos

$$|V_1(x) - \hat{V}_1(x)| \leq |V_1(x)| + |\hat{V}_1(x)|.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} |V_1(x) - \hat{V}_1(x)| u_n^2 dx &\leq \int_{B_R(0)} (|V_1(x)| + |\hat{V}_1(x)|) u_n^2 dx \leq \int_{B_R(0)} (C_1 + \hat{C}_1) u_n^2 dx \\ &= \int_{B_R(0)} \left(\|V_1\|_{L_{loc}^\infty} + \|\hat{V}_1\|_{L_{loc}^\infty} \right) u_n^2 dx \\ &= \left(\|V_1\|_{L_{loc}^\infty} + \|\hat{V}_1\|_{L_{loc}^\infty} \right) \int_{B_R(0)} u_n^2 dx \\ &= \left(\|V_1\|_{L_{loc}^\infty} + \|\hat{V}_1\|_{L_{loc}^\infty} \right) \|u_n\|_{L^2(B_R(0))}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x) - \hat{V}_1(x)) u_n^2 dx \right| &\leq \int_{B_R(0)} |V_1(x) - \hat{V}_1(x)| u_n^2 dx + C_\varepsilon \int_{B_R(0)^c} u_n^2 dx \\ &\leq \left(\|V_1\|_{L_{loc}^\infty} + \|\hat{V}_1\|_{L_{loc}^\infty} \right) \|u_n\|_{L^2(B_R(0))}^2 + C_\varepsilon \|u_n\|_{\hat{E}_1}^2. \end{aligned}$$

Como $(u_n, v_n)_n$ é uma sequência limitada em \hat{E} , então u_n é limitada em \hat{E}_1 , logo, existe $C > 0$ tal que $\|u_n\|_{\hat{E}_1}^2 < C$. Assim, $C_\varepsilon \|u_n\|_{\hat{E}_1}^2 \leq C_\varepsilon C$. Desde que $u_n \rightarrow 0$ em $L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n\|_{L_{loc}^p} < \varepsilon$, $\forall n > n_0$, em particular $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon$. Usando (3.2), imersão de Sobolev e convergência local, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x) - \hat{V}_1(x)) u_n^2 dx \right| \leq \left(\|V_1\|_{L_{loc}^\infty} + \|\hat{V}_1\|_{L_{loc}^\infty} \right) \varepsilon + C_\varepsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Analogamente, obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (V_2(x) - \hat{V}_2(x)) v_n^2 dx \right| \leq \left(\|V_2\|_{L_{loc}^\infty} + \|\hat{V}_2\|_{L_{loc}^\infty} \right) \varepsilon + C_\varepsilon.$$

Note ainda que,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (\hat{\lambda}(x) - \lambda(x)) u_n v_n dx \right| \leq \int_{B_R(0)} |\hat{\lambda}(x) - \lambda(x)| |u_n| |v_n| dx + C_\varepsilon \int_{B_R(0)^c} |u_n| |v_n| dx.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$C_\varepsilon \int_{B_R(0)^c} |u_n| |v_n| dx \leq C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u_n| |v_n| dx = C_\varepsilon \|u_n v_n\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq C_\varepsilon \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Desde que \hat{E}_i é imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ com $p \in [2, 2^*]$, temos

$$C_\varepsilon \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C_\varepsilon \|u_n\|_{\hat{E}_1} \|v_n\|_{\hat{E}_2}.$$

Recordando que u_n é limitada em \hat{E}_1 e v_n é limitada em \hat{E}_2 , obtemos

$$C_\varepsilon \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C_\varepsilon \|u_n\|_{\hat{E}_1} \|v_n\|_{\hat{E}_2} \leq C_\varepsilon.$$

Pelos mesmos argumentos utilizados anteriormente, concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} |\hat{\lambda}(x) - \lambda(x)| |u_n| |v_n| dx &\leq \left(\|\hat{\lambda}\|_{L_{loc}^\infty} + \|\lambda\|_{L_{loc}^\infty} \right) \|u_n\|_{L^2(B_R(0))} \|v_n\|_{L^2(B_R(0))} \\ &\leq \left(\|\hat{\lambda}\|_{L_{loc}^\infty} + \|\lambda\|_{L_{loc}^\infty} \right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Usando novamente (3.2),

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (\hat{\lambda}(x) - \lambda(x)) u_n v_n dx \right| \leq \left(\|\hat{\lambda}\|_{L_{loc}^\infty} + \|\lambda\|_{L_{loc}^\infty} \right) \varepsilon + C_\varepsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned}
I(u_n, v_n) - \hat{I}(u_n, v_n) &= \frac{1}{2} \left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx \right) - \frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q \\
&- \frac{1}{2} \left(\|(u_n, v_n)\|_{\hat{E}}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x) u_n v_n dx \right) + \frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p + \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x) - \hat{V}_1(x)) u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} (V_2(x) - \hat{V}_2(x)) v_n^2 dx \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(2 \int_{\mathbb{R}^N} (\hat{\lambda}(x) - \lambda(x)) u_n v_n dx \right) = o_n(1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle I'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \rangle - \langle \hat{I}'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \rangle &= \|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx - \mu \|u_n\|_p^p \\
&- \|v_n\|_q^q - \|(u_n, v_n)\|_{\hat{E}}^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x) u_n v_n dx \\
&+ \mu \|u_n\|_p^p + \|v_n\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x) - \hat{V}_1(x)) u_n^2 dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} (V_2(x) - \hat{V}_2(x)) v_n^2 dx \\
&+ 2 \int_{\mathbb{R}^N} (\hat{\lambda}(x) - \lambda(x)) u_n v_n dx = o_n(1),
\end{aligned}$$

que juntamente com (3.1) implicam

$$I(u_n, v_n) = c_{\mathfrak{N}} + o_n(1) \quad e \quad \langle I'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \rangle = o_n(1). \quad (3.3)$$

Desde que $(u_n, v_n) \in E \setminus \{(0, 0)\}$, do Lema 1.3, existe uma seqüência $(t_n)_n \subset (0, \infty)$ de modo que $(t_n u_n, t_n v_n) \in \mathfrak{N}$.

Afirmação 3.1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} t_n \leq 1$

Suponhamos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, passando a uma subsequência, temos $t_n > 1 + \varepsilon_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, usando (3.3) e o fato de que $(t_n u_n, t_n v_n) \in \mathfrak{N}$, segue de (1.9) que

$$\|(t_n u_n, t_n v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) t_n u_n t_n v_n dx - \mu \|t_n u_n\|_p^p - \|t_n v_n\|_q^q = 0.$$

Passando o limite com $n \rightarrow \infty$, temos

$$\|(t_n u_n, t_n v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) t_n u_n t_n v_n dx - \mu \|t_n u_n\|_p^p - \|t_n v_n\|_q^q = o_n(1).$$

O que implica

$$t_n^2 \left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx \right) - \mu t_n^p \|u_n\|_p^p - t_n^q \|v_n\|_q^q = o_n(1).$$

Novamente usando (1.9), temos

$$t_n^2 \mu \|u_n\|_p^p + t_n^2 \|v_n\|_q^q - t_n^p \mu \|u_n\|_p^p - t_n^q \|v_n\|_q^q = o_n(1).$$

Multiplicando essa expressao por $\left(-\frac{1}{t_n^2}\right)$, tem-se

$$-\mu \|u_n\|_p^p - \|v_n\|_q^q + t_n^{p-2} \mu \|u_n\|_p^p + t_n^{q-2} \|v_n\|_q^q = o_n(1).$$

Logo,

$$(t_n^{p-2} - 1) \mu \|u_n\|_p^p + (t_n^{q-2} - 1) \|v_n\|_q^q = o_n(1).$$

Como $t_n > 1 + \varepsilon_0$, temos

$$((1 + \varepsilon_0)^{p-2} - 1) \mu \|u_n\|_p^p + ((1 + \varepsilon_0)^{q-2} - 1) \|v_n\|_q^q \leq (t_n^{p-2} - 1) \mu \|u_n\|_p^p + (t_n^{q-2} - 1) \|v_n\|_q^q = o_n(1) \quad (3.4)$$

De maneira analoga a prova dos Teoremas 2.1 e 2.2, existe uma sequencia $(y_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ e constantes $R, \varepsilon > 0$ tais que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} (u_n^2 + v_n^2) dx > \varepsilon > 0. \quad (3.5)$$

Observe que, quando $q = 2^*$, (3.5) é válido para os parâmetros $\mu > \mu_0$, onde μ_0 foi introduzido no Lema 2.1.

De nimos $(\hat{u}_n(x), \hat{v}_n(x)) = (u_n(x + y_n), v_n(x + y_n))$. Segue-se da hipótese (V_4) que $\hat{V}_1, \hat{V}_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, fazendo uso da imersão contínua $\hat{E}_i \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ deduzimos que (\hat{u}_n, \hat{v}_n) é limitada em \hat{E} . Assim, passando a uma subsequência se necessário, podemos considerar $(\hat{u}_n, \hat{v}_n) \rightharpoonup (\hat{u}, \hat{v})$ em \hat{E} .

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} (\hat{u}_n^2 + \hat{v}_n^2) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} (u_n^2 + v_n^2) dx > \varepsilon > 0.$$

implicando que $(\hat{u}, \hat{v}) \neq (0, 0)$. Assim, ao usar (3.4) e a semicontinuidade da norma obtemos

$$0 < ((1 + \varepsilon_0)^{p-2} - 1)\mu \|\hat{u}\|_p^p + ((1 + \varepsilon_0)^{q-2} - 1)\|\hat{v}\|_q^q \leq o_n(1).$$

O que é um absurdo, pois teríamos $0 < 0$. Logo,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} t_n \leq 1.$$

Afirmção 3.2. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $t_n > 1$, para $n > n_0$.

Vamos supor que $t_n < 1$, Desde que

$$(t_n u_n, t_n v_n) \in \mathfrak{N} \text{ e } c_{\mathfrak{N}} = \inf_{(u,v) \in \mathfrak{N}} I(u, v),$$

segue-se

$$c_{\mathfrak{N}} \leq I(t_n u_n, t_n v_n) = \frac{1}{2} \left(\|(t_n u_n, t_n v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) t_n u_n t_n v_n dx \right) - \frac{\mu}{p} \|t_n u_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|t_n v_n\|_q^q.$$

De (1.9) temos

$$\begin{aligned}
c_{\mathbb{R}} &\leq \frac{1}{2}(\mu \|t_n u_n\|_p^p + \|t_n v_n\|_q^q) - \frac{\mu}{p} \|t_n u_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|t_n v_n\|_q^q \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \mu t_n^p \|u_n\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) t_n^q \|v_n\|_q^q \\
&= \left(\frac{p-2}{2p}\right) \mu t_n^p \|u_n\|_p^p + \left(\frac{q-2}{2q}\right) t_n^q \|v_n\|_q^q.
\end{aligned}$$

Desde que, $t_n < 1$, conclu mos

$$c_{\mathbb{R}} \leq \left(\frac{p-2}{2p}\right) \mu \|u_n\|_p^p + \left(\frac{q-2}{2q}\right) \|v_n\|_q^q.$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p-2}{2p}\right) \mu \|u_n\|_p^p + \left(\frac{q-2}{2q}\right) \|v_n\|_q^q &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \mu \|u_n\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \|v_n\|_q^q \\
&= \frac{\mu}{2} \|u_n\|_p^p - \frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p + \frac{1}{2} \|v_n\|_q^q - \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q \\
&= \frac{1}{2} \left(\|(u_n, v_n)\|_{\hat{E}}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x) u_n v_n dx \right) - \frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\|(u_n, v_n)\|_{\hat{E}}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x) u_n v_n dx \right) + \frac{\mu}{2} \|u_n\|_p^p - \frac{1}{2} \|v_n\|_q^q \\
&= \hat{I}(u_n, v_n) - \frac{1}{2} \langle \hat{I}'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, de (3.2) segue que

$$c_{\mathbb{R}} \leq \hat{I}(u_n, v_n) - \frac{1}{2} \langle \hat{I}'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \rangle = c_{\hat{\mathbb{R}}} + o_n(1).$$

Portanto, $c_{\mathbb{R}} \leq c_{\hat{\mathbb{R}}}$, contradizendo o Lema 3.1. Logo, a A rmacao 3.2 e verdadeira.

Observe que,

$$\begin{aligned}
I(t_n u_n, t_n v_n) - I(u_n, v_n) &= \frac{1}{2} \left(\|(t_n u_n, t_n v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) t_n u_n t_n v_n dx \right) - \frac{\mu}{p} \|t_n u_n\|_p^p \\
&- \frac{1}{q} \|t_n v_n\|_q^q - \frac{1}{2} \left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx \right) \\
&+ \frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p + \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q
\end{aligned}$$

Assim, de (1.9) temos

$$\begin{aligned}
I(t_n u_n, t_n v_n) - I(u_n, v_n) &= \frac{1}{2} (\mu \|t_n u_n\|_p^p + \|t_n v_n\|_q^q) - \frac{\mu}{p} \|t_n u_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|t_n v_n\|_q^q \\
&- \frac{1}{2} (\mu \|u_n\|_p^p + \|v_n\|_q^q) + \frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p + \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q \\
&= \left(\frac{t_n^p - 1}{2} + \frac{1 - t_n^p}{p} \right) \mu \|u_n\|_p^p + \left(\frac{t_n^q - 1}{2} + \frac{1 - t_n^q}{q} \right) \|v_n\|_q^q.
\end{aligned}$$

Combinando as A rmacões 3.1 e 3.2, vem que

$$0 \triangleleft I(t_n u_n, t_n v_n) - I(u_n, v_n) \triangleleft 0,$$

isto e,

$$I(t_n u_n, t_n v_n) - I(u_n, v_n) = o_n(1)$$

Da , segue da de nicao de $c_{\hat{\mathfrak{X}}}$ e de (3.3) que

$$c_{\hat{\mathfrak{X}}} \triangleleft I(t_n u_n, t_n v_n) = I(u_n, v_n) + o_n(1) = c_{\hat{\mathfrak{X}}} + o_n(1).$$

O que contradiz novamente o Lema 3.1, portanto, $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$. □

Demonstração do Teorema 3.1: Desde que (u_0, v_0) e um ponto cr tico nao-trivial do funcional energia \hat{I} , segue que $(u_0, v_0) \in \hat{\mathfrak{X}}$. Portando, $c_{\hat{\mathfrak{X}}} \triangleleft \hat{I}(u_0, v_0)$. Por outro lado, usando a semicontinuidade da norma, temos

$$\begin{aligned}
c_{\hat{\mathfrak{K}}} + o_n(1) &= \hat{I}(u_n, v_n) - \frac{1}{2} \langle \hat{I}'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \left(\|(u_n, v_n)\|_{\hat{E}}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x) u_n v_n dx \right) - \frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\|(u_n, v_n)\|_{\hat{E}}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x) u_n v_n dx \right) + \frac{\mu}{2} \|u_n\|_p^p + \frac{1}{2} \|v_n\|_q^q \\
&= -\frac{\mu}{p} \|u_n\|_p^p - \frac{1}{q} \|v_n\|_q^q + \frac{\mu}{2} \|u_n\|_p^p + \frac{1}{2} \|v_n\|_q^q \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \mu \|u_n\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \|v_n\|_q^q.
\end{aligned}$$

Pela de nicao de solucao ground state,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \mu \|u_n\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \|v_n\|_q^q > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \mu \|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \|v_0\|_q^q.$$

Da , segue que

$$\begin{aligned}
c_{\hat{\mathfrak{K}}} + o_n(1) &> \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \mu \|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \|v_0\|_q^q + o_n(1) \\
&= \hat{I}(u_0, v_0) - \langle \hat{I}'(u_0, v_0), (u_0, v_0) \rangle + o_n(1) \\
&= \hat{I}(u_0, v_0) + o_n(1).
\end{aligned}$$

Como consequência disto, temos, $c_{\hat{\mathfrak{K}}} > \hat{I}(u_0, v_0)$. Portanto, $\hat{I}(u_0, v_0) = c_{\hat{\mathfrak{K}}}$. Agora, podemos usar os mesmos argumentos da prova do Teorema 2.1 para concluir que existe $t_0 > 0$ tal que $(t_0|u_0|, t_0|v_0|) \in \hat{\mathfrak{K}}$ e uma solucao ground state do sistema (\hat{S}_μ) , para o caso subcr tico $2 < p < q < 2^*$.

Para o caso cr tico $2 < p < q = 2^*$, decorre dos Lemas 2.1 e 3.1 que, existe $\mu_0 > 0$ tal que

$$c_{\hat{\mathfrak{K}}} < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} \quad \forall \quad \mu \geq \mu_0.$$

Agora, podemos usar os mesmos argumentos da prova do Teorema 2.2 para concluir que existe $\mu_0 > 0$ de modo que o sistema (\hat{S}_μ) possui uma solucao ground state para todo $\mu \geq \mu_0$.

□

Capítulo 4

Resultado de não Existência de Solução para o Sistema S_μ

Neste capítulo apresentaremos o nosso último resultado deste trabalho e usaremos a identidade de Pohozaev para mostrar que o sistema (S_μ) não possui solução clássica positiva quando $p = q = 2^*$.

O principal resultado deste capítulo é

Teorema 4.1. *Assuma $p = q = 2^*$, Além disso, considere as seguintes hipóteses:*

$$(V_7) \quad 0 \in \langle \nabla V_i(x), x \rangle \in C V_i(x);$$

$$(V_8) \quad |\langle \nabla \lambda(x), x \rangle| \in C |\lambda(x)| \quad e \quad \langle \nabla \lambda(x), x \rangle \in 0.$$

Então o sistema (S_μ) não tem solução clássica positiva para todo $\mu > \mu_0$.

Recordemos o sistema (S_μ) :

$$(S_\mu) \begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \mu|u|^{2^*-2}u + \lambda(x)v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V_2(x)v = |v|^{2^*-2}v + \lambda(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

Para obtermos um resultado de não existência, iremos provar a seguinte identidade de Pohozaev.

Lema 4.1. *Suponha que $(V_7), (V_8)$ sejam válidos e $N > 3$. Se $(u, v) \in E$ e uma solução clássica de (S_μ) , então satisfaz a seguinte identidade de Pohozaev:*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (\mu|u|^{2^*} + |v|^{2^*} + 2^* \lambda(x)uv) dx \\ &+ \frac{2}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv dx - \frac{2^*}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2) dx \\ &- \frac{1}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} (\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2) dx. \end{aligned}$$

Demonstração: Seja $(u, v) \in E$ uma solução clássica do sistema (S_μ) . Denotemos

$$f(x, u, v) = -V_1(x)u + \mu|u|^{2^*-2}u + \lambda(x)v \quad e \quad g(x, u, v) = -V_2(x)v + |v|^{2^*-2}v + \lambda(x)u.$$

Consideremos a função $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ definida por

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |t| > 2, \end{cases}$$

tal que $|\psi'(t)| \leq C$, para algum $C > 0$. Definimos $\psi_n(x) = \psi\left(\frac{|x|^2}{n^2}\right)$. Note que

$$\nabla \psi_n = \frac{1}{n^2} 2x \psi'\left(\frac{|x|^2}{n^2}\right) = \frac{2}{n^2} \psi'\left(\frac{|x|^2}{n^2}\right) x$$

e

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq n, \\ 0 & \text{se } |x| > \sqrt{2}n. \end{cases}$$

Assim, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = 1.$$

Multiplicando a primeira e a segunda equações de (S_μ) pelos fatores $\langle \nabla u, x \rangle \psi_n$ e $\langle \nabla v, x \rangle \psi_n$ respectivamente e integrando-as, obtemos

$$- \int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \langle \nabla u, x \rangle \psi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u, v) \langle \nabla u, x \rangle \psi_n dx \quad (4.1)$$

e

$$- \int_{\mathbb{R}^N} \Delta v \langle \nabla v, x \rangle \psi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u, v) \langle \nabla v, x \rangle \psi_n dx. \quad (4.2)$$

Somando (4.1) e (4.2), temos

$$- \int_{\mathbb{R}^N} (\Delta u \langle \nabla u, x \rangle + \Delta v \langle \nabla v, x \rangle) \psi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u, v) \langle \nabla u, x \rangle + g(x, u, v) \langle \nabla v, x \rangle) \psi_n dx \quad (4.3)$$

Note que, pela definição de divergente, temos

$$\operatorname{div}(\langle \nabla u, x \rangle \psi_n \nabla u) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \psi_n \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\langle \nabla u, x \rangle \psi_n \nabla u) &= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \psi_n \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \psi_n \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \psi_n \right) \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \psi_n \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \end{aligned}$$

realizando as operações necessárias, obtemos

$$\operatorname{div}(\langle \nabla u, x \rangle \psi_n \nabla u) = \langle \nabla(\langle \nabla u, x \rangle \psi_n), \nabla u \rangle + \langle \nabla u, x \rangle \psi_n \operatorname{div}(\nabla u).$$

Pela regra do produto de derivadas e propriedade de produto interno, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\langle \nabla u, x \rangle \psi_n \nabla u) &= \langle \psi_n \nabla(\langle \nabla u, x \rangle) + \langle \nabla u, x \rangle \nabla \psi_n, \nabla u \rangle + \langle \nabla u, x \rangle \psi_n \Delta u \\
&= \psi_n \langle \nabla(\langle \nabla u, x \rangle), \nabla u \rangle + \langle \nabla u, x \rangle \langle \nabla \psi_n, \nabla u \rangle + \langle \nabla u, x \rangle \psi_n \Delta u.
\end{aligned}$$

Alem disso,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla(\langle \nabla u, x \rangle), \nabla u \rangle &= \left\langle \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_N} x_N \right), \nabla u \right\rangle = \left\langle \nabla \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \right), \nabla u \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \right), \dots, \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \right) \right), \nabla u \right\rangle.
\end{aligned}$$

Desde que

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) x_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_1} x_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

⋮

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) x_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_N} x_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

Fazendo

$$\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) x_i, \dots, \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) x_i \right) = w$$

e

$$\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_1} x_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \dots, \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_N} x_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right) = z,$$

temos,

$$\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \right), \dots, \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \right) \right) = w + z$$

Note que,

$$z = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \nabla u$$

Assim,

$$\langle \nabla(\langle \nabla u, x \rangle), \nabla u \rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) x_i, \dots, \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) x_i \right) + \nabla u, \nabla u \right\rangle.$$

Por propriedade de produto interno, temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla(\langle \nabla u, x \rangle), \nabla u \rangle &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) x_i, \dots, \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) x_i \right), \nabla u \right\rangle + \langle \nabla u, \nabla u \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_1} x_i + \dots + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_N} x_i + |\nabla u|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} x_j + |\nabla u|^2 \end{aligned}$$

Atraves de calculos diretos, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} x_j &= \left\langle \nabla \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \right), x \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right), x \right\rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle \nabla(\langle \nabla u, x \rangle), \nabla u \rangle = \left\langle \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right), x \right\rangle + |\nabla u|^2,$$

de onde deduzimos que

$$\operatorname{div}(\langle \nabla u, x \rangle \psi_n \nabla u) = \psi_n \left\langle \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right), x \right\rangle + \psi_n |\nabla u|^2 + \langle \nabla u, x \rangle \langle \nabla \psi_n, \nabla u \rangle + \langle \nabla u, x \rangle \psi_n \Delta u.$$

O que implica que,

$$\langle \nabla u, x \rangle \psi_n \Delta u = \operatorname{div}(\langle \nabla u, x \rangle \psi_n \nabla u) - \psi_n \left\langle \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right), x \right\rangle - \psi_n |\nabla u|^2 - \langle \nabla u, x \rangle \langle \nabla \psi_n, \nabla u \rangle.$$

Uma vez que,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left(\psi_n \frac{|\nabla u|^2}{2} x \right) &= \operatorname{div} \left(\psi_n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_N} \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) x \right) \\
&= \operatorname{div} \left(\psi_n \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) x \right) \\
&= \operatorname{div} \left(\psi_n \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) x_1, \dots, \psi_n \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) x_N \right) \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\psi_n \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) x_j \right).
\end{aligned}$$

Pela regra do produto de derivadas, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left(\psi_n \frac{|\nabla u|^2}{2} x \right) &= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\psi_n \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) x_j + \left(\sum_{i=1}^N \psi_n \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} x_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\psi_n \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right) x_j + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \psi_n \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} x_j
\end{aligned}$$

isto e,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left(\psi_n \frac{|\nabla u|^2}{2} x \right) &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\psi_n \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right) x_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\psi_n \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right) x_N \\
&+ \left(\sum_{i=1}^N \psi_n \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_N} x_N \right) \\
&= \left\langle \nabla \left(\psi_n \frac{|\nabla u|^2}{2} \right), x \right\rangle + \psi_n \frac{|\nabla u|^2}{2} \operatorname{div}(x).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left(\psi_n \frac{|\nabla u|^2}{2} x \right) &= \left\langle \psi_n \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right) + \frac{|\nabla u|^2}{2} \nabla \psi_n, x \right\rangle + \psi_n \frac{|\nabla u|^2}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \psi_n \left\langle \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right), x \right\rangle + \frac{N}{2} \psi_n |\nabla u|^2 + \frac{|\nabla u|^2}{2} \langle \nabla \psi_n, x \rangle,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\psi_n \left\langle \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right), x \right\rangle = \operatorname{div} \left(\psi_n \frac{|\nabla u|^2}{2} x \right) - \frac{N}{2} \psi_n |\nabla u|^2 - \frac{|\nabla u|^2}{2} \langle \nabla \psi_n, x \rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, x \rangle \psi_n \Delta u &= \operatorname{div}(\langle \nabla u, x \rangle \psi_n \nabla u) - \left(\operatorname{div} \left(\psi_n \frac{|\nabla u|^2}{2} x \right) - \frac{N}{2} \psi_n |\nabla u|^2 - \frac{|\nabla u|^2}{2} \langle \nabla \psi_n, x \rangle \right) \\ &\quad - \psi_n |\nabla u|^2 - \langle \nabla u, x \rangle \langle \nabla \psi_n, \nabla u \rangle \end{aligned}$$

isto e,

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, x \rangle \psi_n \Delta u &= \operatorname{div}(\langle \nabla u, x \rangle \psi_n \nabla u) - \operatorname{div} \left(\psi_n \frac{|\nabla u|^2}{2} x \right) + \frac{N}{2} \psi_n |\nabla u|^2 \\ &\quad + \frac{|\nabla u|^2}{2} \langle \nabla \psi_n, x \rangle - \psi_n |\nabla u|^2 - \langle \nabla u, x \rangle \langle \nabla \psi_n, \nabla u \rangle. \end{aligned}$$

Pela propriedade da soma do divergente, temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, x \rangle \psi_n \Delta u &= \operatorname{div} \left(\psi_n \left(\langle \nabla u, x \rangle \nabla u - \frac{|\nabla u|^2}{2} x \right) \right) + \frac{N-2}{2} \psi_n |\nabla u|^2 \\ &\quad + \frac{|\nabla u|^2}{2} \langle \nabla \psi_n, x \rangle - \langle \nabla u, x \rangle \langle \nabla \psi_n, \nabla u \rangle. \end{aligned}$$

De nindo

$$H(x, u) = \langle \nabla u, x \rangle \nabla u - \frac{|\nabla u|^2}{2} x,$$

temos que,

$$\langle \nabla u, x \rangle \psi_n \Delta u = \operatorname{div}(\psi_n H(x, u)) + \frac{N-2}{2} \psi_n |\nabla u|^2 + \frac{|\nabla u|^2}{2} \langle \nabla \psi_n, x \rangle - \langle \nabla u, x \rangle \langle \nabla \psi_n, \nabla u \rangle \quad (4.4)$$

Denotamos $H^i(x, u)$ a coordenada i de $H(x, u)$ para $1 \leq i \leq N$, pelo Lema A.3, $u \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ e desde que $\operatorname{supp}(\psi_n) \subset B_{2n}(0)$, usando a de nicao de derivadas fracas

concluimos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(\psi_n H(x, u)) dx &= \sum_{i=1}^N \int_{B_{2n}(0)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi_n H^i(x, u)) dx \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{B_{2n}(0)} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} H^i(x, u) + \psi_n \frac{\partial}{\partial x_i} (H^i(x, u)) \right) dx \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{B_{2n}(0)} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} H^i(x, u) - \frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} (H^i(x, u)) \right) dx = 0.
\end{aligned}$$

Desde que, $\psi_n \leq 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = 1$ e da definição do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ temos que,

- $|\psi_n |\nabla u|^2| \leq |\nabla u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\psi_n |\nabla u|^2 \rightarrow |\nabla u|^2$, q.t.p em \mathbb{R}^N ;
- $\left| \frac{|\nabla u|^2}{2} \langle \nabla \psi_n, x \rangle \right| = \frac{1}{2} \langle \nabla \psi_n, x \rangle |\nabla u|^2 \leq C |\nabla u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{|\nabla u|^2}{2} \langle \nabla \psi_n, x \rangle \rightarrow 0$, q.t.p em \mathbb{R}^N ;
- $|\langle \nabla u, x \rangle \langle \nabla \psi_n, \nabla u \rangle| = |\langle \nabla u, \nabla u \rangle \langle \nabla \psi_n, x \rangle| = |\langle \nabla \psi_n, x \rangle |\nabla u|^2| \leq C |\nabla u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\langle \nabla u, x \rangle \langle \nabla \psi_n, \nabla u \rangle \rightarrow 0$, q.t.p em \mathbb{R}^N .

Assim sendo,

$$|\langle \nabla u, x \rangle \psi_n \Delta u| \leq \left(\frac{N-2}{2} |\nabla u|^2 + C_1 |\nabla u|^2 + C_2 |\nabla u|^2 \right) \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\langle \nabla u, x \rangle \psi_n \Delta u \rightarrow \frac{N-2}{2} |\nabla u|^2.$$

Da segue que, integrando (4.4) e passando o limite, obtemos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, [ver Teorema A.6],

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla u, x \rangle \psi_n \Delta u dx = -\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx. \quad (4.5)$$

De forma analoga, deduzimos o limite

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla v, x \rangle \psi_n \Delta v dx = -\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx. \quad (4.6)$$

O limite do lado esquerdo de (4.3) segue das convergências (4.5) e (4.6), isto é,

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (\Delta u \langle \nabla u, x \rangle + \Delta v \langle \nabla v, x \rangle) \psi_n dx = -\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx$$

De na

$$F(x, u, v) = -\frac{1}{2} V_1(x) u^2 + \frac{\mu}{2^*} |u|^{2^*} + \lambda(x) uv,$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\psi_n F(x, u, v) x) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi_n F(x, u, v) x) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\left(\frac{\partial \psi_n F(x, u, v)}{\partial x_i} \right) x_i + \psi_n F(x, u, v) \frac{\partial}{\partial x_i} (x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \psi_n F(x, u, v)}{\partial x_i} \right) x_i + \sum_{i=1}^N \psi_n F(x, u, v) \frac{\partial}{\partial x_i} (x) \\ &= \langle \nabla(\psi_n F(x, u, v)), x \rangle + \psi_n F(x, u, v) \operatorname{div}(x). \end{aligned}$$

Pela regra do produto de derivadas e propriedade de produto interno,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\psi_n F(x, u, v) x) &= \langle \psi_n \nabla F(x, u, v) + F(x, u, v) \nabla \psi_n, x \rangle + N \psi_n F(x, u, v) \\ &= \psi_n \langle \nabla F(x, u, v), x \rangle + F(x, u, v) \langle \nabla \psi_n, x \rangle + N \psi_n F(x, u, v). \end{aligned}$$

Alem disso,

$$\begin{aligned} \nabla F(x, u, v) &= \nabla \left(-\frac{1}{2} V_1(x) u^2 + \frac{\mu}{2^*} |u|^{2^*-2} u^2 + \lambda(x) uv \right) \\ &= \nabla \left(-\frac{1}{2} V_1(x) u^2 \right) + \nabla \left(\frac{\mu}{2^*} |u|^{2^*-2} u^2 \right) + \nabla(\lambda(x) uv). \end{aligned}$$

Pela propriedade do gradiente do produto, temos

$$\begin{aligned}
\nabla F(x, u, v) &= -\frac{1}{2}\nabla V_1(x)u^2 - V_1(x)u\nabla u + \mu|u|^{2^*-2}u\nabla u \\
&+ \lambda(x)v\nabla u + \nabla\lambda(x)uv + \lambda(x)u\nabla v \\
&= -\frac{1}{2}\nabla V_1(x)u^2 + (-V_1(x)u + \mu|u|^{2^*-2}u + \lambda(x)v)\nabla u + \nabla\lambda(x)uv + \lambda(x)u\nabla v \\
&= -\frac{1}{2}\nabla V_1(x)u^2 + f(x, u, v)\nabla u + \nabla\lambda(x)uv + \lambda(x)u\nabla v.
\end{aligned}$$

implicando,

$$\langle \nabla F(x, u, v), x \rangle = -\frac{1}{2}\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + f(x, u, v)\langle \nabla u, x \rangle + \langle \nabla\lambda(x), x \rangle uv + \langle \lambda(x)u\nabla v, x \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\psi_n F(x, u, v)x) &= -\frac{1}{2}\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 \psi_n + f(x, u, v)\langle \nabla u, x \rangle \psi_n + \langle \lambda(x), x \rangle uv \psi_n \\
&+ \langle \lambda(x)u\nabla v, x \rangle \psi_n + F(x, u, v)\langle \nabla \psi_n, x \rangle + N\psi_n F(x, u, v).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f(x, u, v)\langle \nabla u, x \rangle \psi_n &= \operatorname{div}(\psi_n F(x, u, v)x) - F(x, u, v)\langle \nabla \psi_n, x \rangle \\
&+ \left(\frac{1}{2}\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 - NF(x, u, v) - \langle \lambda(x), x \rangle uv - \langle \lambda(x)u\nabla v, x \rangle \right) \psi_n.
\end{aligned}$$

Assim, conclu mos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} f(x, u, v)\langle \nabla u, x \rangle \psi_n dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (\operatorname{div}(\psi_n F(x, u, v)x) - F(x, u, v)\langle \nabla \psi_n, x \rangle) dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 - NF(x, u, v) - \langle \lambda(x), x \rangle uv - \langle \lambda(x)u\nabla v, x \rangle \right) \psi_n dx.
\end{aligned}$$

De forma analoga, denotamos $G(x, u, v) = -\frac{1}{2}V_2(x)v^2 + \frac{1}{2^*}|v|^{2^*} + \lambda(x)uv$, assim,

deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u, v) \langle \nabla v, x \rangle \psi_n dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (\operatorname{div}(\psi_n G(x, u, v)x) - G(x, u, v) \langle \nabla \psi_n, x \rangle) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2 - NG(x, u, v) - \langle \lambda(x), x \rangle uv - \langle \lambda(x)v \nabla u, x \rangle \right) \psi_n dx. \end{aligned}$$

Da ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u, v) \langle \nabla u, x \rangle + g(x, u, v) \langle \nabla v, x \rangle) \psi_n dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (\operatorname{div}(\psi_n (F(x, u, v)x + G(x, u, v)x)) \\ &- (F(x, u, v) + G(x, u, v)) \langle \nabla \psi_n, x \rangle) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} (\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2) \right. \\ &- NF(x, u, v) - NG(x, u, v) \\ &- 2 \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv \\ &- \left. \lambda(x) \langle u \nabla v + v \nabla u, x \rangle \right) \psi_n dx \end{aligned}$$

Denotamos $F^i(x, u, v)$ a coordenada i de $F(x, u, v)$ para $1 \leq i \leq N$. Desde que $u \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ e $\operatorname{supp}(\psi_n) \subset B_{2n}(0)$, usando a definicao de derivadas fracas concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(\psi_n (F(x, u, v)x) dx &= \sum_{i=1}^N \int_{B_{2n}(0)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi_n F^i(x, u, v)x) dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{B_{2n}(0)} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} F^i(x, u, v)x + \psi_n \frac{\partial}{\partial x_i} F^i(x, u, v)x \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{B_{2n}(0)} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} F^i(x, u, v)x - \frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} F^i(x, u, v)x \right) dx = 0. \end{aligned}$$

De forma analoga obtemos,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(\psi_n (G(x, u, v)x) dx = 0.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(\psi_n(F(x, u, v)x + G(x, u, v)x))dx = 0.$$

Desde que, $\psi_n \in 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = 1$, temos

- $|(F(x, u, v) + G(x, u, v))\langle \nabla \psi_n, x \rangle - N(F(x, u, v) + G(x, u, v))\psi_n| = |(F(x, u, v) + G(x, u, v))(\langle \nabla \psi_n, x \rangle - N\psi_n)| \in C(|V_1(x)u^2| + |u|^{2^*} + |\lambda(x)uv| + |V_2(x)v^2| + |v|^{2^*} + |\lambda(x)uv|) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $(F(x, u, v) + G(x, u, v))\langle \nabla \psi_n, x \rangle - N(F(x, u, v) + G(x, u, v))\psi_n \rightarrow -NF(x, u, v) - G(x, u, v)$, q.t.p em \mathbb{R}^N ;
- $\left| \frac{1}{2}(\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2)\psi_n \right| \in \frac{1}{2}|\langle \nabla V_1(x), x \rangle||u|^2 + \frac{1}{2}|\langle \nabla V_2(x), x \rangle||v|^2 \in C(|u|^2 + |v|^2) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{1}{2}(\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2)\psi_n \rightarrow \frac{1}{2}(\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2)$, q.t.p em \mathbb{R}^N ;
- $|2\langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv\psi_n| \in 2|\langle \nabla \lambda(x), x \rangle||u||v| \in C|u||v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $2\langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv\psi_n \rightarrow 2\langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv$, q.t.p em \mathbb{R}^N ;
- $|\lambda(x)(\langle u\nabla v + v\nabla u, x \rangle)\psi_n| = |\lambda(x)(\langle u\nabla v, x \rangle + \langle v\nabla u, x \rangle)\psi_n| \in |\lambda(x)||\langle u\nabla v, x \rangle| + |\lambda(x)||\langle v\nabla u, x \rangle| \in C|\lambda(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N)$

e

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)\langle u\nabla v + v\nabla u, x \rangle\psi_n dx &= - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(\langle u\nabla v, x \rangle + \langle v\nabla u, x \rangle)\psi_n dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) \left(\sum_{i=1}^N u \frac{\partial v}{\partial x_i} x_i + \sum_{i=1}^N v \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \right) \psi_n dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) \sum_{i=1}^N \left(u \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) x_i \psi_n dx. \end{aligned}$$

Pela regra do produto de derivadas, temos

$$- \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) \langle u \nabla v + v \nabla u, x \rangle \psi_n dx = - \int_{B_{2n}(0)} \lambda(x) \sum_{i=1}^N \frac{\partial(uv)}{\partial x_i} x_i \psi_n dx.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} - \int_{B_{2n}(0)} \lambda(x) \sum_{i=1}^N \frac{\partial(uv)}{\partial x_i} x_i \psi_n dx &= - \sum_{i=1}^N \int_{B_{2n}(0)} \lambda(x) \psi_n x_i \frac{\partial(uv)}{\partial x_i} dx = \sum_{i=1}^N \int_{B_{2n}(0)} \frac{\partial(\lambda \psi_n x_i)}{\partial x_i} uv dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{B_{2n}(0)} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} x_i \lambda(x) + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} x_i \psi_n + N \psi_n \lambda(x) \right) uv dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) \langle u \nabla v + v \nabla u, x \rangle \psi_n &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \int_{B_{2n}(0)} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} x_i \lambda(x) \right) uv dx \\ &- \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \int_{B_{2n}(0)} \left(\frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_i} x_i \psi_n \right) uv dx \\ &- \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \int_{B_{2n}(0)} (N \psi_n \lambda(x)) uv dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv dx - N \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) uv dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (f(x, u, v) + g(x, u, v)) \langle \nabla u, x \rangle \psi_n &\leq (C_1 (|V_1(x)u^2| + |u|^{2^*} + 2|\lambda(x)uv| + |V_2(x)v^2| + |v|^{2^*}) \\ &+ C_2(|u|^2 + |v|^2) + C_3|u||v| + C_4|\lambda(x)|) \in L^1(\mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f(x, u, v) + g(x, u, v)) \langle \nabla u, x \rangle \psi_n &\rightarrow -NF(x, u, v) - NG(x, u, v) \\ &+ \frac{1}{2} (\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2) \\ &- \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv + N\lambda(x)uv. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u, v) \langle \nabla u, x \rangle + g(x, u, v) \langle \nabla v, x \rangle) \psi_n dx &= -N \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u, v) dx \\ &- N \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u, v) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2) dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv dx + N \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) uv dx. \end{aligned}$$

Substituindo $F(x, u, v)$ e $G(x, u, v)$ na equação acima, segue de (4.3) que

$$\begin{aligned} -\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx &= -N \int_{\mathbb{R}^N} \left(-\frac{1}{2} V_1(x) u^2 + \frac{\mu}{2^*} |u|^{2^*} + \lambda(x) uv \right) dx \\ &- N \int_{\mathbb{R}^N} \left(-\frac{1}{2} V_2(x) v^2 + \frac{1}{2^*} |v|^{2^*} + \lambda(x) uv \right) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2) dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv dx + N \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) uv dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx &= -N \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\mu}{2^*} |u|^{2^*} + \frac{1}{2^*} |v|^{2^*} + \lambda(x) uv \right) dx \\ &+ \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x) u^2 + V_2(x) v^2) dx - N \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) uv dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2) dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv dx + N \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) uv dx. \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx &= \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\mu}{2^*} |u|^{2^*} + \frac{1}{2^*} |v|^{2^*} + \lambda(x)uv \right) dx \\
&+ \frac{2}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv dx - \frac{2N}{2(N-2)} \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2) dx \\
&- \frac{1}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} (\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2) dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (\mu |u|^{2^*} + |v|^{2^*} + 2^* \lambda(x)uv) dx \\
&+ \frac{2}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv dx - \frac{2^*}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2) dx \\
&- \frac{1}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} (\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2) dx.
\end{aligned}$$

Provando assim a identidade. □

Demonstração do Teorema 4.1 Seja $(u, v) \in E$ uma solução clássica positiva de (S_μ) , pela definição de solução fraca, temos

$$((u, v), (u, v)) = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu |u|^{p-2}uu + |v|^{q-2}vv + \lambda(x)(uv + vu)) dx.$$

O que implica

$$\|(u, v)\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu |u|^{2^*-2}u^2 + |v|^{2^*-2}v^2 + 2\lambda(x)uv) dx.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_1(x)u^2 + |\nabla v|^2 + V_2(x)v^2) dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu |u|^{2^*} + |v|^{2^*} + 2\lambda(x)uv) dx,$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu|u|^{2^*} + |v|^{2^*}) dx - \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - 2\lambda(x)uv) dx \quad (4.7)$$

Combinando (4.7) com a identidade de Pohozaev obtida no Lema 4.1, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (\mu|u|^{2^*} + |v|^{2^*}) dx &- \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - 2\lambda(x)uv) dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu|u|^{2^*} + |v|^{2^*}) dx \\ &+ 2\frac{2^*}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uv dx - \frac{2^*}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2) dx \\ &+ \frac{2}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv dx \\ &- \frac{1}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} (\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2) dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - 2\lambda(x)uv) dx &= -\frac{2^*}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - 2\lambda(x)uv) dx \\ &+ \frac{2}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv dx \\ &- \frac{1}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} (\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2) dx. \end{aligned}$$

O que implica

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(\frac{2}{N-2}\right) \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - 2\lambda(x)uv) dx + \frac{2}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv dx \\ &- \frac{1}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} (\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2) dx. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Multiplicando (4.8) pelo fator $\frac{N-2}{2}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - 2\lambda(x)uv) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv dx \\ &- \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2) dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - 2\lambda(x)uv)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv dx \\ &- \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2). \end{aligned}$$

De (V₇) e (V₈), segue-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2 dx \leq 0$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - 2\lambda(x)uv)dx \leq 0. \quad (4.9)$$

Por outro lado, temos

$$0 \leq \left(\sqrt{V_1(x)}|u| - \sqrt{V_2(x)}|v| \right)^2 = V_1(x)u^2 - 2\sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v| + V_2(x)v^2.$$

Agora, desde que,

$$|\lambda(x)||u||v| > \lambda(x)uv,$$

temos

$$-2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uv dx > -2 \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(x)||u||v| dx.$$

Usando (V₃) otemos

$$\begin{aligned} -2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uv dx &> -2\delta \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v| dx \\ &> -\delta \left(\int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x)v^2 dx \right). \end{aligned}$$

Como $\delta \in (0, 1)$, entao

$$-\delta \left(\int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x)v^2 dx \right) > - \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2) dx.$$

Assim,

$$-2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uv dx > - \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2) dx,$$

implicando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - 2\lambda(x)uv) dx > 0. \quad (4.10)$$

Desta forma, obtemos de (4.9) e (4.10)

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - 2\lambda(x)uv) dx = 0.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sqrt{V_1(x)}u - \sqrt{V_2(x)}v \right)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(V_1(x)u^2 - 2\sqrt{V_1(x)V_2(x)}uv + V_2(x)v^2 \right) dx. \end{aligned}$$

De (V₃'),

$$2\lambda(x)uv \leq 2\delta\sqrt{V_1(x)V_2(x)}uv,$$

o que implica

$$-2\delta\sqrt{V_1(x)V_2(x)}uv \leq -2\lambda(x)uv.$$

Assim,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - \frac{2}{\delta}\lambda(x)uv \right) dx < \int_{\mathbb{R}^N} \left(V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - 2\lambda(x)uv \right) dx = 0.$$

o que não é possível, pois teríamos $0 < 0$, logo, o sistema (S_μ) não tem solução clássica positiva para todo $\mu > 0$. □

Apêndice A

Resultados Utilizados

Aqui, exibiremos alguns dos resultados utilizados no decorrer deste trabalho, bem como algumas definições importantes que foram necessárias para a demonstração de parte dos mesmos.

Definição A.1. *Um espaço de Hilbert e um espaço vetorial H equipado com um produto interno tal que H é completo para a norma $\|\cdot\|$.*

Definição A.2. *Representa-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das funções numéricas u definidas em Ω , mensuráveis cuja potência p , $|u|^p$, é integrável em Ω , equipado com a norma*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dx.$$

Por $L^\infty(\Omega)$ o espaço de Banach das funções numéricas u , mensuráveis e existe uma constante C tal que $|u(x)| \leq C$ q.t.p em Ω com

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\{C; |u(x)| \leq C \text{ q.t.p em } \Omega\}.$$

Definição A.3. Denota-se por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f \in L^p(K)$ para todo K compacto de Ω .

Definição A.4. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço de Sobolev, que é o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que, $\forall |\alpha| \leq m$ $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições, isto é,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \forall |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ define-se a norma de u por

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

O caso particular $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ é representado por $H^m(\Omega)$, e é denominado espaço de Sobolev de ordem m .

Assim, o espaço

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); Du \in L^2(\Omega)\},$$

com

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e um espaço de Hilbert.

Teorema A.1. (Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e $\int_{\Omega} |fg| dx \leq \int_{\Omega} |f|^p dx \int_{\Omega} |g|^q dx$.

Demonstração. Ver [7] pág. 57. □

Teorema A.2. (Teorema de Imersão cont nua) Sejam Ω um subconjunto limitado do \mathbb{R}^N , ($N > 2$), Ω de classe C^m e $1 \leq p < \infty$, então

$$a) W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^* \text{ se } mp < N$$

$$b) W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty \text{ e } mp = N$$

$$c) W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}) \text{ se } mp > N$$

No caso c), k é um inteiro verificando $k < m - \frac{N}{p} \leq k + 1$ e λ um real satisfazendo $0 < \lambda \leq m - k - \frac{N}{p} = \lambda_0$ se $\lambda_0 < 1$ e $0 < \lambda < 1$ se $\lambda_0 = 1$.

Demonstração. Ver [22] pág. 76. □

Teorema A.3. (Teorema de Imersão compacta) Seja Ω aberto limitado do \mathbb{R}^N , Ω de classe C^m , e $1 \leq p < \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:

$$a) W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \frac{Np}{N-mp} \text{ se } mp < N$$

$$b) W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty \text{ se } mp = N$$

$$c) W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega}), \quad k < m - \frac{N}{p} \leq k + 1 \text{ se } mp > N \text{ onde } k \text{ é um inteiro não negativo.}$$

Demonstração. Ver [22] pág. 84. □

Teorema A.4. (Teorema dos Multiplicadores de Lagrange) Sejam X um espaço de Banach, $F, J \in C^1(X, \mathbb{R})$ e

$$M = \{x \in X : J(x) = 0\} = J^{-1}(0) \text{ com } J'(u) \neq 0, \quad \forall u \in M.$$

Se F é limitado sobre M e existe $u \in M$ tal que

$$F(u_0) = \inf_{u \in M} F(u),$$

entao existe $\eta \in \mathbb{R}$ (multiplicador de Lagrange) tal que

$$F'(u_0) = \eta J'(u_0).$$

Demonstracao. Ver [17] pág.55. □

Lema A.1. (Lions) Seja $r > 0$ e $2 < q < 2^*$. Se $(u_n)_n \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ e uma sequência limitada de modo que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(y)} |u_n|^q dx = 0,$$

entao $u_n \rightarrow 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 < p < 2^*$

Demonstracao. Ver [26] pág. 16. □

Lema A.2. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ se tenha $x < y$. Entao $\sup A < \inf B$. A m de ser $\sup A = \inf B$ e necessario e su ciente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existam $x \in A$ e $y \in B$ com $y - x < \varepsilon$

Demonstracao. Ver [20] pág.117. □

Teorema A.5. Seja $f \in L^p(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e de dom nio limitado, $1 < p < \infty$ e seja w o potencial newtoniano de f . Entao $w \in W^{2,p}(\Omega)$, $\Delta w = f$. q.t.p em Ω e

$$\|D^2 w\|_p \leq c \|f\|_p,$$

onde c depende apenas de N e p . Alem disso, quando $p = 2$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |D^2 w|^2 = \int_{\Omega} f^2 dx.$$

Demonstracao. Ver [15] pág. 230. □

Definição A.5. Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^N . Suponha que $u \in C^1(\Omega)$ e uma função real continuamente diferenciável. Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e uma função suave com suporte compacto em Ω , segue da fórmula de integração por partes

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\partial\Omega} uv\eta_i dx - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

que

$$\int_{\Omega} u(\partial_i \varphi) dx = - \int_{\Omega} (\partial_i u) \varphi dx$$

para $i = 1, \dots, N$.

Definição A.6. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que uma função $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ e a derivada parcial fraca de u em relação a x_i , se

$$\int_{\Omega} u(\partial_i \varphi) dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Neste caso, denotaremos

$$v_i = \partial_i u.$$

Lema A.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e suponha que $V \in L^\infty(\Omega)$ e que $u \in H^1(\Omega)$ e uma solução fraca do problema

$$-\Delta u + V(x)u = f \text{ em } \Omega,$$

onde $f \in L^2(\Omega)$. Então $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.

Para uma versão mais geral e sua demonstração, veja [14] Teorema 1 na seção 6.3.1

Teorema A.6. (Teorema da convergência dominada de Lebesgue) Seja (f_n) uma sequência de funções em L^1 que satisfaça

- (a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p em Ω ,

- (b) Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω .

Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [7] pág.44. □

Teorema A.7. (Valor Medio) Seja $f : [a, a + h] \rightarrow \mathbb{R}$ cont nua, derivavel em $(a, a + h)$. Existe um numero θ , $0 < \theta < 1$ tal que $f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta h)h$.

Demonstração. Ver [20] pág. 96. □

Teorema A.8. (Vaimberg) Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$ e seja f tal que $|f_n - f|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$. Então existe uma subsequência f_{n_k} e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que

(a) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$, quase sempre em Ω ;

(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, quase sempre em Ω .

Demonstração. Ver [8] pág. 94. □

Teorema A.9. (Princípio do Máximo Forte) Seja L um operador satisfazendo as seguintes condições.

(i) $a^{i,j}(x)\xi_i\xi_j > \lambda|\xi|^2$, $\forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^N$;

(ii) Para algumas constantes $\Lambda, \nu > 0$, temos para todo $x \in \Omega$,

$$\sum |a^{i,j}(x)|^2 \leq \Lambda^2, \lambda^{-2} \sum (|b^i(x)|^2 + |c^i(x)|^2) + \lambda^{-1}|d(x)| \leq \nu^2;$$

(iii) $\int_{\Omega} (dv - b^i D_i v) dx \leq 0$, $\forall v > 0, v \in C_0^1(\Omega)$.

e seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfazendo $Lu > 0$ em Ω . Entao, se para alguma bola $B \subset\subset \Omega$, temos

$$\sup_B u = \sup_{\Omega} u > 0$$

a funcao u deve ser constante em Ω e a igualdade e valida em (iii) quando $u = 0$.

Demonstracao. Ver [15] pág. 198. □

O próximo resultado trata-se de um Teorema provado por Ekeland em 1972. A demonstração deste Teorema e de suas consequências podem ser encontradas em [13].

Teorema A.10. (*Princípio Variacional de Ekeland*) *Seja X um espaço metrico completo e $\Phi : X \rightarrow (-\infty, +\infty)$ um funcional semicontínuo inferiormente. Suponha que Φ seja limitado inferiormente e sejam $\varepsilon, \lambda > 0$ e $u \in X$ dados tais que*

$$\Phi(u) \leq \inf_X \Phi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entao existe $v_\varepsilon \in X$ tal que

(a) $\Phi(v_\varepsilon) \leq \Phi(u)$;

(b) $d(u, v_\varepsilon) \leq \frac{1}{\lambda}$;

(c) Para cada $w \neq v_\varepsilon \in X$, $\Phi(v_\varepsilon) < \Phi(w) + \varepsilon \lambda d(v_\varepsilon, w)$.

Uma consequência importante deste Teorema é o seguinte:

Corolário A.1. *Sejam E um espaço de Banach e $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente que seja limitado inferiormente. Suponhamos que Φ seja diferenciavel no sentido de Frechet em todo $u \in E$. Entao dado $\delta > 0$, existe $u_\delta \in E$ tal que*

$$\Phi(u_\delta) \leq \inf_{u \in E} \Phi(u) + \frac{\delta}{2} \text{ e } \|\Phi'(u_\delta)\|_{E'} \leq \delta.$$

Para enunciar a segunda consequência do princípio variacional de Ekeland, vamos precisar da seguinte definição:

Definição A.7. (*Sequência Palais-Smale e condição Palais-Smale*) Seja E um espaço de Banach e $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 . Se existirem $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n) \subset E$ tais que

$$\Phi(u_n) \rightarrow c \text{ e } \Phi'(u_n) \rightarrow 0.$$

Dizemos que (u_n) é uma sequência Palais-Smale no n vel c para Φ , ou de forma resumida, (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para Φ . Se tal sequência possui uma subsequência convergente, diz-se que Φ satisfaz a condição Palais-Smale no n vel c ou que Φ satisfaz a condição $(PS)_c$.

Corolário A.2. Sejam E um espaço de Banach e $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 que seja limitado inferiormente. Então, existe (u_n) uma sequência Palais-Smale no n vel c para Φ , onde $c = \inf_{u \in E} \Phi(u)$.

Corolário A.3. Sejam E um espaço de Banach e $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 que seja limitado inferiormente. Se Φ satisfaz a condição $(PS)_c$ com $c = \inf_{u \in E} \Phi(u)$, então c é atingido em um ponto $u_0 \in E$ e u_0 é um ponto crítico de Φ .

Apêndice B

Funcionais Diferenciáveis

Neste apêndice nosso objetivo é mostrar que o funcional energia I associado ao sistema (S_μ) é de classe $C^2(E, \mathbb{R})$, para isso precisamos enunciar definições e apresentar algumas propriedades sobre funcionais diferenciáveis.

Definição B.1. *Considere o funcional $I : X \rightarrow \mathbb{R}$, onde X é um espaço normado. O funcional I é Frechet Diferenciável em $u \in X$, se existir $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ funcional linear contínuo verificando*

$$\lim_{\|\varphi\| \rightarrow 0} \frac{|I(u + \varphi) - I(u) - L(\varphi)|}{\|\varphi\|} = 0.$$

Definição B.2. *A derivada de Gateaux de I em u é dada por*

$$I'(u)\varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + t\varphi) - I(u)}{t}.$$

Definição B.3. *Dizemos que o funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ se a derivada a Frechet I' é contínua sobre X .*

Observe que todo funcional Frechét-Diferenciável é também Gateaux-Diferenciável, porém, a recíproca não é verdadeira, no entanto temos a seguinte proposição:

Proposição B.1. *Seja X um espaço de Banach e I um funcional de nido em X , se I tem derivada de Gateaux cont nua em X , entao $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Ver [18] □

Agora vamos mostrar que o funcional energia I é de classe C^2 através do seguinte Lema:

Lema B.1. *O funcional energia I de nido por*

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \left(\|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx \right) - \frac{\mu}{p} \|u\|_p^p - \frac{1}{q} \|v\|_q^q$$

e de classe $C^2(E, \mathbb{R})$.

Demonstração: *Consideremos os funcionais $I_1, I_2, I_3, I_4 : E \rightarrow \mathbb{R}$, de nidos por*

$$I_1(u, v) = \frac{1}{2} \|(u, v)\|_E^2; I_2(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx; I_3(u, v) = \frac{\mu}{p} \|u\|_p^p \quad e \quad I_4(u, v) = \frac{1}{q} \|v\|_q^q.$$

Primeiramente vamos mostrar que I esta bem de nido.

Note que

$$I_1(u, v) = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x) u^2 dx \right) + \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x) v^2 dx \right).$$

Pela de nicao do espaço E_i , temos que $I_1(u, v) < +\infty$. Logo, I_1 esta bem de nido

$$I_2(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(x)| |u| |v| dx.$$

Por (V_3) temos

$$I_2(u, v) \leq \delta \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{V_1(x)} |u| \sqrt{V_2(x)} |v| dx.$$

Note ainda que,

$$0 \leq \left(\sqrt{V_1(x)} |u| - \sqrt{V_2(x)} |v| \right)^2 = V_1(x) u^2 - 2 \sqrt{V_1(x)} |u| \sqrt{V_2(x)} |v| + V_2(x) v^2,$$

o que implica que

$$\delta \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v|dx \leq \frac{\delta}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2) dx < +\infty.$$

Logo, I_2 esta bem de nido.

$$I_3(u, v) = \frac{\mu}{p} \|u\|_p^p = \frac{\mu}{p} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p = \frac{\mu}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx < +\infty.$$

Assim, I_3 esta bem de nido.

$$I_4(u, v) = \frac{1}{q} \|v\|_q^q = \frac{1}{q} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right]^q = \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx < +\infty.$$

Portanto, I_4 esta bem de nido e consequentemente I esta bem de nido.

Afirmação B.1. $I_1 \in C^1(E, \mathbb{R})$.

Vamos calcular a derivada de Gateaux

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1(u, v)}{\partial(\phi, \psi)} &= DI_1(u, v) \cdot (\phi, \psi) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_1((u, v) + t(\phi, \psi)) - I_1(u, v)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_1(u + t\phi, v + t\psi) - I_1(u, v)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \|(u + t\phi, v + t\psi)\|_E^2 - \frac{1}{2} \|(u, v)\|_E^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\|u + t\phi\|_{E_1}^2 + \|v + t\psi\|_{E_2}^2 - \|u\|_{E_1}^2 - \|v\|_{E_2}^2}{t} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \phi + V_1(x)u\phi + \nabla v \nabla \psi + V_2(x)v\psi) dx = ((u, v), (\phi, \psi)) \end{aligned}$$

Vamos veri car agora se I_1 e Frechet Diferenciavel

$$I_1'(u, v)(\phi, \psi) = \lim_{\|(\phi, \psi)\| \rightarrow 0} \frac{|I_1((u, v) + (\phi, \psi)) - I_1(u, v) - ((u, v)(\phi, \psi))|}{\|(\phi, \psi)\|}.$$

Vamos calcular $I_1((u, v) + (\phi, \psi))$. Temos da definição

$$\begin{aligned} I_1((u, v) + (\phi, \psi)) &= I_1(u + \phi, v + \psi) = \frac{1}{2} \|u + \phi, v + \psi\|_E^2 \\ &= \frac{1}{2} \|u + \phi\|_{E_1}^2 + \frac{1}{2} \|v + \psi\|_{E_2}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|(\phi, \psi)\|_E^2 + \frac{1}{2} \|(u, v)\|_E^2 + ((u, v), (\phi, \psi)) \\ &= \frac{1}{2} \|(\phi, \psi)\|_E^2 + I_1(u, v) + ((u, v), (\phi, \psi)). \end{aligned}$$

Observe agora que

$$\frac{|I_1((u, v) + (\phi, \psi)) - I_1(u, v) - ((u, v), (\phi, \psi))|}{\|(\phi, \psi)\|} = \frac{1}{2} \frac{\|(\phi, \psi)\|^2}{\|(\phi, \psi)\|} = \frac{1}{2} \|(\phi, \psi)\| \rightarrow 0.$$

Portanto I_1 é diferenciável com

$$I_1'(u, v)(\phi, \psi) = ((u, v), (\phi, \psi)).$$

Vamos mostrar que I_1' é contínuo.

Seja (u_n, v_n) uma sequência em E , tal que $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ em E . Devemos mostrar que

$$I_1'(u_n, v_n) \rightarrow I_1'(u, v)$$

Note que para cada $(\phi, \psi) \in E$, com $\|(\phi, \psi)\| \leq 1$ temos

$$|(I_1'(u_n, v_n) - I_1'(u, v))(\phi, \psi)| = |((u_n, v_n), (\phi, \psi)) - ((u, v), (\phi, \psi))| = |((u_n, v_n) - (u, v)), (\phi, \psi)|.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz e das imersões contínuas, existe $C > 0$ tal que

$$|(I_1'(u_n, v_n) - I_1'(u, v))(\phi, \psi)| \leq C \|(u_n, v_n) - (u, v)\|_E \|(\phi, \psi)\|_E \leq C \|(u_n, v_n) - (u, v)\|_E.$$

Deste modo, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\|I'_1(u_n, v_n) - I'_1(u, v)\|_E &= \sup_{\|(\phi, \psi)\|_{\mathcal{G}^1} \leq 1} |(I'_1(u_n, v_n) - I'_1(u, v))(\phi, \psi)| \\
&\leq C \sup_{\|(\phi, \psi)\|_{\mathcal{G}^1} \leq 1} \|(u_n, v_n)\|_E \|(\phi, \psi)\|_E \\
&= C\|(u_n, v_n) - (u, v)\|_E \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Mostrando assim que quando $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ em E temos $I'_1(u_n, v_n) \rightarrow I'_1(u, v)$ em E . Portanto, o operador I'_1 é contínuo, e deste modo $I_1 \in C^1(E, \mathbb{R})$.

Afirmção B.2. $I_2 \in C^1(E, \mathbb{R})$.

Vamos calcular a derivada de Gateaux

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_2(u, v)}{\partial(\phi, \psi)} &= DI_2(u, v) \cdot (\phi, \psi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_2((u, v) + t(\phi, \psi)) - I_2(u, v)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_2(u + t\phi, v + t\psi) - I_2(u, v)}{t},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_2(u, v)}{\partial(\phi, \psi)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u + t\phi)(v + t\psi) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uv dx}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\lambda(x)uv + \lambda(x)t\psi + \lambda(x)t\phi + \lambda(x)t^2\phi\psi - \lambda(x)uv) dx}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\lambda(x)u\psi + \lambda(x)v\phi + t\lambda(x)\phi\psi) dx}{t} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda(x)u\psi + \lambda(x)v\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u\psi + v\phi) dx.
\end{aligned}$$

Assim, $\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u\psi + v\phi) dx$ é candidato a ser derivada de I_2 no sentido de Frechet, basta verificar se,

$$\lim_{\|(\phi, \psi)\| \rightarrow 0} \frac{|I_2((u, v) + (\phi, \psi)) - I_2(u, v) - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u\psi + v\phi) dx|}{\|(\phi, \psi)\|} = 0.$$

Vamos calcular $I_2((u, v) + (\phi, \psi))$. Temos da definição

$$\begin{aligned} I_2((u, v) + (\phi, \psi)) &= I_2(u + \phi, v + \psi) = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u + \phi)(v + \psi) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda(x)uv + \lambda(x)u\psi + \lambda(x)v\phi + \lambda(x)\phi\psi) dx \\ &= I_2(u, v) + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda(x)u\psi + \lambda(x)v\phi + \lambda(x)\phi\psi) dx. \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\frac{|I_2((u, v) + (\phi, \psi)) - I_2(u, v) - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u\psi + v\phi) dx|}{\|(\phi, \psi)\|} = \frac{|\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)\phi\psi|}{\|(\phi, \psi)\|}.$$

Assim,

$$\frac{|I_2((u, v) + (\phi, \psi)) - I_2(u, v) - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u\psi + v\phi) dx|}{\|(\phi, \psi)\|} \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(x)| |\phi| |\psi| dx}{\|(\phi, \psi)\|}.$$

De (V_3) temos

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(x)| |\phi| |\psi| dx}{\|(\phi, \psi)\|} &\leq \frac{\frac{\delta}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)\phi^2 + V_2(x)\psi^2) dx}{\|(\phi, \psi)\|} \\ &\leq \frac{\frac{\delta}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\phi|^2 + V_1(x)\phi^2 + |\nabla\psi|^2 + V_2(x)\psi^2) dx}{\|(\phi, \psi)\|} \\ &= \frac{\delta \|(\phi, \psi)\|_E^2}{2 \|(\phi, \psi)\|} = \frac{\delta}{2} \|(\phi, \psi)\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto I_2 é diferenciável com

$$I_2'(u, v)(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u\psi + v\phi) dx.$$

Vamos mostrar que I_2' é contínuo.

Seja (u_n, v_n) uma sequência em E , tal que $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ em E . Devemos mostrar que

$$I'_2(u_n, v_n) \rightarrow I'_2(u, v)$$

Note que para cada $(\phi, \psi) \in E$, com $\|(\phi, \psi)\| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |(I'_2(u_n, v_n) - I'_2(u, v))(\phi, \psi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u_n\psi + v_n\phi)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u\psi + v\phi)dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u_n - u)\psi dx + \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(v_n - v)\phi dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(x)| |(u_n - u)| |\psi| dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(x)| |(v_n - v)| |\phi| dx. \end{aligned}$$

Novamente por (V_3) , temos

$$|(I'_2(u_n, v_n) - I'_2(u, v))(\phi, \psi)| \leq \frac{\delta}{2} \|(u_n - u, v_n - v)\|_E^2 + \frac{\delta}{2} \|(\phi, \psi)\|_E^2,$$

para algum $\delta \in (0, 1)$

Note que, indexando $\delta_n = \frac{1}{n+1}$, temos $\frac{\delta_n}{2} \|(\phi, \psi)\|_E^2 = o_n(1)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Assim,

$$\frac{\delta_n}{2} \|(u_n - u, v_n - v)\|_E^2 + \frac{\delta_n}{2} \|(\phi, \psi)\|_E^2 \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. Logo,

$$I'_2(u_n, v_n) \rightarrow I'_2(u, v).$$

Portanto, o operador I'_2 é contínuo, e deste modo

$$I_2 \in C^1(E, \mathbb{R}).$$

Afirmção B.3. $I_3 \in C^1(E, \mathbb{R})$.

Vamos calcular a derivada de Gateaux DI_3 . Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e para cada $u, \phi \in E_1$, consideremos a função $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(s) = |u + st\phi|^p$.

Observe que $h'(s) = p|u + st\phi|^{p-2}(u + st\phi)t\phi$, $h(1) = |u + t\phi|^p$ e $h(0) = |u|^p$. Desde que h

e cont nua em $[0, 1]$ e diferenciavel em $(0, 1)$, segue do Teorema do Valor Medio que existe $c \in (0, 1)$, tal que $h(1) - h(0) = h'(c)$, o que implica que

$$\frac{|u + t\phi|^p - |u|^p}{t} = p|u + ct\phi|^{p-2}(u + ct\phi)\phi. \quad (2.1)$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|u + t\phi|^p - |u|^p}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} p|u + ct\phi|^{p-2}(u + ct\phi)\phi = p|u|^{p-2}u\phi.$$

Agora, usando a desigualdade triângular em 2.1 temos

$$\left| \frac{|u + t\phi|^p - |u|^p}{t} \right| \leq p(|u| + |ct\phi|)^{p-2} |u + ct\phi| |\phi|.$$

De onde segue que

$$\left| \frac{|u + t\phi|^p - |u|^p}{t} \right| \leq p(|u| + |c||t||\phi|)^{p-1} |\phi|.$$

Agora, usando o fato de que $|c| < 1$ e $|t| < 1$, obtemos

$$\left| \frac{|u + t\phi|^p - |u|^p}{t} \right| \leq p(|u| + |\phi|)^{p-1} |\phi|.$$

Vamos mostrar que $(|u| + |\phi|)^{p-1} |\phi| \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Temos $u, \phi \in L^p(\mathbb{R}^N)$, da $u + \phi \in L^p(\mathbb{R}^N)$, o que implica que, $(|u| + |\phi|)^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$.

Agora, usando a desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{p}{p-1}$ e p , temos

$$(|u| + |\phi|)^{p-1} |\phi| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Assim,

$$\left| \frac{|u + t\phi|^p - |u|^p}{t} \right| \leq p(|u| + |\phi|)^{p-1} |\phi| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} p|u|^{p-2}u\phi dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u + t\phi|^p - |u|^p}{t} dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_3((u, v) + t(\phi, \psi)) - I_3(u, v)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_3(u + t\phi, v + t\psi) - I_3(u, v)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mu}{p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u + t\phi|^p - |u|^p}{t} \right) dx \\ &= \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \phi dx. \end{aligned}$$

Assim, $\int_{\mathbb{R}^N} \mu |u|^{p-2} u \phi dx$ é candidato a ser derivada no sentido de Frechet. Portanto, é suficiente mostrar que I_3' seja contínuo. Seja (u_n, v_n) uma sequência em E , tal que $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ em E .

Assim,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Vamos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u dx.$$

De fato, pelo Teorema de Vaimberg, passando a uma subsequência, temos que $u_n(x) \rightarrow u(x)$ quase sempre em \mathbb{R}^N e que existe $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$|u_n(x)| \leq h(x) \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

Portanto,

$$|u_n(x)|^{p-2} u_n(x) \rightarrow |u(x)|^{p-2} u(x) \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N,$$

e

$$||u_n(x)|^{p-2} u_n(x)| \leq h^{p-1}(x) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u dx.$$

Agora note que,

$$\begin{aligned}
|(I'_3(u_n, v_n) - I'_3(u, v))(\phi, \psi)| &= |I'_3(u_n, v_n)(\phi, \psi) - I'_3(u, v)(\phi, \psi)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \mu |u_n|^{p-2} u_n \phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} \mu |u|^{p-2} u \phi dx \right| \\
&\leq \mu \int_{\mathbb{R}^N} ||u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u| |\phi| dx.
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder para os expoentes $\frac{p}{p-2}$ e p , temos

$$|(I'_3(u_n, v_n) - I'_3(u, v))(\phi, \psi)| \leq \mu ||u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u|_{\frac{p}{p-1}} |\phi|_p.$$

Para $|\phi|_p \leq 1$, temos

$$|(I'_3(u_n, v_n) - I'_3(u, v))(\phi, \psi)| \leq \mu ||u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u|_{\frac{p}{p-1}}.$$

Portanto,

$$|I'_3(u_n, v_n) - I'_3(u, v)|_{E'} \leq \mu ||u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u|_{\frac{p}{p-1}}.$$

Passando o limite na expressão acima, obtemos

$$|I'_3(u_n, v_n) - I'_3(u, v)|_{E'} \rightarrow 0.$$

Consequentemente

$$I_3 \in C^1(E, \mathbb{R}).$$

Afirmção B.4. $I_4 \in C^1(E, \mathbb{R})$.

De forma analoga ao que foi feito para I_3 , para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e para cada $v, \psi \in E_2$, mostra-se que

$$I_4 \in C^1(E, \mathbf{R}) \text{ com } I_4'(u, v)(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q-2} v \psi dx.$$

Das a rmacões B.1 - B.4, segue que

$$I \in C^1(E, \mathbf{R})$$

com

$$\langle I'(u, v), (\phi, \psi) \rangle = ((u, v), (\phi, \psi)) - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu |u|^{p-2} u \phi + |v|^{q-2} v \psi + \lambda(x)(u\psi + v\phi)) dx,$$

onde $(\phi, \psi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Agora, vamos definir $J : E \rightarrow \mathbf{R}$ por

$$J(u, v) = \langle I'(u, v), (u, v) \rangle = \|(u, v)\|_E^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx - \mu \|u\|_p^p - \|v\|_q^q.$$

Para mostrar que $I \in C^2(E, \mathbf{R})$ basta mostrar que $J \in C^1(E, \mathbf{R})$. Para tal, consideremos os funcionais $J_1, J_2, J_3, J_4 : E \rightarrow \mathbf{R}$, definidos por

$$J_1(u, v) = \|(u, v)\|_E^2; J_2(u, v) = 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u v dx; J_3(u, v) = \mu \|u\|_p^p \text{ e } J_4(u, v) = \|v\|_q^q.$$

Agora basta proceder de forma análoga ao que foi feito para o funcional I para concluir que $J \in C^1(E, \mathbf{R})$ com

$$\langle J'(u, v), (\phi, \psi) \rangle = 2((u, v), (\phi, \psi)) - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu p |u|^{p-2} u \phi + q |v|^{q-2} v \psi + 2\lambda(x)(u\psi + v\phi)) dx.$$

Portanto $I \in C^2(E, \mathbf{R})$ □

Referências Bibliográficas

- [1] R.A. Adams & J.J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 2003.
- [2] N. Akhmediev and A. Ankiewicz, *Novel soliton states and bifurcation phenomena in nonlinear fiber couplers*, Physical Review Letters 70 (1993) 2395-2398. 2
- [3] A. Ambrosetti, Remarks on some systems of nonlinear Schrödinger equations, Fixed Point Theory and Appl. 4 (2008) 35-46. 3
- [4] A. Ambrosetti and P. H Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Analysis, vol 14(1973) 349-381.
- [5] A. Ambrosetti, G. Cerami and D. Ruiz, *solitons of linearly coupled systems of semilinear non-autonomous equations on \mathbb{R}^N* , J. Funct. Anal. 254 (2008) 2816-2845. 3
- [6] J.G. Azorero & I.P. Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term*, American Mathematical Society, vol 323 n 2(1991) 65-74.
- [7] R.G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue Measure*, Willey Classics Library, New york, 1995.
- [8] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev, Space and Partial Differential Equations*, Springer, (2010).

- [9] H. Brezis and E.H. Lieb, *Minimum action solutions of some vector field equations*, Comm. Math. Phys. 96 (1984) 97-113. 5,6
- [10] Z. Chen and W. Zou, *Ground State for a system of Schrödinger equations with critical exponent*, J. Funct. Anal 262 (2012) 3091-3107. 3
- [11] Z. Chen and W. Zou, *On coupled systems of Schrödinger equations*, Adv. Differential Equations 16 (2011) 755-800. 3
- [12] D.N. Christodoulides, T.H. Coskun, M. Mitchell and M. Segev, *Theory of incoherent self-focusing in biased photorefractive media*, Phys. Rev. Lett. 78(1997) 646-649. 2
- [13] I. Ekeland, *On the Variational Principle*, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.
- [14] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society.
- [15] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer 2nd. ed (1983).
- [16] N. Kalyanasundaram and P. Muthuchidambaranathan, *Nonlinear pulse propagation in a weakly birefringent optical fiber part 1: derivation of coupled nonlinear Schrödinger equations (CNLSE)*, Progress In Electromagnetics Research B 19 (2010) 205-231. 2
- [17] O. Kavian *Introduction a la theorie des points critiques et applications aux problemes elliptiques*, Springer-Verlag, (1993).
- [18] A.N. Kolmogorov and S.V. Farnin, *Introductory real analysis*, Dover, 1975.
- [19] Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley. Canadá, 1989.
- [20] E.L. Lima, *Analise Real*, vol 1. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [21] E.L. Lima, *Analise Real*, vol 2. 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

- [22] L.A.J. Medeiros, *Espaços de Sobolev: Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos*, Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000.
- [23] J.C.A. Melo Junior, *On linearly coupled systems of Schrödinger equations with critical growth*, tese de doutorado. PAPGM-UFPB/UFCG (2017)
- [24] C.R. Menyuk, *Nonlinear pulse propagation in birefringent optical fibers*, IEEE J Quantum Electron 23 (1987) 174-176. 2
- [25] P. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew. Math. Phys. 43 (1992) 270-291. 2
- [26] E. Schrödinger, *Collected Papers on Wave Mechanics*, AMS Chelsea Publishing (2003) 2
- [27] M. Willem, *Minimax theorems*, Volume 24, Birkhauser, Boston, 1996.