UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Existência de uma solução semi-nodal para um sistema FitzHugh-Nagumo.

Welber Aires de Oliveira

Belém

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Welber Aires de Oliveira

Existência de uma solução semi-nodal para um sistema FitzHugh-Nagumo.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Belém

2017

Dados Internacionais de Catalogação - na - Publicação (CIP)
Biblioteca de Pós-Graduação do ICEN/UFPA

Oliveira, Welber Aires de
Existência de uma solução semi-nodal para um sistema FitzHugh-Nagumo/ Welber Aires de Oliveira; orientador, Giovany de Jesus Malcher Figueiredo. -2017.
70 f. ; 29 cm
Inclui bibliografias

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2017.

1. Funções elípticas. 2. Desigualdades variacionais (Matemática). 3. Solução nodal. I. Figueiredo, Giovany de Jesus Malcher, orient. II. Título.

CDD 22 ed. 515.983

Welber Aires de Oliveira

Existência de uma solução semi-nodal para um sistema FitzHugh-Nagumo.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Belém, 18 de Janeiro de 2017.

Resultado: Aprovado

Banca Examinadora

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - UFPA

Prof. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - UFPA

Ricardo Ruviaro

Prof. Dr. Ricardo Ruviaro

Universidade de Brasília - UNB

Gelson Conceição G. dos Santos

Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos

Secretaria de Estado de Educação - SEDUC

Dedicatória

Aos meus pais Marly e Francisco, aos meus irmãos e ao amor da minha vida Patrícia, com carinho.

Agradecimentos

Ao meu senhor e meu Deus pela misericórdia e graça que me tem concedido, pela força e amor e por ter me colocado debaixo das sombras de suas asas em todos os momentos difíceis.

Aos meus pais, Marly e Francisco, pela dedicação e carinho para com seus filhos e por estarem sempre orando e me dando forças para conseguir alcançar meus objetivos.

À minha querida esposa Patrícia, pela paciência, companheirismo e amor verdadeiro.

Ao meu orientador, professor Giovany a quem eu admiro pela dedicação e disposição em orientar este trabalho. Pela paciência e pelos ensinamentos e direção nos estudos que me concedeu através de sua experiência.

Aos professores do PPGME, pelas disciplinas ministradas e ensinamentos.

Ao meu orientador da graduação Kelmem da Cruz Barroso pelo incentivo e ensinamentos que me possibilitaram ingressar no mestrado.

Aos amigos que fiz em Belém, aos meus colegas de estudo do mestrado, em especial ao meu querido amigo João Felipe pela amizade e companhia nas horas de estudo e nos momentos de alegria e tristeza.

Aos Professores Ricardo Ruviaro, Gelson Conceição e Rúbia Gonçalves por estarem disponíveis nesta tarefa de me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.

Ao meu grande parceiro Ítalo Bruno Mendes Duarte pela amizade e disposição em me ajudar quando mais precisei.

Finalmente, a todos que contribuiram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Resumo

Nesta dissertação, vamos mostrar a existência de uma solução semi-nodal para um sistema FitzHugh-Nagumo do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) - v & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $\delta > 0$, $\gamma > 2\sqrt{\delta}$ e f é uma função superlinear de classe C^1 com crescimento subcrítico.

Palavras-chave: Sistema Elíptico, Métodos Variacionais, Solução Nodal.

Abstract

In this work, we show the existence of a semi-nodal solution to a FitzHugh-Nagumo type system

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) - v & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $\delta > 0$, $\gamma > 2\sqrt{\delta}$ and f is a superlinear C^1 class function with subcritical growth.

Key Words: Elliptic System, Variational Methods, Nodal Solution.

Sumário

Notações

- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável e $|u|_{L^p} < \infty\}$.
- $|u|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$.
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável tal que $|u(x)| \leq C$ q.t.p em $\Omega\}$.
- $|u|_{L^\infty(\Omega)} = |u|_\infty = \inf\{C;\ |u(x)| \leq C$ q.t.p em $\Omega\}$.
- $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$, $|\Omega|$:fronteira, fecho e medida de Lebesgue do conjunto Ω, respectivamente.
- $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ onde $|\alpha| \leq m\}$.
- $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^m |D^i u|_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$.
- $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$.
- $H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ onde $|\alpha| \leq 1\}$.
- $H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$.
- $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
- $B_R(0)$: bola aberta de centro em 0 e raio R.
- Para $D \subset H_0^1(\Omega)$ e $R > 0$, tem-se, $B_R(D) = \{u \in H_0^1(\Omega) : \mathrm{dist}(u, D) < R\}$.
- $C^m(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ D^\alpha u$ com $|\alpha| \leq m,$ são contínuas em $\Omega\}$.

- $C_0^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega);\ \mathrm{supp}(u) \text{ é } \text{ compacto}\}$.

- $C^m(\overline{\Omega}) = \{u \in C^m(\Omega); D^\alpha u$ é limitada e uniformemente contínua em $\Omega\}$.

- $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^m(\overline{\Omega}); D^\alpha u$ é α-Hölder contínua$\}$.

- $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$.

- $u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$.

Introdução

Nesta dissertação vamos mostrar a existência de uma solução semi-nodal [Veja a Definição 0.1] para o seguinte problema

$$(S)\quad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) - v & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio regular limitado, $\gamma, \delta > 0$ são constantes reais e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 verificando as seguintes condições:

(f_1) $f(x,0) = 0$, para quase todo $x \in \Omega$.

(f_2) Existem $c_1 \in (0, \lambda_1)$, $c_2 > 0$ e $0 < p < 2^* - 2$ se $N \geq 3$ e $p > 0$ se $N = 1$ ou $N = 2$, tais que

$$|f(x,t) - f(x,s)| \leq (c_1 + c_2(|t|^p + |s|^p))\,|t - s|, \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \Omega,$$

onde λ_1 denota o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e $2^* = 2N/N-2$ para $N \geq 3$ e $2^* = \infty$ se $N = 1$ ou $N = 2$.

(f_3) Existe $\theta \in (2, 2^*)$ tal que

$$0 < \theta F(x,t) \leq f(x,t)t, \ \forall\, |t| > 0, \ \text{onde } F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds.$$

(f_4) f é não decrescente em $t \in \mathbb{R}$, para quase todo $x \in \Omega$.

Um exemplo de função que satisfaz $(f_1) - (f_4)$ é dado pelas não linearidades da forma $f(x,t) = a(x)\,|t|^p\,t$, onde $0 < p < 2^* - 2$ para $N \geq 3$ e $p > 0$ para $N = 1$ ou $N = 2$, onde $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ é uma função contínua em $\overline{\Omega}$, não negativa e positiva sobre um conjunto de medida positiva em Ω.

Com efeito, a condição (f_1) segue pois $f(x,0) = a(x).0 = 0$ quase todo $x \in \Omega$. Para obter (f_2), basta notar que para $t > 0$ temos $f(x,t) = a(x)\,|t|^p\,t = a(x)t^{p+1}$, contínua em $[s,t]$ e derivável em (s,t), assim, pelo Teorema do Valor Médio [ver Teorema $A.3$ no Apêndice A] existe $\xi \in (s,t)$ tal que

$$\left|\frac{f(x,t) - f(x,s)}{t-s}\right| = |f'(x,\xi)|\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned}|f(x,t) - f(x,s)| &= |f'(x,\xi)|\,|t-s| \\ &= a(x)(p+1)\,|\xi|^p\,|t-s|\,.\end{aligned}$$

Desde que $\xi \in (s,t)$, tem-se $|\xi| \leq |s| + |t|$. Logo,

$$\begin{aligned}|f(x,t) - f(x,s)| &\leq |a|_\infty\,(p+1)(|s| + |t|)^p\,|t-s| \\ &\leq c(p+1)(|s|^p + |t|^p)\,|t-s|\,.\end{aligned}$$

Portanto,

$$|f(x,t) - f(x,s)| \leq (c_1 + c(p+1)\,(|s|^p + |t|^p))\,|t-s|\,,$$

onde $c(p+1) > 0$ e $c_1 \in (0,\lambda_1)$. Para $t \leq 0$ temos $f(x,t) = a(x)(-t)^p t$ e os argumentos são os mesmos.

Mostremos agora que f satisfaz a condição (f_3). Note que

$$\begin{aligned}F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds &= \int_0^t a(x)|s|^p s ds \\ &\leq a(x)\int_0^t |s|^{p+1} ds \\ &\leq a(x)\frac{|t|^{p+2}}{p+2} = a(x)\frac{(|t|^p t)\ t}{p+2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$0 < \theta F(x,t) \leq f(x,t)t, \ \forall\, |t| > 0.$$

onde $\theta = p + 2 \in (2, 2^*)$.

Mostremos a condição (f_4).

Considere $t \leq s$ e note que $p + 1 > 1$. Vamos ter os seguintes casos:

Caso 1) $t, s \geq 0$. Nesse caso, temos

$$f(x,t) = a(x)\,|t|^p\,t = a(x)t^{p+1} \text{ e } f(x,s) = a(x)\,|s|^p\,s = a(x)s^{p+1}.$$

Assim, desde que $t \leq s$ e $a(x) \geq 0$ temos

$$f(x,t) = a(x)t^{p+1} \leq a(x)s^{p+1} = f(x,s).$$

Caso 2) $t, s \leq 0$. Nesse caso, temos

$$f(x,t) = a(x)\,|t|^p\,t = a(x)(-t)^p t \text{ e } f(x,s) = a(x)\,|s|^p\,s = a(x)(-s)^p s.$$

Desde que $t \leq s \leq 0$, temos $-t \geq -s \geq 0$. Assim, como $p + 1 > 1$, tem-se $(-t)^{p+1} \geq (-s)^{p+1}$ e

$$a(x)(-t)^p(-t) \geq a(x)(-s)^p(-s),$$

pois $a(x) \geq 0$. Portanto,

$$f(x,t) = a(x)(-t)^p t \leq a(x)(-s)^p s = f(x,s).$$

Caso 3) $s \geq 0$ e $t \leq 0$. Nesse caso, temos

$$f(x,t) = a(x)\,|t|^p\,t = a(x)(-t)^p t \leq 0 \text{ e } f(x,s) = a(x)\,|s|^p\,s = a(x)s^{p+1} \geq 0.$$

Assim,

$$f(x,t) = a(x)(-t)^p t \leq a(x)s^{p+1} = f(x,s).$$

Logo, a função $f(x,t) = a(x)\,|t|^p\,t$ com $t \in \mathbb{R}$, satisfaz as condições $(f_1) - (f_4)$.

Neste trabalho, estudamos o artigo [2]. Esta classe de sistema aparece no estudo de estados estacionários para o sistema FitzHugh-Nagumo [14, 24], que é um sistema de reação em difusão [Veja por exemplo G. M. Figueiredo [13] e F. J. S. A, Corrêa [10]] de duas variáveis derivadas a partir do modelo de propagação do impulso nervoso de Hodgkin-Huxley [18]. De uma forma conveniente ele pode ser escrito como:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ v_t = \Delta v + \delta u - \gamma v & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

As incógnitas $u = u(x,t)$ e $v = v(x,t)$ representam o potencial elétrico e a concentração de íon acoplada à membrana celular no ponto $x \in \mathbb{R}^N$ e no tempo $t > 0$, respectivamente.

Motivado por este fato, nos últimos anos, muitos autores têm estudado a existência de solução positiva para o sistema (S), veja por exemplo, Chen e Tanaka [11], Ren e Wei [25], Wei e Winter [29, 28], Sweers e Troy [27] e suas referências. Nos artigos acima referidos, a principal ferramenta usada para obter a solução positiva é o método variacional, desde que a existência da solução para esta classe de sistema pode ser obtida estudando a existência de solução de um problema não local, que possui uma estrutura variacional.

Definição 0.1 *Uma solução semi-nodal para o sistema FitzHugh-Nagumo* (S) *é uma solução* $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ *com* $u^{\pm} \neq 0$.

Este tipo de solução será encontrada procurando pontos críticos nodais u para o funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega B(u)u \; dx - \int_\Omega F(x,u) \; dx,$$

isto é,

$$J'(u) = 0 \text{ e } u^{\pm} \neq 0,$$

onde $B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ será definido posteriormente.

O principal resultado deste trabalho [obtido em [2]] é o seguinte:

Teorema 0.1 *Suponha* $\gamma > 2\sqrt{\delta}$ *e* f *satisfazendo* $(f_1) - (f_4)$. *Então, o sistema* (S) *possui uma solução semi-nodal.*

A motivação para estudar esse tipo de solução vem do caso $\delta = \gamma = 0$, pois nesta situação, o sistema (S) torna-se um problema escalar do tipo

$$(E) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ \quad u = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

A existência de solução nodal para (E), isto é, uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$ com $u^{\pm} \neq 0$, tem recebido uma atenção especial, temos uma rica literatura com artigos interessantes, veja por exemplo, Bartsch, Weth and Willem [4], Bartsch and Weth [5], Bartsch, Liu and Weth [6], Castro, Cossio and Neuberger [9] e suas referências. Na maior parte dos artigos acima, os autores provam a existência de solução nodal, minimizando o funcional energia $I_0 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx,$$

sobre o conjunto

$$\mathcal{M} = \{u \in H_0^1(\Omega) : I_0'(u^{\pm})u^{\pm} = 0\}.$$

Após algumas estimativas, é provado que existe $u \in \mathcal{M}$ tal que $I_0'(u) = 0$. Este ponto crítico é chamado de solução ground-state nodal para (E).

No nosso caso, temos algumas dificuldades para repetir ou adaptar os argumentos explorados nos artigos acima mencionados, pois o funcional J tem o termo não local $\int_\Omega B(u)u\, dx$, que implica nas desigualdades abaixo, quando u é um ponto crítico nodal para J,

$$J'(u^+)u^+ = -\int_\Omega B(u^-)u^+ dx > 0 \text{ e } J'(u^-)u^- = -\int_\Omega B(u^+)u^- dx > 0. \qquad (1)$$

Em um artigo recente, Alves e Souto [1] estudaram a existência de solução nodal para a seguinte classe de sistema Schrödinger-Poisson não linear

$$(SP) \quad \begin{cases} -\Delta u + \phi u = f(u) \text{ em } \Omega, \\ \quad -\Delta \phi = u^2 \quad \text{em } \Omega, \\ \quad\quad u, \phi = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para o sistema (SP), podemos aplicar métodos variacionais para obter ponto crítico para o funcional energia $I_1 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 dx + \frac{1}{4}\int_\Omega \phi_u u^2 dx - \int_\Omega F(u)\, dx,$$

onde $\phi_u \in H_0^1(\Omega)$ é a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta \phi = u^2 \text{ em } \Omega, \\ \quad \phi = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

O funcional I_1, também tem um termo não local, ou seja, $\int_\Omega \phi_u u^2 dx$. Para esta classe de funcional, se u é um ponto crítico nodal, segue-se que

$$I_1'(u^+)u^+ = -\int_\Omega \phi_{u^-}(u^+)^2 dx < 0 \text{ e } I_1'(u^-)u^- = -\int_\Omega \phi_{u^+}(u^-)^2 dx < 0. \tag{2}$$

Usando essas informações, Alves e Souto, desenvolveram um novo método para obter solução nodal para (SP).

Neste trabalho, não podemos repetir a mesma abordagem encontrada em [1], pois o sinal das desigualdades (1) e (2) são contrárias. Motivado pelas dificuldades acima, observamos que o método desenvolvido por Weth [30] pode ser usado para o nosso sistema. Em [30], Weth provou um interessante Teorema Abstrato, cujo o principal objetivo é encontrar ponto crítico em cones de algumas classes de funcionais. Nesse artigo, ele usou o resultado abstrato para mostrar a existência de solução positiva, negativa e nodal para a seguinte classe de equação biharmônica

$$\Delta^2 u = f(x,u), \quad \Omega$$

sujeito a condições de fronteira de Navier

$$u = \Delta u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega$$

ou com as condições de fronteira de Dirichlet

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Para uma melhor compreensão, este texto está escrito da seguinte forma: No Capítulo 1 é feita a Estrutura Variacional do Problema, no Capítulo 2, apresentamos argumentos variacionais e o método de decomposição em cones duais, bem como o Teorema Abstrato que terá fundamental importância para demonstrar o resultado principal deste trabalho. Finalmente no Capítulo 3 provamos o teorema principal deste trabalho.

Capítulo 1

Estrutura Variacional

Neste Capítulo, vamos apresentar a estrutura variacional de um problema não local equivalente ao problema (S). Recordemos que $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (S) se

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi \; dx \; - \int_\Omega f(x,u)\phi \; dx \; + \int_\Omega v\phi \; dx \; = 0, \; \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \psi \; dx \; - \delta \int_\Omega u\psi \; dx \; + \gamma \int_\Omega v\psi \; dx \; = 0, \; \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Uma vez que pretendemos usar métodos variacionais para obter a solução fraca, note [ver Lema A.1 no apêndice A] que para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, o problema linear

$$(P_L) \quad \begin{cases} -\Delta v + \gamma v = \delta u \text{ em } \Omega, \\ \qquad\qquad v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ que será denotada por

$$v := \delta(-\Delta + \gamma)^{-1} u := Bu,$$

onde $B = \delta(-\Delta + \gamma)^{-1}$ denota o operador solução associado a (P_L).

Usando o operador B, observamos que (S) é equivalente ao problema não local

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u + B(u) = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ \qquad\qquad u = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dessa forma, observa-se que $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do sistema (S) se, e somente se, u é solução fraca de (P) e $v = B(u)$.

Recordemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (P) se

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w \ dx = -\int_\Omega B(u) w \ dx + \int_\Omega f(x, u) w \ dx, \text{ para todo } w \in H_0^1(\Omega).$$

Lema 1.1 *A expressão* $\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega B(u) u \ dx$ *define uma norma em* $H_0^1(\Omega)$ *equivalente a norma usual* $\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$.

Demonstração: Com efeito, desde que $\int_\Omega B(u) u \ dx \geq 0$ [veja o Teorema $A.1$ no apêndice A] temos

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega B(u) u \ dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Logo

$$\|u\| \geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Hölder [veja o Teorema $A.4$ no apêndice A] na segunda parcela do segundo membro e a continuidade do operador B, obtemos

$$\|u\|^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + |B(u)|_{L^2(\Omega)} |u|_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + C |u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Da Desigualdade de Poincaré [veja o Corolário A.1 no apêndice A], segue-se que:

$$\|u\|^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + C_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq C_2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Portanto,

$$\|u\| \leq C_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Assim $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega B(u) u \ dx\right)^{\frac{1}{2}}$ é uma norma equivalente à norma usual de $H_0^1(\Omega)$ e provém do produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \ dx + \int_\Omega B(u) v \ dx.$$

■

Lema 1.2 *O funcional* $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega B(u)u\ dx - \int_\Omega F(x,u)\ dx$$

associado a (P)*, está bem definido e é de classe* C^1 *no espaço* $H_0^1(\Omega)$ *com derivada*

$$J'(u)w = \int_\Omega \nabla u \nabla w\ dx\ + \int_\Omega B(u)w\ dx\ - \int_\Omega f(x,u)w\ dx,\ \forall\ u,w \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração: Definindo os funcionais $J_1 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $J_2 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega B(u)u\ dx \quad \text{e} \quad J_2(u) = \int_\Omega F(x,u)\ dx,$$

temos

$$\begin{aligned}|J_2(u)| = \left|\int_\Omega F(x,u)\ dx\right| &= \left|\int_\Omega \left[\int_0^u f(x,s)ds\right]\right| \\ &\leq \int_\Omega \left|\int_0^u f(x,s)ds\right|.\end{aligned}$$

De $(f_1) - (f_2)$ obtemos

$$|f(x,t)| \leq\ c_1\,|t| + c_2\,|t|^{p+1} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Por (1.1), temos

$$\begin{aligned}\left|\int_0^u f(x,s)ds\right| \leq \int_0^u |f(x,s)|ds &\leq \int_0^u \big(c_1\,|s| + c_2\,|s|^{p+1}\big)ds \\ &= \frac{c_1\,|u|^2}{2} + \frac{c_2\,|u|^{p+2}}{p+2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left|\int_0^u f(x,s)ds\right| \leq \frac{c_1\,|u|^2}{2} + \frac{c_2\,|u|^{p+2}}{p+2},$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $2 < p+2 < 2^*$, $c_1 \in (0,\lambda_1)$ e $c_2 > 0$.

Usando a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $1 \leq r \leq 2^*$ [veja Teorema $A.7$ no apêndice A], segue que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$

$$|J_2(u)| = \left|\int_\Omega F(x,u)\ dx\right| \leq \frac{c_1}{2}\int_\Omega |u|^2 dx + \frac{c_2}{p+2}\int_\Omega |u|^{p+2} dx < \infty.$$

Mostrando que J_2 está bem definido. Do Lema 1.1, o funcional J_1 também está bem definido, assim J está bem definido.

Afirmação 1.1 *O funcional J_1 é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.*

Inicialmente, vamos calcular a Derivada de Gateux DJ_1.

$$\begin{aligned}\frac{J_1(u+tv)-J_1(u)}{t} &= \frac{1}{2t}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + \frac{t}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2t}\int_\Omega B(u)u\, dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega B(u)v\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega B(v)u\, dx + \frac{t}{2}\int_\Omega B(v)v\, dx - \frac{1}{2t}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ &- \frac{1}{2t}\int_\Omega B(u)u\, dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{J_1(u+tv)-J_1(u)}{t} = \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + \frac{t}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega B(u)v\, dx + \frac{t}{2}\int_\Omega B(v)v\, dx.$$

Portanto,

$$DJ_1(u)v = \lim_{t\to 0}\frac{J_1(u+tv)-J_1(u)}{t} = \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + \int_\Omega B(u)v\, dx,\ \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Isto é,

$$DJ_1(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + \int_\Omega B(u)v\, dx,\ \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Uma vez que o produto interno é sempre contínuo temos que $DJ_1(u)v = J_1'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + \int_\Omega B(u)v\, dx$ é contínua, mostrando que J_1 é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação 1.2 *O funcional J_2 é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.*

Vamos agora calcular a derivada de Gateaux de J_2. Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e para cada $u, v \in H_0^1(\Omega)$, consideremos a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(s) = F(x, u+stv)$. Observe que $h'(s) = f(x, u+stv)tv$, $h(1) = F(x, u+tv)$ e $h(0) = F(x, u)$.

Desde que h é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, do Teorema do Valor Médio [ver Teorema A.3 no apêndice A], existe $\gamma \in (0,1)$ tal que

$$h(1) - h(0) = h'(\gamma),$$

de onde concluímos

$$\left|\frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}\right| = |f(x,u+\gamma tv)|\,|v|\,.$$

De (1.1) obtemos:

$$\begin{aligned}|f(x,u+\gamma tv)|\,|v| &\leq c_1\,|u+\gamma tv|\,|v| + c_2\,|u+\gamma tv|^{p+1}\,|v| \\ &\leq c_1\,|u|\,|v| + c_1\,|v|^2 + c_2C\,|u|^{p+1}\,|v| + c_2C\,|v|^{p+2}\,.\end{aligned}$$

Da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, para $1 \leq r \leq 2^*$ [veja Teorema $A.7$ no apêndice A] tem-se $u, v \in L^{p+2}(\Omega)$. Assim,

$$|u|^{p+1} \in L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega) \text{ e } |v| \in L^{p+2}(\Omega).$$

Da Desigualdade de Hölder [ver Teorema $A.4$ no apêndice A] para $\frac{p+2}{p+1}$ e $p+2$

$$c_2C\,|u|^{p+1}\,|v| + c_2C\,|v|^{p+2} \in L^1(\Omega).$$

Como $c_1\,|u|\,|v|\,, c_1\,|v|^2 \in L^1(\Omega)$,temos

$$c_1\,|u|\,|v| + c_1\,|v|^2 + c_2C\,|u|^{p+1}\,|v| + c_2C\,|v|^{p+2} \in L^1(\Omega).$$

Além disso, para uma sequência $|t_n| \to 0$ temos

$$f(x,u(x)+\gamma t_n v(x))v(x) \to f(x,u(x))v(x) \;\text{ pontualmente em } \Omega.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [ver Teorema $A.5$ no apêndice A] obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{t_n \to 0} \frac{J_2(u+t_n v) - J_2(u)}{t_n} &= \lim_{t_n \to 0} \left[\frac{\int_\Omega F(x, u+t_n v)\ dx - \int_\Omega F(x,u)\ dx}{t_n} \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x, u+\gamma t_n v) v\ dx \\ &= \int_\Omega f(x,u)v\ dx.\end{aligned}$$

Mostrando que o funcional J_2 é Gateux diferenciável e,

$$DJ_2(u)v = \int_\Omega f(x,u)v\ dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.2}$$

Afirmamos que DJ_2 é continuo.

Com efeito, considere (u_n) uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ com $r \in [1, 2^*]$ [ver Teorema $A.7$ no apêndice A] temos

$$u_n \to u \text{ em } L^r(\Omega).$$

Do Teorema de Vainberg [ver Teorema $A.6$ no apêndice A], existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $g \in L^r(\Omega)$ tal que

$$u_{n_j}(x) \to u(x) \ \ \text{q.t.p em } \Omega$$

e

$$\left|u_{n_j}(x)\right| \leq g(x) \ \ \text{q.t.p em } \Omega.$$

Desde que f é contínua,

$$\left[f(x, u_{n_j}(x)) - f(x, u(x))\right]^{\frac{2^*}{p+1}} \to 0 \ \ \text{q.t.p em } \Omega.$$

Da desigualdade triangular, da condição de crescimento (1.1) da função f e da limitação de $\left|u_{n_j}(x)\right|$ por $g(x)$ q.t.p em Ω obtemos

$$\begin{aligned}\left|f(x, u_{n_j}(x)) - f(x, u(x))\right|^{\frac{2^*}{p+1}} &\leq [\left|f(x, u_{n_j}(x))\right| + |f(x, u(x))|]^{\frac{2^*}{p+1}} \\ &\leq [c_1 \left|u_{n_j}(x)\right| + c_2 \left|u_{n_j}(x)\right|^{p+1} + c_1 |u(x)| + c_2 |u(x)|^{p+1}]^{\frac{2^*}{p+1}}\end{aligned}$$

$$\leq [c_1 2\,|g(x)| + 2c_2\,|g(x)|^{p+1}]^{\frac{2^*}{p+1}}$$
$$\leq \left[2\max\{c_1 2\,|g(x)|\,, 2c_2\,|g(x)|^{p+1}\}\right]^{\frac{2^*}{p+1}}$$
$$\leq \left[4\max\{c_1\,|g(x)|\,, c_2\,|g(x)|^{p+1}\}\right]^{\frac{2^*}{p+1}}$$
$$\leq k\left[\max\{\bar{c_1}\,|g(x)|^{\frac{2^*}{p+1}}\,, \bar{c_2}\,|g(x)|^{2^*}\}\right],$$

onde $k > 0$. Assim, $k\left[\max\ \bar{c_1}\,|g(x)|^{\frac{2^*}{p+1}}\,, \bar{c_2}\,|g(x)|^{2^*}\}\right] \in L^1(\Omega)$. De fato, desde que $g \in L^r(\Omega)$, com $r \in [1, 2^*]$ e $0 < p < 2^* - 2$ tem-se $\frac{2^*}{p+1} \in [1, 2^*]$. Do Teorema da Convergência dominada de Lebesgue [ver Teorema $A.5$ no apêndice A] encontramos

$$\left|f(x, u_{n_j}(x)) - f(x, u(x))\right|_{L^{\frac{2^*}{p+1}}(\Omega)} \to 0. \tag{1.3}$$

Assim, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|v\| \leq 1$, da Desigualdade de Hölder [ver Teorema $A.4$ no apêndice A] nos expoentes conjugados $\frac{2^*}{2^*-(p+1)}$, $\frac{2^*}{p+1}$ e novamente das Imersões Contínuas [ver Teorema $A.7$ no apêndice A] temos

$$\begin{aligned}\left|[DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u)]v\right| &= \int_\Omega [f(x, u_{n_j}) - f(x, u)]v\ dx \\ &\leq \left|f(x, u_{n_j}(x)) - f(x, u(x))\right|_{L^{\frac{2^*}{p+1}}(\Omega)} |v|_{L^{\frac{2^*}{2^*-(p+1)}}(\Omega)} \\ &\leq C\left|f(x, u_{n_j}(x)) - f(x, u(x))\right|_{L^{\frac{2^*}{p+1}}(\Omega)} \|v\| \\ &\leq C\left|f(x, u_{n_j}(x)) - f(x, u(x))\right|_{L^{\frac{2^*}{p+1}}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\left|[DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u)]v\right| \leq C\left|f(x, u_{n_j}(x)) - f(x, u(x))\right|_{L^{\frac{2^*}{p+1}}(\Omega)}. \tag{1.4}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left\|DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u)\right\|_{(H_0^1(\Omega))'} &= \sup_{\|v\|\leq 1}\left|[DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u)]v\right| \\ &\leq C\left|f(x, u_{n_j}(x)) - f(x, u(x))\right|_{L^{\frac{2^*}{p+1}}(\Omega)}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

implicando que

$$\lim_{j\to+\infty} DJ_2(u_{n_j}) = DJ_2(u).$$

Mostramos assim que o operador DJ_2 é contínuo e, deste modo, $DJ_2 = J_2' \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Portanto, de (1.2) temos

$$DJ_2(u)v = J_2'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v\ dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Assim,

$$J'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v\ dx + \int_\Omega B(u)v\ dx - \int_\Omega f(x,u)v\ dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

$\blacksquare$

Desta forma, vemos que se u é um ponto crítico de J então o par (u, v) com $v = Bu$, é uma solução fraca de (S).

Capítulo 2

Teorema Abstrato

Neste Capítulo, vamos apresentar argumentos variacionais e analisar o fluxo de uma determinada EDO. Para essa análise, será de fundamental importância estudarmos o método de decomposição em cones duais, introduzido por Moreau em [23] o que é feito na primeira seção deste capítulo. Demonstraremos também o importante Teorema Abstrato, esse estudo será de fundamental importância para demonstrar o Teorema principal deste trabalho que será feito no Capítulo seguinte.

2.1 Método de decomposição em cones duais

Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert.

Definição 2.1 • Um conjunto $\mathcal{K} \subset H$ é chamado de *cone* se para todo $x \in \mathcal{K}$ e $\lambda \geq 0$, $\lambda x \in \mathcal{K}$.

• Dado um cone $\mathcal{K}$, definimos seu cone dual por

$$\mathcal{K}^* = \{v \in H; \langle u, v \rangle \leq 0, \quad \forall u \in \mathcal{K}\}.$$

O próximo resultado mostra que, dado um cone convexo e fechado $\mathcal{K}$, sempre é possível decompor um vetor de H como uma soma de um elemento de $\mathcal{K}$ e um de $\mathcal{K}^*$.

Teorema 2.1 *Seja $\mathcal{K} \subset H$ um cone convexo e fechado. Todo $x \in H$ pode ser decomposto na forma*

$$x = y + z \text{ onde } y \in \mathcal{K} \text{ e } z \in \mathcal{K}^*$$

e ainda

$$\langle y, z \rangle = 0.$$

Demonstração: Se $x \in H$ e $\mathcal{K} \subset H$ é um convexo fechado, denotemos por $proj_{\mathcal{K}}^x = \inf_{y \in \mathcal{K}} \|x - y\|$ a projeção ortogonal de x sobre $\mathcal{K}$. Recordemos [ver Teorema $A.9$ no apêndice A] que a projeção satisfaz:

$$\langle x - proj_{\mathcal{K}}^x, p - proj_{\mathcal{K}}^x \rangle \leq 0, \quad \forall p \in \mathcal{K}.$$

Seja então $y = proj_{\mathcal{K}}^x$ e $z = x - y$. Temos então que

$$\langle x - y, p - y \rangle \leq 0, \quad \forall p \in \mathcal{K}.$$

Escolhendo $p = \lambda y$ (é possivel pois $\mathcal{K}$ é um cone), onde $\lambda \geq 0$ é arbitrário, temos

$$\langle x - y, \lambda y - y \rangle = (\lambda - 1) \langle z, y \rangle \leq 0, \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Logo $\langle z, y \rangle = 0$. Assim

$$\langle z, p \rangle = \langle z, p - y \rangle \leq 0, \quad \forall p \in \mathcal{K},$$

ou seja, $z \in \mathcal{K}^*$.

$\blacksquare$

Alguns exemplos interessantes dessa decomposição podem ser encontrados em [7].

2.2 Argumentos Variacionais

Seja $H = (H_0^1(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ e consideremos o seguinte produto interno

$$\langle w, v\rangle = \int_\Omega \nabla w \nabla v \; dx + \int_\Omega B(w) v \; dx, \; \forall w, v \in H \tag{2.1}$$

que dá origem a norma $\|\cdot\|$. Consideremos o funcional energia $J : H \to \mathbb{R}$ associado a (P) e o operador $A : H \to H$, dados por

$$J(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \int_\Omega F(x,u) \; dx$$

e

$$A(u) = (-\Delta + B)^{-1} f(\cdot, u(\cdot)). \tag{2.2}$$

Lema 2.1 *O operador A está bem definido e é caracterizado por*

$$\langle A(u), v\rangle = \int_\Omega f(x,u) v \; dx, \quad u, v \in H.$$

Além disso,

(A_1) *$A = \nabla\Psi$, onde $\Psi(u) = \int_\Omega F(x,u) \; dx$ e existem constantes $C_0, q_2 > 0$, $q_1 \in (0,1)$ e $\eta > 2$ tais que*

$$\langle A(u), u\rangle \geq \eta\Psi(u) - C_0, \quad u \in H \tag{2.3}$$

e

$$|\langle A(u), v\rangle| \leq (q_1 \|u\| + q_2 \|u\|^{p+1}) \|v\|, \quad u, v \in H. \tag{2.4}$$

(A_2) *A é compacto e localmente Lipschitziano. Além disso $A(0) = 0$.*

Demonstração: Mostremos primeiramente que o operador A está bem definido. De fato, por (f_2), se $u \in H$, então $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^{\frac{2^*}{p+1}}(\Omega)$. Pela estimativa L^p constante no Corolário 2.21 de [16] temos

$$(-\Delta + B)^{-1} f(\cdot, u(\cdot)) \in W^{2,\frac{2^*}{p+1}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{2^*}{p+1}}(\Omega).$$

Uma vez que Ω é limitado, segue-se que

$$(-\Delta + B)^{-1} f(\cdot, u(\cdot)) \in H_0^1(\Omega) = H.$$

Logo, $A(u) \in H$ e A está bem definido.

Vamos mostrar agora a caracterização do operador A. Dado $u \in H$ temos de (2.2) que

$$A(u) = (-\Delta + B)^{-1} f(x, u(x)) = w$$

ou seja, $w \in H_0^1(\Omega)$ verifica o problema linear

$$\begin{cases} -\Delta w + B(w) = f(x, u(x)) & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, dado $v \in H_0^1(\Omega)$, encontramos

$$\int_\Omega \nabla w \nabla v \; dx + \int_\Omega B(w) v \; dx = \int_\Omega f(x, u) v \; dx.$$

Portanto, usando o produto interno (2.1) obtemos

$$\begin{aligned} \langle A(u), v \rangle &= \int_\Omega \nabla(A(u)) \nabla v \; dx + \int_\Omega B(A(u)) v \; dx \\ &= \int_\Omega f(x, u) v \; dx. \end{aligned}$$

Para provar que $A = \nabla \Psi$ é suficiente notar que

$$\langle A(u), v \rangle = J_2'(u) v,$$

onde J_2 é o funcional que aparece no Capítulo 1.

A estimativa (2.3) segue de (f_3). Basta notar que para algum $\theta \in (2, 2^*)$ temos

$$\theta F(x, u) \leq f(x, u) u, \text{ para } u \in H,$$

assim,

$$\int_\Omega f(x, u) u \; dx \geq \theta \int_\Omega F(x, u) \; dx, \text{ para } u \in H.$$

Logo, obtemos para algum $C_0 > 0$

$$\langle A(u), u \rangle \geq \theta \Psi(u) - C_0, \ \forall u \in H.$$

A estimativa (2.4) segue de (f_2) da seguinte forma

$$\begin{aligned} |\langle A(u), v \rangle| &\leq \int_\Omega |f(x,u)| \, |v| \; dx \\ &\leq \int_\Omega \left(c_1 |u| \, |v| + c_2 |u|^{p+1} |v| \right) dx. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder [ver Teorema $A.4$ no apêndice A] para os expoentes $\frac{2^*}{p+1}$ e $\frac{2^*}{2^*-(p+1)}$, temos das imersões contínuas de Sobolev

$$\begin{aligned} \int_\Omega (c_1 |u| \, |v| + c_2 |u|^{p+1} |v|) \; dx &\leq c_1 |u|_{L^2(\Omega)} |v|_{L^2(\Omega)} + c_2 |u|^{p+1}_{L^{2^*}(\Omega)} |v|_{L^{\frac{2^*}{2^*-(p+1)}}(\Omega)} \\ &\leq c_1 |u|_{L^2(\Omega)} |v|_{L^2(\Omega)} + C c_2 \|u\|^{p+1} \|v\| \\ &\leq \frac{c_1}{\lambda_1} \|u\| \, \|v\| + C c_2 \|u\|^{p+1} \|v\| \end{aligned}$$

pois, desde que

$$\lambda_1 = \min_{|v|_{L^2(\Omega)=1}} \|v\|^2 = \min_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\|u\|^2}{|u|^2_{L^2(\Omega)}}$$

é a caracterização variacional de λ_1 tem-se

$$|u|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\|u\|}{\sqrt{\lambda_1}} \quad \text{e} \quad |v|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\|v\|}{\sqrt{\lambda_1}},$$

assim,

$$|u|_{L^2(\Omega)} |v|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\|u\| \, \|v\|}{\lambda_1}.$$

Note que $q_1 = \frac{c_1}{\lambda_1} \in (0,1)$, $q_2 = Cc_2 > 0$, e a estimativa segue.

Considerando agora (A_2), note que $A(0) = 0$. A compacidade de A segue de (f_2), juntamente com a compacidade das imersões de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, $1 \leq s < 2^*$[veja o Teorema $A.8$ no apêndice A].

Com efeito, desde que $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, da imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, $1 \leq s < 2^*$ tem-se que para toda sequência limitada $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ existem $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

e

$$u_{n_j} \to u \text{ em } L^s(\Omega),$$

além disso, fixando s_1 tal que $(p+1)+1 \leq s_1 < 2^*$, temos pelo mesmo argumento em (1.5) que

$$\begin{aligned}\left\|A(u_{n_j}) - A(u)\right\| &= \left\|J_2'(u_{n_j}) - J_2'(u)\right\|_{(H_0^1(\Omega))'} \\ &\leq C\left|f(x,u_{n_j}) - f(x,u)\right|_{L^{r_1}(\Omega)} \to 0\end{aligned}$$

onde $r_1 = s_1/(s_1-1) \leq s_1/(p+1) < 2^*/(p+1)$.

Mostremos finalmente que A é localmente lipschitziano.

Fixando $r > 0$ e considerando $u, v \in B_r(0) \subset H$ e usando a Desigualdade de Hölder [ver Teorema $A.4$ no apêndice A] nos expoentes $\frac{2^*}{p+1}$ e $\frac{2^*}{2^*-(p+1)}$ obtemos

$$\begin{aligned}|\langle A(u) - A(v), w\rangle| &\leq \int_\Omega |f(x,u) - f(x,v)|\,|w|\,dx \\ &\leq |f(x,u) - f(x,v)|_{L^{\frac{2^*}{p+1}}(\Omega)} |w|_{L^{\frac{2^*}{2^*-(p+1)}}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x,u) - f(x,v)|^{\frac{2^*}{p+1}}\,dx &\leq \int_\Omega (c_1 + c_2(|u|^p + |v|^p))^{\frac{2^*}{p+1}} |u-v|^{\frac{2^*}{p+1}}\,dx \\ &\leq \int_\Omega (k_1 + k_2(|u|^{\frac{2^*p}{p+1}} + |v|^{\frac{2^*p}{p+1}}))\,|u-v|^{\frac{2^*}{p+1}}\,dx.\end{aligned}$$

Note que os expoentes $\frac{2^*(p+1)}{2^*p}$, $\frac{2^*(p+1)}{2^*}$ são conjugados e que $|u|^{\frac{2^*(p)}{p+1}} \in L^{\frac{2^*(p+1)}{2^*p}}(\Omega)$ pois da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ com $r \in [1, 2^*]$ obtemos

$$\int_\Omega \left||u|^{\frac{2^*(p)}{p+1}}\right|^{\frac{2^*(p+1)}{2^*p}} dx = \int_\Omega |u|^{2^*}\,dx < \infty.$$

Assim, da Desigualdade de Hölder [ver Teorema $A.4$ no apêndice A] temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^{\frac{2^*p}{p+1}}dx &\leq |\Omega|^{\frac{1}{p+1}} \left||u|^{\frac{2^*p}{p+1}}\right|_{L^{\frac{2^*(p+1)}{2^*p}}(\Omega)}\\ &= |\Omega|^{\frac{1}{p+1}} \, |u|^{\frac{2^*p}{p+1}}_{L^{2^*}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Omega |u|^{\frac{2^*p}{p+1}}dx \leq |\Omega|^{\frac{1}{p+1}} \, |u|^{\frac{2^*p}{p+1}}_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Temos também que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u-v|^{\frac{2^*}{p+1}}dx &\leq |\Omega|^{\frac{p}{p+1}} \; \left||u-v|^{\frac{2^*}{p+1}}\right|_{L^{\frac{2^*(p+1)}{2^*}}(\Omega)}\\ &= |\Omega|^{\frac{p}{p+1}} \; |u-v|^{\frac{2^*}{p+1}}_{L^{2^*}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Omega |u-v|^{\frac{2^*}{p+1}}dx \leq |\Omega|^{\frac{p}{p+1}} \; |u-v|^{\frac{2^*}{p+1}}_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Assim,

$$\int_\Omega |f(x,u)-f(x,v)|^{\frac{2^*}{p+1}}dx \leq \left(\tilde{c_1} + \tilde{c_2}(|u|^{\frac{2^*p}{p+1}}_{L^{2^*}(\Omega)} + |v|^{\frac{2^*p}{p+1}}_{L^{2^*}(\Omega)})\right)|u-v|^{\frac{2^*}{p+1}}_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Segue então que

$$\begin{aligned}|f(x,u)-f(x,v)|_{L^{\frac{2^*}{p+1}}} &= \left(\int_\Omega |f(x,u)-f(x,v)|^{\frac{2^*}{p+1}}\right)^{\frac{p+1}{2^*}}\\ &\leq \left(\tilde{c_1} + \tilde{c_2}(|u|^{\frac{2^*p}{p+1}}_{L^{2^*}(\Omega)} + |v|^{\frac{2^*p}{p+1}}_{L^{2^*}(\Omega)})\right)^{\frac{p+1}{2^*}} \; |u-v|_{L^{2^*}(\Omega)}\\ &\leq \left(\tilde{C_1} + \tilde{C_2}(|u|^p_{L^{2^*}(\Omega)} + |v|^p_{L^{2^*}(\Omega)})\right)|u-v|_{L^{2^*}(\Omega)}.\end{aligned}$$

ou seja

$$|f(x,u)-f(x,v)|_{L^{\frac{2^*}{p+1}}(\Omega)} \leq \left(\tilde{C_1} + \tilde{C_2}(|u|^p_{L^{2^*}(\Omega)} + |v|^p_{L^{2^*}(\Omega)})\right)|u-v|_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Novamente pela imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ com $r \in [1, 2^*]$ temos

$$|u|^p_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C'^p_1 \|u\|^p,$$

onde $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega B(u)u\ dx\right)^{\frac{1}{2}}$. De modo análogo obtemos

$$|v|^p_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C'^p_2 \|v\|^p$$

$$|w|_{L^{\frac{2^*}{2^*-(p+1)}}(\Omega)} \leq C'_4 \|w\|$$

e

$$|u-v|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C'_3 \|u-v\|\,.$$

Assim,

$$|f(x,u)-f(x,v)|_{L^{\frac{2^*}{p+1}}} \leq \left(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2(C'^p_1 \|u\|^p + C'^p_2 \|v\|^p)\right) C'_3 \|u-v\|$$

e portanto

$$\begin{aligned} |f(x,u)-f(x,v)|_{L^{\frac{2^*}{p+1}}} |w|_{L^{\frac{2^*}{2^*-(p+1)}}} &\leq \left(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2(C'^p_1 \|u\|^p + C'^p_2 \|v\|^p)\right) C'_3 \|u-v\| C'_4 \|w\| \\ &\leq (C_1 + C_2(\|u\|^p + \|v\|^p)) \|u-v\| \|w\|\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\langle A(u)-A(v), w\rangle| \leq (C_1 + C_2(\|u\|^p + \|v\|^p)) \|u-v\| \|w\|\,.$$

Então, para $w \in H$ com $\|w\| = 1$, e recordando que $u, v \in B_r(0)$, temos

$$\|A(u)-A(v)\| \leq C \|u-v\|\,,$$

mostrando que A é localmente Lipschitz.

■

Lema 2.2 *J satisfaz a condição Palais-Smale.*

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência Palais-Smale para J, isto é $C := \sup_{n\in\mathbb{N}} |J(u_n)| < \infty$ e $\nabla J(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. Então

$$\begin{aligned}
\eta C + o(1)\|u_n\| &\geq \eta J(u_n) - \langle \nabla J(u_n), u_n \rangle \\
&= \eta \frac{\|u_n\|^2}{2} - \eta \Psi(u_n) - \langle \nabla J(u_n), u_n \rangle \\
&= \eta \frac{\|u_n\|^2}{2} - \eta \Psi(u_n) - \|u_n\|^2 + \langle A(u_n), u_n \rangle \\
&= \frac{\eta - 2}{2} \|u_n\|^2 + \langle A(u_n), u_n \rangle - \eta \Psi(u_n) \\
&\geq \frac{\eta - 2}{2} \|u_n\|^2 - C_0
\end{aligned}$$

por (2.3), assim (u_n) é limitada. Como A é compacto, podemos passar a uma subsequência satisfazendo $A(u_n) \to u_0 \in H$. Uma vez que $u_n - A(u_n) = \nabla J(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, concluímos que $u_n \to u_0$.

Observação 2.1 *Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se*

$$|\langle \nabla J(u_n), u_n \rangle| \leq \|\nabla J(u_n)\| \|u_n\| \leq o(1)\|u_n\|.$$

Assim,

$$o(1)\|u_n\| \geq -\langle \nabla J(u_n), u_n \rangle.$$

■

O nosso objetivo é localizar pontos críticos de J estudando a dinâmica da EDO abaixo. Uma vez que A é localmente Lipschitz e contínuo, o fluxo $\varphi : \mathcal{G} \to H$ é bem definido por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(t,u) = -\nabla J(\varphi(t,u)) = A(\varphi(t,u)) - \varphi(t,u), \\ \varphi(0,u) = u, \end{cases} \tag{2.5}$$

onde $\mathcal{G} = \{(t,u) : u \in H, 0 \leq t < T(u)\}$ e $T(u) \in (0,\infty]$ é o intervalo maximal de existência da trajetória $t \to \varphi(t,u)$ e $\varphi(t,\varphi(s,u)) = \varphi(t+s,u)$, para todo $t,s \in [0,T(u))$. No que segue, vamos escrever φ^t em vez de $\varphi(t,\cdot)$.

Observação 2.2 *Notemos que a função $t \mapsto J(\varphi^t(u))$ é monótona decrescente em $[0,T(u))$. De fato, note que*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(\varphi^t(u)) = \left\langle J'(\varphi^t(u)), \frac{d}{dt}\varphi^t(u)\right\rangle &= -\left\langle J'(\varphi^t(u)), \nabla J(\varphi^t(u))\right\rangle \\ &= -\left\|\nabla J(\varphi^t(u))\right\|^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Definimos a seguir o conceito de conjunto limite

Definição 2.2 *Seja $u \in H$. Chamamos de conjunto ômega limite de u ao conjunto*

$$\omega(u) = \{v \in H; \exists\ t_n \to \infty \text{ e } \varphi^{t_n}(u) \to v \text{ quando } n \to \infty\}.$$

Proposição 2.1 *Seja $u \in H$. Então*

$$\omega(u) = \bigcap_{0\leq t<\infty} \overline{\bigcup_{t\leq s<\infty} \varphi^s(u)}.$$

Demonstração: Seja $v \in \omega(u)$. Assim $v \in H$ e existe $t_n \to \infty$ tal que $\varphi^{t_n}(u) \to v$ quando $n \to \infty$. Então $v \in \overline{\bigcup \varphi^s(u)}$ para todo $s \geq t$. Assim,

$$v \in \bigcap_{0\leq t<\infty} \overline{\bigcup_{t\leq s<\infty} \varphi^s(u)}.$$

Por outro lado, se $v \in \bigcap_{0\leq t<\infty} \overline{\bigcup_{t\leq s<\infty} \varphi^s(u)}$, então para qualquer $0 \leq t < \infty$, tem-se $v \in \overline{\bigcup_{t\leq s<\infty} \varphi^s(u)}$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$ tome $t_n > t_{n-1}$ com $t_n \geq n$ e $d(\varphi^{t_n}(u), v) < 1/n$. Logo $d(\varphi^{t_n}(u), v) \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto $v \in \omega(u)$.

■

Proposição 2.2 *Se para algum* $u \in H$, $\{J(\varphi^t(u)); 0 \leq t < T(u)\}$ *for limitado inferiormente, então*

i) $T(u) = \infty$;

ii) *existe* $t_n \to \infty$ *tal que* $\{\varphi^{t_n}(u); n \in \mathbb{N}\}$ *é limitado em* H *e o conjunto ômega limite de* u

$$\omega(u) = \bigcap_{0 \leq t < \infty} \overline{\bigcup_{t \leq s < \infty} \varphi^s(u)}$$

é um subconjunto compacto não vazio de H, *constituido de pontos críticos de* J.

Demonstração: *i)* Note que para $0 \leq s < t < T(u)$ temos

$$\varphi^t(u) - \varphi^s(u) = -\int_s^t \nabla J(\varphi^\tau(u)) d\tau$$

assim,

$$\begin{aligned} \left\|\varphi^t(u) - \varphi^s(u)\right\| &\leq \int_s^t \|\nabla J(\varphi^\tau(u))\| d\tau \\ &\leq \left(\int_s^t d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t \|\nabla J(\varphi^\tau(u))\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_s^t d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t -\frac{d}{dt} J(\varphi^\tau(u)) d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (t-s)^{\frac{1}{2}} [J(\varphi^s(u)) - J(\varphi^t(u))]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

onde foi usado a Desigualdade de Hölder e a própria equação (2.5). Supondo que $T(u) < \infty$, então, o conjunto $\{\varphi^t(u); 0 \leq t < T(u)\}$ é limitado. Dessa forma a teoria das EDO's [ver início da pg.18 de [17]] nos garantiria que $T(u) = \infty$, o que seria uma contradição. Portanto $T(u) = \infty$.

ii) Uma vez que, para algum $u \in H$, $\{J(\varphi^t(u)); 0 \leq t < T(u)\}$ é limitado inferiormente, então existe uma sequência Palais-Smale $(\varphi^{t_n}(u))$ para J. Isto é, existe $t_n \to \infty$ tal que,

$$\nabla J(\varphi^{t_n}(u)) \to 0 \text{ quando } n \to \infty$$

e

$$C := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| J(\varphi^{t_n}(u)) \right| < \infty.$$

Assim, do Lema 2.2, a sequência $(\varphi^{t_n}(u))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Para mostrar que $\omega(u) \neq \emptyset$, vamos usar a sequência limitada $(\varphi^{t_n}(u))$. Como A é compacto, segue que a menos de uma subsequência, $A(\varphi^{t_n}(u)) \to u_0$ quando $n \to \infty$, para algum $u_0 \in H$. Dessa forma, note que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \nabla J(\varphi^{t_n}(u)) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\varphi^{t_n}(u) - A(\varphi^{t_n}(u))) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi^{t_n}(u) - u_0. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} \varphi^{t_n}(u) = u_0$ e $u_0 \in \omega(u)$.

Para mostrar que todo elemento de $\omega(u)$ é ponto crítico de J, note primeiramente que $J(\varphi^t(u)) \to d$ quando $t \to \infty$, pois essa é uma sequência monótona decrescente e limitada. Então, se $v \in \omega(u)$, existe $t_n \to \infty$ tal que $\varphi^{t_n}(u) \to v$ em H, quando $n \to \infty$. Assim

$$J(\varphi^t(v)) = \lim_{n\to\infty} J(\varphi^t(\varphi^{t_n}(u))) = \lim_{n\to\infty} J(\varphi^{t+t_n}(u)) = d, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Dessa forma, para todo $t \geq 0$,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} J(\varphi^t(v)) = \left\| \nabla J(\varphi^t(v)) \right\|^2.$$

Aplicando $t = 0$, obtemos que $\nabla J(v) = 0$ e v é um ponto crítico para J.

Para mostrar que o conjunto $\omega(u)$ é compacto, considere uma sequência limitada (v_n) de pontos críticos em $\omega(u)$, isto é, $\|v_n\| \leq C$, para $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\nabla J(v_n) \to 0$. quando $n \to \infty$. Note que

$$J(v_n) = \frac{1}{2} \|v_n\|^2 - \int_\Omega F(x, v_n)\, dx.$$

Logo,

$$|J(v_n)| \leq \frac{1}{2}C + \left| \int_\Omega F(x, v_n)\ dx \right|$$
$$\leq \frac{1}{2}C + \frac{c_1}{2} \int_\Omega |v_n|^2\, dx + \frac{c_2}{p+2} \int_\Omega |v_n|^{p+2}\, dx.$$

Das imersões de Sobolev, existem $C_3, C_4 > 0$ tais que

$$|J(v_n)| \leq \frac{1}{2}C + \frac{c_1}{2}C_3 \|v_n\|^2 + \frac{c_2}{p+2}C_4 \|v_n\|^{p+2}.$$

Logo,

$$|J(v_n)| \leq \frac{1}{2}C + \frac{c_1}{2}C_3C^2 + \frac{c_2}{p+2}C_4C^{p+2} := K.$$

Logo, $|J(v_n)| \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |J(v_n)| \leq K < \infty.$$

Assim, como J satisfaz a condição Palais-Smale, então, (v_n) possui uma subsequência convergente e portanto, o conjunto $\omega(u)$ é compacto.

■

Definição 2.3 • Dizemos que $D \subset H$ é *positivamente invariante* (sob φ), se $\varphi^t(u) \in D$ para todo $u \in D$ e todo $t \in [0, T(u))$;

- se $D \subset H$ é positivamente invariante, definimos seu domínio de absorção por

$$\mathcal{A}(D) := \left\{ u \in H : \varphi^t(u) \in D \text{ para algum } t \in [0, T(u)) \right\};$$

Note que $D \subset \mathcal{A}(D)$ e que, se $D \subset H$ é aberto, então $\mathcal{A}(D)$ é também um subconjunto aberto de H. Definimos também

- $\mathcal{A}_0 = \{u \in H : T(u) = \infty \text{ e } \varphi^t(u) \to 0 \text{ quando } t \to \infty\}.$

Lema 2.3 *$\mathcal{A}_0 \subset H$ é uma vizinhança aberta de zero.*

Demonstração: Seja $\alpha_0 = ((1-q_1)/2q_2)^{1/p}$. Então, para todo $u \in \overline{B_{\alpha_0}(0)}$ temos por (A_1) que

$$\begin{aligned}
\Psi(u) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\Psi(tu)dt \\
&= \int_0^1 \langle A(tu), u\rangle dt \\
&\leq \int_0^1 \left(q_1 \|tu\| + q_2 \|tu\|^{p+1}\right) \|u\| dt \\
&\leq \int_0^1 \left(q_1 t \|u\| + q_2 t^{p+1} \|u\|^{p+1}\right) \|u\| dt \\
&= \int_0^1 \left(q_1 t \|u\|^2 + q_2 t^{p+1} \|u\|^p \|u\|^2\right) dt \\
&\leq \int_0^1 t \|u\|^2 (q_1 + q_2 \|u\|^p) dt.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Psi(u) &\leq \frac{\|u\|^2}{2}(q_1 + q_2 \|u\|^p) \\
&\leq \frac{\|u\|^2}{2}(q_1 + q_2 \alpha_0^p) \\
&= \|u\|^2 \left(\frac{q_1+1}{4}\right).
\end{aligned}$$

Logo

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \Psi(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{q_1+1}{4}\right)\|u\|^2 \geq 0 \text{ para } u \in \overline{B_{\alpha_0}(0)}.$$

Alem disso,

$$J(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{q_1+1}{4}\right)\alpha_0^2 := \beta_0 > 0 \ \text{ para } u \in \partial B_{\alpha_0}(0). \tag{2.6}$$

Desde que $J(0) = 0$ e J é contínua em 0, existe $r \in (0, \alpha_0)$, tal que

$$J(u) < \beta_0, \ \text{ para } u \in B_r(0) \subset H.$$

Agora, como J é não cresce ao longo da trajetória, se $u \in B_r(0)$, então $J(\varphi^t(u)) \leq J(\varphi^0(u)) = J(u) < \beta_0$ para todo $t \in [0, T(u))$. Logo, por (2.6),

$\varphi^t(u) \in B_{\alpha_0}(0)$ para todo $t \in [0, T(u))$. Assim, $J(\varphi^t(u)) \geq 0$ para todo $t \in [0, T(u))$, que implica pela Proposição 2.2 que $T(u) = \infty$ e $\omega(u) \subset \overline{B_{\alpha_0}(0)}$ é um compacto, não vazio e formado por pontos críticos de J. No entanto, se $v \in \overline{B_{\alpha_0}(0)}$ for um ponto crítico para J, então

$$\|v\|^2 = \langle A(v), v\rangle \leq \|v\|^2 (q_1 + q_2 \|v\|^p) \leq \|v\|^2 (q_1 + q_2 {\alpha_0}^p) = \frac{q_1 + 1}{2} \|v\|^2 ,$$

o que é possível somente quando $v = 0$, uma vez que $q_1 \in (0, 1)$. Portanto, $\omega(u) = \{0\}$ para todo $u \in B_r(0)$. Dessa forma, $B_r(0) \subset \mathcal{A}_0$ o que implica na igualdade $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}(B_r(0))$, basta notar que, para $v \in \mathcal{A}_0$, temos $T(v) = \infty$ e $\varphi^t(v) \in B_r(0)$ para $t \to \infty$, assim, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}(B_r(0))$. A inclusão $\mathcal{A}(B_r(0)) \subset \mathcal{A}_0$ segue pois, para cada $v \in \mathcal{A}(B_r(0))$, existe $t_0 \in [0, T(v))$ tal que $\varphi^{t_0}(v) \in B_r(0) \subset \mathcal{A}_0$. Pela definição de $\mathcal{A}_0$ tem-se $T(\varphi^{t_0}(v)) = \infty$ e $\varphi^t(\varphi^{t_0}(v)) = \varphi^{t+t_0}(v) \to 0$ quando $t \to \infty$, assim, $v \in \mathcal{A}_0$ e a igualdade é válida. Como $B_r(0)$ é aberto, então assim o é $\mathcal{A}(B_r(0))$. Portanto $\mathcal{A}_0$ é uma vizinhança aberta na origem.

■

No que segue, localizaremos os pontos críticos não triviais para J sobre $\partial\mathcal{A}_0$. Tem-se então a seguinte Proposição

Proposição 2.3 *$\partial\mathcal{A}_0$ é um fechado, positivamente invariante e* $\inf_{u\in\partial\mathcal{A}_0} J(u) \geq 0$*. Em particular, para todo $u \in \partial\mathcal{A}_0$, $\omega(u)$ é um compacto não-vazio formado por pontos críticos não-triviais de J.*

Demonstração: Obviamente $\partial\mathcal{A}_0$ é um conjunto fechado. A demonstração de que $\partial\mathcal{A}_0$ é positivamente invariante consta no Lemma 2.3 de [19].

Note que dado $u \in \mathcal{A}_0$, $T(u) = \infty$ e existe $t_0 > 0$ tal que para $t > t_0$ tem-se $\varphi^t(u) \in B_{\alpha_0}(0)$. Como J não cresce ao longo da trajetória, temos $0 \leq J(\varphi^t(u)) \leq J(\varphi^{t_0}(u)) \leq J(u)$. Assim, $J(u) \geq 0$ para todo $u \in \mathcal{A}_0$. Por continuidade, segue que $J(u) \geq 0$ para todo $u \in \partial\mathcal{A}_0$, ou seja, $\{J(u);\ u \in \partial\mathcal{A}_0\}$ é limitado inferiormente. Assim, pela Proposição 2.2, $T(u) = \infty$, $\omega(u)$ é compacto, não-vazio e formado por pontos críticos não-triviais de J, para todo $u \in \partial\mathcal{A}_0$.

$\blacksquare$

Pela última Proposição, vemos que $\partial\mathcal{A}_0$ é um bom lugar para se procurar por soluções não triviais de (P). Porém, uma vez encontradas, a princípio nada sabemos sobre seu sinal. Para refinar nossa análise devemos introduzir subconjuntos invariantes de H, cujas propriedades nos ajudem a localizar as soluções desejadas. Consideremos então

$$\mathcal{K} = \{u \in H; u \geq 0 \text{ q.t.p em } \Omega\} \text{ e } -\mathcal{K} = \{u \in H; u \leq 0 \text{ q.t.p em } \Omega\}, \quad (2.7)$$

que são cones fechados e convexos. Sejam P e Q as projeções de H em $\mathcal{K}$ e $-\mathcal{K}$ respectivamente e P^*, Q^* dadas por $P^* = Id - P$ e $Q^* = Id - Q$ as projeções de H em $\mathcal{K}^*$ e $(-\mathcal{K})^*$ respectivamente. Como foi mostrado no começo desse Capítulo, sabemos que para todo $u \in H$

$$\langle Pu, P^*u \rangle = 0 \text{ e } P^*u \in \mathcal{K}^* \quad (2.8)$$

onde $\mathcal{K}^*$ é o cone dual de $\mathcal{K}$ e analogamente para Q e Q^*.

No nosso argumento, vamos mostrar a invariância de $\mathcal{K}$ e $-\mathcal{K}$ pelo fluxo φ, para isso, será muito importante mostrar que $\mathcal{K}^* \subset -\mathcal{K}$ e que $(-\mathcal{K})^* \subset \mathcal{K}$. Isto por sua vez, será mostrado no próximo resultado como segue.

Lema 2.4 *Se $u \in \mathcal{K}^* \setminus\{0\}$, então $u < 0$ q.t.p em Ω.*

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{K}^*\setminus\{0\}$. Então

$$\langle u, u \rangle > 0.$$

Desde que o espaço $C = \{w \in C^1(\bar{\Omega}); w = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$ é denso em H, existe $u_0 \in C$ tal que $\langle u, u_0 \rangle > 0$. Seja agora $\gamma > 2\sqrt{\delta}$ e $h \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ com $h > 0$, existe uma única $w \in H$ [ver Lema A.1 no apêndice A] tal que

$$\begin{cases} -\Delta w + Bw &= h \text{ em } \Omega \\ w &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.9)$$

Além disso, pelo Teorema de Schauder [A.12 no apêndice A], tem-se $w \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, e pelo Princípio do Máximo devido a Figueiredo-Mitidieri [15][ver Teorema A.11 no apêndice A] temos $w > 0$ em Ω e $\frac{\partial w}{\partial \nu} < 0$ sobre $\partial\Omega$. Como Ω é limitado, existe $\varepsilon > 0$, tal que $w + \varepsilon u_0 \in \mathcal{K}$, onde w é a solução de (2.9). Assim,

$$0 \geq \langle u, w + \varepsilon u_0 \rangle = \langle u, w \rangle + \varepsilon \langle u, u_0 \rangle > \langle u, w \rangle = \int_\Omega uh \, dx,$$

mostrando que $u < 0$ q.t.p em Ω.

■

Observação 2.3 *Note que se $u \in H$, temos $u = Pu + P^*u$, onde $Pu \geq 0$ q.t.p em Ω e $P^*u \in \mathcal{K}^*$. Então, pelo último lema, $P^*u \in -\mathcal{K}$, isto é,*

$$P^*u \leq 0, \ \ q.t.p \ \ em \ \Omega.$$

Assim,

$$u = Pu + P^*u \geq P^*u, \ \ q.t.p \ \ em \ \Omega.$$

Implicando que

$$P^*u \leq \min\{u, 0\} = u^-, \ \ q.t.p \ \ em \ \Omega,$$

ou seja,

$$P^*u \leq u^-, \ \ q.t.p \ \ em \ \Omega. \tag{2.10}$$

Por outro lado, como $Pu^* \leq 0$ q.t.p em Ω, temos

$$P^*u + Pu - Pu \leq 0, \ \ q.t.p \ \ em \ \Omega,$$

logo, $u \leq Pu$ q.t.p em Ω e assim,

$$Pu \geq \max\{u, 0\} = u^+, \ \ q.t.p \ \ em \ \Omega,$$

isto é

$$Pu \geq u^+, \ \ q.t.p \ \ em \ \Omega. \tag{2.11}$$

A mesma argumentação serve para mostrar que $Qu \leq u^-$ e $u^+ \leq Q^*u$, para todo $u \in H$.

Corolário 2.1 *O operador A satisfaz as seguintes condições*

(A_3) $\langle A(u), v\rangle \leq \langle A(P^*u), v\rangle$, *para todo* $u \in H$ *e* $v \in \mathcal{K}^*$.

(A_4) $\langle A(u), w\rangle \leq \langle A(Q^*u), w\rangle$, *para todo* $u \in H$ *e* $w \in (-\mathcal{K})^*$.

Demonstração: Como $v \in \mathcal{K}^*$ e $w \in (-\mathcal{K})^*$, então $v \leq 0$ e $w \geq 0$ q.t.p em Ω. Por (f_4) e pela Observação 2.3, segue que

$$f(x, P^*(u)(x)) \leq f(x, u^-(x)) \leq 0 \leq f(x, u^+(x)) \leq f(x, Q^*(u)(x)), \quad \text{q.t.p em } \Omega$$

e assim

$$\langle A(u), v\rangle = \int_\Omega f(x, u)v\ dx \leq \int_\Omega f(x, u^-)v\ dx \leq \int_\Omega f(x, P^*u)v\ dx = \langle A(P^*u), v\rangle$$

e

$$\langle A(u), w\rangle = \int_\Omega f(x, u)w\, dx \leq \int_\Omega f(x, u^+)w\, dx \leq \int_\Omega f(x, Q^*u)w\, dx = \langle A(Q^*u), w\rangle$$

para todo $u \in H$.

■

O próximo resultado mostrará que as condições (A_3) e (A_4) implicam que $\mathcal{K}$ e que $-\mathcal{K}$ são invariantes tanto pelo operador A quanto pelo fluxo φ.

Lema 2.5 *i)* $A(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ *e* $A(-\mathcal{K}) \subset -\mathcal{K}$.

ii) *Para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, o conjunto $B_\alpha(\mathcal{K})$ (α-vizinhança de $\mathcal{K}$) é positivamente invariante para o fluxo φ. Além disso, todo ponto crítico de J em $\overline{B_\alpha(\mathcal{K})}$ está em $\mathcal{K}$. O mesmo resultado vale para o cone $-\mathcal{K}$.*

iii) *$\mathcal{K}$ e $-\mathcal{K}$ são positivamente invariantes para φ.*

Demonstração: Toda demonstração será feita para $\mathcal{K}$, pois para $-\mathcal{K}$ os argumentos são os mesmos.

$i)$ Observe que para qualquer $u \in H$, $\|P^*u\|$ mede a distância entre u e $\mathcal{K}$. De (A_3) e (2.8) temos que se $u \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned}
\|P^*(A(u))\|^2 &= \langle A(u) - P(A(u)), A(u) - P(A(u))\rangle \\
&= \langle A(u) - P(A(u)), P^*(A(u))\rangle \\
&= \langle A(u), P^*(A(u))\rangle - \langle P(A(u)), P^*(A(u))\rangle \\
&= \langle A(u), P^*(A(u))\rangle \\
&\leq \langle A(P^*(u)), P^*(A(u))\rangle = \langle A(0), P^*(A(u))\rangle = 0.
\end{aligned}$$

$ii)$ Seja $u \in H$, por (2.8), (A_3) e (A_1) temos

$$\begin{aligned}
\|P^*(A(u))\|^2 &= \langle A(u), P^*(A(u))\rangle \\
&\leq \langle A(P^*(u)), P^*(A(u))\rangle \\
&\leq (q_1 \|P^*u\| + q_2 \|P^*u\|^{p+1}) \|P^*(A(u))\|,
\end{aligned}$$

o que implica, se $\|P^*(A(u))\| \neq 0$,

$$\|P^*(A(u))\| \leq q_1 \|P^*u\| + q_2 \|P^*u\|^{p+1} = \|P^*u\| (q_1 + q_2 \|P^*u\|^p). \tag{2.12}$$

Dessa forma, se $0 < \|P^*u\| < \left(\frac{1-q_1}{2q_2}\right)^{\frac{1}{p}} := \alpha_0$, então

$$\|P^*(A(u))\| < \|P^*u\|. \tag{2.13}$$

Note agora que, se $\alpha < \alpha_0$, todo ponto fixo de A em $\overline{B_\alpha(\mathcal{K})}$ pertence a $\mathcal{K}$. De fato, se $u \in \overline{B_\alpha(\mathcal{K})}$ for ponto fixo de A, então ou $u \in \mathcal{K}$ ou $u \in \overline{B_\alpha(\mathcal{K})} \setminus \{\mathcal{K}\}$. Porém a segunda opção não ocorre pois do contrário, $0 < \|P^*u\| \leq \alpha < \alpha_0$, de forma que por (2.13)

$$\|P^*u\| = \|P^*(A(u))\| < \|P^*u\|,$$

o que é uma contradição. Mostremos agora que $B_\alpha(\mathcal{K})$ é positivamente invariante.

Observe que, se $v \in A(\partial B_\alpha(\mathcal{K}))$, então $v = A(u)$ para algum $u \in \partial B_\alpha(\mathcal{K})$, assim $\|P^* u\| = \text{dist}(u, \mathcal{K}) = \alpha$. De (2.13), obtemos

$$\|P^*(A(u))\| = \text{dist}(A(u), \mathcal{K}) < \alpha,$$

ou seja,

$$\text{dist}(v, \mathcal{K}) < \alpha, \text{ para } v \in A(\partial B_\alpha(\mathcal{K})).$$

Logo,

$$A(\partial B_\alpha(\mathcal{K})) \subset \; int(B_\alpha(\mathcal{K})). \tag{2.14}$$

Suponhamos por contradição que exista $u_0 \in B_\alpha(\mathcal{K})$ tal que $\varphi^{t_0}(u_0) \in \partial B_\alpha(\mathcal{K})$ para algum $t_0 \in [0, T(u_0))$, onde t_0 é o menor positivo com tal propriedade. Como $B_\alpha(\mathcal{K})$ é aberto e convexo, pelo Teorema da Separação de Mazur[ver Teorema A.10 no apêndice A] segue que existe um funcional linear $\ell : H \to \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\ell(\varphi^{t_0}(u_0)) = \beta$ e $\ell(u) > \beta$, para todo $u \in B_\alpha(\mathcal{K})$. De (2.14), segue que $A(\varphi^{t_0}(u_0)) \in B_\alpha(\mathcal{K})$, assim,

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0} \ell(\varphi^t(u_0)) = \ell(-\nabla J(\varphi^{t_0}(u_0))) = \ell(A(\varphi^{t_0}(u_0))) - \beta > 0.$$

Com isso, concluímos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\ell(\varphi^t(u_0)) < \beta$ para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$. Assim $\varphi^t(u_0) \notin B_\alpha(\mathcal{K})$ para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$, o que contradiz a minimalidade de t_0.

$iii)$ Segue do fato do item $ii)$, uma vez lembrado que $\mathcal{K} = \bigcap_{\alpha>0} B_\alpha(\mathcal{K})$ e que $-\mathcal{K} = \bigcap_{\alpha>0} B_\alpha(-\mathcal{K})$.

■

Seja agora $\alpha > 0$ tal que as conclusões do Lema 2.5 valham tanto para $\mathcal{K}$ quanto para $-\mathcal{K}$.

Proposição 2.4 *Suponha que exista $u_0 \in \mathcal{K}$ tal que $J(u_0) < 0$, então J tem um ponto crítico não-trivial em $\mathcal{K}$. O mesmo resultado vale para $-\mathcal{K}$.*

Demonstração: Desde que $J(u) \geq 0$ para todo $u \in \mathcal{A}_0$. Por continuidade, estendemos naturalmente para todo $u \in \overline{\mathcal{A}_0}$.

Como $J(u_0) < 0$, tem-se $u_0 \notin \overline{\mathcal{A}_0}$. Além disso, como $\mathcal{A}_0$ é uma vizinhança aberta da origem, existe $s \in (0,1)$ tal que $su_0 \in \partial\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{K}$. Como $\partial\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{K}$ é um subconjunto fechado e invariante, pela Proposição 2.2, $\omega(su_0) \subset \partial\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{K}$ é não vazio e qualquer de seus elementos são pontos críticos de J e a afirmação segue.

■

Denotemos agora

$$\mathcal{A}_+ = \mathcal{A}(B_\alpha(\mathcal{K})) \cap \partial\mathcal{A}_0 \ \text{ e } \ \mathcal{A}_- = \mathcal{A}(B_\alpha(-\mathcal{K})) \cap \partial\mathcal{A}_0.$$

Lema 2.6 *$\mathcal{A}_+$ e $\mathcal{A}_-$ são abertos relativos de $\partial\mathcal{A}_0$ e disjuntos*

Demonstração: Como $B_\alpha(\mathcal{K})$ e $B_\alpha(-\mathcal{K})$ são abertos de H, então assim o são $\mathcal{A}(B_\alpha(\mathcal{K}))$ e $\mathcal{A}(B_\alpha(-\mathcal{K}))$ em H. Assim, $\mathcal{A}_+$ e $\mathcal{A}_-$ são relativamente abertos em $\partial\mathcal{A}_0$. Suponha agora que exista $u \in \mathcal{A}_+ \cap \mathcal{A}_-$. Como $u \in \partial\mathcal{A}_0$, então $T(u) = \infty$ e $\omega(u) \neq \emptyset$. Ainda, como $u \in \mathcal{A}(B_\alpha(\mathcal{K})) \cap \mathcal{A}(B_\alpha(-\mathcal{K}))$, então $\omega(u) \subset \overline{B_\alpha(\mathcal{K})} \cap \overline{B_\alpha(-\mathcal{K})}$. Uma vez que $\omega(u)$ é formado por pontos críticos de J, pelo Lema 2.5(ii) $\omega(u) \in \mathcal{K} \cap -\mathcal{K} = \{0\}$. Consequentemente, $\varphi^t(u) \to 0$ quando $t \to \infty$, o que contraria o fato de $u \in \partial\mathcal{A}_0$.

■

O próximo resultado que chamamos de Teorema Abstrato, estabelecerá condições suficientes para a existência de três pontos críticos não triviais para J.

Teorema 2.2 *(Teorema Abstrato) Suponha que* $(A_1) - (A_4)$ *estejam satisfeitas. Suponha ainda que exista um caminho contínuo* $h : [0,1] \to H$ *com* $h(0) \in \mathcal{K}$, $h(1) \in -\mathcal{K}$ *e* $J(h(t)) < 0$, *para todo* $t \in [0,1]$. *Então* J *tem pelo menos três pontos críticos não triviais, sendo* $u_1 \in \mathcal{K}$, $u_2 \in -\mathcal{K}$ *e* $u_3 \in H \setminus (\mathcal{K} \cup -\mathcal{K})$.

Demonstração: A existência de u_1 e u_2 segue da Proposição 2.4 aplicada a $\mathcal{K}$ e $-\mathcal{K}$. Para obter u_3, observe primeiramente que $h([0,1]) \cap \overline{\mathcal{A}_0} = \emptyset$. Seja $Q = [0,1]^2$ e $\mathcal{B} \subset Q$ definido por

$$\mathcal{B} = \{(s_1, s_2) \in Q : s_1 h(s_2) \in \mathcal{A}_0\}.$$

Definamos

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{A}_0, \quad (s_1, s_2) \to T(s_1, s_2) = s_1 h(s_2).$$

Como, h é contínuo, então T é contínua. Desde que $\mathcal{A}_0$ é aberto, então $T^{-1}(\mathcal{A}_0)$ é um aberto em $\mathbb{R}^2$ tal que $T^{-1}(\mathcal{A}_0) \cap Q = \mathcal{B}$.

Assim, $\mathcal{B}$ é relativamente aberto em Q e

- $(\{0\} \times [0,1]) \subset \mathcal{B}$, pois $0h(s) = 0 \in \mathcal{A}_0$, $\forall s \in [0,1]$;
- $(\{1\} \times [0,1]) \cap \overline{\mathcal{B}} = \emptyset$, pois $J(h(s)) < 0$, $\forall s \in [0,1]$;

Usando o princípio de continuação de Leray-Schauder [ver Teorema $A.13$ no apêndice A], pode-se provar [ver apêndice de [30]] que existe uma componente conexa Γ de $\partial\mathcal{B}$, tal que

$$\Gamma \cap ([0,1] \times \{0\}) \neq \emptyset \text{ e } \Gamma \cap ([0,1] \times \{1\}) \neq \emptyset.$$

Seja agora $\Gamma_0 = \{T(s_1, s_2) = s_1 h(s_2); (s_1, s_2) \in \Gamma\}$. Como Γ é conexo e T é contínuo então Γ_0 é um conexo onde $\Gamma_0 \subset \partial\mathcal{A}_0$ e $\Gamma_0 \cap \pm\mathcal{K} \neq \emptyset$. Como pelo Lema 2.6, $\mathcal{A}\pm$ são abertos disjuntos de $\partial\mathcal{A}_0$, então $\Gamma_0 \cap \mathcal{A}\pm$ são abertos disjuntos de Γ_0. Pela conexidade de Γ_0, existe $u \in \Gamma_0 \setminus (\mathcal{A}_+ \cup \mathcal{A}_-)$. Uma vez que $\partial\mathcal{A}_0 \setminus (\mathcal{A}_+ \cup \mathcal{A}_-)$ é invariante, então $\{\varphi(t, u); t \geq 0\} \subset \partial\mathcal{A}_0 \setminus (\mathcal{A}_+ \cup \mathcal{A}_-)$. Como esse conjunto é fechado em $\partial\mathcal{A}_0$, então $\omega(u) \subset \partial\mathcal{A}_0\backslash\ (\mathcal{A}_+ \cup \mathcal{A}_-)$. Em particular, $\omega(u) \cap (\mathcal{K} \cup -\mathcal{K}) = \emptyset$ e assim, qualquer de seus elementos tem a propriedade enuciada para u_3.

$\blacksquare$

Afirmação 2.1 *De (f_3), existem constantes positivas k_1 e k_2 tais que*

$$F(x,t) \geq k_1 |t|^\theta - k_2, \quad \textit{para } x \in \overline{\Omega} \textit{ e } t \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Demonstração: De (f_3), existe $R > 0$, tal que

$$0 < \theta F(x,t) \leq f(x,t)t, \text{ para todo } |t| \geq R \text{ e } x \in \overline{\Omega}. \tag{2.16}$$

Considerando $F(x,t) \neq 0$ e $t \neq 0$, vamos considerar os seguintes casos:

Caso 1 **:** $t \geq R+1$. Então, de (2.16) temos

$$0 < \frac{\theta}{t} \leq \frac{f(x,t)}{F(x,t)},$$

o que implica,

$$\int_{R+1}^{t} \frac{\theta}{s} ds \leq \int_{R+1}^{t} \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds,$$

de onde segue,

$$\theta \ln t - \theta \ln(R+1) \leq \ln F(x,t) - \ln F(x,R+1).$$

Logo,

$$\ln\left(\frac{t}{R+1}\right)^\theta \leq \ln\frac{F(x,t)}{F(x,R+1)}, \text{ para } t \geq R+1 \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Como ln é uma função crescente obtemos

$$\left(\frac{t}{R+1}\right)^\theta \leq \frac{F(x,t)}{F(x,R+1)}, \text{ para } t \geq R+1 \text{ e } x \in \overline{\Omega},$$

ou seja

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,R+1)}{(R+1)^\theta} t^\theta, \text{ para } t \geq R+1 \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Considerando $\min_{x\in\overline{\Omega}} F(x,R+1) = m > 0$, observamos que m está bem definido, visto que $F(\cdot, R+1)$ é contínua e $\overline{\Omega}$ é compacto. Além disso, tem-se

$$F(x,t) \geq \frac{m}{(R+1)^\theta} t^\theta, \text{ para } t \geq R+1 \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, fixando $C_1 = \frac{m}{(R+1)^\theta} > 0$, temos

$$F(x,t) \geq C_1 t^\theta, \text{ para } t \geq R+1 \text{ e } x \in \overline{\Omega}. \tag{2.17}$$

Caso $2:$ $t \leq -(R+1)$. Então, novamente de (2.16) temos

$$\frac{f(x,t)}{F(x,t)} \leq \frac{\theta}{t},$$

o que implica,

$$\int_t^{-(R+1)} \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds \leq \int_t^{-(R+1)} \frac{\theta}{s} ds,$$

de onde segue,

$$\ln F(x,-(R+1)) - \ln F(x,t) \leq \theta \ln |-(R+1)| - \theta \ln |t| .$$

Logo,

$$\ln \left| \frac{-(R+1)}{t} \right|^\theta \geq \ln \frac{F(x,-(R+1))}{F(x,t)}, \text{ para } t \leq -(R+1) \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Como ln é uma função crescente obtemos

$$\left| \frac{-(R+1)}{t} \right|^\theta \geq \frac{F(x,-(R+1))}{F(x,t)}, \text{ para } t \leq -(R+1) \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

ou seja

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,-(R+1))}{(R+1)^\theta} |t|^\theta, \text{ para } t \leq -(R+1) \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Considerando $\min_{x\in\overline{\Omega}} F(x,-(R+1)) = \bar{n} > 0$, observamos que $\bar{n}$ está bem definido, visto que $F(., R+1)$ é contínua e $\overline{\Omega}$ é compacto. Além disso, tem-se

$$F(x,t) \geq \frac{\bar{n}}{(R+1)^\theta} |t|^\theta, \text{ para } t \leq -(R+1) \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, fixando $C_2 = \frac{\bar{n}}{(R+1)^\theta} > 0$, temos

$$F(x,t) \geq C_2|t|^\theta, \text{ para } t \leq -(R+1) \text{ e } x \in \overline{\Omega}. \tag{2.18}$$

Considerando $k_1 = \min\{C_1, C_2\}$, segue de (2.17) e (2.18) que,

$$F(x,t) \geq k_1 \, |t|^\theta \, , \text{ para } \; |t| \geq R+1 \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Dessa forma,

$$F(x,t) \geq k_1 \, |t|^\theta - k_2, \text{ para } \; |t| \geq R+1 \text{ e } x \in \overline{\Omega}, \tag{2.19}$$

onde k_2 é uma constante positiva arbitrária.

Considerando $\overline{m} = \min F(x,t)$ com $x \in \overline{\Omega}$ e $t \in [-(R+1), R+1]$, note que $\overline{m}$ está bem definido, pois F é contínua e $\overline{\Omega} \times [-(R+1), R+1] \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ é um compacto, logo

$$F(x,t) \geq \overline{m}, \; \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } t \in [-(R+1), R+1]. \tag{2.20}$$

Considere $k_2 > 0$ de modo que

$$k_2 \geq k_1(R+1)^\theta - \overline{m}.$$

Uma vez que $|t| \leq R+1$, temos $|t|^\theta \leq (R+1)^\theta$ e

$$k_2 \geq k_1 \, |t|^\theta - \overline{m},$$

ou seja,

$$\overline{m} \geq k_1 \, |t|^\theta - k_2, \; \forall t \in [-(R+1), R+1].$$

Assim, de (2.20), obtemos

$$F(x,t) \geq k_1 \, |t|^\theta - k_2, \; \forall t \in [-(R+1), R+1], x \in \overline{\Omega}. \tag{2.21}$$

De (2.19) e (2.21) segue que

$$F(x,t) \geq k_1 \, |t|^\theta - k_2, \text{ para } t \in \mathbb{R}, \; x \in \overline{\Omega}.$$

$\blacksquare$

Lema 2.7 *Se* $S \subset H \setminus \{0\}$ *é um conjunto compacto e* $\tilde{S} = \{tu; u \in S, t \geq 0\}$ *então*

$$\lim_{\substack{u \in \tilde{S} \\ \|u\| \to \infty}} J(u) = -\infty.$$

Demonstração: Seja $(u_n) \subset \tilde{S}$ uma sequência com $\|u_n\| \to \infty$. Então,

$$u_n = t_n v_n, \ v_n \in S \text{ e } t_n \geq 0.$$

Pela compacidade de S, passando a uma subsequência se necessário, $v_n \to v \in S$ quando $n \to \infty$. Desde que $\theta \in (2, 2^*)$, das imersões compactas de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\theta(\Omega)$ obtemos a menos de uma subsequência

$$v_n \to v \text{ em } L^\theta(\Omega).$$

Do Teorema de Vainberg[Ver o Teorema $A.6$ no Apêndice A], existe $g \in L^\theta(\Omega)$ tal que a menos de uma subsequência

$$v_n(x) \to v(x), \ \text{q.t.p em } \Omega$$

e

$$|v_n(x)| \leq g(x), \ \text{q.t.p em } \Omega.$$

Assim,

$$k_1[|v_n(x)|^\theta - |v(x)|^\theta] \to 0, \ \text{q.t.p em } \Omega.$$

Além disso, da desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned} |k_1| \left| |v_n(x)|^\theta - |v(x)|^\theta \right| &\leq k_1(|v_n(x)|^\theta + |v(x)|^\theta) \\ &\leq C\, |g(x)|^\theta \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [Ver o Teorema $A.5$ no Apêndice A]

$$\int_\Omega k_1 |v_n|^\theta dx \to \int_\Omega k_1 |v|^\theta dx > 0.$$

Além disso, $t_n \to \infty$, desde que $\|u_n\| \to \infty$ quando $n \to \infty$. De (2.15)

$$\begin{aligned} J(u_n) &= \frac{1}{2}{t_n}^2 \|v_n\|^2 - \int_\Omega F(x, u_n)\ dx \\ &\leq \frac{1}{2}{t_n}^2 \|v_n\|^2 - \int_\Omega (k_1 |u_n|^\theta \, dx - k_2) \\ &= \frac{1}{2}{t_n}^2 \|v_n\|^2 - t_n^\theta \int_\Omega (k_1 |v_n|^\theta \, dx - k_2 t_n^{-\theta}) \\ &= {t_n}^\theta \left({t_n}^{2-\theta} \frac{\|v_n\|^2}{2} - \int_\Omega k_1 |v_n|^\theta dx - k_2 t_n^{-\theta} |\Omega| \right). \end{aligned}$$

Assim, $J(u_n) \to -\infty$ quando $n \to \infty$. Como queríamos demonstrar.

■

Capítulo 3

Demonstração do Teorema principal

Neste Capítulo, faremos a demonstração do Teorema principal, para isso, ultilizaremos algumas definições ja vistas, bem como o Lema 2.7 que nos ajudará a termos condições para usar o Teorema Abstrato 2.2 demonstrado no Capítulo anterior. O Teorema Abstrato, por sua vez, garantirá a existência da solução que estamos procurando.

Teorema 3.1 *Suponha $\gamma > 2\sqrt{\delta}$ e f satisfazendo $(f_1) - (f_4)$. Então, o sistema (S) possui uma solução semi-nodal.*

Demonstração: No capítulo anterior, mostramos que A verifica $(A_1) - (A_4)$, onde A é definido em (2.2).

Afim de aplicar o Teorema Abstrato 2.2, vamos considerar $h_s : [0,1] \to H \backslash \{0\}$ com $s > 0$, definido por

$$h_s(t) = s(tv + (1-t)u),$$

onde $u \in \mathcal{K}$ e $v \in -\mathcal{K}$ são linearmente independentes, $H = H_0^1(\Omega)$ e $\pm\mathcal{K}$ são os cones de (2.7).

Observe que para todo $s > 0$,

- $h_s(0) = su \in \mathcal{K}$;
- $h_s(1) = sv \in -\mathcal{K}$;

Então, aplicando o Lema 2.7 ao compacto

$$S = \{tv + (1-t)u, t \in [0,1]\},$$

vemos que se s é suficientemente grande, temos

$$J(h_s(t)) < 0, \ \forall \ t \in [0,1].$$

Dessa forma, pelo Teorema Abstrato 2.2, J possui pelo menos três pontos críticos u_1, u_2, u_3, onde u_1 é uma solução positiva, u_2 é uma solução negativa e u_3 é uma solução nodal de (P), isto é, $u_3 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{(\mathcal{K} \cup -\mathcal{K})\}$ e portanto o par $(u_3, B(u_3))$ é uma solução semi-nodal de (S).

$\blacksquare$

Apêndice A

Resultados Básicos

Teorema A.1 *(Representação de Riesz) Seja H um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Dado $g \in H'$, existe um único $u \in H$ tal que*

$$\langle u, v \rangle_H = g(v), \quad \textit{para} \ \ \textit{todo } v \in H.$$

Além disso,

$$\|u\|_H = \|g\|_{H'} .$$

Demonstração: Ver [8] pg. 135.

Teorema A.2 *(Agmon-Douglis-Nirenberg) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $f \in L^r(\Omega)$ com $r > 1$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é a solução fraca do problema linear*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) \ \textit{em } \Omega \\ \qquad u = 0 \quad \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \in W^{2,r}(\Omega)$ e existe $C > 0$,independente de u tal que

$$\|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C \, |f|_{L^r(\Omega)} .$$

Além disso, se $f \in W^{k,r}(\bar{\Omega})$ então $u \in W^{k+2,r}(\Omega)$.

Demonstração: Ver [8] pg. 317.

No Lema a seguir, vamos estudar a unicidade de solução para o problema

$$(P_M) \quad \begin{cases} -\Delta u + \gamma u = f(x) \text{ em } \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 \quad \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

mostrando propriedades sobre o operador solução, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado, $f \in L^2(\Omega)$ é uma função dada.

Lema A.1 *O problema (P_M) possui uma única solução $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ que será denotada por*

$$u := (-\Delta + \gamma I)^{-1} f = S(f),$$

onde $S = (-\Delta + \gamma I)^{-1}$ denota o operador solução associado a (P_M) e além disso $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é linear, compacto, simétrico, contínuo e positivo, isto é,

$$\int_\Omega S(f).f dx \geq 0.$$

Demonstração: Por simplicidade, vamos considerar $\gamma = 0$. Note que

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v \; dx$$

é o produto interno usual de $H_0^1(\Omega)$, o qual é um espaço de Hilbert com a norma induzida

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dada $f \in L^2(\Omega)$, consideremos o funcional $g : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$g(v) = \int_\Omega fv \; dx.$$

Notemos da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|g(v)| = \left| \int_\Omega fv \; dx \right| \leq \left(\int_\Omega |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Assim g está bem definido e além disso, é linear pela linearidade da integral. Para $v \in H_0^1(\Omega)$, temos novamente da Desigualdade de Cauchy-Schwarz e das Imersões Contínuas de Sobolev que existe $C > 0$ tal que

$$|g(v)| \leq |f|_{L^2} |v|_{L^2} \leq |f|_{L^2} C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

mostrando assim a continuidade de g.

Portanto, pelo Teorema $A.1$ da Representação de Riesz, segue-se que existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = g(v), \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Mostrando que $u \in H_0^1(\Omega)$ é a única solução fraca do problema (P_M). Além disso, pelo Teorema $A.2$ de Agmon-Douglis-Nirenberg concluimos que $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Assim fica bem definido o operador $S : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ definido por $S(f) = u$ onde u é a única solução fraca do problema (P_M). Note que o operador S é linear e contínuo. Com efeito, dadas $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos únicas $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ tais que $S(f_1) = u_1$ e $S(f_2) = u_2$, isto é

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v \, dx = \int_\Omega f_1 v \, dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \tag{A.1}$$

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla v \, dx = \int_\Omega f_2 v \, dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{A.2}$$

Multiplicando a igualdade $(A.2)$ por α e somando membro a membro a desigualdade resultante com a igualdade $(A.1)$ teremos

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v \, dx + \alpha \int_\Omega \nabla u_2 \nabla v \, dx = \int_\Omega f_1 v \, dx + \alpha \int_\Omega f_2 v \, dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega)$$

ou seja,

$$\int_\Omega (\nabla u_1 \nabla v + \alpha \nabla u_2 \nabla v) \, dx = \int_\Omega (f_1 v + \alpha f_2 v) \, dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Utilizando as propriedades do produto interno no primeiro membro da igualdade e a propriedade distributiva na segundo membro, obtemos

$$\int_{\Omega} (\nabla u_1 + \alpha \nabla u_2) \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (f_1 + \alpha f_2) v \, dx, \quad \text{para} \ \ \text{todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Da linearidade do operador gradiente vem que

$$\int_{\Omega} \nabla (u_1 + \alpha u_2) \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (f_1 + \alpha f_2) v \, dx, \quad \text{para} \ \ \text{todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Mostrando que $S(f_1 + \alpha f_2) = S(f_1) + \alpha S(f_2)$.

Vamos mostrar que S é contínuo. Usando a solução v como função teste na definição de solução fraca, da Desigualdade de Cauchy-Schwarz e das Imersões Contínuas de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned} \|S(f)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} f u \, dx \\ &\leq |u|_{L^2(\Omega)} \, |f|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \, |f|_{L^2(\Omega)} = C \, \|S(f)\|_{H_0^1(\Omega)} \, |f|_{L^2(\Omega)} \, . \end{aligned}$$

Assim,

$$\|S(f)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \, |f|_{L^2(\Omega)} \, ,$$

mostrando que S é limitado e por ser linear, é contínuo.

Observação A.1 *Notemos que*

$$S : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Onde $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é a imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$. Assim, da continuidade do operador S,

$$S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

é um operador compacto.

O operador $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é um operador positivo, isto é:

$$\langle S(f), f \rangle_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

Com efeito, seja $u = S(f)$ e notemos que

$$\langle S(f), f \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, f \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uf \; dx = \int_\Omega \nabla u \nabla u \; dx = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \geq 0.$$

Para finalizar, mostremos que o operador $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é um operador simétrico, isto é:

$$\langle S(f), g \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, S(g) \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Sejam $u = S(f)$ e $v = S(g)$. Então

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w_1 \; dx = \int_\Omega f w_1 \; dx, \text{ para todo } w_1 \in H^1_0(\Omega) \tag{A.3}$$

e

$$\int_\Omega \nabla v \nabla w_2 \; dx = \int_\Omega g w_2 \; dx, \text{ para todo } w_2 \in H^1_0(\Omega). \tag{A.4}$$

Considerando $w_2 = u$ em $(A.4)$ e $w_1 = v$ em $(A.3)$ resulta que

$$\int_\Omega gu \; dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v \; dx = \int_\Omega fv \; dx.$$

Mostrando que

$$\langle S(f), g \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, S(g) \rangle_{L^2(\Omega)}, \; \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

■

Definição A.1 *Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que I possui uma Derivada de Gateaux em $u \in X$ quando existir um funcional linear $T_0 \in X'$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u + tv) - I(u) - T_0 v}{t} = 0, \; \textit{para todo } v \in X.$$

A Derivada de Gateaux no ponto u, quando existir, é única. Vamos denota-la simplismente por $DI(u)$.

Definição A.2 *Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que I possui uma Derivada de Fréchet em $u \in X$ quando existir um funcional linear $T \in X'$ tal que*

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - T_0 v}{\|v\|} = 0.$$

A Derivada de Fréchet no ponto u, quando existir, é única. Vamos denota-la simplismente por $I'(u)$.

Definição A.3 *Seja A um aberto em X. Dizemos que o funcional $I \in C^1(A, \mathbb{R})$, se a Derivada de Fréchet de I existe e é contínua em A.*

Teorema A.3 *(Teorema do Valor Médio de Lagrange) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f for derivável em (a, b), então existe $\gamma \in (a, b)$, tal que*

$$f'(\gamma) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Um enunciado equivalente seria: Seja $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em $(a, a+h)$. Existe t, $0 < t < 1$, tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+th) \cdot h.$$

Demonstração: Ver [20] pg.272.

Proposição A.1 *Seja $I : A \to \mathbb{R}$ onde A é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X. Se I possui uma Derivada de Gateaux contínua em A, então $I \in C^1(A, \mathbb{R})$. Além disso, $DI(u) = I'(u)$.*

Demonstração: Consideremos $u \in A$ e $DI(u)$ a derivada de Gateaux de I em u. Pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, existe $t \in (0,1)$ tal que

$$|I(u+v) - I(u) - DI(u)v| = |DI(u+tv)v - DI(u)v| \tag{A.5}$$

$$\leq \|DI(u+tv) - DI(u)\|_{X'} \|v\| . \tag{A.6}$$

Como I possui Derivada de Gateaux contínua em A, então dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que, para qualquer $\|v\| < \varepsilon$ temos

$$\|DI(u+tv) - DI(u)\|_{X'} < \varepsilon.$$

Segue então de $(A.5)$ que

$$|I(u+v) - I(u) - DI(u)v| < \varepsilon \|v\|$$

de onde concluímos que I possui uma derivada de Fréchet e esta é contínua.

■

Teorema A.4 *(Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p, q < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| \, dx \leq |f|_{L^p(\Omega)} |g|_{L^q(\Omega)} .$$

Demonstração: Ver [8] pg.92.

Corolário A.1 *(Desigualdade de Poincaré) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $1 < p < N$. Então*

$$|u|_{L^q(\Omega)} \leq C |\nabla u|_{L^p(\Omega)} ,$$

onde $C = C(p, q, N, \Omega)$ e $1 \leq q \leq p^* = \frac{Np}{N-p}$.

Demonstração: Ver [12] pg.266.

Teorema A.5 *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)*

Seja M um conjunto mensurável do $\mathbb{R}^N$ e seja (f_j) uma sequência de funções mensuráveis tal que

$$f_j(x) \to f(x), \ \ q.t.p \ em \ M,$$

onde f é mensurável. Se existir uma função $g \in L^1(M)$ tal que

$$|f_j(x)| \leq |g(x)|\,, \ \ q.t.p \ em \ M,$$

então

$$\lim_{j \to +\infty} \int_M f_j(x)dx = \int_M f_j(x)dx.$$

Demonstração: Ver [3] pg.44.

Teorema A.6 *(Teorema de Vainberg) Sejam (f_j) uma sequência de funções em $L^q(\Omega)$ e $f \in L^q(\Omega)$ tais que*

$$f_j \to f em \ L^q(\Omega).$$

Então, existe $(f_{j_k}) \subset (f_j)$ e uma função $g \in L^q(\Omega)$ tal que

$$|f_{j_k}(x)| \leq g(x) \ \ q.t.p \ em \ \Omega$$

e

$$f_{j_k}(x) \to f(x) \ \ q.t.p \ em \ \Omega.$$

Demonstração: Ver [8] pg.94.

Teorema A.7 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, as seguintes imersões*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$$

são contínuas, quando

$$1 \leq s \leq 2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2} = 2^*, & N \geq 3, \\ \infty, & N = 1, 2. \end{cases}$$

Demonstração: Ver [22] pg 75.

Teorema A.8 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, as seguintes imersões*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$$

são compactas, quando

$$1 \leq s < 2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2} = 2^*, & N \geq 3, \\ \infty, & N = 1, 2. \end{cases}$$

Demonstração: Ver [22] pg. 84.

Como consequência dessas imersões e desde que $H_0^1(\Omega)$ é um Espaço de Banach reflexivo, para toda sequência limitada $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, existem $u_{n_j} \subset (u_n)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

e

$$u_{n_j} \to u \text{ em } L^s(\Omega).$$

Teorema A.9 *(Projeção sobre um conjunto convexo fechado) Seja K um subconjunto não vazio convexo e fechado do espaço de Hilbert H. Então para cada $f \in H$ existe um único elemento $u \in K$ tal que*

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\| = \ dist(f, K).$$

Além disso, u é caracterizado pela propriedade

$$u \in K \ e \ \langle f - u, v - u \rangle \leq 0, \ \forall v \in K.$$

onde $u = proj_K^f$.

Demonstração: Ver [8] pg.132.

Teorema A.10 *(Separação de Mazur)Seja* K *um subconjunto convexo com interior não vazio de um espaço vetorial* L *e seja* E *um subconjunto de* L *que não contem pontos interiores de* K*. Então existe* f *em* L' *e um número real* c *tal que* $f(x) = c$ *para todo* x *em* E *e* $f(y) < c$ *para todo ponto interior* y *de* K*.*

Demonstração: Ver [21] pg.23.

Teorema A.11 *(Princípio do máximo) Se* $\gamma + \lambda_1 > \sqrt{\delta}$*,* $-\gamma + 2\sqrt{\delta} < \lambda < \hat{\lambda}_1$ *e* u *é solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + Bu - \lambda u = g(x) \ \text{ em } \Omega, \\ \hspace{5.5em} u = 0 \quad \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $g \in C(\overline{\Omega})$*,* $g \geq 0$*,* $g \not\equiv 0$ *e o parâmetro real* λ *é restrito a certos intervalos, dependendo de* γ*,* δ *e* Ω*. Então* $u > 0$ *em* Ω*,* $\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0$ *em* $\partial\Omega$*, onde* $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ *designa a derivada normal exterior de* u *em* $\partial\Omega$*.*

Demonstração: Ver [15] pg.$838 - 840$.

Teorema A.12 *(de Schauder) Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado e* $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$*. Então existe* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *solução do problema linear*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) \ \text{ em } \Omega, \\ \quad\ u = 0 \quad \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e existe $C > 0$*, independente de* u *tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\,|f|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\,.$$

Além disso, se $f \in C^{k,r}(\overline{\Omega})$ *então* $u \in C^{k+2,r}(\overline{\Omega})$*.*

Demonstração: Ver [8] pg. 317.

Teorema A.13 *(Princípio de continuação de Leray-Schauder) Seja D um subconjunto aberto limitado de um espaço de Banach X. Seja $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e assuma que $T : [a, b] \times \overline{D} \to X$ é compacto e contínuo. Considere $\rho : [a, b] \times \overline{D} \to X$ definido por $\rho(t, u) = u - T(t, u)$. Assuma que*

- $\rho(t, u) \neq 0$, *$t \in [a, b]$, $u \in \partial D$;*
- $\deg(\rho(t, \cdot), D, 0) \neq 0$, *para algum $t \in [a, b]$;*

Considere o conjunto

$$S_{a,b} := \{(t, u) \in [a, b] \times \overline{D}; \rho(t, u) = 0\}.$$

Então existe um subconjunto conexo limitado $\Sigma_{a,b}$ de $S_{a,b}$ tal que

$$\Sigma_{a,b} \cap (\{a\} \times D) \neq \emptyset$$

e

$$\Sigma_{a,b} \cap (\{b\} \times D) \neq \emptyset.$$

Demonstração: Ver [26] pg.50.

Bibliografia

[1] C.O. Alves and M.A S. Souto, *Existence of least energy nodal solution for a Schrödinger-Poisson system in bounded domains*, Z. Angew. Math. Phys. 65 (2014), 1153 – 1166.

[2] C. O. Alves, G. M. Figueiredo and A. B. Nobrega, *Existence of semi-nodal solution for a class of FitzHugh-Nagumo type system,* Monatshefte für Mathematik, 181, 3, 2016, pg. 515 – 526.

[3] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure,* Jonh Wiley and Sons, Inc., New York, (1995).

[4] T. Bartsch, T. Weth and M. Willem, *Partial symmetry of least energy nodal solution to some variational problems*, J. Anal. Math. 96 (2005), 1 – 18.

[5] T. Bartsch and T. Weth, *Three nodal solutions of singularly pertubed elliptic equations on domains without topology*, Ann. Inst. H. PoicaréAnal. Non Linéaire 22 (2005), 259 – 281.

[6] T. Bartsch, Z. Liu and T. Weth, *Sign changing solutions of superlinear Schrödinger equations* , Comm. Partial Differential Equations 29 (2004), 25 – 42.

[7] T. Bräu, *A decomposition method with respect to dual cones and its application to higher order Sobolev spaces*, Download:http://www-ian.math.unimagdeburg.de/home/grunau/papers/BraeuStudEnglisch.pdf.

[8] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.*

[9] A. Castro, J. Cossio and J. Neuberger, *A sign-changing solution for superlinear Dirichlet problem*, Rocky Mountain J. Math. 27 (1997), $1041-1053$.

[10] F. J. S. A, Corrêa, *Sobre alguns resultados sobre um sistema de reação-difusão e o sistema estacionário associado*, Tese de Doutorado, UnB (1986).

[11] C.-N. Chen, K. Tanaka, *A variational approach for standind waves of FitzHugh-Nagumo type systems*, J. Diff. Equations 257 (2014), $109-144$.

[12] L. C. Evans, *Partial Differential Equations,* Vol. 19, American Mathematical Society, U.S.A., (1949).

[13] G. M. Figueiredo, *Multiplicidade, regularidade, positividade de soluções de um sistema de reação e difusão*, Dissertação de Mestrado, UFPA (1999).

[14] R. FitzHugh, *Impulse andphysiological states in models of nerve membrans*, J. Biophysics 1 (1961), $445-466$.

[15] D.G de Figueiredo and E. Mitidieri, *A Maximum principle for an elliptic system and application to semilinear problems*, SIAM J. Math. Anal. 17 (1986), $836-849$.

[16] F. Gazzola, H. Grunau, G. Sweers, *Polyharmonic boundary value problems, Lectures notes in mathematics*, Springer (2010).

[17] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations,* Wiley-Interscience, N.Y., 1969.

[18] A. L. Hodgkin and A.F. Huxley, *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve,* J. Physiol. 117 (1952), $500 - 544$.

[19] Z. Liu, J. Sun, *Invariant Sets of Descending Flow in Critical Point Theory with Applications to Nonlinear Differential Equations*, Journal of Differential Equations,Vol. 172 (2001), $257 - 299$.

[20] E. L. Lima, *Curso de análise, vol.1.* Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2013. ilust.(Projeto Euclides)

[21] M. Mahlon Day, *Normed Linear Spaces,* Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[22] L. Medeiros, *Espaços de Sobolev,* IM-UFRJ (2000).

[23] J. Moreau, *Décomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cônes mutuellement polaires,* C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 255 (1962), $238 - 240$.

[24] J.S. Nagumo, S. Arimoto and S. Yoschizawa, *An active pulse transmission line simulating nerve axon,* Proc. IRE 50 (1962), $2061 - 2071$.

[25] X. Ren and J. Wei, *Nucleation in the FitzHugh-Nagumo system: Interface-spike solutions,* J. Diff. Equations 209 (2005), $266 - 301$.

[26] K. Schimitt and R. C Tompson, *Nonlinear Analysis and Partial Differential Equations: An Introduction.*

[27] G. Swers and W. C. Troy, *On the bifurcation curve for an elliptic system of FitzHugh- Nagumo type,*, Physica, D 177 (2013), $1 - 22$.

[28] J. Wei and M. Winter, *Clustered spots in the FitzHugh-Nagumo system,* J. Diff. Equations 213 (2005), $121 - 145$.

[29] J. Wei and M. Winter, *Standing waves in FitzHugh-Nagumo system and a problem in combinatorial geometry*, Math. Z.254 (2006), 359 – 383.

[30] T.Weth, *Nodal solutions to superlinear biharmonic equations via decomposition in dual cones,* Topo. Methods Nonlinear Anal. 28 (2006), 3352.