UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Existência de solução radial positiva para um problema em $\mathbb{R}^N$

Helen Cristina Machado Rodrigues

Belém

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Helen Cristina Machado Rodrigues

Existência de solução radial positiva para um problema em $\mathbb{R}^N$

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Pablo Pinheiro Silva

Belém
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca de Pós Graduação do ICEN

Rodrigues, Helen Cristina Machado
Existência de solução radial positiva para um problema em R^N/Helen Cristina Machado Rodrigues; orientador, João Pablo Pinheiro Silva.-2017.
92 f.; 29 cm
Inclui bibliografias

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística – PPGME, Belém, 2017.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Equações elípticas semi-lineares. 3. Minimização. 4. Soluções ground-state. I. Silva, João Pablo Pinheiro,orient. II. Título.

CDD – 22 ed. 515.3533

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Helen Cristina Machado Rodrigues

Existência de Solução Radial Positiva para um Problema em $\mathbb{R}^N$.

Dissertação apresentada ao Curso de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, com pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 23 de Março de 2017.

Conceito: APROVADO

Banca Examinadora

Pcincira.

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira - UEPA

Prof. Dr. Geraldo Mendes De Araújo - PDM/UFPA

Prof. Dr. João Pablo P. Da Silva - PPGME/PDM/UFPA
Orientador

Profa. Dr^a. Rúbia Gonçalves Nascimento - PPGME/UFPA

Dedicatória

Aos meus amados afilhados, Alex e Isabella.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por sempre me guiar na direção certa, me acalentar nos momentos difíceis e por sempre me dar coragem para recomeçar quando parece o fim.

Ao meus pais, Abilio Rodrigues e Benedita Rodrigues, cuja fé em mim me ensinou a ter fé em mim mesmo e em Deus.

As minhas irmãs, Vanessa Rodrigues e Cássia Rodrigues, pelo apoio indireto.

A minha afilhada, Isabella Rodrigues, pelo amor e carinho.

Ao Lourival, por todo amor, dedicação e pela paciência incondicional.

Ao prof. Dr. João Pablo Pinheiro, a minha imensa gratidão por ser meu orientador, por seus ensinamentos e paciência.

Agradeço aos professores Rúbia Nascimento, Geraldo Araujo e Ducival Pereira, que gentilmente aceitaram participar da banca examinadora deste trabalho e puderam contribuir para o enriquecimento dessa dissertação.

A todos que compõe o PPGME, pelo trabalho e dedicação aos discentes, em especial, a Carmem.

Aos meus amigos de curso, João Felipe, Alberto Noé, Welber, Gabriela, Jociane e Dione, pela parceria e pela troca de conhecimentos.

As minhas queridas amigas, Lidiane Dias e Maria Nilce, pelo apoio nos estudos e na vida.

Aos meus amigos, Amanda, Dani, Thais, Chris, Gean, Misael, Márcio, Liliane, Lidiane e Miguel, que se dispuseram a me ajudar quando mais precisei. Em especial ao Márcio, pela ajuda vital na formatação dos preâmbulos.

Aos meus amigos do curso de inglês, Denison, Elielma, Cássio, Neto, Mayara, Jandira e Sandy. Em especial, ao Denison teacher, pela dedicação, pelo apoio e por ter me ajudado a conseguir tão almejada proficiência.

Por fim, agradeço a FAPESPA, pelo apoio financeiro durante todo curso de mestrado.

A todos os citados acima, o meu MUITO OBRIGADA!

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência de soluções radiais positivas para problemas elípticos semi-lineares em $\mathbb{R}^N$. Esses resultados são devidos a H. Berestycky e Lions [9]. Além disso, em alguns problemas, obtemos a existência de soluções do tipo ground state. Para a obtenção de solução nesse domínio, usamos o método variacional.

Palavras-chave: Equações elípticas semi-lineares, minimização, soluções ground state.

Abstract

In this paper, we study the existence of positive radial solutions for semilinear elliptic problems in R^N, this result follows from H. Berestycky and Lions [9]. We also determine the existence of ground state type solutions in some problems. To obtain solution in this domain, we use the variational method.

Keywords: Semilinear elliptic equations, minimization, ground state solutions.

Sumário

Introdução

Um dos primeiros matemáticos a relacionar uma equação diferencial a um problema de minimização foi Euler no século XVIII, que, após estudar de forma sistemática problemas que exigiam a minimização de uma grandeza associada a uma família de curvas, observou que a curva minimizante deveria satisfazer, em cada caso, a uma equação diferencial. Estudando os trabalhos de Euler, Lagrange inventou um método analítico que chegava ao mesmo resultado, o qual foi chamado de método das variações e a equação diferencial associada ao problema de minimização passou a ser chamada de equação de Euler-Lagrange. Desta maneira, a solução do problema passa a ser o estudo de pontos críticos de tais equações. Se tivermos a garantia de que essas equações admitem ponto crítico, esse ponto conduzirá a solução da EDP original.

Esta dissertação é um estudo do artigo [9] de Berestycki e Lions, que foi publicado em 1983. Neste artigo os autores mostram a existência de soluções não triviais, para algumas equações elípticas semi-lineares da forma

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

com $N \geq 3$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continua e ímpar, que satisfaz algumas condições. Este tipo de equação aparece, por exemplo, quando procura-se "ondas solitárias "(estados estacionários) em equações não lineares do tipo Klein-Gordon ou Schrodinger, respectivamente. Precisamente, considere a seguinte equação não linear de Klein-Gordon

$$\Phi_{tt} - \Delta\Phi + a^2\Phi = f(\Phi), \tag{2}$$

com $\Phi = \Phi(t,x)$ uma função complexa definida em $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$ e a é uma constante real. Suponha que

$$f(\varrho e^{i\theta}) = f(\varrho)e^{i\theta}, \quad \forall \varrho, \theta \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Portanto, pode-se assumir que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real contínua e ímpar. A equação (2) corresponde à densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_\Phi = \frac{1}{2}|\Phi_t|^2 + \frac{1}{2}|\Delta\Phi|^2 + \frac{a^2}{2}|\Phi|^2 - F(|\Phi|),$$

com

$$F(\varrho) = \int_0^\varrho f(s)\, ds, \quad \varrho \in \mathbb{R}.$$

Então, procurando uma onda solitária em (2) do tipo “onda estacionária”, isto é, Φ da forma

$$\Phi(t,x) = e^{iwt}u(x),$$

com $w \in \mathbb{R}$ e $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} \Phi_{tt} - \Delta\Phi + a^2\Phi = f(\Phi) \quad &\Leftrightarrow \quad -w^2e^{iwt}u - e^{iwt}\Delta u + a^2e^{iwt}u = e^{iwt}f(u) \\ &\Leftrightarrow \quad -\Delta u + (a^2 - w^2)u = f(u) \end{aligned}$$

fazendo $m = a^2 - w^2$, obtem-se

$$-\Delta u + mu = f(u) \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N. \tag{4}$$

Note que $u \equiv 0$ é sempre uma solução trivial de (4), no entanto, Berestycki e Lions estavam interessados nas soluções não trívias, isto é, $u \not\equiv 0$.

Em termos de u, o funcional energia $S(u)$ associado ao problema (4) é dado por

$$S(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{L}_\Phi\, dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx + \frac{m}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx. \tag{5}$$

Os estados estacionários das equações não lineares de Schrodinger levam a problemas semelhantes. De fato, considere a equação

$$i\Phi_t - \Delta\Phi = f(\Phi), \tag{6}$$

com $\Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ e f satisfaz a propriedade de simetria (3). Então, procurando por ondas estacionarias, isto é,

$$\Phi(t,x) = e^{-imt}u(x),$$

tem-se

$$i\Phi_t - \Delta\Phi = f(\Phi) \Leftrightarrow i(-ime^{-imt}u) - e^{-imt}\Delta u = e^{-imt}f(u)$$

logo, obtém-se a equação (4). Fazendo em (4), $g(u) = f(u) - mu$, tem-se o problema elíptico semi-linear (1).

No Capitulo 1, dessa dissertação, estudamos o problema (1) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ \ \ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \ u \not\equiv 0, \end{cases} \tag{$\mathfrak{P}$}$$

com $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

(g1) $-\infty < \underline{\lim}_{s\to 0^+} \dfrac{g(s)}{s} \leq \overline{\lim}_{s\to 0^+} \dfrac{g(s)}{s} = -m < 0$;

(g2) $-\infty \leq \overline{\lim}_{s\to +\infty} \dfrac{g(s)}{s^l} \leq 0, \quad \text{com} \quad l = \dfrac{N+2}{N-2}$;

(g3) Existe $\zeta > 0$ tal que $G(\zeta) = \displaystyle\int_0^\zeta g(s)\, ds > 0$.

Os principais propósitos, nesse capitulo, são estabelecer a existência de solução ground state para o problema $(\mathfrak{P})$. Uma solução w de $(\mathfrak{P})$ é, por definição, ground state se $S(w) = \overline{u}$, com

$$\overline{u} = \inf\{S(u); u \text{ é solução fraca de } (\mathfrak{P})\} \tag{7}$$

Denota-se por $S : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado a $(\mathfrak{P})$, definido por

$$S(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \, dx \tag{8}$$

com $G(z) = \displaystyle\int_0^z g(s) \, ds$. Além disso, defini-se uma solução fraca de $(\mathfrak{P})$ como sendo uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Problemas do tipo $(\mathfrak{P})$ surgem em vários contextos da física (aproximação clássica em mecânica estatística, falso vácuo na cosmologia, óptica não linear, propagação de laser e etc). Elas são chamadas de equações de campo escalares euclidianas não-lineares (veja [5],[22], [30], [31]). Em um contexto totalmente diferente, uma solução de $(\mathfrak{P})$ também pode ser interpretada como uma solução não trivial estacionaria para a equação do calor

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi = g(\psi), \tag{9}$$

com $\psi = \psi(t,x), t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Tais problemas surgem na biologia, especialmente na teoria da dinâmica populacional (Ver [6], [27], [28], e [51]). Além disso, o problema unidimensional ($N = 1$) para $(\mathfrak{P})$ foi estudado por [24] e [48], enquanto que em dimensões superiores, os resultados de existência foram obtidos por [41], [46] e [50]. O primeiro estudo geral deste tipo de equações é devido a [55]. Um resultado geral para a existência de soluções groud state é dado por [29].

No capítulo 2, estudamos o problema (1) da forma

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ \ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \ u \not\equiv 0, \end{cases} \tag{$\mathfrak{K}$}$$

e com $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes hipóteses:

(G1) $g(0) = 0$ e $\displaystyle\overline{\lim_{s\to 0^+}} \frac{g(s)}{s^l} \leq 0$, com $l = \dfrac{N+2}{N-2}$;

(G2) Existe $\zeta > 0$ tal que $G(\zeta) > 0$;

(G3) Seja $\zeta_0 = \inf\{\zeta > 0; G(\zeta) > 0\}$. Se $g(s) > 0, \forall s > \zeta_0$, então $\lim\limits_{s \to +\infty} \dfrac{g(s)}{s^l} = 0$.

Neste capítulo, mostramos existência de uma solução clássica positiva, radialmente simétrica e decrescente em relação ao raio para o problema em questão. É importante ressaltar que, o problema ($\mathfrak{K}$) surgiu na tentativa de estudarmos o caso conhecido na literatura por massa zero, isto é, $g'(0) = 0$. Esta situação surge em certos problemas relacionados com as equações Yang-Mills (veja [31] e [32]). No Capitulo 1, verifica-se que a condição $g'(0) < 0$ é quase "necessária" no sentido de que se $g'(0) > 0$, então ($\mathfrak{P}$) não tem solução radialmente simétrica. No entanto, $g'(0) > 0$ não é exatamente a negação de $g'(0) < 0$. Logo o único caso restante, essencialmente, é o caso limite com $g'(0) = 0$ (este caso também é estudado em [10]).

Há também importantes e conhecidos trabalhos sobre problemas elípticos semi-lineares em domínios limitados de $\mathbb{R}^N$. Referimos os artigos [2], [4], [15], [42] e [45] para a existência de soluções positivas e [3], [4], [17], [18], [19], [20], [35] e [45] para a existência de um número infinito de soluções distintas.

Para uma melhor abordagem desses problemas em domínios limitados, recomendamos os livros [39], [49] e [52].

É evidente a falta de compacidade em problemas elípticos cuja condição de fronteira é um domínio não limitado. Portanto, uma primeira aproximação natural em relação ao problema ($\mathfrak{P}$) seria usar os trabalhos acima (em domínios limitados) e aproximar uma solução do mesmo por uma solução de um problema análogo na bola $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| < |R\}$, ou seja, primeiro solucionamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u_R = & g(u_R) \quad \text{em } B_R, \\ u_R\Big|_{\partial B_R} = & 0 \end{cases}$$

e depois fazemos $R \to +\infty$. No entanto, um dos obstáculos para essa abordagem é a ausência (a priori) de uniformidade nos limites (isto é, em relação a R) no trabalho acima. Este método é, contudo, desenvolvido em [8], embora exija alguma restrição de natureza técnica sobre o termo não-linear g.

Ressaltamos que tanto o artigo base desta dissertação [9] como em [11] contornaram a falta de compacidade usando um resultado devido a Strauss [47] para funções radialmente simétricas.

Tanto no capítulo 1 como no capítulo 2, usamos métodos variacionas com a restrição apropriada para obtermos compacidade.

Este trabalho contém dois capítulos e cinco apêndices, os quais estão estruturados da seguinte maneira:

No Capítulo 1, seguindo [9], estudamos existência de solução clássica para o problema $(\mathfrak{P})$ que é ground state, positiva, radialmente simétrica, decrescente em relação ao raio e com decaimento exponencial, via método variacional.

No Capítulo 2, baseado também em [9], investigamos solução para o problema $(\mathfrak{K})$ via método variacional.

No Apêndice A, apresentamos os resultados de compacidade devido a Strauss [47].

No Apêndice B, apresentamos alguns lemas radiais úteis sobre o decaimento uniforme no infinito de certas funções radiais.

No Apêndice C, apresentamos propriedades básicas da simetrização de Schwarz.

No Apêndice D, apresentamos alguns funcionais de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

No Apêndice E, apresentamos alguns resultados gerais que foram utilizados nesta dissertação e que são importantes para a compreensão da mesma.

Notações

- $\blacksquare$: fim da demonstração.
- q.t.p: quase todo ponto.
- $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$: operador Laplaciano aplicado a função u.
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$: gradiente de u.
- B_R: bola aberta de centro em 0 e raio R.
- $|B_R|$: medida de lebesgue da bola B_R.
- Quando não houver confusão sobre as variáveis, colocaremos somente u ao invés de $u(x)$.
- $a^+ = \max\{a, 0\}$ e $a^- = \max\{-a, 0\}$

Capítulo 1

Existência de solução ground state

Neste capítulo, mostrou-se a existência de uma solução clássica para o problema $(\mathfrak{P})$ que é positiva, radialmente simétrica, decrescente em relação ao raio e com decaimento exponencial juntamente com suas derivadas a menos de ordem 2.

1.1 Apresentação do problema

Neste capítulo, verifica-se a existência de solução ground state para o seguinte problema elíptico semi-linear em $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \ u \not\equiv 0, \end{cases} \tag{$\mathfrak{P}$}$$

com $N \geq 3$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denotando uma função continua e ímpar com $g(0) = 0$, que satisfaz as seguintes condições:

(g1) $-\infty < \underline{\lim}_{s \to 0^+} \dfrac{g(s)}{s} \leq \overline{\lim}_{s \to 0^+} \dfrac{g(s)}{s} = -m < 0;$

(g2) $-\infty \leq \overline{\lim_{s\to 0^+}} \dfrac{g(s)}{s^l} \leq 0$, com $l = \dfrac{N+2}{N-2}$;

(g3) Existe $\zeta > 0$ tal que $G(\zeta) = \displaystyle\int_0^{\zeta} g(s)\, ds > 0$.

Lembrando que uma solução w de $(\mathfrak{P})$ é, por definição, ground state se

$$S(w) = \overline{u},$$

com

$$\overline{u} = \inf\{S(u); u \text{ é solução de } (\mathfrak{P})\}, \tag{7}$$

onde $S : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é o funcional energia associado a $(\mathfrak{P})$, definido por

$$S(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx$$

com $G(z) = \displaystyle\int_0^z g(s)\, ds$. Além disso, uma solução fraca de $(\mathfrak{P})$ é uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(u) v\, dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

O principal resultado deste capítulo é o teorema seguinte que consiste na existência de solução ground state para o problema $(\mathfrak{P})$.

Teorema 1.1 *Suponha $N \geq 3$ e que g satisfaz **(g1)-(g3)**. Então $(\mathfrak{P})$ possui uma solução u tal que:*

(i) *$u > 0$ em $\mathbb{R}^N$;*

(ii) *u é radialmente simétrica: $u(x) = u(r)$, onde $r = |x|$ e u decresce com respeito a r;*

(iii) *$u \in C^2(\mathbb{R}^N)$;*

(iv) *u junto com suas derivadas a menos de ordem* 2 *tem decaimento exponencial no infinito*

$$|D^\alpha u(x)| \leq Ce^{-\delta|x|},\ x \in \mathbb{R}^N,$$

para algum $C, \delta > 0$ *e para* $|\alpha| \leq 2$.

Vejamos alguns exemplos típicos de problemas que satisfazem as hipóteses do Teorema (1.1).

Exemplo 1. Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + mu = \lambda |u|^{p-1} u \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N),\ u \not\equiv 0, \end{cases} \tag{$\mathfrak{P}_1$}$$

com λ e m constantes positivas e $p > 1$.

Esse problema foi estudado por S. Pohozaev [43]. Ele mostrou que $(\mathfrak{P}_1)$ possui uma solução se, e somente se, $1 < p < \frac{N+2}{N-2} = l$ e não possui solução se $p \geq \frac{N+2}{N-2} = l$. De fato, neste exemplo a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(u) = \lambda |u|^{p-1} u - mu,$$

como $1 < p < l$, observe que

$$-\infty < \lim_{s \to 0^+} \frac{g(s)}{s} = \lim_{s \to 0^+} (\lambda s^{p-1} - m) = -m < 0, \tag{1.1}$$

temos também que

$$-\infty \leq \lim_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{s^l} = \lim_{s \to +\infty} \left(\frac{\lambda |s|^{p-1} s - ms}{s^l} \right) = \lim_{s \to +\infty} \left(\frac{\lambda}{s^{l-p}} - \frac{m}{s^{l-1}} \right) = 0 \tag{1.2}$$

e por fim, basta tomar um $\zeta > 0$ tal que

$$G(\zeta) = \int_0^\zeta g(s)\ ds = \int_0^\zeta (\lambda s^p - ms)\ ds = \zeta^2 \left(\frac{\lambda \zeta^{p-1}}{p+1} - \frac{m}{2} \right) > 0. \tag{1.3}$$

Portanto, (1.1)-(1.3) satisfazem respectivamente (**g1**)-(**g3**). Diante disto, aplica-se o Teorema (1.1) para obter uma solução de $(\mathfrak{P}_1)$. Por outro lado, se

$p \geq \dfrac{N+2}{N-2} = l$ o resultado de não existência de solução para este caso é justificada pela identidade de Pohozaev, que será apresentada na seção (1.2) deste capítulo.

O método de Pohozaev consiste em maximizar o funcional $I : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{\lambda}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} \, dx$$

sobre o conjunto

$$\left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = 1 \right\}.$$

Tomando o funcional $J : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx.$$

Como os funcionais I e J possuem derivada de Gateaux continua em $H^1(\mathbb{R}^N)$, a proposição (D.1) (ver apêndice D, página 66) nos garante que os mesmos são de classe C^1. Segue do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (veja apêndice E, página 75), que

$$\begin{cases} J(u) = 1 \\ J'(u) = \theta I'(u). \end{cases}$$

Sendo

$$I'(u)\phi = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u\phi \, dx \quad \text{e} \quad J'(u)\phi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi \, dx + m \int_{\mathbb{R}^N} u\phi \, dx.$$

segue que

$$\begin{aligned} J'(u)\phi = \theta I'(u)\phi \quad &\Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi \, dx + m \int_{\mathbb{R}^N} u\phi \, dx = \theta\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u\phi \, dx \\ &\Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi \, dx = \theta\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u\phi \, dx - m \int_{\mathbb{R}^N} u\phi \, dx \\ &\Rightarrow \quad -\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u\phi \, dx = \theta\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u\phi \, dx - m \int_{\mathbb{R}^N} u\phi \, dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta u + mu = \theta\lambda u^p, \ u > 0.$$

Portanto, esta restrição faz com que apareça um multiplicador de Lagrange θ e através do qual obtém-se uma solução positiva de

$$-\Delta u + mu = \theta\lambda u^p.$$

Fazendo $\overline{u} = \sigma u$ com $\sigma = \theta^{\frac{1}{p-1}} > 0$, tem-se

$$-\Delta\overline{u} + m\overline{u} = \frac{\theta}{\sigma^{p-1}}\lambda\overline{u}^p = \lambda\overline{u}^p.$$

Assim, necessariamente tem-se $\theta > 0$. Vale ressaltar que o problema $(\mathfrak{P}_1)$ também foi estudada por [12], [13] e [21] os quais demostraram que tal problema possui infinitas soluções distintas.

Exemplo 2. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + mu = \lambda|u|^{p-1}u - \mu|u|^{q-1}u \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \ u \not\equiv 0. \end{cases} \tag{$\mathfrak{P}_2$}$$

com λ, μ, m constantes positivas, $p \neq q$ e $1 < p, q$.

Neste exemplo, a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(u) = \lambda|u|^{p-1}u - \mu|u|^{q-1}u - mu.$$

De maneira análoga ao exemplo 1, vamos verificar se a função g satisfaz as hipóteses do Teorema (1.1). Observe que tanto para o caso $1 < p < q < l$, como para o caso $1 < q < p < l$, as condições (**g1**) e (**g2**) são válidas. De fato, tem-se

$$-\infty < \lim_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s} = \lim_{s\to 0^+} (\lambda s^{p-1} - \mu s^{q-1} - m) = -m < 0, \tag{1.4}$$

e

$$-\infty \leq \lim_{s\to +\infty} \frac{g(s)}{s^l} = \lim_{s\to +\infty} \left(\frac{\lambda}{s^{l-p}} - \frac{\mu}{s^{l-q}} - \frac{m}{s^{l-1}}\right) = 0. \tag{1.5}$$

Portanto, em ambos os casos, (1.4) e (1.5) satisfazem respectivamente (**g1**) e (**g2**). Enquanto a condição (**g3**) será satisfeita, em ambos os casos, se existir um $\zeta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} G(\zeta) &= \int_0^\zeta g(s)\, ds \\ &= \int_0^\zeta (\lambda|s|^{p-1}s - \mu|s|^{q-1}s - ms)\, ds \\ &= \frac{\lambda}{p+1}\zeta^{p+1} - \frac{\mu}{q+1}\zeta^{q+1} - \frac{m}{2}\zeta^2 > 0. \end{aligned}$$

Caso contrario, se $G(\zeta) \leq 0$ para todo $\zeta > 0$, pela Identidade de Pohozaev, veremos que $(\mathfrak{P}_2)$ não possui solução (veja item (a) página 19). Dessa forma, a condição (**g3**) é necessária e suficiente. Em [47] mostrasse a existência de um número infinito de soluções não triviais para $(\mathfrak{P}_2)$, se $1 < q < p < l$. E por fim, o caso $q \leq \frac{N+2}{N-2} \leq p$ será tratado na próxima seção, onde verifica-se a não existência de soluções não triviais para $(\mathfrak{P}_2)$, novamente por meio da identidade de Pohozaev (veja item (d) página 21).

1.2 Condições Necessárias

Esta seção está organizada da seguinte forma: na primeira subseção apresentamos a Identidade de Pohozaev e mostramos que toda solução de $(\mathfrak{P})$ satisfaz esta identidade; na subseção (1.2.2) mostramos algumas consequências da identidade de Pohozaev e também, que as condições (**g1**)-(**g3**) são "quase"necessárias para a existência de uma solução do problema $(\mathfrak{P})$.

1.2.1 Identidade de Pohozaev

Várias condições necessárias para a existência de uma solução do problema $(\mathfrak{P})$ podem ser obtidas a partir de uma identidade que parece ser devido a [43].

Tal identidade é de fundamental importância para mostrar que, entre outras coisas, soluções de $(\mathfrak{P})$ dadas pelo Teorema (1.2) que veremos na próxima seção é de ground state.

Se u é solução fraca do problema $(\mathfrak{P})$, então u juntamente com suas derivadas, suficientemente pequenas no infinito, satisfazem necessariamente

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\ dx = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)\ dx \tag{1.6}$$

onde G sempre denotará a função

$$G(z) = \int_0^z g(s)\ ds.$$

Daremos um argumento informal explicando (1.6). Inicialmente, defina dois funcionais

$$T(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\ dx, \quad V(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\ dx$$

(Por analogia, $\frac{1}{2}T(u)$ e $V(u)$ correspondem a energia cinética e energia potencial, respectivamente. Assim, $S(u) = \frac{1}{2}T(u) - V(u)$).

Considere a seguinte mudança de variável em $\mathbb{R}^N$: para $\sigma > 0$ defina $u_\sigma(x) = u(\frac{x}{\sigma})$. Obtemos que

$$T(u_\sigma) = \frac{1}{\sigma^2}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right|^2\ dx = \frac{1}{\sigma^2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\sigma^N\ dx = \sigma^{N-2}\ T(u)$$

e

$$V(u_\sigma) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u_\sigma)\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} G\left(u\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\sigma^N\ dx = \sigma^N V(u).$$

Assim,

$$S(u_\sigma) = \frac{1}{2}T(u_\sigma) - V(u_\sigma) = \frac{\sigma^{N-2}}{2}\ T(u) - \sigma^N\ V(u).$$

Agora, se u é solução de $(\mathfrak{P})$, pelo menos informalmente podemos interpreta-la como um ponto crítico do funcional S. Portanto,

$$\left.\frac{d}{d\sigma}S(u_\sigma)\right|_{\sigma=1} = 0 \Longleftrightarrow \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\ dx - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)\ dx = 0$$

que é precisamente (1.6).

O argumento dado acima não é rigoroso, pois precisamos saber se no espaço que o funcional energia S está definido nos garante que $S \in C^1$. Além disso, precisamos mostrar que

$$\frac{d}{d\sigma}u_\sigma(x)\bigg|_{\sigma=1} = -\nabla u(x).x$$

está bem definida.

Agora, provaremos que qualquer solução de $(\mathfrak{P})$ satisfaz a identidade de Pohozaev. Isso será obtido como um corolário da proposição seguinte.

Proposição 1.1 (Identidade de Pohozaev) *Suponha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $g(0) = 0$, $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)\ ds$ e u satisfaz*

$$-\Delta u = g(u) \quad em \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),$$

onde $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ é o espaço das distribuições sobre $\mathbb{R}^N$. Assuma, além disso, que

$$u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N),\ \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N),\ G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Então u satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\ dx = \frac{2N}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N} G(u)\ dx \tag{1.6}$$

Demonstração: Ver apêndice E, página 70.

■

Corolário 1.1 *Suponhamos que g satisfaz* **(g1)** *e* **(g2)**. *Então qualquer solução de $(\mathfrak{P})$ satisfaz a identidade de Pohozaev.*

Demonstração: O resultado segue imediatamente a partir da proposição (E.1), pois se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ resolve $(\mathfrak{P})$, então pelo argumento utilizado na seção (1.4.1) (página 41) $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, enquanto o Teorema (D.2) na apêndice nos garante que $G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

■

1.2.2 Algumas consequências da identidade de Pohozaev e algumas condições necessárias.

Mostramos agora que as condições (**g1**)-(**g3**) são "quase" necessárias para a existência de uma solução do problema ($\mathfrak{P}$).

(a) Suponha que a hipótese (**g3**) seja falsa, então $G(s) \leq 0$, para todo $s > 0$. Tomando u uma solução positiva de ($\mathfrak{P}$) tal que g satisfaz (**g1**) e (**g2**), pelo Corolário (1.1), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx = \frac{N-2}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx > 0,$$

uma contradição. Assim, hipótese (**g3**) é uma condição necessária.

(b) Para justificar a hipótese (**g2**), consideramos um caso de potência pura, o problema ($\mathfrak{P}_1$) (Exemplo 1). Observe, que neste exemplo,

$$g(u) = \lambda |u|^{p-1} u - mu$$

com $\lambda, m > 0$. Se u satisfaz ($\mathfrak{P}_1$), então multiplicando ($\mathfrak{P}_1$) por u e em seguida, integrando em $\mathbb{R}^N$, tem-se

$$-\int_{\mathbb{R}^N} u \Delta u\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(u) u\, dx$$

mas

$$-\int_{\mathbb{R}^N} u \Delta u\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u\, dx - \int_{\partial \mathbb{R}^N} u \frac{\partial u}{\partial \eta}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx,$$

lembrando que $\partial \mathbb{R}^N = \emptyset$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(u) u\, dx,$$

como g satisfaz as condições (**g1**) e (**g2**), pelo Corolário (1.1) temos que u satisfaz a identidade de Pohozaev, logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(u) u\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx$$

daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda|u|^{p-1}u - mu)u\ dx = \frac{2N}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N} G(u)\ dx$$

observe que

$$\begin{aligned} G(u) &= \int_0^u g(s)\ ds = \int_0^u \lambda|s|^{p-1}s - ms\ ds \\ &= \left(\frac{\lambda s^{p+1}}{p+1} - \frac{ms^2}{2}\right)\Big|_0^u \\ &= \frac{\lambda u^{p+1}}{p+1} - \frac{mu^2}{2} \end{aligned}$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda|u|^{p-1} - mu)u\ dx = \frac{2N}{N-2}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{\lambda u^{p+1}}{p+1} - \frac{mu^2}{2}\right)\ dx\right],$$

ou seja,

$$\lambda\left(\frac{1}{p+1} - \frac{N-2}{2N}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}\ dx = \frac{m}{N}\int_{\mathbb{R}^N} u^2\ dx > 0.$$

Como λ e m são constantes positivas, tem-se

$$\frac{1}{p+1} - \frac{N-2}{2N} > 0 \Longleftrightarrow p < \frac{N+2}{N-2} = l.$$

Portanto $(\mathfrak{P}_1)$ não possui solução quando $p \geq l$. Também, sabemos da literatura [43], [13] e [47] que quando $p < l$, $(\mathfrak{P}_1)$ admite infinitas soluções radiais. Portanto, (**g2**) (hipótese de crescimento sub crítico) é necessária.

(c) Por fim, afirmamos que (g1) é "quase"necessária no sentido que, se $g'(0) > 0$, então $(\mathfrak{P})$ não possui solução radial. De fato, se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é radialmente simétrica, então por um resultado de [36] existe uma constante $C(= C(N)) > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq C|x|^{-\frac{N-1}{2}}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

e, na verdade, $|u(x)| = o(|x|^{-\frac{N-1}{2}})$ no momento em que $|x| \to +\infty$. Sejam $m = g'(0)$ e $q(r) = m - g(u(r))/u(r)$. Então, considere o caso $N = 3$ e assumindo $g \in C^2$ numa vizinhança de 0, tem-se $q(r) = o(r^{-1})$ quando $r \to +\infty$. Com efeito,

$$g(s) = g(0) + g'(0)s + g''(0)\frac{s^2}{2} = ms + g''(0)\frac{s^2}{2}\cdot$$

Daí,

$$g(u(r)) = m(u(r)) + g''(0)\frac{(u(r))^2}{2}\cdot$$

implicando em

$$q(r) = m - \frac{g(u(r))}{u(r)} = -g''(0)\frac{u(r)}{2}\cdot$$

resultando em

$$\frac{q(r)}{r} = -g''(0)\frac{u(r)}{2}\cdot$$

Enquanto u satisfaz a equação linear

$$-\Delta u + q(r)u = mu \ \text{ em } \ \mathbb{R}^3.$$

No entanto, isto é impossível, pois contradiz o resultado de [36] o qual mostra que o operador linear de Schrodinger $-\Delta + q(r)$ não possui autovalores positivos associados à auto-funções em $L^2(\mathbb{R}^3)$ sob a condição de que $q(r) = o(r^{-1})$. Portanto, a hipótese (**g1**) é "quase"necessária no sentido de que para algumas dimensões especificas o resultado não é valido para a obtenção de soluções radiais.

Observe, no entanto, que $g'(0) > 0$ não é exatamente a negação de (**g1**). O único caso restante, essencialmente, é o caso "massa zero", com $g'(0) = 0$. Então a questão de existência torna-se muito mais complexa e muitos fenômenos diferentes podem ocorrer, dependendo da estrutura de g. Estudaremos este caso na Capítulo 2.

(d) Como foi dito no exemplo 2 na seção (1.1), iremos utilizar a identidade de Pohozaev para mostrar que o problema $(\mathfrak{P}_2)$ não admite solução não trivial quando $q \leq \dfrac{N+2}{N-2} \leq p$. Relembrando que neste exemplo a função g é dada por

$$g(u) = \lambda|u|^{p-1}u - \mu|u|^{q-1}u - mu,$$

com λ, μ, m são constantes positivas, $p \neq q$ e $1 < p, q$. Se u satisfaz $(\mathfrak{P}_2)$, prosseguindo da mesma maneira que foi visto no tópico **(b)**, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(u)u \; dx = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \; dx$$

implicando que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda|u|^{p-1}u - \mu|u|^{q-1}u - mu)u \; dx = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \; dx$$

contudo, observe que

$$\begin{aligned} G(u) &= \int_0^u g(s) \; ds = \int_0^u (\lambda|s|^{p-1}s - \mu|s|^{q-1}s - ms) \; ds \\ &= \frac{\lambda}{p+1}u^{p+1} - \frac{\mu}{q+1}u^{q+1} - \frac{m}{2}u^2 \end{aligned}$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda|u|^{p-1}u - \mu|u|^{q-1}u - mu)u \; dx$$

equivale a

$$\frac{2N}{N-2}\left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\lambda}{p+1}u^{p+1} - \frac{\mu}{q+1}u^{q+1} - \frac{m}{2}u^2\right) \; dx\right],$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\lambda\left(\frac{1}{p+1} - \frac{N-2}{2N}\right)|u|^{p+1} + \mu\left(\frac{N-2}{2N} - \frac{1}{q+1}\right)|u|^{q+1}\right] dx = \mathbf{A}.$$

com

$$\mathbf{A} = \frac{m}{N}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 \; dx > 0.$$

Como λ, μ e m são constantes positivas, tem-se

$$\frac{1}{p+1} - \frac{N-2}{2N} > 0 \Longleftrightarrow p < \frac{N+2}{N-2} = l.$$

e

$$\frac{N-2}{2N} - \frac{1}{q+1} > 0 \Longleftrightarrow q > \frac{N+2}{N-2} = l.$$

Portanto, se $q \leq \dfrac{N+2}{N-2} \leq p$ conclui-se que a equação $(\mathfrak{P}_2)$ não admite solução não trivial.

(e) Uma outra consequência da identidade de Pohozaev é o seguinte corolário:

Corolário 1.2 *Se u é uma solução qualquer de $(\mathfrak{P})$, então*

$$S(u) = \frac{1}{N} T(u) > 0.$$

Demonstração: Tem-se

$$S(u) = \frac{1}{2} T(u) - V(u),$$

com

$$T(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx \quad \text{e} \quad V(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx,$$

pela identidade de Pohozaev, segue que

$$V(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \, dx = \frac{N-2}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx = \frac{N-2}{2N} \, T(u),$$

daí

$$S(u) = \frac{1}{2} \, T(u) - \frac{N-2}{2N} \, T(u) = \frac{1}{N} \, T(u) > 0.$$

■

1.3 O método de minimização restrita

Nesta seção, demonstramos um resultado de existência de solução para $(\mathfrak{P})$ que é positiva, radialmente simétrica e decrescente em relação ao raio $r > 0$. E também, que em dimensão $N = 1$ ou $N = 2$, o método de minimização restrita (1.9) (veja página 27) não possui soluções.

1.3.1 Existência de solução.

Um método natural para resolver ($\mathfrak{P}$) seria obter os pontos críticos do funcional energia S associado ao problema no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Na verdade este método foi usado em [47] para alguns casos particulares e em [25] para alguns resultados de existência para dimensão $N = 2$. No entanto, as primeiras dificuldades encontradas nesta abordagem é o fato de S não ser limitado superiormente e nem inferiormente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, por (**g1**) tome $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon - m < 0$ então existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |s| \leq \delta \Longrightarrow \frac{g(s)}{s} < \varepsilon - m < 0$$

tome $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi < \delta$ e $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2\, dx = 1$. Defina $\varphi_t(x) = \varphi(tx)$, logo

$$G(\varphi_t) = \int_0^{\varphi_t} g(s)\, ds < 0,$$

com $s \in [0, \varphi_t]$. Assim,

$$\begin{aligned} S(\varphi_t) &= \frac{1}{2}T(\varphi_t) - V(\varphi_t) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_t|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(\varphi_t)\, dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_t|^2\, dx = \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2\, dx = \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

logo, $S(\varphi_t) \longrightarrow +\infty$ quando $t \longrightarrow +\infty$. Portanto, segue que o funcional S não é limitado superiormente. Por outro lado, sob a hipótese (**g3**), existe $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$V(w) = \int_{\mathbb{R}^N} G(w)\, dx > 0$$

(esta afirmação será justificada na demonstração do Teorema (1.2)). Utilizando mudança de variável da seção (1.2.1), isto é, $w_\sigma(x) = w(\frac{x}{\sigma})$, tem-se

$$S(w_\sigma) = \frac{1}{2}T(w_\sigma) - V(w_\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^{N-2}T(w) - \sigma^N V(w). \tag{1.7}$$

Fazendo $\sigma \longrightarrow +\infty$ em (1.7) e usando o fato que $V(w) > 0$, tem-se

$$\lim_{\sigma\to+\infty} S(w_\sigma) = \lim_{\sigma\to+\infty}\left[\sigma^N\left(\frac{1}{2\sigma^2}T(w) - V(w)\right)\right] = -\infty$$

e portanto, S não é limitado inferiormente.

Portanto, em vez de procurar pontos críticos de S, vamos considerar um problema de minimização restrita. Antes, porém, precisamos modificar a função g de tal modo que V seja de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Defina uma nova função $\widetilde{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como segue:

(i) Se $g(s) \geq 0$ para todo $s \geq \zeta$, defina $g = \widetilde{g}$;

(ii) Se $\exists\ s_0 \geq \zeta$ tal que $g(s_0) = 0$, defina

$$\widetilde{g}(s) = \begin{cases} g(s) & \text{em} \quad [0, s_0] \\ 0 & \text{para} \quad s \geq s_0. \end{cases}$$

Para $s \leq 0$, $\widetilde{g}$ é definida (como g) por $\widetilde{g}(s) = -g(-s)$. Assim, $\widetilde{g}$ satisfaz as condições (**g1**)-(**g3**). Observe que, pela definição (ii) de $\widetilde{g}$, se existe $s_0 \geq \zeta$ tal que $g(s_0) = 0$, então

$$s > s_0 \Rightarrow \lim_{s\to+\infty} \frac{|\widetilde{g}(s)|}{|s|^l} = \lim_{s\to+\infty} \frac{0}{|s|^l} = 0.$$

Mas, se não existe tal s_0 então, pela definição (i) de $\widetilde{g}$, $g(s) \geq 0$ para todo $s \geq \zeta$ e assim,

$$0 \leq \underline{\lim}_{s\to+\infty} \frac{|\widetilde{g}(s)|}{|s|^l} \leq \overline{\lim}_{s\to+\infty} \frac{|\widetilde{g}(s)|}{|s|^l} = \overline{\lim}_{s\to+\infty} \frac{|g(s)|}{|s|^l},$$

pela hipótese **(g2)**, obtém-se

$$0 \leq \underline{\lim}_{s\to+\infty} \frac{|\widetilde{g}(s)|}{|s|^l} \leq \overline{\lim}_{s\to+\infty} \frac{|\widetilde{g}(s)|}{|s|^l} \leq 0$$

logo,

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{|\widetilde{g}(s)|}{|s|^l} = 0.$$

O limite para $s \to -\infty$ é análogo. Portanto, a função $\widetilde{g}$ satisfaz

$$\lim_{s \to \pm\infty} \frac{|\widetilde{g}(s)|}{|s|^l} = 0. \tag{1.8}$$

Além disso, soluções do problema $(\mathfrak{P})$ com $\widetilde{g}$ são também soluções de $(\mathfrak{P})$ com g. Com efeito, definamos

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) > s_0\},$$

após regularizarmos u, temos que u sendo contínua implica que Ω é aberto. Se Ω é ilimitado, existe uma sequência $(x_n) \in \Omega$ tal que $|x_n| \to +\infty$ implicando que $u(x_n) > s_0$. Pelo Lema Radial (B.1) (veja Apêndice B, página 61), tem-se

$$s_0 < |u(x_n)| \leq C_N |x_n|^{-\frac{N-1}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad |x_n| > \alpha_N$$

segue que

$$0 < s_0 \leq \lim_{n \to +\infty} C_N |x_n|^{-\frac{N-1}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 0$$

logo,

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = s_0\}$$

e

$$-\Delta u(x) = \widetilde{g}(u(x)) = 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

portanto,

$$-\Delta u(x) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Fazendo

$$\max_{\Omega} u = u(x_0) \text{ e } \min_{\Omega} u = u(\widetilde{x}_0), \quad x_0, \widetilde{x}_0 \in \partial\Omega,$$

pelo Princípio do Máximo Forte (veja Apêndice E, página 80) tem-se $u(x) = s_0$ em Ω, absurdo. Logo, $\Omega = \emptyset$. Portanto, $|u| \leq s_0$. Assim, no caso (ii) acima, a solução u de $(\mathfrak{P})$ com $\widetilde{g}$ satisfaz $|u| \leq s_0$, então $\widetilde{g}(u) = g(u)$.

Logo, sem perda de generalidade, substituiremos g por $\widetilde{g}$. No entanto, manteremos a mesma notação g. A partir disto, reescrevendo (1.8), g satisfaz a condição mais forte

$$\lim_{s\to\pm\infty}\frac{|g(s)|}{|s|^l}=0 \quad \text{com} \quad l=\frac{N+2}{N-2}. \qquad \textbf{(g2 bis)}$$

Aplicando o Teorema (D.1) (Ver Apêndice D, página 68) segue que

$$V(w)=\int_{\mathbb{R}^N} G(w)\ dx$$

está bem definido, é de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$V'(u)\phi=\int_{\mathbb{R}^N} g(u)\phi\ dx, \quad u,\phi\in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Por outro lado, pelo Lema (D.1) (ver Apêndice D, página 67), o funcional $T: H^1(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$ dado por

$$T(u)=\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\ dx, \quad \forall u\in H^1(\mathbb{R}^N)$$

está bem definido e é de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$, com

$$T'(u)v=2\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla v\ dx, \quad \forall u,v\in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Segue que o funcional energia S é de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Considere o seguinte problema de minimização restrita:

$$\min\{T(w); w\in H^1(\mathbb{R}^N), V(w)=1\}, \tag{1.9}$$

introduzido por [23]. O problema (1.9) nos garante uma solução de $(\mathfrak{P})$. De fato, se u resolve (1.9), então desde que o funcional energia S seja de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe um θ_1 tal que

$$T'(u)=\theta_1 V'(u), \tag{1.10}$$

isto é, (pelo menos no sentido das distribuições)

$$2\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla\phi\ dx=\theta_1\int_{\mathbb{R}^N} g(u)\phi\ dx$$

segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta u)\phi \; dx = \theta \int_{\mathbb{R}^N} g(u)\phi \; dx,$$

com $\theta = \theta_1/2$ e portanto,

$$-\Delta u = \theta g(u) \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N. \tag{1.11}$$

Mostra-se, a seguir, que necessariamente $\theta > 0$. Assim, fazendo

$$u_\sigma(x) = u\left(\frac{x}{\sigma}\right), \sigma > 0,$$

tem-se

$$T(u_\sigma) = \sigma^{N-2}T(u) \;\Rightarrow\; T'(u_\sigma)\phi = \sigma^{N-2}T'(u)\phi \tag{1.12}$$

e

$$V(u_\sigma) = \sigma^{N}V(u) \;\Rightarrow\; V'(u_\sigma)\phi = \sigma^{N}V'(u)\phi \tag{1.13}$$

substituindo (1.12) e (1.13) em (1.10), tem-se

$$T'(u_\sigma) = \frac{\theta_1}{\sigma^2}V'(u_\sigma)$$

prosseguindo analogamente, como na equação (1.10), obtemos

$$-\Delta u_\sigma = \frac{\theta}{\sigma^2}g(u_\sigma) \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Logo, escolhendo $\sigma = \sqrt{\theta}$, obtem-se uma solução de $(\mathfrak{P})$.

Teorema 1.2 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema* (1.1) *o problema de minimização* (1.9) *possui uma solução $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ a qual é positiva, radialmente simétrica e decrescente com relação a $r = |x|$. Além disso, existe um multiplicador de Lagrange $\theta > 0$ tal que u satisfaz* (1.11). *Assim u_σ, para $\sigma = \sqrt{\theta}$, é uma solução de* $(\mathfrak{P})$.

Demonstração: Dividiremos a demonstração do teorema em 5 etapas:

1. Mostrar que conjunto $W = \{w \in H^1(\mathbb{R}^N), V(w) = 1\}$ é não vazio;

2. Selecionar uma sequência minimizante adequada;

3. Estimar a *priori* a sequência minimizante;

4. Passagem ao limite;

5. Conclusão.

Etapa 1. Mostraremos que o conjunto W não é vazio. Observe que a hipótese (**g3**) será usada somente nesta etapa. Seja $\zeta > 0$ tal que $G(\zeta) > 0$. Para $R > 1$, defina

$$w_R(x) = \begin{cases} \zeta & \text{se} \quad |x| \leq R \\ \zeta(R+1-r) & \text{se} \quad r = |x| \in [R, R+1] \\ 0 & \text{se} \quad |x| \geq R+1. \end{cases}$$

e defina também, $\mathcal{X}_{B_{R+1}}$ como a função característica de B_{R+1} dada por

$$\mathcal{X}_{B_{R+1}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in B_{R+1}, \\ 0 & \text{se} \quad x \notin B_{R+1}. \end{cases}$$

Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w_R|^2\, dx = \int_{B_{R+1}} |w_R|^2 \mathcal{X}_{B_{R+1}}\, dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R+1}} |w_R|^2 \mathcal{X}_{B_{R+1}}\, dx < \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_R|^2\, dx = \int_{B_{R+1}} |\nabla w_R|^2 \mathcal{X}_{B_{R+1}}\, dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R+1}} |\nabla w_R|^2 \mathcal{X}_{B_{R+1}}\, dx < \infty$$

Assim $w_R, \nabla w_R \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, $w_R \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Usando $|.|$ para denotar a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável do $\mathbb{R}^N$, verifica-se que

$$\begin{aligned} V(w_R) &= \int_{B_{R+1}} G(w_R)\, dx \\ &= \int_{B_R} G(w_R)\, dx + \int_{B_{R+1} \setminus B_R} G(w_R)\, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \; G(\zeta)|B_R| - |B_{R+1} \setminus B_R| \left(\max_{0\leq s\leq\zeta} |G(s)| \right) \\
&\geq \; G(\zeta)R^N|B_1| - \left((R+1)^N|B_1| - R^N|B_1|\right) \left(\max_{0\leq s\leq\zeta} |G(s)| \right) \\
&\geq \; R^N \left[G(\zeta)|B_1| - \left(\left(1+\frac{1}{R}\right)^N |B_1| - |B_1| \right) \left(\max_{0\leq s\leq\zeta} |G(s)| \right) \right]
\end{aligned}$$

Logo, $V(w_R) > 0$ quando $R \to +\infty$. Então, considerando w_R tal que $w_{R,\sigma}(x) = w_R\left(\frac{x}{\sigma}\right)$, tem-se

$$V(w_{R,\sigma}(x)) = \int_{\mathbb{R}^N} G(w_{R,\sigma}(x))\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(w_R)\sigma^N\ dx = \sigma^N V(w_R).$$

Então, considerando $\sigma = (V(w_R))^{-\frac{1}{N}} > 0$, obtém-se $V(w_{R,\sigma}) = 1$. Portanto, W é não vazio.

Etapa 2. Nesta etapa, selecionaremos uma sequência minimizante adequada. Existe uma sequência $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $V(u_n) = 1$ e

$$\lim_{n\to+\infty} T(u_n) = I \equiv \inf\{T(w); w \in H^1(\mathbb{R}^N), V(w) = 1\} \geq 0.$$

Como $u_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que $(|u_n|)$ é uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e também, que

$$\lim_{n\to\infty} T(|u_n|) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla|u_n||^2\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2\ dx = \lim_{n\to\infty} T(u_n) = I$$

e

$$\begin{aligned}
V(|u_n|) &= \int_{\mathbb{R}^N} G(|u_n|)\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{|u_n|} g(s)\ ds\ dx \\
&= \int_{[u_n<0]} \int_0^{-u_n} g(s)\ ds\ dx + \int_{[u_n>0]} \int_0^{u_n} g(s)\ ds\ dx \\
&= \int_{[u_n<0]} \int_0^{-u_n} g(-s)\ (-ds)\ dx + \int_{[u_n>0]} \int_0^{u_n} g(s)\ ds\ dx \\
&= \int_{[u_n<0]} \int_0^{u_n} g(t)\ dt\ dx + \int_{[u_n>0]} \int_0^{u_n} g(t)\ dt\ dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{u_n} g(t)\ dt\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n)\ dx \\
&= V(u_n) \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

portanto, a sequência $(|u_n|) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz

$$
\lim_{n\to\infty} T(|u_n|) = I \text{ e } V(|u_n|) = 1. \tag{1.14}
$$

Assim, denotando (u_n^*) como um rearranjamento esférico de Schwarz de $|u_n|$ (ver apêndice C). Obtemos, $u_n^* \in H^1(\mathbb{R}^N), V(u_n^*) = 1$ e

$$
I \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^*|^2\ dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2\ dx \Longleftrightarrow I \leq T(u_n^*) \leq T(u_n).
$$

Portanto, (u_n^*) é também uma sequência minimizante. Substituindo (u_n) por (u_n^*), no entanto, mantendo a mesma notação, assumiremos de agora em diante que, para todo n, (u_n) é não negativa, esfericamente simétrica e não crescente com $r = |x|$.

Etapa 3. Nesta etapa, faremos estimativas para (u_n), isto é, mostraremos que $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ é limitada. Defina, para $s \geq 0$,

$$
g_1(s) = (g(s) + ms)^+ \ \text{ e } \ g_2(s) = g_1(s) - g(s),
$$

e para $s \leq 0$, estenda g_1 e g_2 como funções ímpares. Assim, $g = g_1 - g_2$ com $g_1, g_2 \geq 0$ em $\mathbb{R}_+$. Afirmasse que

$$
g_1(s) = o(s) \text{ com } s \to 0 \ \text{ e } \ \lim_{s\to\infty} \frac{g_1(s)}{s^l} = 0, \text{ com } l = \frac{N+2}{N-2}, \tag{1.15}
$$

e

$$
g_2(s) \geq ms, \ \forall s \geq 0. \tag{1.16}
$$

Com efeito, se $g(s) + ms \leq 0$ então (1.15) é imediata, pois $g_1 \equiv 0$. Agora, se $g(s) + ms > 0$, com $s > 0$ então $g_1(s) = g(s) + ms$, daí

$$
\lim_{s\to 0} \frac{g_1(s)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{g(s) + ms}{s} = \lim_{s\to 0} \left(\frac{g(s)}{s} + m \right) = -m + m = 0
$$

e

$$\lim_{s\to\infty} \frac{g_1(s)}{s^l} = \lim_{s\to\infty} \frac{g(s)+ms}{s^l} = \lim_{s\to\infty} \left(\frac{g(s)}{s^l} + \frac{m}{s^{l-1}} \right) = 0.$$

Observe que para o caso $s \leq 0$, o processo é análogo e portanto, (1.15) é válido. Para verificar (1.16), observe que para todo $s \geq 0$, temos

$$g_2(s) = g_1(s) - g(s) = (g(s)+ms)^+ - g(s) \geq (g(s)+ms) - g(s) \geq ms.$$

Por (1.15), para todo $\varepsilon > 0$, existem $\delta, m > 0$ tais que

$$0 < s < \delta \Longrightarrow \frac{g_1(s)}{s} < m\varepsilon \tag{1.17}$$

e

$$0 \leq m \leq s \Longrightarrow \frac{g_1(s)}{s^l} < \varepsilon \Longleftrightarrow g_1(s) < \varepsilon s^l \tag{1.18}$$

aplicando (1.16) em (1.17), obtemos

$$g_1(s) < \varepsilon g_2(s), \quad 0 \leq s \leq \delta. \tag{1.19}$$

Existe uma constante $\widetilde{C}_\varepsilon > 0$ tal que

$$g_1(s) - \varepsilon g_2(s) \leq \widetilde{C}_\varepsilon \delta^l, \quad \delta \leq s \leq m, \tag{1.20}$$

fazendo

$$\frac{\widetilde{C}_\varepsilon}{\delta^l} \geq \max_{\delta \leq s \leq m} (g_1(s) - \varepsilon g_2(s))$$

tem-se

$$g_1(s) \leq \widetilde{C}_\varepsilon \delta^l + \varepsilon g_2(s) \leq \widetilde{C}_\varepsilon s^l + \varepsilon g_2(s), \quad \delta \leq s \leq m. \tag{1.21}$$

Assim, por (1.19), tem-se

$$g_1(s) < \varepsilon g_2(s) \leq (\varepsilon + \widetilde{C}_\varepsilon) s^l + \varepsilon g_2, \quad 0 \leq s \leq \delta. \tag{1.22}$$

Enquanto por (1.21), tem-se

$$g_1(s) \leq \widetilde{C}_\varepsilon s^l + \varepsilon g_2(s) \leq (\varepsilon + \widetilde{C}_\varepsilon) s^l + \varepsilon g_2(s), \quad \delta \leq s \leq m. \tag{1.23}$$

E finalmente, por (1.18), tem-se

$$g_1(s) < \varepsilon s^l \leq (\varepsilon + \widetilde{C}_\varepsilon) s^l + \varepsilon g_2, \quad s \geq m \geq 0. \tag{1.24}$$

Portanto, por (1.22), (1.23), (1.24) e fazendo $\widehat{C}_\varepsilon = \varepsilon + \widetilde{C}_\varepsilon > 0$, tem-se

$$g_1(s) \leq \widehat{C}_\varepsilon s^l + \varepsilon g_2(s), \ \forall s \geq 0. \tag{1.25}$$

Agora, defina $G_i(z) = \displaystyle\int_0^z g_i(s)\, ds,$ com $i = 1, 2$. Integrando (1.25), temos

$$\int_0^s g_1(t)\, dt \leq \widehat{C}_\varepsilon \int_0^s t^l\, dt + \varepsilon \int_0^s g_2(t)\, dt, \quad \forall t \geq 0, \tag{1.26}$$

implicando em

$$G_1(s) \leq C_\varepsilon |s|^{l+1} + \varepsilon G_2(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{1.27}$$

com $C_\varepsilon = \frac{\widehat{C}_\varepsilon}{l+1}$. Agora, como a sequência $T(u_n) \downarrow I$, então a sequência $\|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ é limitada, isto é, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $\|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C_1$. Do teorema de imersões de Sobolev (veja Teorema (E.8), Apêndice E), existe uma constante $C_2 > 0$ satisfazendo

$$\|u_n\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 \|u_n\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = C_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = C_2 \|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C_3,$$

com $2^* = l + 1 = \frac{2N}{N-2}$ e $C_3 = C_1 C_2$. (A constante C_3 é positiva e também independe de n). Escrevendo $V(u_n) = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} 1 = \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{u_n} g(s)\, ds\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{u_n} (g_1(s) - g_2(s))\, ds\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)\, dx \end{aligned}$$

implicando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)\, dx + 1 \tag{1.28}$$

por (1.27) e fazendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$, temos que (1.28) implica em

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)\ dx + 1 &= \int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n)\ dx \\
&\leq C_{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*}\ dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)\ dx \qquad (1.29)\\
&= C_{\frac{1}{2}} \|u_n\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)\ dx
\end{aligned}$$

segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)\ dx \leq 2C_{\frac{1}{2}} \|u_n\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} - 1 \leq C_4 \tag{1.30}$$

com $C_4 = 2C_{\frac{1}{2}}C_3^2 - 1$. Agora, integrando (1.16) obtemos

$$G_2(u_n) = \int_0^{u_n} g_2(s)\ ds \geq \int_0^{u_n} ms\ ds = \frac{m}{2}u_n^2,$$

em seguida, integrando a desigualdade acima em $\mathbb{R}^N$ e por (1.30), obtemos

$$\frac{m}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2\ dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)\ dx \leq C_4$$

e a partir disto, podemos provar que $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ é limitado. Observe que

$$\|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2)\ dx = \|u_n\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2\ dx \leq C_5,$$

com $C_5 = C_1^2 + \frac{2}{m}C_4$. Novamente pelo Teorema de Imersões de Sobolev, concluisse que $\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ é limitada para qualquer $p,\ 2 \leq p \leq 2^*,\ N \geq 3$.

Etapa 4. Passagem ao limite. Inicialmente observemos que $u_n(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$ uniformemente com respeito a n. De fato, sabemos pelas etapas anteriores que u_n é radial, não crescente e limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$, segue do Lema Radial (B.3) (ver Apêndice B) que

$$|u_n(x)| \leq |x|^{-\frac{N}{2}} \left(\frac{N}{|S^{N-1}|}\right)^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C|x|^{-\frac{N}{2}},\ x \neq 0,$$

com C independente de n. Agora, como u_n é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pode-se extrair uma subsequência de u_n, novamente denotada por u_n, tal que

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H^1(\mathbb{R}^N). \tag{1.31}$$

Seja $u_n : B_R \to \mathbb{R}$ então $u_n \in H^1(B_R)$ e também limitada, logo (a menos de subsequência)

$$u_n \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad H^1(B_R),$$

daí

$$(u_n, \phi)_{H^1(B_R)} \longrightarrow (v, \phi)_{H^1(B_R)}, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(B_R).$$

Podemos supor que

$$\phi \in C_c^\infty(B_R) \Longrightarrow \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

mas por (1.31)

$$(u_n, \phi)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = (u_n, \phi)_{H^1(B_R)} \longrightarrow (u, \phi)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = (v, \phi)_{H^1(B_R)}.$$

Portanto,

$$(u, \phi)_{H^1(B_R)} = (v, \phi)_{H^1(B_R)}, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(B_R),$$

implicando que $u = v$ em B_R, logo

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^1(B_R),\ \forall R > 0.$$

Como $H^1(B_R) \hookrightarrow L^q(B_R)$ é compacta para $1 \leq q < 2^*$. Segue que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{q.t.p} \quad B_R,$$

a menos de subsequência, para $R = i$, defina recursivamente $u_{n_{ij}}$ a subsequência tal que

$$\lim_{j \to \infty} u_{n_{ij}} = u \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad B_i(0)$$

de modo que $u_{n_{(i+1)j}}$ é uma subsequência de $u_{n_{ij}}$, então a subsequência $u_{n_{jj}}$ é tal que

$$u_{n_{jj}}(x) \to u(x), \quad \text{quando} \quad j \to \infty, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

De fato, $x \in \mathbb{R}^N$ então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_i(0)$, observe que para $j \geq i$, temos que $u_{n_{jj}}$ é subsequência de $u_{n_{ij}}$, logo

$$\lim_{j \to \infty} u_{n_{jj}}(x) = \lim_{j \to \infty} u_{n_{ij}}(x) = u(x).$$

Portanto, existe u_n (a menos de uma subsequência), tal que

$$u_n \to u \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N.$$

Observe que esta convergência nos garante que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é radialmente simétrica e não crescente com relação ao raio $r > 0$.

Agora, seja $Q(s) = s^2 + |s|^{l+1}$. A partir de (1.15) e (1.16), obtemos

$$\frac{G_1(s)}{Q(s)} \to 0 \ \text{ quando } \ s \to +\infty \ \text{ e } \ \text{quando } \ s \to 0. \tag{1.32}$$

Sabemos também que

$$\begin{aligned}
\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} Q(u_n)\, dx &= \sup_n \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^2 + |u_n|^{l+1})\, dx \\
&= \sup_n \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{l+1}\, dx \right) \\
&= \sup_n \left(\|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u_n\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \right),\ 2^* = l+1 \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} Q(u_n)\, dx < +\infty; \tag{1.33}$$

$$G_1(u_n) \to G_1(u) \text{ q.t.p } \mathbb{R}^N; \tag{1.34}$$

$$u_n(x) \to 0 \text{ quando } |x| \to +\infty, \text{ uniformemente em } n. \tag{1.35}$$

Por (1.32)-(1.35) o Lema de Compacidade de Strauss (ver apêndice, Lema A.1) nos garante:

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n)\, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} G_1(u)\, dx \tag{1.36}$$

quando $n \to +\infty$. De (1.28), tem-se

$$\varliminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n)\, dx = \varliminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)\, dx + 1,$$

por (1.36) e em seguida aplicando o Lema de Fatou, a equação acima implica em

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u)\, dx + 1.$$

isto é,

$$V(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G_1(u)\ dx - \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u)\ dx \geq 1. \tag{1.37}$$

Por outro lado, sendo a norma uma função semicontínua inferiormente e o fato de que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, implicam que

$$T(u) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} T(u_n) = I.$$

Queremos mostrar que $V(u) = 1$. Suponhamos por contradição que $V(u) > 1$. Então, usando a mudança de variável $u_\sigma(x) = u(\frac{x}{\sigma})$ e tomando $\sigma = [V(u)]^{-\frac{1}{N}}$, tem-se

$$V(u_\sigma) = \sigma^N V(u) = 1$$

com $0 < \sigma < 1$. Além disso,

$$T(u_\sigma) = \sigma^{N-2} T(u) \leq \sigma^{N-2} I.$$

No entanto, pela definição de I, tem-se $I \leq T(u_\sigma)$. Mas, isto implicaria que $I = 0$, daí $T(u) = 0$, isto é, $u = 0$ contradizendo o fato que $V(u) > 0$. Daí,

$$V(u) = 1 \ \text{ e } \ T(u) = I > 0.$$

Portanto, u é solução do problema de minimização (1.9).

Etapa 5. Conclusão. Desde que V e T são de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$, existe um multiplicador de Lagrange θ tal que $\frac{1}{2}T'(u) = \theta V'(u)$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi\ dx = \theta \int_{\mathbb{R}^N} g(u)\varphi\ dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Observe que $\theta \neq 0$. De fato, se $\theta = 0$ teríamos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\ dx = 0. \int_{\mathbb{R}^N} g(u) u\ dx = 0, \quad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

implicando em $u = 0$, no qual é impossível, pois $V(u) = 1$. Vamos mostrar que $\theta > 0$. Suponha por contradição que $\theta < 0$. Observe que $V'(u) \neq 0$ ($V'(u) = 0$ resultaria que $g(u) \equiv 0$ quase todo ponto em $\mathbb{R}^N$, implicando que $u = 0$, desde que $g(s) \neq 0$ para $s > 0$ pequeno, contradizendo $V(u) = 1$). Considere a função $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ (o espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ é denominado o espaço das funções testes em Ω) tal que

$$V'(u)w = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{V(u + \varepsilon w) - V(u)}{\varepsilon} \right] > 0,$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno vale

$$V(u + \varepsilon w) - V(u) > 0,$$

ou seja,

$$V(u) < V(u + \varepsilon w). \tag{1.38}$$

Por outro lado, tem-se

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{T(u + \varepsilon w) - T(u)}{\varepsilon} \right] = T'(u)w = \theta_1 V'(u)w < 0,$$

pois $\theta_1 = 2\theta < 0$. Então, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, vale

$$T(u + \varepsilon w) - T(u) < 0,$$

isto é,

$$T(u + \varepsilon w) < T(u). \tag{1.39}$$

Fazendo $v = u + \varepsilon w$ com ε suficientemente pequeno, segue de (1.38) e (1.39) que

$$1 = V(u) < V(v) \text{ e } T(v) < T(u) = I.$$

Novamente, por uma mudança de variável, definisse

$$v_\sigma(x) := v\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

com $\sigma = [V(v)]^{-\frac{1}{N}}$ e $\sigma \in (0, 1)$ tal que $V(v_\sigma) = 1$ e $T(v_\sigma) < I$, o que é um absurdo, pela definição de I. Portanto, $\theta > 0$.

Então u satisfaz, ao menos em $H^1(\mathbb{R}^N)$ no sentido fraco, a equação

$$-\Delta u = \theta g(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N$$

e fazendo $u_{\sqrt{\theta}}(x) = u\left(\frac{x}{\sqrt{\theta}}\right)$, obtemos

$$-\Delta u_{\sqrt{\theta}} = \frac{\theta}{(\sqrt{\theta})^2} g(u_{\sqrt{\theta}}) \Rightarrow -\Delta u_{\sqrt{\theta}} = g(u_{\sqrt{\theta}}) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e portanto, $u_{\sqrt{\theta}}$ é uma solução fraca para $(\mathfrak{P})$.

$\blacksquare$

Observação 1.1 Em dimensão $N = 1$ e $N = 2$, no método usado na etapa 3 para obter a limitação da sequência (u_n) apresenta falhas (lembrando que a dimensão considerada neste trabalho é $N \geq 3$). Na verdade, o método de minimização restrita (1.9) não possui solução quando $N = 1$ ou $N = 2$. A razão desta falha é que nestas dimensões, o fato de $|\nabla u|$ ser limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$, por si só, não nos garante uma limitação de u no espaço $L^{l+1}(\mathbb{R}^N)$ $(l < +\infty)$. De fato, analisaremos separadamente cada caso:

Caso (i): $N = 2$. Por uma mudança de variável, tem-se a seguinte relação

$$T(u_\sigma) = T(u), \quad V(u_\sigma) = \sigma^2 V(u).$$

Então,

$$\inf_{\{V(u)=1\}} T(u) = \inf_{\{V(u)>0\}} T(u).$$

Agora, suponhamos por contradição que u_0 é solução de (1.9), tem-se

$$V(u_0) = 1 \quad \text{e} \quad T(u_0) = \min_{\{V(u)>0\}} T(u).$$

Portanto, u_0 é um "mínimo interior" para $T(u)$; assim $T'(u_0) = 0$ e daí $u_0 = 0$, uma contradição, pois $V(u_0) = 1$.

Caso (ii): $N = 1$. Neste caso, temos a seguinte mudança de variável,

$$T(u_\sigma) = \sigma^{-1} T(u), \quad V(u_\sigma) = \sigma V(u).$$

Escolhendo $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $V(w) = 1$. Recordando que

$$\overline{\lim_{s \to 0^+}} \frac{g(s)}{s} = -m < 0,$$

vejamos que existe $\theta_0 \in (0,1)$ tal que $V(\theta_0 w) = 0$ e $V(\theta w) > 0$ para $\theta_0 < \theta < 1$. Assim, $V(\theta w) \to 0^+$ quando $\theta \to \theta_0^+$. Fazendo $\sigma(\theta) = [V(\theta w)]^{-1}$ temos que $V(\theta w_{\sigma(\theta)}) = 1$. Agora,

$$T(\theta w_{\sigma(\theta)}) = [\sigma(\theta)]^{-1} T(\theta w) = \theta^2 V(\theta w) T(w).$$

Fazendo $\theta \to \theta_0$, isto mostra que $\inf\limits_{\{V(u)=1\}} T(u) = 0$. Uma contradição.

1.4 Propriedades adicionais da Solução.

Denotamos por $u = u(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, a solução para o problema $(\mathfrak{P})$ obtida pelo teorema (1.2). Para concluirmos a demonstração do Teorema (1.1), consideraremos a regularidade de u na subseção (1.4.1) e o decaimento exponencial da mesma, obtido na subseção (1.4.2). Por fim, na subseção (1.4.3) mostramos que u possui ação mínima entre todas as soluções possíveis de $(\mathfrak{P})$, isto é, que u é uma solução ground state.

1.4.1 Regularidade.

Nesta subseção, mostramos que a solução obtida pelo teorema (1.2) é clássica. Notemos que a condição (**g3**) não é usada na demonstração deste fato.

Lema 1.1 *Sob as condições (**g1**), (**g2 bis**), se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução de $(\mathfrak{P})$ esfericamente simétrica, então $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e ímpar que satisfaz as condições (**g1**) e (**g2 bis**) (veja página 27). Tomando $m, \delta, \varepsilon > 0$, por (**g2 bis**) existe uma constante $C > 0$ tal que

$$u \leq \delta < 1 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{g(u)}{u} < \varepsilon < C + u^{\frac{4}{N-2}} \tag{1.40}$$

$$\delta \leq u < m \;\;\Rightarrow\;\; \frac{g(u)}{u} < C < C + u^{\frac{4}{N-2}} \tag{1.41}$$

$$m \leq u \;\; \Rightarrow \;\; \frac{g(u)}{u} \leq \varepsilon u^{l-1} < C + u^{\frac{4}{N-2}}, \tag{1.42}$$

de (1.40) a (1.42), obtemos que

$$\left| \frac{g(u)}{u} \right| \leq C + |u|^{\frac{4}{N-2}} \tag{1.43}$$

Sendo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ a solução de $(\mathfrak{P})$, temos que u satisfaz a equação

$$-\Delta u = q(x)u \;\; \text{em} \;\; \mathbb{R}^N, \tag{1.44}$$

com

$$q(x) = \frac{g(u(x))}{u(x)}.$$

Por (1.43), tem-se

$$|q(x)| = \left| \frac{g(u)}{u} \right| \leq C + |u|^{\frac{4}{N-2}}. \tag{1.45}$$

Como $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $N \geq 3$, pelo Teorema de Imersões de Sobolev, tem-se $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Note que

$$2^* = \frac{4}{N-2} \cdot \frac{N}{2},$$

segue de (1.45) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |q(x)|^{\frac{N}{2}} \; dx < \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{4}{N-2} \cdot \frac{N}{2}} \; dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} \; dx < \infty,$$

portanto, $q \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$. Agora, usando o resultado de [14] (ver apêndice E, página 80, lema (E.4)), obtemos que $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq p < \infty$. Fixado $R > 0$, como $W^{1,p}(B_R) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\overline{B_R})$, para $p > N$, tem-se $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Logo, $g(u) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Assim para estimativas L^p, $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e consequentemente, $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha \in (0,1)$.

Observe que, pelo fato de $u(x) = u(r) = u(|x|)$ ser uma função radial, o laplaciano Δu é dado por

$$-\Delta u = -u_{rr} - \frac{N-1}{r} \; u_r$$

com

$$u_r = \frac{du}{dr} \quad \text{e} \quad u_{rr} = \frac{d^2 u}{dr^2}.$$

De fato, como

$$r = |x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

temos

$$r_{x_i} = \frac{1}{2}\frac{2x_i}{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_i}{r}\cdot$$

Logo,

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = u_r\frac{x_i}{r}$$

e

$$u_{x_ix_i} = u_{rr}\frac{x_i}{r}\frac{x_i}{r} + u_r\left(\frac{r - \frac{x_i^2}{r}}{r^2}\right) = u_{rr}\frac{x_i^2}{r^2} + u_r\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right),$$

donde,

$$-\Delta u = -\sum_{i=1}^N u_{x_ix_i} = -u_{rr}\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{r^2} - u_r\sum_{i=1}^N\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) = -u_{rr} - \left(\frac{N-1}{r}\right)u_r,$$

como u satisfaz a equação

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

tem-se (no sentido fraco)

$$-u_{rr} - \left(\frac{N-1}{r}\right)u_r = g(u), \quad r \in (0, +\infty) \tag{1.46}$$

novamente usando a teoria de regularidade, segue que u_{rr} é continua em $(0, +\infty)$. Denotando $v(r) = g(u(r))$, vamos mostrar que u_{rr} também é continua em $r = 0$. Observe que v é continua em $[0, +\infty)$. Reescrevendo (1.46) como

$$-\frac{d}{dr}(r^{N-1}u_r) = r^{N-1}v(r)$$

e, em seguida, integrando de 0 a r, obtemos

$$r^{N-1}u_r = -\int_0^r s^{N-1}v(s)\, ds,$$

implicando em

$$u_r = -\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}v(s)\, ds.$$

Fazendo uma mudança de variável $s = rt$, tem-se

$$u_r = -\frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r (rt)^{N-1} v(rt) r \; dt = -r \int_0^1 t^{N-1} v(rt) \; dt,$$

ou

$$\frac{u_r}{r} = -\int_0^1 t^{N-1} v(rt) \; dt.$$

Observe que

$$\lim_{r \to 0} \int_0^1 t^{N-1} v(rt) \; dt = \int_0^1 t^{N-1} v(0) \; dt = \frac{t^N}{N} v(0) \Big|_0^1 = \frac{v(0)}{N}.$$

Pela simetria radial, temos que $u_r(0^+) = -u_r(0^-)$, no entanto, como u_r existe (pois, $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$), temos que $u_r(0^+) = u_r(0^-)$. Daí, devemos ter $u_r(0) = 0$.

Assim,

$$u_{rr}(0) = \lim_{r \to 0} \frac{u_r(r) - u_r(0)}{r} = \lim_{r \to 0} \frac{u_r(r)}{r} = -\frac{v(0)}{N} \cdot$$

Além disso, pela equação (1.46), tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0} u_{rr}(r) &= \lim_{r \to 0} \left((1-N) \frac{u_r(r)}{r} - v(r) \right) \\ &= (1-N) \lim_{r \to 0} \left(\frac{u_r(r)}{r} \right) - \lim_{r \to 0} v(r) \\ &= (1-N) \left(-\frac{v(0)}{N} \right) - v(0) \\ &= -\frac{v(0)}{N} \cdot \end{aligned}$$

Logo, u_{rr} é continua em $[0, +\infty)$. Portanto, $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.

■

Proposição 1.2 *Se $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ é uma solução de $(\mathfrak{P})$ dada pelo Teorema (1.2), então $u(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Além disso, u é decrescente em relação ao raio r, ou seja, $u'(x) < 0$ para todo $r > 0$.*

Demonstração: Por hipótese, u satisfaz

$$-\Delta u = g(u) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

com $u \geq 0$. Tomando $C > 0$ suficientemente grande de modo que, para todo u,

$$Cu + g(u) \geq 0,$$

ou melhor, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$Cs + g(s) \geq 0,$$

então

$$-\Delta u + Cu = Cu + g(u) \geq 0$$

implicando em

$$-\Delta u + Cu \geq 0, \quad \text{em } B_R.$$

Se existir $x_0 \in B_R$ tal que $u(x_0) = 0$ (minimo não positivo), pelo Principio do Máximo Forte tem-se $u \equiv \textit{constante}$ em B_R, que é uma contradição, pois $u \not\equiv 0$. Portanto, $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Agora, seja $r > 0$ arbitrário e definamos

$$v(x) = u(x) - \min_{x \in B_r} u(x), \ x \in B_r.$$

De $-\Delta u = g(u) \geq 0$, tem-se

$$-\Delta v = -\Delta u = g(u) \geq 0 \text{ em } B_r.$$

Além disso,

$$v(x) = u(x) - \min_{x \in B_r} u(x) \geq 0, \ \forall x \in B_r.$$

Notemos que, pelo principio do máximo fraco, para $x_0 \in \partial B_r$, temos

$$v(x_0) = u(x_0) - \min_{x \in B_r} u(x) = 0.$$

Segue então do Lema de Hopf (veja Apêndice E, Lema E.3), que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) < 0,$$

com η denotando a normal unitária exterior e sendo u radialmente simétrica, tem-se

$$u'(r) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0,$$

como $r > 0$ foi considerado arbitrariamente, concluisse que $u'(r) < 0,\ \forall r > 0$. Assim, u é decrescente em relação ao raio $r > 0$.

1.4.2 Decaimento Exponencial

O decaimento de u, $|D^\alpha u|$ no infinito é provado no próximo lema.

Lema 1.2 *Sob as condições (**g1**), (**g2 bis**), se u é uma solução radialmente simétrica de $(\mathfrak{P})$, então*

$$|D^\alpha u| \leq Ce^{-\delta|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

para algum $C, \delta > 0$ e para $|\alpha| \leq 2$.

Demonstração: O decaimento exponencial de u no infinito decorre de um argumento padrão de equações diferenciais ordinárias (ver [47]).

Pelo Lema (1.1) tem-se $u = u(r)$ é de classe $C^2(\mathbb{R}^N)$ e consequentemente, satisfaz a equação (1.46). Fazendo $v(r) = r^{\frac{N-1}{2}}u(r)$; segue que $v = v(r)$ satisfaz

$$v_r = \frac{(N-1)}{2} r^{\frac{N-3}{2}} u + r^{\frac{N-1}{2}} u_r$$

e

$$\begin{aligned} v_{rr} &= \frac{(N-1)(N-3)}{4} r^{\frac{N-5}{2}} u + \frac{(N-1)}{2} r^{\frac{N-3}{2}} u_r + \frac{(N-1)}{2} r^{\frac{N-3}{2}} u_r + r^{\frac{N-1}{2}} u_{rr} \\ &= \frac{(N-1)(N-3)}{4} r^{\frac{N-5}{2}} u + \left[\frac{(N-1)}{r} u_r + u_{rr}\right] r^{\frac{N-1}{2}} \\ &= \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} \left(r^{\frac{N-1}{2}} u\right) - \frac{g(u)}{u} \left(r^{\frac{N-1}{2}} u\right) \\ &= \left[\frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} - \frac{g(u)}{u}\right] v, \end{aligned}$$

fazendo

$$q(r) = -\frac{g(u(r))}{u(r)} \ \text{ e } \ b = \frac{(N-1)(N-3)}{4},$$

obtemos

$$v_{rr} = \left[q(r) + \frac{b}{r^2} \right] v$$

Para r suficientemente grande, isto é, $r \geq r_0$, tem-se

$$q(r) + \frac{b}{r^2} \geq \frac{m}{2}$$

(lembrando que pelo Lema Radial (B.1) na apêndice temos $u(r) \to 0$ quando $r \to 0$).

Seja $w = v^2$, então $w = w(r)$ verifica

$$\frac{1}{2} w_{rr} = v_r^2 + v v_{rr},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} w_{rr} = v_r^2 + \left[\left(q(r) + \frac{b}{r^2} \right) v \right] v = v_r^2 + \left[q(r) + \frac{b}{r^2} \right] w.$$

Assim, para $r \geq r_0$ tem-se

$$\frac{1}{2} w_{rr} \geq v_r^2 + \frac{mw}{2} \geq \frac{mw}{2},$$

implicando em

$$w_{rr} \geq mw \quad \text{e} \quad w \geq 0.$$

Agora, seja $z = e^{-\sqrt{m}r}(w_r + \sqrt{m}w)$. Observe que $z = z(r)$ verifica

$$z_r = e^{-\sqrt{m}r}(-\sqrt{m})(w_r + \sqrt{m}w) + e^{-\sqrt{m}r}(w_{rr} + \sqrt{m}w_r) = e^{-\sqrt{m}r}(w_{rr} - mw),$$

logo $z_r \geq 0$ e portanto, z é uma função não-decrescente em $(r_0, +\infty)$. Se existe $r_1 > r_0$ tal que $z(r_1) > 0$, então para todo $r \geq r_1$ tem-se

$$z(r) \geq z(r_1) > 0 \Leftrightarrow w_r + \sqrt{m}w \geq [z(r_1)] e^{\sqrt{m}r},$$

onde $w_r + w\sqrt{m}$ não é integrável em $(r_1, +\infty)$. No entanto, v^2 e vv_r são integráveis perto do infinito (para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$), de modo que w_r e w sejam integráveis, uma contradição. Portanto,

$$z(r) \leq 0 \quad \text{para} \quad r \geq r_1.$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}\left(e^{\sqrt{m}r}w\right)_r &= e^{\sqrt{m}r}\sqrt{m}w + e^{\sqrt{m}r}w_r \\ &= e^{\sqrt{m}r}(\sqrt{m}w + w_r) \\ &= e^{\sqrt{m}r}\cdot e^{\sqrt{m}r}z \\ &= e^{2\sqrt{m}r}z,\end{aligned}$$

portanto,

$$\left(e^{\sqrt{m}r}w\right)_r = e^{2\sqrt{m}r}z \leq 0 \quad \text{para} \quad r \geq r_1. \tag{1.47}$$

Agora, definindo $f(r) = e^{\sqrt{m}r}w(r)$, com $r \geq r_1$, por (1.47) tem-se f não-crescente, isto é,

$$f(r) \leq f(r_1) = C \Leftrightarrow e^{\sqrt{m}r}w(r) \leq C.$$

Portanto,

$$w(r) \leq Ce^{-\sqrt{m}r}$$

Agora,

$$Ce^{-\sqrt{m}r} \geq w(r) = v^2 = (r^{\frac{N-1}{2}}u(r))^2 = r^{N-1}[u(r)]^2$$

segue que

$$|u(r)| \leq Cr^{\frac{1-N}{2}}e^{-\frac{\sqrt{m}}{2}r} \quad \text{para} \quad r \geq r_1, \tag{1.48}$$

para certas constantes positivas C e r_1.

Para obtermos o decaimento exponencial de u_r, observe primeiramente que u_r satisfaz

$$\left(r^{N-1}u_r\right)_r = -r^{N-1}g(u). \tag{1.49}$$

Portanto, usando (**g1**) e o decaimento exponencial de u é fácil ver que para r suficientemente grande, isto é, para $r \geq r_0$ tem-se

$$m_1|u| \leq |g(u)| \leq m_2|u|,$$

com $m_2 \geq m_1 > 0$. Daí, integrando (1.49) em (r, R), usando (1.48) e fazendo $r \to +\infty$ e $R \to +\infty$ mostramos que existe o limite de $r^{N-1}u_r$ quando $r \to +\infty$, por (1.48) este limite só pode ser zero. Integrando (1.48) em $(r, +\infty)$ temos que u_r tem decaimento exponencial. Por fim, o decaimento exponencial de u_{rr} (e assim $|D^\alpha u(x)|$ para $|\alpha| \leq 2$) segue imediatamente da equação (1.46).

■

1.4.3 Ação mínima entre as soluções de ($\mathfrak{P}$).

Pelo resultado de [23] a solução de ($\mathfrak{P}$) obtido pelo método de minimização restrita na seção (1.3) possui uma importante propriedade de minimizar a ação entre todas as soluções de ($\mathfrak{P}$). A prova desse fato, que agora apresentamos, baseia-se essencialmente na identidade de Pohozaev. Portanto é crucial, saber que qualquer solução de ($\mathfrak{P}$) satisfaz esta identidade.

Teorema 1.3 *Seja u a solução de ($\mathfrak{P}$), obtida no Teorema* (1.2). *Então para qualquer solução v de ($\mathfrak{P}$) tem-se*

$$0 \leq S(u) \leq S(v).$$

Demonstração: Seja $\overline{u}$ a solução de (1.9) obtida no Teorema (1.2), de modo que

$$V(\overline{u}) = 1 \;\text{ e }\; T(\overline{u}) = min\{T(w); w \in H^1(\mathbb{R}^N), V(w) = 1\}.$$

Então, como vimos anteriormente, existe um multiplicador de Lagrange $\theta > 0$ tal que

$$-\Delta\overline{u} = \theta g(\overline{u}) \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N,$$

e por hipótese, $u = u(x)$ satisfaz

$$u(x) = \overline{u}_{\sqrt{\theta}} = \overline{u}\left(\frac{x}{\theta^{\frac{1}{2}}}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Pela Identidade de Pohozaev, tem-se

$$T(u) = \frac{2N}{N-2}V(u), \tag{1.50}$$

com as relações de mudança de variável entre u e $\overline{u}$, obtemos

$$T(u) = \theta^{\frac{N-2}{2}}T(\overline{u}) \tag{1.51}$$

e

$$V(u) = \theta^{\frac{N}{2}}V(\overline{u}) = \theta^{\frac{N}{2}}. \tag{1.52}$$

Substituindo (1.51) e (1.52) em (1.50), obtemos

$$\theta = \frac{N-2}{2N}T(\overline{u}).$$

Pelo corolário (1.2), o funcional ação S para uma solução de $(\mathfrak{P})$ é dada pela expressão

$$S(u) = \frac{1}{N}T(u).$$

Assim, substituindo (1.51) na equação acima, obtemos

$$S(u) = \frac{1}{N}\theta^{\frac{N-2}{2}}T(\overline{u}) = \frac{1}{N}\left[\frac{N-2}{2N}T(\overline{u})\right]^{\frac{N-2}{2}}T(\overline{u}) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}}[T(\overline{u})]^{\frac{N}{2}}$$

Portanto,

$$S(u) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}}[T(\overline{u})]^{\frac{N}{2}}. \tag{1.53}$$

Agora, seja v uma solução arbitrária de $(\mathfrak{P})$, por (1.50) temos

$$0 < T(v) = \frac{2N}{N-2}V(v). \tag{1.54}$$

implicando que $V(v) > 0$. Definindo

$$v_\sigma(x) := v\left(\frac{x}{\sigma}\right) \quad \text{com} \quad \sigma = [V(v)]^{-\frac{1}{N}},$$

temos $\sigma > 0$ tal que

$$V(v_\sigma(x)) = V\left(v\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right) = \theta^N V(v(x)) = 1,$$

daí

$$v_\sigma(x) \in W = \{w \in H^1(\mathbb{R}^N), V(w) = 1\}.$$

Usando a definição de σ e por (1.54), obtemos

$$\sigma = \left[\frac{N-2}{2N} T(v)\right]^{-\frac{1}{N}} = \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{-\frac{1}{N}} [T(v)]^{-\frac{1}{N}} \tag{1.55}$$

Por outro lado, pelas relações de mudança de variável ente v e v_σ, temos

$$T(v_\sigma) = \sigma^{N-2} T(v),$$

então usando (1.55), segue que

$$T(v_\sigma) = \left[\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{-\frac{N-2}{N}} [T(v)]^{-\frac{N-2}{N}}\right] T(v) = \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{-\frac{N-2}{N}} [T(v)]^{-\frac{2}{N}}$$

e, portanto,

$$T(v) = \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{N}} [T(v_\sigma)]^{-\frac{N}{2}}.$$

Do corolário (1.2), tem-se

$$S(v) = \frac{1}{N} T(v) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{N}} [T(v_\sigma)]^{-\frac{N}{2}}. \tag{1.56}$$

Sendo $\overline{u}$ solução do problema de minimização (1.9) e $V(v_\sigma) = 1$, tem-se

$$0 < T(\overline{u}) \leq T(v_\sigma)$$

implicando em

$$0 < [T(\overline{u})]^{\frac{N}{2}} \leq [T(v_\sigma)]^{\frac{N}{2}},$$

isto é,

$$0 < \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{N}} [T(\overline{u})]^{\frac{N}{2}} \leq \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{N}} [T(v_\sigma)]^{\frac{N}{2}}.$$

e daí, usando as expressões (1.53) e (1.56), obtemos

$$0 < S(u) \leq S(v).$$

■

1.5 Demonstração do Teorema (1.1):

Pelo Teorema (1.2), existe uma solução $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ de $(\mathfrak{P})$ que é positiva, radialmente simétrica e decrescente com relação ao raio $r > 0$. Do Lema (1.1), obtemos que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e, consequentemente, $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$ e decrescente em relação ao raio. Além disso, o Lema (1.2) nos garante que u juntamente com suas derivadas a menos de ordem 2 possuem decaimento exponencial no infinito.

$\blacksquare$

Observação 1.2 *Por outro lado, pelo Teorema* (1.3) *concluímos que* $\overline{u}$ *definido em* (7) *está bem definida. Além disso, se* u *é uma solução de* $(\mathfrak{P})$ *dada pelo Teorema* (1.2), *segue do Teorema* (1.3) *que* $S(u) = \overline{u}$, *ou seja,* u *é ground state.*

Capítulo 2

O caso massa zero.

Como vimos na seção (1.2) do capítulo 1, quando $g'(0) = 0$ temos um caso limite do ponto de vista dos resultados de existência. De fato, vimos que, quando $g'(0) > 0$ não há soluções para o problema $(\mathfrak{P})$, enquanto para $g'(0) < 0$, aplicamos o Teorema (1.1). Chamamos o caso $g'(0) = 0$, o caso massa zero. Nesta seção, provamos um resultado de existência que é mais geral do que o Teorema (1.1), pois também inclui situações onde $g'(0) = 0$.

Neste capítulo, considerasse $N \geq 3$ e o espaço de Hilbert

$$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N), i = 1, 2, ..., N\right\}, \quad 2^* = \frac{2N}{N-2}$$

munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para o leitor interessado em saber um pouco mais a respeito do espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, recomendamos a referência [52].

Diferente do Capitulo 1, definisse $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função continua satisfazendo:

(G1) $g(0) = 0$ e $\overline{\lim_{s \to 0^+}} \dfrac{g(s)}{s^l} \leq 0$, com $l = \dfrac{N+2}{N-2}$;

(G2) Existe $\zeta > 0$ tal que $G(\zeta) > 0$;

(G3) Seja $\zeta_0 = \inf\{\zeta > 0; G(\zeta) > 0\}$. Se $g(s) > 0, \forall s > \zeta_0$, então $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{s^l} = 0$.

Teorema 2.1 *Sob as hipóteses **(G1)**-**(G3)** existe uma solução u positiva, radialmente simétrica e decrescente com relação ao raio $r > 0$ que satisfaz a equação*

$$-\Delta u = g(u) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

tal que $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, u é uma solução clássica, isto é, $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Inicialmente, precisamos modificar a função g da mesma maneira que fizemos na seção (1.3) do Capitulo 1. Defina $\widetilde{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como segue:

(i) Se $g(s) \geq 0$ para todo $s \geq \zeta$, defina $g = \widetilde{g}$;

(ii) Caso contrario, se $\exists\ s_0 \geq \zeta$ tal que $g(s_0) \leq 0$, defina

$$\widetilde{g}(s) = \begin{cases} g(s) & \text{em} \quad [0, s_0] \\ 0 & \text{para} \quad s \geq s_0. \end{cases}$$

Para $s \leq 0$, $\widetilde{g}$ é definida (como g) por $\widetilde{g} = -g(-s)$. Novamente denotaremos por g a função truncada $\widetilde{g}$. Lembrando que $\widetilde{g}$ é ímpar e satisfaz as mesmas condições que g e que soluções de $(\mathfrak{K})$ com $\widetilde{g}$ são também soluções de $(\mathfrak{K})$ com g.

Esta demonstração, baseia-se no método de minimização restrita, tal como foi visto seção (1.3) do Capitulo 1. Portanto, considere o problema

$$\min\{T(w); w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), |G(w)| \in L^1(\mathbb{R}^N), V(w) = 1\} \tag{2.1}$$

com

$$T(w) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2\, dx \quad \text{e} \quad V(w) = \int_{\mathbb{R}^N} G(w)\, dx.$$

Dividiremos a demonstração deste teorema em 3 etapas:

5a. Existência de uma solução para o problema de minimização (2.1);

5b. Existência de um multiplicador de Lagrange $\theta > 0$;

5c. Regularidade da solução de $(\mathfrak{K})$.

Etapa 5a. Existência de uma solução para o problema de minimização (2.1);

Tomando a mesma função w_R usada na **Etapa 1** da demonstração do Teorema (1.2) (página 28), observe que $w_R \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. De fato, como $w_R \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que $\nabla w_R \in L^2(\mathbb{R}^N)$, então basta verificar se a função $w_R \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Pelo Teorema de Imersões de Sobolev (veja apêndice E), para $N \geq 3$, existe uma constante C_1 tal que

$$\|w_R\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \|w_R\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} < \infty.$$

Assim, o conjunto

$$A = \{w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N);\ |G(w)| \in L^1(\mathbb{R}^N),\ V(w) = 1\}$$

é não vazio. Seja $(u_n) \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minimizante para (2.1), isto é,

$$u_n \in A \ \text{ e } \ T(u_n) \downarrow I = \inf\{T(w); w \in A\} \ \text{ quando } \ n \uparrow +\infty.$$

Podemos sempre supor, como na **Etapa 2** do Teorema (1.1), que (u_n) é não negativa, radialmente simétrica e não crescente (De fato, se $(|u_n|)$ é uma sequência minimizante, então (u_n^*) também é, onde (u_n^*) é a simetrização de Schwarz de $|u_n|$; Note que não há dificuldade em definir a simetrização de Schwarz em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, pois é análoga à definição de simetrização de Schwarz em $H^1(\mathbb{R}^N)$).

Assim, $\|u_n\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}$ e, portanto, $\|u_n\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}$ permanecem limitadas (resultado obtido na **Etapa 3** do teorema (1.2), página 31-34).

Após o truncamento de g, pela hipótese de (**G3**), existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|g(u)| \leq |s|^l, \quad |s| \geq M.$$

Por outro lado, pela continuidade da função g, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$|g(s)| \leq C_2, \quad |s| \leq M.$$

Portanto,

(G3 bis) $$|g(s)| \leq C_2 + |s|^l, \ s \in \mathbb{R};$$

Em seguida, integrando (**G3 bis**) em $(0, u_n)$, temos

$$|G(u_n)| \ \leq \ C_2|u_n| + (C_2+1)|u_n|^{2^*},$$

denotando w_N o volume da bola unitária, integrando em B_R a desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |G(u_n)| \ dx &\leq C_2|B_R| + \int_{B_R} (C_2+1)|u_n|^{2^*} \ dx \\ &\leq C_2 w_N R^N + (C_2+1)\left[\sup \int_{B_R} |u_n|^{2^*} \ dx\right]. \end{aligned}$$

fazendo $C_3 = C_2 w_N$ e $C_4 = (C_2+1)\left[\sup \int_{B_R} |u_n|^{2^*} \ dx\right]$, segue que

$$\int_{B_R} |G(u_n)| \ dx \leq C_3 R^N + C_4. \tag{2.2}$$

Além disso,

$$|u_n| \leq \beta(r), \tag{2.3}$$

em que $\beta(r)$ é independente de n e

$$\lim_{r \to +\infty} \beta(r) = 0.$$

De fato, pelo Lema Radial (B.2) (Apêndice B página 62), temos

$$|u_n(x)| \leq C_N |x|^{\frac{2-N}{2}} \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}, \quad |x| \geq 1,$$

com C_N denotando uma constante que depende somente de N. Observe que, como $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ é limitada, existe uma constante $C_5 > 0$ tal que

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|\nabla u\|_{L^2(R^N)} \leq C_5$$

e, tomando $\alpha = (N-2)/2$, tem-se

$$C_N |x|^{-\alpha} \leq r^{-\alpha}, \quad r > 0.$$

Assim,

$$|u_n(x)| \leq C_5 r^{-\alpha}$$

dessa forma, $\alpha > 0$ depende apenas de N e C_5 apenas de $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, a qual é limitada. Portanto, fazendo $\beta(r) = C_5 r^{-\alpha}$, tem-se $\beta(r) \to 0$ quando $r \to +\infty$.

Agora, como $V(u_n) = 1$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} G(u_n)\ dx = 1 - \int_{B_R} G(u_n)\ dx$$

por (2.2), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} G(u_n)\ dx \geq 1 - C_3 R^N - C_4 \tag{2.4}$$

Definindo $g^+ = \max\{g, 0\}$, $g^- = (-g)^+$ de modo que $g = g^+ - g^-$, $g^+, g^- \geq 0$ e

$$G_1(z) = \int_0^z g^+(s)\ ds, \quad G_2(z) = \int_0^z g^-(s)\ ds.$$

Resulta,

$$G(z) = \int_0^z g(s)\ ds = \int_0^z (g^+(s) - g^-(s))\ ds = G_1(z) - G_2(z). \tag{2.5}$$

Por (2.4) e por (2.5), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} G_2(u_n)\ dx \leq C_3 R^N + C_4 - 1 + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} G_1(u_n)\ dx. \tag{2.6}$$

Como u_n é não crescente, isto é,

$$0 \leq u_n(r) \leq u_n(R), \quad \text{se } r \geq R,\ n \in \mathbb{N},$$

por (2.3) e para R suficientemente grande, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 \leq u_n(r) \leq \beta(R) < \delta, \quad \text{uniformemente em } n, \tag{2.7}$$

para $r \geq R$, $n \in \mathbb{N}$ e $\beta(R) \to 0$ quando $R \to +\infty$. Da condição (**G1**), dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$G_1(s) \leq \frac{(\varepsilon + m)}{2^*}|s|^{2^*}, \quad \forall |s| < \delta, \quad 2^* = l + 1,$$

com $m > 0$, logo por (2.7), temos

$$0 \leq G_1(u_n(r)) \leq \frac{(\varepsilon + m)}{2^*}|u_n(r)|^{2^*}, \quad r \geq R, \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Além disso, podemos supor $\varepsilon(R) \to 0$ quando $R \to +\infty$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |G_1(u_n)| \, dx \leq \frac{(\varepsilon + m)}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |u_n|^{2^*} \, dx \leq \frac{(\varepsilon + m)}{2^*} C_6, \tag{2.9}$$

uniformemente em n para alguma constante $C_6 > 0$. Isto juntamente com (2.2), mostra que $|G_1(u_n)|$ é limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Sendo (u_n) limitada em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, podemos extrair uma subsequência de (u_n), a qual ainda denotamos por (u_n), tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e tal qual na página 35 podemos supor que $u_n \to u$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Observe que esta última convergência implica que u é não negativa q.t.p em $(\mathbb{R}^N)$, radialmente simétrica e não crescente. Agora, usando **(G3 bis)**, para qualquer R, desde que u_n é limitada em $H^1(B_R)$, temos

$$\int_{B_R} G_1(u_n) \, dx \longrightarrow \int_{B_R} G_1(u) \, dx \tag{2.10}$$

quando $n \to +\infty$. Por (2.9), tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |G_1(u_n)| \, dx \longrightarrow 0 \tag{2.11}$$

quando $R \to +\infty$, uniformemente com respeito a n. Então por (2.10) e (2.11), obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n) \, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} G_1(u) \, dx. \tag{2.12}$$

De $V(u_n) = 1$ e por (2.5), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n) \, dx = 1 + \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n) \, dx \tag{2.13}$$

segue que

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n)\ dx = 1 + \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n)\ dx,$$

usando (2.12) no primeiro membro da equação acima e o lema de Fatou no segundo membro, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u)\ dx \geq 1 + \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u)\ dx,$$

ou seja, $V(u) \geq 1$ e também, $G_1(u), G_2(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Por outro lado, sabemos que

$$T(u) \leq \lim_{n\to+\infty} T(u_n) \equiv I.$$

Assim, como na demonstração do Teorema (1.2), concluísse que $V(u) = 1$, isto é, $u \in A$ e $T(u) = I$. Portanto, u é solução do problema de minimização (2.1).

Etapa 5b. Existência de um multiplicador de Lagrange $\theta > 0$;

Agora, vamos provar que existe um $\theta \neq 0$ tal que

$$-\Delta u = \theta g(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N.$$

Observe que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ em qualquer região

$$C_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N, \varepsilon < |x| < 1/\varepsilon\}$$

para $0 < \varepsilon < 1$. Denotando por $\mathcal{D}_r^{1,2}$ o espaço de funções radiais em $\mathcal{D}^{1,2}$, observamos também que u é uma solução para o problema de minimização

$$\min\{T(w); w \in \mathcal{D}_r^{1,2}, w = u \in (\mathbb{R}^N \setminus C_\varepsilon), V(w) = 1\}.$$

Este é um problema clássico no calculo das variações, com T e V funcionais de classe C^1 em $H^1(C_\varepsilon)$. Portanto, existe uma constante θ tal que

$$-\Delta u = \theta g(u)$$

no sentido de $\mathcal{D}'(C_\varepsilon)$, para todo $\varepsilon > 0$. Isto é,

$$-\Delta u = \theta g(u) \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}).$$

Para ver que a equação acima é satisfeita na origem, usamos um resultado de [21] sobre singularidades de soluções elípticas semi-lineares. De fato, se $u \in H^1(B_1)$ satisfaz

$$-\Delta u = \theta g(u) \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(B_1 \setminus \{0\})$$

e g verifica a condição **(G3 bis)**, então a equação também é aplicável na origem:

$$-\Delta u = \theta g(u) \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

A possibilidade $\theta = 0$ é descartada pelo fato que $V(u) = 1$. Também, podemos eliminar o caso $\theta < 0$, pelo mesmo argumento usado na etapa 5 do Teorema (1.2)(página 37). De fato, se $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ é tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(u)w \, dx > 0$$

então para $\theta < 0$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a função $v = u + \varepsilon w$ satisfaz

$$V(v) > V(u) = 1 \quad \text{e} \quad T(v) < T(u).$$

No entanto, como vimos por uma simples mudança de variável isso é impossível, consequentemente, $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ satisfaz $-\Delta u = \theta g(u)$ em $\mathbb{R}^N$, com $\theta > 0$.

Etapa 5c. Regularidade da solução de $(\mathfrak{P})$.

Usando uma mudança de variável, encontramos que $u_{\sqrt{\theta}}$ na qual denotamos novamente por u nesta seção, é uma solução positiva, esfericamente simétrica e não crescente de $(\mathfrak{P})$. Escrevendo $(\mathfrak{P})$ como

$$-\Delta u = q(x)u \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N,$$

onde $q(x) = g(u(x))/u(x)$. Por **(G3 bis)**, $q \in L^{N/2}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Desde que $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, encontramos a partir de um resultado de [19] que $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq p < \infty$. Argumentado como antes, vemos que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.

Apêndice A

Lema de Compacidade de Strauss

Recordamos aqui um resultado de compacidade (usado na seção (1.3)) devido a Strauss [55].

Teorema A.1 *Seja P e $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas satisfazendo*

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \to 0 \quad \textit{quando} \quad |s| \to +\infty.$$

Se $u_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma sequência de funções mensuráveis tal que

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} |Q(u_n(x))| \, dx < +\infty$$

e $P(u_n(x)) \to v(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$, quando $n \to +\infty$. Então para qualquer conjunto de Borel $\mathcal{B}$ limitado temos

$$\int_{\mathcal{B}} |P(u_n(x)) - v(x)| \, dx \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to +\infty.$$

Se além disso assumirmos que

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \to 0 \quad \textit{quando} \quad |s| \to 0$$

e $u_n(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$, uniformemente em n, então $P(u_n)$ converge para v em $L^1(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to +\infty$.

Demonstração: Veja [9], página 339. ■

Apêndice B

Alguns Lemas Radiais

Enunciamos aqui, alguns lemas radiais úteis sobre o decaimento uniforme no infinito de certas funções radiais. O primeiro é devido novamente a Strauss [55].

Lema B.1 *Seja $N \geq 2$. Toda função radial $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é igual q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ a uma função $U(x)$, contínua para $x \neq 0$, tal que*

$$|U(x)| \leq C_N |x|^{\frac{(1-N)}{2}} ||u||_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad |x| \geq \alpha_N, \tag{B.1}$$

com C_N e α_N dependendo somente da dimensão de N.

Demonstração: Veja [9], página 340. ■

Em seguida, enunciamos um lema radial (da mesma maneira que o lema anterior) para o espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Lembramos que $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ denota o fecho de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ para a norma

$$\|\varphi\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 \, dx.$$

Então (ver [52]) pela desigualdade de Sobolev, $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, para $N \geq 3$, com $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$.

Lema B.2 *Seja $N \geq 3$. Toda função radial $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é quase sempre igual a uma função $U(x)$, contínua para $x \neq 0$, tal que*

$$|U(x)| \leq C_N |x|^{\frac{2-N}{2}} \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}, \ |x| \geq 1, \tag{B.2}$$

com C_N depende somente de N.

Demonstração: Veja [9], página 340. ■

Lema B.3 *Se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < +\infty$, é uma função radial não crescente (isto é, $o \leq u(x) \leq u(y)$ se $|x| \geq |y|$), então tem-se*

$$|u(x)| \leq |x|^{-N/p} \left(\frac{N}{|S^{N-1}|} \right)^{\frac{1}{p}} ||u||_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad x \neq 0. \tag{B.3}$$

Demonstração: Veja [9], página 341. ■

Denotamos por $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ o subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$ formado por funções radias. Um importante corolário do Lema (B.1) é

Teorema B.1 *A imersão $H_r^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ é compacta, para $2 < p < \frac{2N}{N-2}$.*

Demonstração: Veja [9], página 341. ■

Apêndice C

Alguns resultados sobre simetrização de Schwarz

Recordamos aqui, sem provas, as propriedades básicas da simetrização de Schwarz. Primeiro, vamos lembrar a definição do rearranjamento esférico (ou simetrização) de uma função.

Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$; então f^*, a função simetrização de Schwarz de f, é uma função mensurável, radial e não crescente (em r) tal que para qualquer $\alpha > 0$,

$$\mu\{f^* \geq \alpha\} = \mu\{|f| \geq \alpha\},$$

com μ a medida de Lebesgue. É obvio, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(f)\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(f^*)\ dx$$

para toda função contínua F tal que $F(f)$ é integrável.

Referencia: Veja [9] página 341.

Uma propriedade fundamental de $f \to f^*$ é a seguinte:

Desigualdade de Riesz. Seja $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$; então

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)g(x)\ dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} f^*(x)g^*(x)\ dx. \tag{C.1}$$

Desta desigualdade otemos

$$\|f^* - g^*\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \ f, g \in L^2(\mathbb{R}^N). \tag{C.2}$$

Outro consequência importante da desigualdade de Riesz é o seguinte resultado:

Seja $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ se $N \geq 3$ (respectivamente, em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para qualquer N). Então $u^* \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ (respectivamente, para $H^1(\mathbb{R}^N)$) e tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*(x)|^2 \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \, dx \tag{C.3}$$

Este resultado é essencialmente conhecido (veja [34]), mas com requisitos de regularidade forte. Lieb fez uma demonstração simples e mais geral usando somente a desigualdade de Riesz e a propriedade de simetria da solução fundamental da equação do calor (veja [38]). Embora o resultado tenha sido estabelecido apenas o caso de funções em $H^1(\mathbb{R}^N)$, o caso $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ segue de um simples argumento de densidade.

Referencia: Veja [9] página 342.

Apêndice D

Alguns funcionais de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$

Enunciamos aqui algumas afirmações sobre o caráter de certos funcionais definidas em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Antes disso, faremos uma breve revisão sobre diferenciabilidade de funcionais em Espaços de Banach.

Definição D.1 *Seja X um espaço de Banach. Dado um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, dizemos que I possui derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existe um funcional $T_0 \in X'$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - T_0 v}{t} = 0, \quad \forall v \in X.$$

A Derivada de Gateaux no ponto u, quando existe, é única. Vamos denota-la simplesmente por $DI(u)$.

Definição D.2 *Seja X um espaço de Banach. Dado um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, dizemos que I possui derivada de Fréchet no ponto $u \in X$ quando existe um funcional $T \in X'$ tal que*

$$\lim_{v \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Tv}{\|v\|_X} = 0.$$

A Derivada de Fréchet no ponto u, quando existe, é única. Vamos denotá-la simplesmente por $I'(u)$.

Definição D.3 *Sejam X um espaço de Banach e U um aberto em X. O funcional $I \in C^1(U, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet de I existe e é continua em U.*

Observação D.1 *(a) A derivada de Gateaux é dada por*

$$DI(u)v = \lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t}$$

(b) Se I é diferenciável à Fréchet então é diferenciável à Gateaux.

Proposição D.1 *Seja X um espaço de Banach e U uma aberto em X. Se I possui derivada de Gateaux contínua em U então $I \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Seja $u \in U$ e $DI(u)$ a derivada de Gateaux em u. Definindo a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $f(t) = I(u+tv)$, pelo Teorema do Valor Médio (ver Teorema (E.6) na Apêndice E), existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(t_0),$$

isto é,

$$I(u+h) - I(u) = DI(u+t_0 v)v. \tag{D.1}$$

Assim, subtraindo $DI(u)v$ de ambos os membros da equação (D.1), obtemos

$$\begin{aligned} |I(u+h) - I(u) - DI(u)v| &= |DI(u+t_0 v)v - DI(u)v| \\ &\leq \|DI(u+t_0 v) - DI(u)\|_{X'} \|v\|_X. \end{aligned} \tag{D.2}$$

Desde que I possui derivada de Gateaux contínua em U, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $\|h\| < \delta$, tem-se

$$\|DI(u+t_0 v) - DI(u)\|_{X'} < \varepsilon.$$

Então, segue de (D.2) que

$$|I(u+h) - I(u) - DI(u)v| \leq \varepsilon \|v\|_X.$$

Daí concluimos que I possui derivada de Fréchet continua. Portanto, $I \in C^1(U, \mathbb{R})$.

$\blacksquare$

Lema D.1 *Seja $T : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional dado por*

$$T(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

está bem definido e é de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$, com

$$T'(u)\phi = 2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi \, dx, \quad \forall u, \phi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração: Observe que T está sempre bem definido para qualquer que seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, para $u, \phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $h \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{T(u+h\phi) - T(u)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u+h\phi)|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u+h\phi)\nabla(u+h\phi) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(2h\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi \, dx + h^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 \, dx\right)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$DT(u)\phi = \lim_{h \to 0} \frac{T(u+h\phi) - T(u)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi \, dx.$$

Logo, T possui derivada de Gateaux para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Pela Proposição (D.1), é suficiente mostrarmos que DT é contínuo em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, dado $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, seja (u_n) uma sequência e $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Para $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\|\phi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq 1$,

$$|DT(u_n)\phi - DT(u_0)\phi| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u_0)\nabla\phi \, dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u_0)||\nabla\phi| \, dx.$$

Da desigualdade de Hölder (veja apêndice E, teorema (E.7)), tem-se

$$
\begin{aligned}
|DT(u_n)\phi - DT(u_0)\phi| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u_0)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u_n - u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\|DT(u_n)-DT(u_0)\|_{(H^1(\mathbb{R}^N))'} = \sup_{\|\phi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\leq 1} |DT(u_n)\phi - DT(u_0)\phi| \leq \|u_n-u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)},
$$

mostrando que DT é contínuo e, com isso, $T \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N);\mathbb{R})$. Além disso,

$$
T'(u)\phi = DT(u)\phi = 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla\phi\, dx, \quad \forall u, \phi \in H^1(\mathbb{R}^N).
$$

■

Teorema D.1 *Seja Ω um domínio limitado, regular em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$. Seja $g \in C(\mathbb{R})$ satisfazendo $g(0) = 0$ e*

$$
\overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{|g(s)|}{|s|^l} < +\infty, \ l = \frac{N+2}{N-2}. \tag{D.3}
$$

Então o funcional

$$
V(u) = \int_\Omega G(u(x))\, dx, \quad com \ \ G(t) = \int_0^t g(s)\, ds
$$

é bem definido e de classe C^1 em $H^1(\Omega)$. Além disso, tem-se

$$
\langle V'(u), v\rangle = \int_\Omega g(u(x))v(x)\, dx, \quad u, v \in H^1(\Omega). \tag{D.4}
$$

Demonstração: Veja [9], página 343.

■

Teorema D.2 *Seja $N \geq 3$ e seja g uma função contínua em $\mathbb{R}$ satisfazendo: $g(0) = 0$, a condição (D.3) e*

$$
\overline{\lim_{\substack{s\to 0\\ s\neq 0}}} \frac{|g(s)|}{|s|} < +\infty. \tag{D.5}
$$

Então, o funcional

$$V(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))\ dx$$

é bem definido e de classe C^1 no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso,

$$\langle V'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(u(x))v(x)\ dx, \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{D.6}$$

Demonstração: Veja [9], página 344. ∎

Apêndice E

Resultados Gerais

5.1 Identidade de Pohozaev

Repetiremos aqui o enunciado da Proposição (E.1), para um melhor entendimento.

Proposição E.1 (Identidade de Pohozaev) *Suponha* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $g(0) = 0$, $G(t) = \int_0^t g(s)\, ds$ *e* u *satisfaz*

$$-\Delta u = g(u) \quad em \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),$$

onde $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *é o espaço das distribuições sobre* $\mathbb{R}^N$*. Assuma, além disso, que*

$$u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N),\ \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N),\ G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Então u *satisfaz*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx \tag{1.6}$$

Observação E.1 *A condição* $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *pode ainda ser enfraquecida. Enquanto às condições* $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *e* $G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *são necessárias para que a integrais em* (1.6) *façam sentido. Note também que por causa de* $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, *a teoria de regularidade padrão (veja seção* (1.4.1)) *mostra que* $u \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *para qualquer* q*,* $1 \leq q < +\infty$*.*

Demonstração: Multiplicando a equação

$$-\Delta u = g(u)$$

por $x\nabla u$, com $x \in \mathbb{R}^N$ e integrando sobre B_R, com $R > 0$ arbitrário, obtemos

$$\int_{B_R} (-\Delta u)(x\nabla u)\ dx = \int_{B_R} g(u)(x\nabla u)\ dx. \tag{E.1}$$

Fazendo

$$(A) = \int_{B_R} (-\Delta u)(x\nabla u)\ dx$$

e

$$(B) = \int_{B_R} g(u)(x\nabla u)\ dx,$$

usando o fato que $\frac{\partial}{\partial x_j}(G(u)) = g(u)u_j$ e denotando por $\eta = (\eta^1, \eta^2, ..., \eta^N)$ a normal exterior unitária, segue que

$$\begin{aligned}
(B) &= \int_{B_R} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(G(u))\ x_j\ dx \\
&= -\int_{B_R} \sum_{j=1}^{N} G(u)\delta_{ij}\ dx + \int_{\partial B_R} \sum_{j=1}^{N} G(u) x_j \eta^j\ dS_x \\
&= -N \int_{B_R} G(u)\ dx + \int_{\partial B_R} G(u) x\eta\ dS_x \\
&= -N \int_{B_R} G(u)\ dx + R \int_{\partial B_R} G(u)\ dS_x
\end{aligned} \tag{E.2}$$

Por outro lado, tem-se

$$(A) = \int_{B_R} -\sum_{i=1}^{N} u_{ii} \sum_{j=1}^{N} x_j u_j\ dx$$

$$= \int_{B_R} \sum_{i=1}^{N} u_i \sum_{j=1}^{N} [\delta_{ij} u_j + x_j u_{ij}] \, dx - \int_{\partial B_R} \sum_{i=1}^{N} u_i \eta^i \sum_{j=1}^{N} x_j u_j \, dS_x$$

$$= \int_{B_R} \left[|\nabla u|^2 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right) x_j \right] dx - R \int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial x} \, dS_x$$

$$= \int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{B_R} \sum_{j=1}^{N} \frac{|\nabla u|^2}{2} \delta_{ij} \, dx + \int_{\partial B_R} \sum_{j=1}^{N} \frac{|\nabla u|^2}{2} x_j \eta^j \, dS_x +$$

$$-R \int_{\partial B_R} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^2 \, dS_x$$

$$= \int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{N}{2} \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx + \frac{R}{2} \int_{\partial B_R} |\nabla u|^2 dS_x - R \int_{\partial B_R} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^2 dS_x$$

$$= \left(\frac{2-N}{2} \right) \int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{R}{2} \int_{\partial B_R} |\nabla u|^2 \, dS_x - R \int_{\partial B_R} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^2 \, dS_x. \quad \text{(E.3)}$$

Substituindo (E.2) e (E.3) em (E.1), obtemos

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{2N}{N-2} \int_{B_R} G(u) \, dx = (C) \quad \text{(E.4)}$$

com

$$(C) = -\frac{2R}{N-2} \left[\int_{\partial B_R} G(u) \, dS_x + \int_{\partial B_R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^2 - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) dS_x \right].$$

Vamos agora mostrar que (C) converge para 0 para pelo menos uma sequência $R_n \to +\infty$ adequadamente escolhida. Temos que

$$|(\mathrm{C})| \leq 2R \left[\int_{\partial B_R} \left(|G(u)| + |\nabla u|^2 \right) dS_x \right]. \quad \text{(E.5)}$$

As condições ($\mathbf{g1}$) e ($\mathbf{g2}$) implicam que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|g(s)| \leq C_1 |s|^l, \ \forall s \in \mathbb{R}$$

e daí,

$$|G(s)| \leq C_2 |s|^{l+1}, \ \forall s \in \mathbb{R},$$

com $C_2 = C_1/l + 1 > 0$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|G(u)| + |\nabla u|^2\right) \, dx < +\infty.$$

Por coordenadas polares (ver apêndice E, Teorema (E.5)), temos

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|G(u)| + |\nabla u|^2\right) \, dx\right] \, dR = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|G(u)| + |\nabla u|^2\right) \, dx < +\infty \quad \text{(E.6)}$$

Portanto, existe uma sequência $R_n \to +\infty$ tal que

$$R_n \int_{\partial B_{R_n}} \left(|G(u)| + |\nabla u|^2\right) \, dS_x \to 0 \quad \text{(E.7)}$$

quando $n \to +\infty$. De fato, se

$$\varliminf_{R\to+\infty} R \int_{\partial B_{R_n}} \left(|G(u)| + |\nabla u|^2\right) \, dS_x = \alpha > 0,$$

teríamos a existência de um número $R_0 > 0$ tal que

$$R \int_{\partial B_{R_n}} \left(|G(u)| + |\nabla u|^2\right) \, dS_x > \frac{\alpha}{2}, \ \forall R > R_0$$

e daí,

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_{\partial B_{R_n}} \left(|G(u)| + |\nabla u|^2\right) \, dS_x\right] dR \geq \frac{\alpha}{2} \int_{R_0}^{+\infty} \frac{1}{R} \, dR = +\infty$$

contradizendo (E.6). Então, da desigualdade (E.5), temos que (C) converge para 0 se escolhermos $R = R_n$ e se considerarmos o limite de $n \to +\infty$. Por outro lado, fazendo

$$f_n(x) = |\nabla u(x)|^2 \mathcal{X}_{B_{R_n}}(x) \ \text{ e } \ h_n(x) = G(u(x))\mathcal{X}_{B_{R_n}}(x),$$

temos que

$$f_n(x) \to |\nabla u(x)|^2, \ \ |f_n| = ||\nabla u|^2 \mathcal{X}_{B_{R_n}}| \leq |\nabla u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$h_n(x) \to G(u), \ \ |h_n| = |G(u)\mathcal{X}_{B_{R_n}}| \leq |G(u)| \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

pelo Teorema da Convergência Dominada (veja apêndice E), obtemos

$$\int_{B_{R_n}} |\nabla u|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathcal{X}_{B_{R_n}} \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f_n \, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx$$

e

$$\int_{B_{R_n}} G(u) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \mathcal{X}_{B_{R_n}} \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} h_n \, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \, dx$$

quando $n \to +\infty$. Então, segue de (E.4), escolhendo $R = R_n$ e passando o limite $n \to +\infty$, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \, dx.$$

■

5.2 Multiplicadores de Lagrange para dimensão infinita

Para a demonstração do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para dimensão infinita, é necessário o seguinte lema:

Lema E.1 *Seja X um espaço de Banach. Suponha que $J, F : X \to \mathbb{R}$ são de classe C^1. Se para algum $x_0 \in X$ podemos encontrar $\upsilon, w \in X$ tais que*

$$J'(x_0)\upsilon \; F'(x_0)w \neq J'(x_0)w \; F'(x_0)\upsilon,$$

então J não tem um extremo local em x_0, mesmo quando restrito a

$$M = \{x \in X : F(x) = F(x_0)\}.$$

Demonstração: Suponha $x_0, \upsilon, w \in X$ como na hipótese Consideremos $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\varphi(s,t) = (f(s,t), g(s,t)),$$

onde $f(s,t) = J(x_0 + s\upsilon + tw)$ e $g(s,t) = F(x_0 + s\upsilon + tw)$, para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. Notemos que a função φ é de classe C^1 e que, se $[J_\varphi(0,0)]$ denota a Matriz Jacobiana de φ no ponto $(0,0)$, então:

$$det[J_\varphi(0,0)] = \begin{vmatrix} J'(x_0)\upsilon & F'(x_0)\upsilon \\ J'(x_0)w & F'(x_0)w \end{vmatrix} = J'(x_0)\upsilon \; F'(x_0)w - J'(x_0)w \; F'(x_0)\upsilon \neq 0.$$

Segue então do Teorema da Função Inversa (veja [40]) que existe uma vizinhança V de $(0,0)$ e uma vizinhança W de $\varphi(0,0) = (J(x_0), F(x_0))$ tais que $\varphi : V \to W$ é um difeomorfismo.

Seja $B_\delta(x_0) \subset X$, com $\delta > 0$, uma vizinhança de x_0 em X. Vamos mostrar que existe $y_0 \in M \cap B_\delta(x_0)$ tal que $J(y_0) > J(x_0)$. Desse modo x_0 não pode ser um máximo local de J restrito a M. Para tanto, tome $\delta' > 0$ suficientemente pequeno tal que $B_{\delta'}(0) \subset V$ e, além disso,

$$\delta' < \frac{\delta}{||\upsilon||_X + ||w||_X}. \tag{E.8}$$

Assim, $\varphi\Big|_{B_{\delta'}(0)}$ é um difeomorfismo entre $B_{\delta'}(0)$ e $\widetilde{W} = \varphi(B_{\delta'}(0)) \subset W$. Como $\widetilde{W}$ é aberto, podemos tomar $\varepsilon > 0$ pequeno de modo que $(J(x_0) + \varepsilon, F(x_0)) \in \widetilde{W}$. Então existe $(s_0, t_0) \in B_{\delta'}(0)$ tal que $\varphi(s_0, t_0) = (J(x_0) + \varepsilon, F(x_0))$, isto é,

$$\begin{aligned} (J(x_0) + \varepsilon, F(x_0)) &= \varphi(s_0, t_0) \\ &= (f(s_0, t_0), g(s_0, t_0)) \\ &= (J(x_0 + s_0\upsilon + t_0 w), F(x_0 + s_0\upsilon + t_0 w)) \end{aligned}$$

Daí,

$$J(x_0 + s_0\upsilon + t_0 w) = J(x_0) + \varepsilon > J(x_0)$$

e

$$F(x_0 + s_0\upsilon + t_0 w) = F(x_0)$$

Afirmamos que $y_0 = x_0+s_0 v+t_0 w \in M \cap B_\delta(x_0)$. De fato, como $F(y_0) = F(x_0)$ então $y_0 \in M$. Agora, como $(s_0, t_0) \in B_{\delta'}(0)$, podemos usar (E.8) para concluir que

$$\begin{aligned} ||y_0 - x_0||_X &= ||s_0 v - t_0 w||_X \\ &\leq |s_0| \; ||v||_X + |t_0| \; ||w||_X \\ &\leq |(s_0, t_0)|(||v||_X + ||w||_X) \\ &\leq \delta'(||v||_X + ||w||_X) < \delta \end{aligned}$$

Portanto, $y_0 \in B_\delta(x_0)$. De $J(y_0) > J(x_0)$ concluimos que x_0 não é ponto de máximo local de J restrito a M. De maneira análoga podemos mostrar que x_0 não pode ser ponto de mínimo local da restrição de J a M. Isso conclui a demonstração.

■

Teorema E.1 (dos Multiplicadores de Lagrange) *Sejam X um Espaço de Banach, $J, F \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $x_0 \in X$ um extremo local de J restrito ao conjunto*

$$M = \{x \in X : F(x) = F(x_0)\}.$$

Se $F'(x_0) \neq 0$, então existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(x_0)v = \theta F'(x_0)v$$

*para qualquer $v \in X$. O número θ é chamado **Multiplicador de Lagrange**.*

Demonstração: Fixemos $w \in X$ tal que $F'(x_0)w \neq 0$. Desde que x_0 é um extremante local de J restrito a M, do Lema (E.1) tem-se, para cada $v \in X$,

$$J'(x_0)vF'(x_0)w = J'(x_0)wF'(x_0)v$$

Tomando $\theta = \dfrac{J'(x_0)w}{F'(x_0)w}$, obtemos o resultado desejado.

■

5.3 Resultados de convergência

Lema E.2 (Lema de Fatou) *Seja (f_n) uma sequência de funções de L^1 tal que*

(a) *Para cada n, $f_n(x) \geq 0$ q.t.p em Ω.*

(b) $\sup_n \int_\Omega f_n(x)\ dx < \infty$.

Para cada $x \in \Omega$ ponha $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int f(x)\ dx \leq \varliminf_{n\to 0} \int f_n(x)\ dx.$$

Demonstração: Veja [16] página 90.

Teorema E.2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Suponhamos que*

(a) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p em Ω.*

(b) *Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω.*

Então, $f \in L^1$ e $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Demonstração: Veja [16] página 90.

5.4 Fatos de Cálculo

Nesta seção, assumimos Ω um subconjunto aberto, limitado de $\mathbb{R}^N$ e $\partial\Omega$ é C^1.

Teorema E.3 (Integração por partes) *Seja $u, v \in C^1(\Omega)$. Então*

$$\int_\Omega u_{x_i} v\ dx = -\int_\Omega u v_{x_i}\ dx + \int_{\partial\omega} uv\eta_i\ dS,\ (i = 1, ..., N)$$

Demonstração: Veja [26] página 628.

Teorema E.4 (Formulas de Green) *Seja $u, v \in C^2$. Então*

(a) $\displaystyle\int_{\Omega} \Delta u \; dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \; dS.$

(b) $\displaystyle\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \; dx = -\int_{\Omega} u\Delta v \; dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} \; dS.$

(c) $\displaystyle\int_{\Omega} u\Delta v - v\Delta u \; dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta} \; dS.$

Demonstração: Veja [26] página 628.

Teorema E.5 (Coordenadas polares)

(a) *Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função contínua e somavel. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f dx = \int_0^{\infty} \left(\int_{\partial B_r(x_0)} f \; dS \right) dr.$$

para cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

(b) *Em particular*

$$\frac{d}{dr} \left(\int_{B_r(x_0)} f \; dx \right) = \int_{\partial B_r(x_0)} f \; dS,$$

para cada $r > 0$.

Demonstração: Veja [26] página 628-629.

Teorema E.6 (Teorema do Valor Médio) *Dada $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável em todos os pontos do segmento de reta aberto $(a, a+v)$ e seja contínua sua restrição ao segmento fechado $[a, a+v] \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$. Existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$f(a+v) - f(a) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta v) \cdot \alpha_i,$$

onde $v = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$.

Referência: Veja [40] página 138.

Teorema E.7 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$, onde $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1$ e $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$.*

Demonstração: Veja [7] página 56-57.

5.5 Resultado de imersão

Teorema E.8 (Teorema de Imersões de Sobolev) *As seguintes imersões são contínuas:*

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N),\ 2 \leq p < \infty, N = 1, 2; \tag{E.9}$$

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N),\ 2 \leq p < 2^*, N \geq 3; \tag{E.10}$$

$$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N),\ 2 \leq p < 2^*, N \leq 3. \tag{E.11}$$

Referência: Veja [52], página 9.

5.6 Princípios de Máximo

Teorema E.9 (Princípio de Máximo Fraco) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e L um operador diferencial elíptico de segunda ordem da forma*

$$Lu = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i u_{x_i}$$

com coeficientes a_ij, b_i contínuos. Valem as seguintes afirmações:

(a) *se $Lu \leq 0$ em Ω, então $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max\limits_{x\in\partial\Omega} u(x)$;*

(b) *se $Lu \geq 0$ em Ω, então $\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \min\limits_{x\in\partial\Omega} u(x)$.*

Demonstração: Veja [26] página 327-329.

Lema E.3 (Um refinamento do Lema de Hopf) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e $c \in L^\infty(\Omega)$. Suponhamos que*

$$\begin{cases} -\Delta u + cu \geq 0 & em \quad \Omega, \\ u \geq 0 & em \quad \Omega, \end{cases}$$

com u não identicamente nula. Se para algum $x_0 \in \partial\Omega$ temos $u(x_0) = 0$ e Ω satisfaz a condição da bola interior em x_0, então

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0,$$

com η denotando a normal unitária exterior.

Demonstração: Veja [26] página 519-520.

Teorema E.10 (Princípio do Máximo Forte) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, limitado e conexo, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e L um operador diferencial elíptico de segunda ordem da forma*

$$Lu = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i u_{x_i}$$

com coeficientes a_ij, b_i contínuos. Valem as seguintes afirmações:

(a) *se $Lu \leq 0$ em Ω e existe $x_1 \in \Omega$ tal que $u(x_1) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$, então u é constante em Ω;*

(b) *se $Lu \geq 0$ em Ω e existe $x_2 \in \Omega$ tal que $u(x_2) = \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$, então u é constante em Ω.*

Demonstração: Veja [26] página 333.

5.7 Resultado de regularidade

Lema E.4 (Lema de Brezis-Kato) *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Carathéodory tal que para quase todo $x \in \Omega$ vale*

$$|g(x, u)| \leq a(x)(1 + |u|)$$

com a função $a \in L^{N/2}_{loc}(\Omega)$. Suponhamos que $u \in H^{1,2}_{loc}(\Omega)$ seja uma solução fraca da equação

$$-\Delta u = g(., u) \text{ em } \Omega.$$

Então $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ *para qualquer* $q < +\infty$. *Se* $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ *e* $a \in L^{N/2}(\Omega)$, *então* $u \in L^q(\Omega)$ *para qualquer* $q < +\infty$.

Referência: Brezis e Kato [14].

Bibliografia

[1] Agmon, S., Douglis, A., & L. Nirenberg, *Estimates near boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I.* Comm. Pure Applied Math. 12, 623-727 (1959).

[2] Amann, H., *Nonlinear operators in ordered Banach spaces and some applications to nonlinear boundary value problems. In Nonliear Operators and the Calculus of Variotions*, Bruxelles (1975). Lecture Notes in Math. nº 543. Berlin Heidelberg New Yourk: Springer 1976.

[3] Ambrosetti, A., *On the existence of multiple solutions for a class of nonlinear boundary value problems.* Rend. Sem. Univ. Padova 49, 195-204 (1973).

[4] Ambrosetti, A., & P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and appliccations.* Em: J. Funct. Anal. 14, 349-381 (1973).

[5] Anderson, D., e G.Derrick, *Stability of time dependent particle like solutions in nonlinear field theories.* J. Math. Phys. 11, 1336-1346 (1970); e 12, 945-952 (1971).

[6] Aronson, D. G., e H. F. Weinberger, *Nonlinear diffusion in population genetics.* Lecture Notes in Math. nº 446. Berlin Heidelberg New York: Springer 1975.

[7] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lesbegue Meansure*, jhon wiley e sons, inC., New York, 1966.

[8] Berestycki, H., e P. L. Lions, *Une méthode locale pour l'existence de solutions positives de problèmes semi-linéaires elliptiques dans* $\mathbb{R}^N$. J. Anal. Math. 38 (1980) 144-187.

[9] Berestycki, H. e P. L. Lions. *Nonlinear scalar field equations, I existence of a ground state*. Arch. Rat. Mech. Anal. 82, 313–346 (1983).

[10] Berestycki, H. e P. L. Lions. *Existence of infinitely many solutions in the "zero mass"case for nonlinear scalar field equations*. In preparation.

[11] Berestycki, H. e P. L. Lions. *Equations de Champs Scalaires Euclidiens Non Linéaires Dans le Plan*. C. R. Acad. Sci; Paris Ser. I Math. 297 (1983), 5, 307-210 e Publications du Laboratoire d'Anayse Numérique, Université de Paris VI, (1984).

[12] Berger, M. S., *Nonlinearity and nonlinear functional analysis*. Academic Press, New York (1979).

[13] Berger, M. S., *On the existence and structure of stationary states for a nonlinear Klein-Gordon equation*. J. Funct. Anal. 9, 249-261 (1972).

[14] Brezis, H., e T. Kato, *Remarks on the Schrodinger operator with singular complex potentials*. J. Math. Pure Appl. 58, 137-151 (1979).

[15] Brezis, H., e R. E. L. Turner, *On a class of superlinear elliptic problems*. Comm. P.D.E. 2, (6) 601-614 (1977).

[16] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* (2010).

[17] Browder, F. E., *Nonlinear eigenvaluue problems and group invariance. In Functional Analysis and Related Fields*, Browder, F. E. editor. Springer Verlag (1970), New York. 1-58.

[18] Browder, f. E., *Existence theorems for nonlinear partial differential equations.* Proc. Symp. Pure Math. 16 A.M.S. Providence (1970), 1-60.

[19] Clarke, D. C., *A variant of the Lusternik-Schnlrelman Theory*. Ind. Univ. Math. J. 22, 65-74 (1972).

[20] Coffman, C. V., *A minimum maximum principle for a class of nonlinear integral equations*. J. Analyse Math. 22, 391-419 (1969).

[21] Coffman, C. V., *Uniqueness of the ground state solution for* $\Delta u - u + u^3 = 0$ *and a variational characterization of other solutions*. Arch. Rat. Mech. Anal. 46 (6), 81-95 (1972).

[22] Coleman, S., *The fate of the false vacuum. I–Semi-classical Theory*. Phys. Rev. D. 15, 2929 (1977).

[23] Coleman, S., Glazer, V., e A. Martin, *Action minima among solutions to a class of Euclidean scalar field equations*. Comm. Math. Phys. 58 (2), 211-221 (1978).

[24] Dancer, E. N., *Boundary value problems for ordinary differential equations in infinite intervals*. Proc. London Math. Soc. 30, 76-94 (1975).

[25] Esteban, M. J., *Thèse de 3ème cycle, Université Pierre et Marie Curie*. Paris (1980-1981) and paper to appear.

[26] Evans, L. C., *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol 19, American Mathematical Society, 1998.

[27] Fife, P. C., *Asymptotic states for equations of reaction and diffusion*. Bull. A. M. S. 84 (5), 693-726 (1978).

[28] Fife, P. C., e L. A. Peletier, *Nonlinear diffusion in population genetics*. Arch. Rat. Mech. Anal. 64 (2), 93-109 (1977).

[29] Figueiredo, G. J. M., *Uma introdução à teoria dos pontos críticos*, Notas de aula, UFPa, 2012.

[30] Frampton, P. H., *Consequences of vacuum instability in quantum field theory.* Phys. Rev. D. 15 (10), 2922-2928 (1977).

[31] Gidas, B., *Bifurcation phenomena in mathematical physics and related topics.* (1980), Bardos, C., e Bessis D., editors. Dordrecht, Holland: Reidel.

[32] Gidas, B., Wei-Ming, Ni, e L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle.* Comm. Math. Phys. 68, 209-243 (1979).

[33] Gilbarg, D., Trudinger N., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin, 1977.

[34] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., e Polva, G., *Inequalities.* London: Cambridge Univ. Press 1952.

[35] Hempel, J. A., *Multiple solutions for a class of nonlinear elliptic boundary value problems.* Indiana Univ. Math. J. 20, 983-996 (1971).

[36] Kato, T., *Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient.* Comm. Pure Applied Math. 12, 403-425 (1959).

[37] Lions, J. L., *Problèmes aux limites darts les équations aux dérivées partielles.* Presses de l'Univ, de Montréal. Montréal (1962).

[38] Lieb, E. H., *Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation.* Studies in Applied Math. 57, 93-105 (1977).

[39] Kavian, O., *Introdution á la Théorie des Points Crutiques at applications aux problèmes elliptíques*, Springer-verlag, heidelberg, (1993).

[40] Lima, E. L., *Análise Real v.* 2, 6 ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

[41] Nehary, Z., *On a nonlinear differential equation arising in nuclear physics.* Proc. Roy. Irish Acad. 62, 117-135 (1963).

[42] Nussbaum, R., *Positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems*. J. Math. Anal. Appl. 51 (2), 461-482 (1975).

[43] Pohozaev, S.I., *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. Sov. Math. Doklady 5, 1408-1411 (1965).

[44] Rabinowitz, P. H., *Variational methods for nonlinear eigenvalue problems. In Eigenvalues of Non-linear problems*. C. I. M. E., Ediz. Cremonese, Rome, 1974.

[45] Rabinowitz, P. H., *Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems*. Indiana Univ. Math. J. 23, 729-754 (1974).

[46] Ryder, G. H., *Boundary value problems for a class of nonlinear differential equations*. Pacific J. Math. 22 (3), 477-503 (1967).

[47] Strauss, W. A., *Existence of solitary waves in higher dimensions*. Comm. Math. Phys. 55, 149-162 (1977).

[48] Stuart, C. A., *Battelle*. Inst. Math. report n^o 75, 1973.

[49] Struwe, M., *Variotional Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Springer Verlang*. (1990).

[50] Synge, J. L., *On a certain nonlinear differential equation*. Proc. Roy. Irish Acad. 62, 17-41 (1961).

[51] Weinberger, M.F., *Asymptotic behaviour of a model in population genetics.* Indiana Univ. Seminar in Applied Math., 1976-1977. Chadam J. editor, Lecture Notes in Math. 648. Berlin Heidelberg New York: Springer 1978.

[52] Willem, M., *Minimax theorems, Birkhauser*. Boston, (1996).