



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO E MATEMÁTICA E  
ESTATÍSTICA**

**TARCILIO ROGER NORONHA NEPOMUCENO**

**APLICAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO E  
FILTRO DE KALMAN UNSCENTED NA ASSIMILAÇÃO DE  
DADOS DE FMRI**

**DISSERTAÇÃO MESTRADO**

Belém – PA

2017

**TARCILIO ROGER NORONHA NEPOMUCENO**

Aplicação do Filtro de Kalman Estendido e Filtro de Kalman  
Unscented na Assimilação de Dados de fMRI.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Trabalho orientado pelo Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias

Belém - PA

2017

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**  
**UFPA / Biblioteca Central**

---

Nepomuceno, Tarcilio Roger Noronha, 1991-  
Aplicação do filtro de Kalman estendido e filtro de Kalman Unscented na assimilação de dados de fMRI / Tarcilio Roger Noronha Nepomuceno . — 2017.

Orientador: Valcir João da Cunha Farias  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2017.

1. Kalman, Filtragem de. 2. Imagem de ressonância magnética. 3. Cérebro – Vasos sanguíneos - Circulação. 4. Hemodinâmica. I. Título.

*CDD 23. ed. 519.5*

---

Tarcilio Roger Noronha Nepomuceno

**Aplicação do Filtro de Kalman Estendido e Filtro de Kalman  
Unscented na Assimilação de Dados de fMRI**

Esta dissertação foi julgada e aprovada, para a obtenção do grau de Mestre em Estatística, ao Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará.

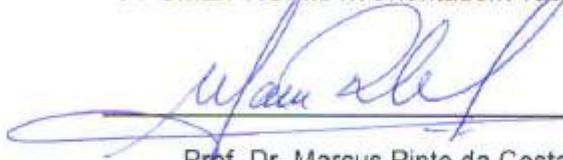
Belém, 20 de julho de 2017



---

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias

PPGME/PROFMAT/Orientador/Presidente da Banca



---

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha

PPGME/UFPA/Membro



---

Profª. Dra. Celsa Herminia de Melo Maranhão

FACULDADE DE MATEMÁTICA/UFPA/Membro

*A minha mãe Alzira Noronha e minha professora Marina Toma*

## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer primeiro às minhas duas mães, minha mãe Alzira Noronha que sempre me ajudou e apoiou nesse meu sonho, e a minha segunda mãe Marina Toma que adquirir nessa jornada que foi o Mestrado. Pois as duas sempre estiveram do meu lado me dando força, ajudando, dando broncas (isso que mães fazem quando se preocupam).

Ao meu orientador Valcir João Farias que teve essa paciência incrível de fazer esse trabalho dar certo, e me ajudou sempre que foi preciso.

Ao meu professor e orientador do curso de graduação Carlos Miranda, pois sem ele esse sonho nem existia, muito obrigado.

Aos todos os meus amigos em especial Elberth Sales, Kleuber Favacho, Romualdo Santana e Alan Silva, Daniel Flexa e Gustavo, pois eles sempre me ajudaram no momento que eu precisava.

Às minhas amigas do mestrado Fadia e Shirlane, pois sofremos juntos e merecemos comemorar juntos todos os nossos sucessos.

À Professora Dr<sup>a</sup> Regina Madruga e o Professor Dr. Heliton Tavares, pois ajudaram muito no crescimento durante esses anos.

À Asuka e galera do canal da Shu que sempre aliviavam meu estresse

À Universidade Federal do Pará;

À Universidade do Estado do Pará;

Ao PPGME;

A Tia Regina do Kumon que nesses últimos meses me ajudou bastante.

Finalmente todos aqueles que contribuíram de alguma forma para que esse meu sonho se realize.

“Para ficar ruim ainda tem que melhorar muito”

## **LISTA DE SIGLAS**

EEG – Eletroencefalografia

fMRI – Imagem por Ressonância Magnética Funcional

BOLD - Blood Oxigenation Level Dependent

RMf – Ressonância Magnética Funcional

EKF – Filtro de Kalman Estendido

UKF – Filtro de Kalman Unscented

GRV – Variável Gaussiana

RM – Ressonância Magnética

H.O.T- ordem do erro de truncamento

EDO's – equações diferenciais ordinarias

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Tubo Cilíndrico de um scanner de Ressonância Magnética	19
Figura 2.2: Sinal BOLD.	21
Figura 2.3: Recebimento do estímulo, causando alterações no nível sanguíneo.	22
Figura 2.4: Sinais de entrada Neura $lu(t)$	26
Figura 2.5. Fluxo sanguíneo cerebral (sinal $f$ )	27
Figura 2.6. Volume sanguíneo cerebral (sinal $v$ )	27
Figura 2.7. Quantidade de deoxihemoglobina (sinal $q$ )	28
Figura 2.8. Função de resposta Hemodinâmica.	28
Figura 3.1: Fases do Filtro de Kalman	29
Figura 4.1. Função Hemodinâmica contaminada com Ruído Branco Gaussiano.	42
Figura 4.2. Estimação do parâmetro $f$ (fluxo sanguíneo cerebral) através do FKE na Função Hemodinâmica com ruído Branco Gaussiano.	44
Figura 4.3. Erro entre o sinal $f$ original e o estimado.	44
Figura 4.4. Estimação do parâmetro $v$ (volume sanguíneo cerebral) através do FKE na Função Hemodinâmica com ruído Branco Gaussiano.	45
Figura 4.5. Erro entre o sinal $v$ original e o estimado.	45
Figura 4.6. Estimação do parâmetro $q$ (quantidade de deoxihemoglobina no cérebro) através do FKE na Função Hemodinâmica com ruído Branco Gaussiano.	46
Figura 4.7. Erro entre o sinal $q$ original e o estimado.	46
Figura 4.8 – Estimação do sinal BOLD através do FKE sem ruído Branco Gaussiano	47
Figura 4.9. Erro entre o sinal BOLD original e o estimado.	47
Figura 4.10. Sinal de decaimento ( $\tau_f$ )	48
Figura 4.11. Constante do tempo auto regulação de retorno ( $\tau_s$ )	48
Figura 4.12. Tempo de transição ( $\tau_0$ )	49
Figura 4.13. Eficácia neuronal ( $\epsilon$ )	49
Figura 4.14. Extração e fração de oxigênio ( $E_0$ ).	50
Figura 4.15. Estimação do parâmetro $f$ (fluxo sanguíneo cerebral) através do EKF na Função Hemodinâmica com ruído Branco Gaussiano com menor covariância.	51
Figura 4.16. Erro entre o sinal $f$ original e o estimado, para uma menor covariância.	51
Figura 4.17. Estimação do parâmetro $v$ (volume sanguíneo cerebral) através do EKF na Função Hemodinâmica com ruído Branco Gaussiano com menor covariância.	52

Figura 4.18. Erro entre o sinal $v$ original e o estimado, para uma menor covariância	52
Figura 4.19. Estimação do parâmetro $q$ (quantidade de deoxihemoglobina no cérebro) através do EKF na Função Hemodinâmica com ruído Branco Gaussianocom menor covariância.	53
Figura 4.20. Erro entre o sinal $q$ original e o estimado, para uma menor covariância.	53
Figura 4.21. Estimação do sinal BOLD através do EKF sem ruído Branco Gaussianocom menor covariância	54
Figura 4.22. Erro entre o sinal BOLD original e o estimado, para uma menor covariância.	54
Figura 4.23. Sinal de decaimento ( $\tau_f$ ), com menor covariância.	55
Figura 4.24. Constante do tempo auto regulação de retorno ( $\tau_s$ ) , com menor covariância.	55
Figura 4.25. Tempo de transição ( $\tau_0$ ) , com menor covariância.	56
Figura 4.26. Eficácia neuronal ( $\epsilon$ ) , com menor covariância.	56
Figura 4.27. Extração e fração de oxigênio ( $E_0$ ). , com menor covariância.	57
Figura 4.28. Estimação do parâmetro $f$ (fluxo sanguíneo cerebral) através do UKF na Função Hemodinâmica com ruído Branco Gaussianocom menor covariância.	58
Figura 4.29. Erro entre o sinal $f$ original e o estimado	58
Figura 4.30. Estimação do parâmetro $v$ (volume sanguíneo cerebral) através do UKF na Resposta Hemodinâmica com ruído Branco Gaussianocom menor covariância.	59
Figura 4.31. Erro entre o sinal $v$ original e o estimado	59
Figura 4.32. Estimação do parâmetro $q$ (quantidade de deoxihemoglobina no cérebro) através do UKF na Resposta Hemodinâmica com ruído Branco Gaussianocom menor covariância.	59
Figura 4.33. Erro entre o sinal $q$ original e o estimado	60
Figura 4.34. Estimação do sinal BOLD através do UKF com ruído Branco Gaussianocom menor covariância.	60
Figura 4.35. Erro entre o sinal BOLD original e o estimado.	60
Figura 4.36. Sinal de decaimento ( $\tau_f$ ).	61
Figura 4.37. Constante do tempo auto regulação de retorno ( $\tau_s$ ).	61
Figura 4.38. Tempo de transição ( $\tau_0$ ).	62
Figura 4.39. Eficácia neuronal ( $\epsilon$ ).	62
Figura 4.40. Extração e fração de oxigênio ( $E_0$ ).	62

## RESUMO

A Imagem funcional por Ressonância magnética é uma técnica capaz de detectar variações no fluxo sanguíneo em resposta à atividade neural. Quando um paciente é submetido a certo estímulo ocorrem mudanças sanguíneas no cérebro. Com intuito de saber esses valores quantitativos da intensidade do fluxo sanguíneo, volume sanguíneo e quantidade de deoxihemoglobina no sangue cerebral, utilizaremos algumas técnicas de estimação. Este trabalho aborda a aplicação do filtro de Kalman estendido e Unscented em dados da Imagem Funcional por Ressonância magnética, e também fazer uma comparação entre suas estimações para verificar qual método é mais eficaz e menos complexo na utilização. Serão estimados os parâmetros do modelo hemodinâmico de Buxton-Friston fluxo cerebral sanguíneo, volume cerebral sanguíneo e quantidade de hemoglobina na hora do estímulo e os demais parâmetros. Percebeu que o EFK recupera os parâmetros e sua estimação esta ligada ao ajuste de suas covariâncias, quanto melhor for essas covariâncias melhor sua estimação. Entretanto o UKF não teve uma estimação muito boa.

Palavras chaves: Filtro de Kalman, Modelo Hemodinâmico, Imagem por ressonância magnética Funcional, Efeito BOLD.

## **ABSTRACT**

Magnetic resonance imaging is a technique capable of detecting changes in blood flow in response to neural activity. When a patient undergoes certain stimulation blood changes in the brain. In order to know these quantitative values of blood flow intensity, blood volume and amount of deoxyhemoglobin in the cerebral blood, we will use some estimation techniques. This work deals with the application of the extended and Unscented Kalman filter in Functional Imaging by Magnetic Resonance data, as well as make a comparison between its estimations to verify which method is more efficient and less complex in use. The parameters of the hemodynamic model of Buxton-Friston blood brain flow, blood brain volume and amount of hemoglobin at the time of the stimulus and the other parameters will be estimated. He noticed that the EKF retrieves the parameters and their estimation is linked to the size of their covariance, the lower these covariances the better their estimation. However the UKF did not have a very good estimate so the EKF became a better estimator.

Key Words: Kalman Filter, Hemodynamic Model, Functional Magnetic Resonance Imaging, BOLD Effect.

## **Sumario**

Lista de Siglas	8
Lista de Figuras	9
Resumo	11
Abstract	12
<b>1- INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>2- IMAGEM FUNCIONAL POR RESSONÂNCIA MAGNÉTICA</b>	<b>18</b>
2.1 – Introdução	18
2.2 - Efeito BOLD	21
2.3 - Modelo Hemodinâmico de Buxton-Friston	23
2.3.1- Método de Runge-kutta	24
2.3.1.1 Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem	25
<b>3- O FILTRO DE KALMAN</b>	<b>29</b>
3.1. O Filtro de Kalman	29
3.2. Filtro de Kalman Estendido	32
3.3 - Filtro de Kalman Unscented	38
<b>4- RESULTADOS</b>	<b>42</b>
4.1. Resultados para o EKF	42
4.2 Resultados para o UKF	57
<b>5- CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>64</b>
<b>6- REFERENCIAS</b>	<b>65</b>

## INTRODUÇÃO

A Imagem Funcional por Ressonância Magnética (fMRI) tem sido amplamente utilizada em projetos de pesquisa, assim como em aplicações clínicas. Em muitos casos ela é associada a outros métodos não invasivos, tais como a eletroencefalografia (EEG) e a espectroscopia de infravermelho próximo (NIRS, do inglês Near Infrared Spectroscopy). A fMRI tem dominado o cenário do mapeamento cerebral em parte devido ao fato de não utilizar radiação ionizante ou contraste exógeno [12].

A ressonância magnética funcional é uma técnica para a obtenção de imagens de atividade cerebral durante a execução de uma tarefa. Não requer nenhuma injeção de qualquer substância, por isso é considerada não-evasiva. Sua tecnologia utiliza um poderoso ímã (40.000 vezes mais forte do que o campo magnético da Terra) para medir as mudanças na distribuição de sangue oxigenado durante e após o paciente executar determinadas tarefas.

O uso de ressonância magnética é necessário para obter imagens das partes mais internas do cérebro, tais como o núcleo accumbens, o qual ele desempenha um papel importante no processamento de emoções. Embora fMRI tem seus detratores, é geralmente considerada uma das técnicas de imagem mais precisos e confiáveis que podem ser aplicadas para o cérebro [3].

Dentre as técnicas utilizadas em ressonância magnética funcional (RMf), a mais empregada atualmente baseia-se no chamado efeito BOLD (Blood Oxygenation Level Dependent). O uso da técnica BOLD é tão difundido atualmente que sempre que se fala em RMf, considera-se, implicitamente, que o método seja esse, a não ser que um outro seja especificado.

Quando determinada região cerebral responsável por um determinado estímulo ocorre mudanças na oxigenação, há a troca de desoxihemoglobina, pela oxi-hemoglobina e o aparelho de ressonância magnética detecta tais mudanças. Essas alterações no nível de oxigenação do sangue são conhecidas como efeito BOLD [25].

Apesar de saber que existem essas trocas sanguíneas no cérebro quando ocorrem certo estímulo não se sabe dados quantitativos, como o fluxo sanguíneo cerebral no momento desses estímulos, ate mesmo a quantidade de hemoglobina

ou volume sanguíneo cerebral durante essas trocas, pois o exame de ressonância magnética apresenta apenas dados qualitativos em suas imagens.

A fim de apresentar esses valores quantitativo Friston et al. [11] apresentada um modelo linear das respostas hemodinâmicas em fMRI de séries temporais, em que a atividade neuronal é convertida em uma função resposta hemodinâmica. Assim podemos representar quantitativamente os valores do fluxo sanguíneo, volume sanguíneo e até mesmo a quantidade de hemoglobina no cérebro durante as trocas sanguíneas conhecidas como efeito BOLD.

Porém esses modelos são apresentados em forma de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, no qual precisa-se de métodos eficientes para estimá-los.

Este trabalho, assim como outros, tende a fazer estimações dos parâmetros utilizados nos modelos hemodinâmicos. Porém nem sempre é fácil fazer essa estimação, e como o modelo dispõe de sistemas de equações não lineares, serão utilizadas variações do Filtro de Kalman para gerar essas estimações.

Fundamentados nos autores abaixo se percebe que as diversas variações do Filtro de Kalman, Estendido (EKF) e Unscented (UKF), pode ser utilizado para fazer essas estimações. Algumas dificuldades são encontradas a respeito da eficiência do método.

Euan [10] desenvolveu um trabalho com objetivo de verificar se a técnica do FKE era um bom estimador para recuperar parâmetros do modelo de Buxton-Friston em dados de fMRI. Para isso ele utilizou o método de Runge-Kutta para resolução de sistemas de equações diferenciais de 4ª ordem do modelo hemodinâmico de Buxton-Friston, para recuperar os seguintes parâmetros: fluxo sanguíneo volume sanguíneo cerebral, quantidade de deoxihemoglobina e o sinal BOLD original. Para isso foi utilizado um sinal BOLD gerado pelo modelo de Buxton-Friston, com e sem resíduo branco.

O autor percebeu que o EKF conseguiu recuperar os parâmetros citados acima, tanto com ou sem ruído branco, da mesma forma como o sinal “f” (fluxo sanguíneo), sinal “v” (volume sanguíneo cerebral) e sinal “q” (quantidade de deoxihemoglobina). Sendo assim pode-se concluir que a técnica do EKF é um bom estimador para recuperar os parâmetros do modelo de Buxton-Friston. Porém o mesmo percebeu que o EKF só recupera os parâmetros; do fluxo sanguíneo, o

volume sanguíneo cerebral, a quantidade de deoxihemoglobina e o sinal BOLD original e não recupera os outros parâmetros utilizados no modelo.

Moraes [21] diz “A assimilação dos parâmetros do sinal sem e com ruído pelo EKF foi boa”. Contudo, o EKF apenas recuperou os parâmetros principais  $f$ ,  $v$  e  $q$  não conseguindo estimar os demais parâmetros fisiológicos, como por exemplo: o tempo de transição, eficácia neuronal ou a extração e fração de oxigênio. E sugere que utilizemos UKF para a tentativa de recuperação de todos os parâmetros do modelo hemodinâmico, comparando a eficiência da utilização dos filtros para a estimação.

Em Wan [26] o EKF pode ser visto como o fornecedor de aproximações "de primeira ordem" para os termos otimizados. Estas aproximações, no entanto, podem introduzir grandes erros na media posterior verdadeira e covariância da variável aleatória Gaussiana (GRV) transformada, o que pode levar a um desempenho abaixo do ideal e, por vezes divergência do filtro. São essas "falhas" que serão corrigidas utilizando o UKF.

O UKF aborda uma melhoria de aproximação do EKF. A distribuição do estado é novamente representada por uma GRV, mas agora é especificado usando um conjunto mínimo de pontos de amostragem cuidadosamente escolhidos. Estes pontos de amostragem capturam completamente a verdadeira média e covariância da GRV, e quando propagada através do sistema não linear verdadeiro, captura a media posterior e covariância com precisão para a 3ª ordem (série de expansão de Taylor) para qualquer não linearidade [26].

O EKF constrói uma aproximação ao Hessiano [19] esperado, tomando produtos exteriores do gradiente. O UKF, no entanto, pode fornecer uma estimativa mais precisa através de uma aproximação direta da expectativa de Hessiano. Outra distinta vantagem do UKF ocorre quando nem a arquitetura ou o erro métrico é tal que a diferenciação com respeito aos os parâmetros não é facilmente derivada conforme necessário no EKF. O UKF avalia efetivamente tanto o Jacobiano e Hessiano precisamente através da sua propagação do ponto sigma, sem a necessidade de realizar qualquer diferenciação analítica.

O EKF tem sido amplamente aceito como uma ferramenta padrão na comunidade de aprendizado de funcionamento de máquinas. Neste trabalho apresentamos uma alternativa para melhores resultados de estimação utilizando o

filtro Unscented. O UKF alcança consistentemente um melhor nível de precisão do que o EKF a um nível comparável de complexidade. Em seu trabalho Wan [26] mostra esse ganho de desempenho em de domínios de aplicação, incluindo estimativa de estado, estimativa dupla, e estimativa de parâmetro.

Com base nisso usaremos o UKF para estimar os parâmetros do modelo hemodinâmico de Buxton-Friston, tanto os parâmetros: fluxo sanguíneo volume sanguíneo cerebral, quantidade de deoxihemoglobina e o sinal BOLD original. Assim também como os demais parâmetros.

O objetivo dessa Dissertação é utilizar o Filtro de Kalman estendido e Unscented para recuperar os parâmetros dos dados da fMRI e comparar seus resultados obtidos pelos dois métodos.

## CAPÍTULO 2

### IMAGEM FUNCIONAL POR RESSONÂNCIA MAGNÉTICA

#### 2.1. INTRODUÇÃO

A Imagem Funcional por Ressonância Magnética (fMRI, do inglês Functional Magnetic Resonance Imaging), é uma técnica específica do uso da imagem por ressonância magnética (MRI, do inglês Magnetic Resonance Imaging) capaz de detectar variações no fluxo sanguíneo em resposta à atividade neural [17].

A fMRI é uma das formas mais recentemente desenvolvidas de neuroimagem, mas a ideia subjacente à técnica - inferir a atividade cerebral medindo mudanças no fluxo sanguíneo - não é nova [1].

Em 1890, a visão predominante era que o cérebro é envolto pelo crânio, os aumentos locais no fluxo sanguíneo e do volume seriam impossíveis. Pensava-se, em vez de que quaisquer alterações no fluxo sanguíneo foram causadas por mudanças sistêmicas da pressão arterial ou débito cardíaco [1].

Perto do final do século XIX, Charles S. Roy e Charles S. Sherrington forneceram a primeira evidência apoiando um acoplamento entre o metabolismo da energia e do fluxo sanguíneo no cérebro. Nas suas experiências, um dispositivo de monitorização foi colocado na superfície do cérebro dos cães anestesiados, que mediu as flutuações no volume de sangue. Eles mostraram que o volume de sangue (e, presumivelmente, o fluxo) muda localmente no cérebro. No entanto, ainda não está claro se o próprio cérebro era responsável por mediar essas mudanças [1].

Foi em 1948 em um experimento para medir metabolismo do oxigênio e do fluxo sanguíneo no cérebro que Seymour Kety e Carl Schmidt [14], confirmaram que o fluxo de sangue no cérebro é regionalmente regulado pelo próprio cérebro. Eles demonstraram que quando os neurônios usam mais oxigênio, sinais químicos causam vasos sanguíneos próximos a dilatar. O aumento do volume vascular leva a um aumento local do fluxo sanguíneo. No entanto, a capacidade de medir o fluxo cerebral sanguíneo, um correlato comprovado de metabolismo cerebral, abriu a possibilidade notável de estudar a função cerebral em seres humanos [1].

A flexibilidade e segurança das técnicas de imagens por ressonância magnética são características determinantes para sua crescente atualização. Iniciada nos meados de 1970, a aplicação clínica de imagens estruturais por

ressonância magnética expandiu-se e consolidou-se na década de 1980. Durante a década de 1970 foram realizadas as primeiras medidas quantitativas da taxa metabólica cerebral regional do oxigênio do fluxo sanguíneo cerebral e do volume sanguíneo cerebral [22].

O desenvolvimento de fMRI na década de 1990, geralmente creditada a Seiji Ogawa e Ken Kwong [22], que usam o fluxo sanguíneo e metabolismo do oxigênio para inferir atividade cerebral. Como uma técnica de imagem cerebral fMRI tem várias vantagens significativas:

- É não-invasivo e não envolve radiação, tornando-o seguro para o sujeito.
- Tem excelente resolução espaço-tempo.
- É fácil para o experimentador para usar.

A aquisição de imagens é feita através de um exame com um paciente voluntário que recebe estímulos para a ativação da parte cerebral a ser estudada. Quando há estímulo, é realizada a troca do sangue venoso, deoxihemoglobina, pelo sangue arterial, a oxihemoglobina (oxyHb-hemoglobina oxigenada), que funciona como um contraste natural denominado efeito BOLD.

As vantagens de fMRI tornaram uma ferramenta popular para geração de imagens funcional do cérebro - especialmente para psicólogos [1]. Durante a última década tem proporcionado uma nova visão para a investigação de como as memórias são formadas, língua, dor, aprendizagem e emoção, para citar apenas algumas áreas de pesquisa. fMRI também está sendo aplicado em ambientes clínicos e comerciais [1], a Figura 2.1 apresenta a máquina para fazer exames de ressonância magnética.

Figura 2.1: Tubo Cilíndrico de um scanner de Ressonância Magnética



Fonte: [1]

No exame de ressonância magnética o oxigênio é fornecido para os neurónios pela hemoglobina nas células vermelhas do sangue capilar. Quando a atividade neuronal aumenta há um aumento da demanda por oxigênio e a resposta local é um aumento no fluxo de sangue para as regiões de aumento da atividade neural.

A hemoglobina é diamagnética quando oxigenado, mas paramagnética quando desoxigenado. Esta diferença nas propriedades magnéticas leva a pequenas diferenças no sinal RM de sangue em função do grau de oxigenação. Uma vez que a oxigenação do sangue varia de acordo com os níveis de atividade neural que estas diferenças podem ser usadas para detectar a atividade cerebral.

Um ponto a ser observado é a direção da mudança de oxigenação com o aumento da atividade. Você pode esperar a oxigenação do sangue a diminuir com a ativação, mas a realidade é outra. Há uma diminuição momentânea da oxigenação no sangue imediatamente após aumentos atividade neuronal, conhecido como o "mergulho" inicial na resposta hemodinâmica. Isto é seguido por um período em que os aumentos do fluxo sanguíneo, e não apenas a um nível em que a demanda de oxigênio é cumprida, mas Compensação excessiva para o aumento da demanda. Isto significa que a oxigenação do sangue na verdade aumenta após a ativação neural. Os picos de fluxo sanguíneo após cerca de 6 segundos e depois cai de volta à linha de base, muitas vezes acompanhado por um "abaixo pós-estímulo".

Foram desenvolvidos diversos trabalhos voltados para a detecção das regiões ativas aplicando métodos como: Estimação Bayesiana[8], Modelo Linear Generalizado[16], redes neurais artificiais [7], entre outros. Estes tinham como objetivo fazer uma análise qualitativa para detectar áreas de ativação do cérebro no momento do estímulo.

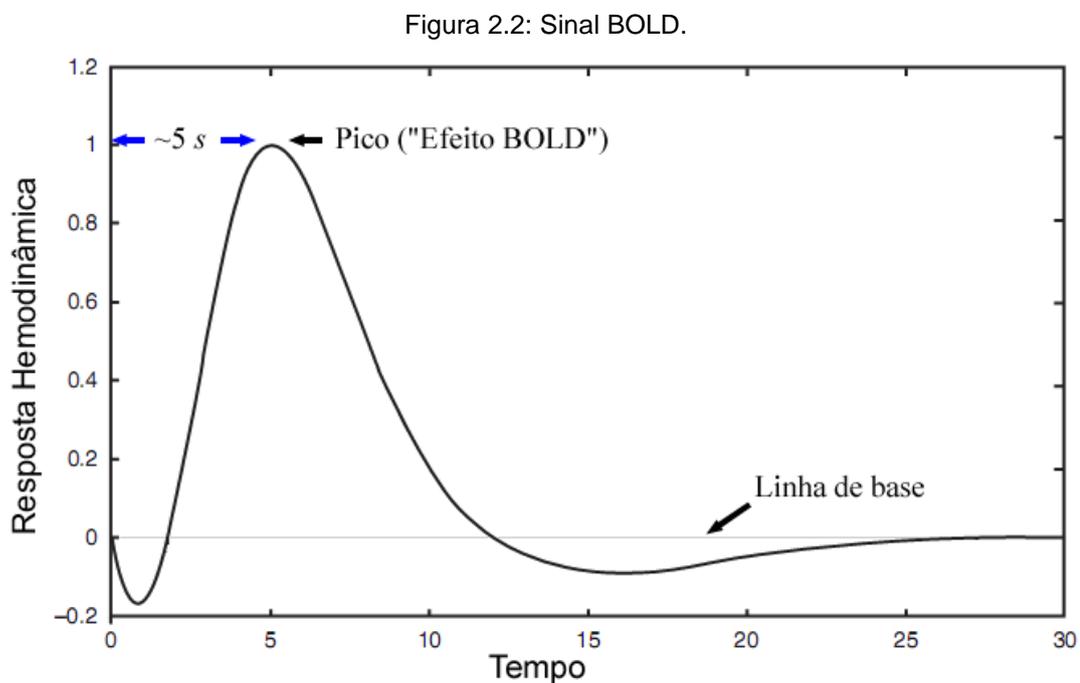
Em Friston et al. [11] é apresentado um modelo linear das respostas hemodinâmicas em fMRI de séries temporais, em que a atividade neuronal é convertida em uma função resposta hemodinâmica. Em 1998, Buxton et al.[23] que estendeu este modelo linear para cobrir as não-linearidades dos sinais utilizando a expansão em série Volterra. No mesmo ano, Buxton et al. [23] desenvolveram um modelo baseado nas mudanças no fluxo sanguíneo transformando-as no sinal BOLD.

Utilizando a estimação Baysiana, Friston et al. no ano de 2002 [10], chegaram a conclusão de que priors nos parâmetros fisiológicos apresentam desempenho similares as funções de bases temporais em análises convencionais.

Em 2009 Zhenghui Hu et al.[13], utilizaram o Filtro de Kalman Unscented (FKU) para fazer a estimação dos parâmetros fisiológicos do modelo hemodinâmico de respostas em fMRI.

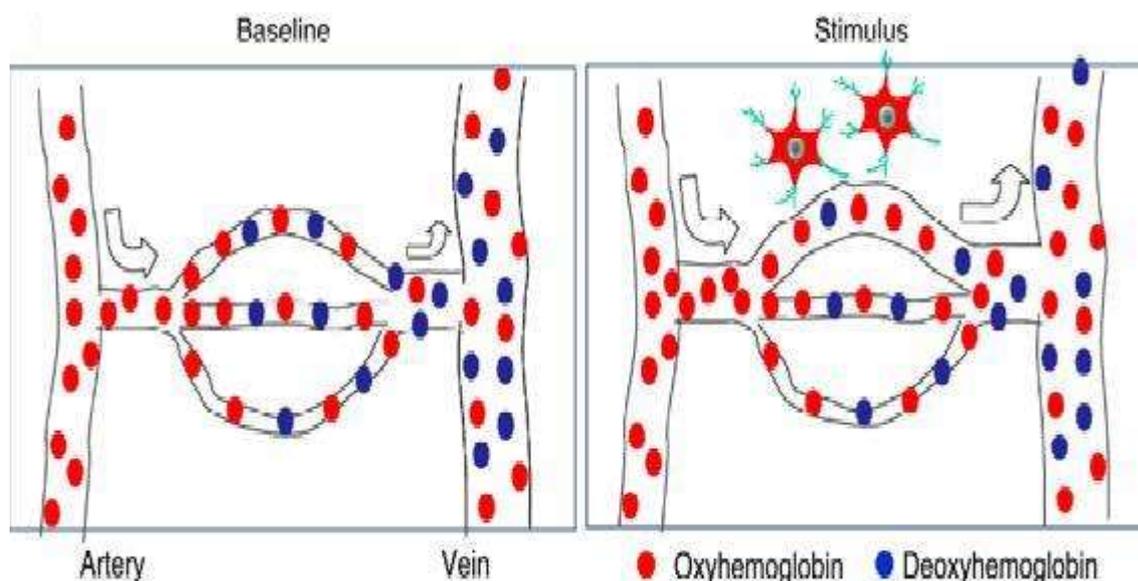
## 2.2 – Efeito BOLD

O efeito BOLD dá origem à mudança de intensidade restrita a certa área do cérebro e transitórios no tempo em relação ao estímulo. A evolução temporal do sinal BOLD é conhecida como função resposta hemodinâmica, ou seja, quando o paciente é submetido a vários estímulos periodicamente ocorre à resposta hemodinâmica, ou seja, representa um sinal BOLD para cada estímulo submetido sendo chamado de Resposta Hemodinâmica, veja a Figura 2.2 e 2.3 onde representa o sinal BOLD.



Fonte: [18]

Figura 2.3. Recebimento do estímulo, causando alterações no nível sanguíneo.



Fonte: [9]

Um estímulo pode evocar mudanças funcionais ou estruturais no sistema nervoso central em muitas escalas temporais diferentes, de milésimos de segundos a dias [6]. Apesar desse enorme domínio de escalas temporais, a maioria dos estudos psicológicos, destina-se a processos cognitivos da ordem de segundos, uma escala temporal compatível com RMf. A aplicabilidade dos experimentos de RMF para os estudos de processos neurais de diferentes escalas temporais, de certa forma, é limitada pelo curso temporal de efeito BOLD.

A amplitude do sinal BOLD não necessariamente afeta a forma. Uma alta amplitude pode sinalizar uma alta atividade neuronal local, mais um pico menor no mesmo ponto pode ser mais fraco que o sinal observado e por isso camuflado. Assim como a amplitude não necessariamente reflete desempenho comportamental.

Uma tarefa cognitiva complexa pode inicialmente originar sinais de alta amplitude associados com bom desempenho, mas como o sujeito se torna melhor nisso a amplitude pode diminuir e o desempenho permanecer o mesmo. Isto é esperado por que o cérebro executara a triagem de neurônios necessários para executar a tarefa no intuito de reduzir o consumo de energia. A resposta BOLD através das regiões cerebrais não pode ser comparada diretamente nem mesmo para a mesma tarefa, visto que a densidade neuronal e o suprimento sanguíneo são características que não são constantes ao longo de todo o cérebro, de qualquer

maneira, a resposta BOLD pode frequentemente ser comparada entre sujeitos para as mesmas regiões sob as mesmas tarefas.

### 2.3 - Modelo Hemodinâmico de Buxton-Friston

Uma forma alternativa da equação do sinal BOLD foi proposta para Modelo da dinâmica do efeito BOLD no contexto do *baillon model* [22]. A derivação deste modelo baseia-se em estimativas das mudanças de sinal intravascular e extravasculares.

Friston et. al. [15] com o intuito de buscar métodos quantitativos para simular o efeito BOLD, criou o modelo a seguir:

$$\begin{cases} \dot{f} = \varepsilon u(t) - \frac{f}{\tau_s} - \frac{f-1}{\tau_f} \\ \dot{v} = \frac{1}{\tau_0} \left( f - v^{\frac{1}{\alpha}} \right) \\ \dot{q} = \frac{1}{\tau_0} \left( f \frac{1-(1-E_0)^{\frac{1}{f}}}{E_0} - v^{\frac{1}{\alpha}} \frac{q}{v} \right) \end{cases} \quad (2.1)$$

Onde  $f$  é o fluxo cerebral sanguíneo  $v$  é o volume sanguíneo cerebral;  $q$  é a quantidade de deoxihemoglobina nas veias cerebrais;  $u(t)$  é a entrada externa;  $\tau_f$  reflete o sinal de decaimento ;  $\tau_s$  é a constante do tempo auto regulação de retorno;  $\tau_0$  é o tempo de transição;  $\varepsilon$  é a eficácia neuronal ;  $E_0$  representa a extração e fração de oxigênio ;  $\alpha$  é o parâmetro de rigidez.

Para facilitar a resolução do sistema do modelo, introduzimos uma nova variável  $s$ . Assim, teremos um sistema de quatro equações de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{s} = \varepsilon u(t) - \frac{s}{\tau_s} - \frac{f-1}{\tau_f} \\ \dot{f} = s \\ \dot{v} = \frac{1}{\tau_0} \left( f - v^{\frac{1}{\alpha}} \right) \\ \dot{q} = \frac{1}{\tau_0} \left( f \frac{1-(1-E_0)^{\frac{1}{f}}}{E_0} - v^{\frac{1}{\alpha}} \frac{q}{v} \right) \end{cases} \quad (2.2)$$

Além disso, a saída do sinal BOLD pode ser expressa por:

$$y(t) = V_0 \left( k_1(1 - q) + k_2 \left( 1 - \frac{q}{v} \right) + k_3(1 - v) \right) \quad (2.3)$$

Onde  $k_1 = 7E_0$ ,  $k_2 = 2$ ,  $k_3 = 2E_0 - 0.2$ ;  $V_0$  é a fração do volume sanguíneo em repouso.

O modelo de Buxton-Friston com saída do sinal BOLD podem ser escritos como os seguintes vetores e com seus respectivos erros:

$$\dot{x} = f(x, \beta, u, n) \quad n \sim N(0, R_n); \quad y = h(x, \beta, w) \quad w \sim N(0, R_w), \quad (2.4)$$

Onde  $f$  e  $h$  são equações não lineares,  $x(t) = [s, f, v, q]^T$  é o sistema das variáveis de estado,  $\beta = \{\epsilon, \tau_s, \tau_f, \tau_0, E_0\}$  é o sistema de parâmetros com os valores definidos pelas médias,  $u$  é o sistema de entrada,  $n$  é o ruído causado por distúrbios e erros de modelagem,  $y$  é o vetor de observação, e  $w$  é o ruído no sinal medido a Tabela 2.1 mostra os valores típicos para os parâmetros do modelo hemodinâmico [21].

Tabela 2.1- Valores Típicos dos parâmetros do modelo hemodinâmico

Parâmetros	$\epsilon$	$\tau_f$	$\tau_s$	$\tau_0$	$\alpha$	$E_0$
Valores típicos	0,54	1/(1,54)	1/(2,46)	0,98	0,33	0,34

### 2.3.1. Método de Runge-kutta

O método de Runge-Kutta é provavelmente um dos métodos mais populares. Possui versões de primeira ordem, segunda ordem, terceira ordem e quarta ordem. O método de Runge-kutta de quarta ordem também é um dos métodos mais preciosos para obter solução aproximada de valor inicial e sistema de equações diferenciais.

Cada método de Runge-kutta consiste em comparar os polinômios de Taylor aproximado para eliminar os cálculos de derivadas. Fazendo varias avaliações da função  $f$  a cada passo. Esse método pode ser construído para qualquer ordem  $a$ .

Pelo polinômio de Taylor com resto, se uma função  $y(x)$  tiver  $k + 1$  derivadas contínuas em um intervalo aberto contendo  $a$  e  $x$ , podemos escrever

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{x-a}{1!} + \dots + y^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + y^{(k+1)}(c) \frac{(x-a)^{(k+1)}}{(k+1)!}. \quad (2.4)$$

Onde  $c$  é número entre  $a$  e  $x$ .

### 2.3.1.1 Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

Fazendo  $k = 4$  em (2.1), obtemos

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(c) \quad (2.5)$$

O procedimento de Runge-Kutta de quarta ordem consiste em encontrar constantes apropriadas para construir a solução

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 \quad (2.6)$$

Considerando:

$$y(x_{n+1}) = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h) \quad (2.7)$$

Onde:

$$\begin{cases} k_1 = hg(x_n, y_n) \\ k_2 = hg(x_n + a_1 h, y_n + \beta_1 k_1) \\ k_3 = hg(x_n + a_2 h, y_n + \beta_2 k_1 + \beta_3 k_2) \\ k_4 = hg(x_n + a_3 h, y_n + \beta_4 k_1 + \beta_5 k_2 + \beta_6 k_3) \end{cases} \quad (2.8)$$

Coincide com um polinômio de Taylor de grau quarto

$$p_4(x) = y(a) + y'(a)(x - a) + \frac{y''(a)}{2!} (x - a)^2 + \frac{y'''(a)}{3!} (x - a)^3 + \frac{y^{(4)}(a)}{4!} (x - a)^4 \quad (2.9)$$

Isso resulta em 11 equações de 13 incógnitas, ou seja, possui infinitas soluções. O mais popular é o método abaixo:1

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} k_1 = hg(x_n, y_n) \\ k_2 = hg(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = hg(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = hg(x_n + h, y_n + k_3) \end{cases} \quad (2.11)$$

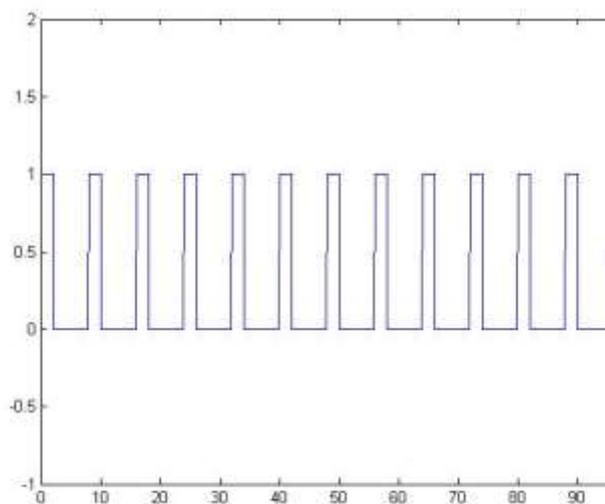
É aconselhável observar as equações (2.11); observe que  $k_2$  depende de  $k_1$ ,  $k_3$  depende de  $k_2$  e  $k_4$  depende de  $k_3$ . Além disso,  $k_2$  e  $k_3$  envolvem aproximações às inclinações no ponto médio do intervalo entre  $x_n$  e  $x_{n+1}$ . Usando os sistemas de equações (2.2) aplicado a (2.11).

$$g(f, s, v, q) = \begin{cases} \varepsilon u(t) - \frac{s}{\tau_s} - \frac{f-1}{\tau_f} \\ s \\ \frac{1}{\tau_0} \left( f - v^{\frac{1}{\alpha}} \right) \\ \frac{1}{\tau_0} \left( f \frac{1 - (1 - E_0)^{\frac{1}{f}}}{E_0} - v^{\frac{1}{\alpha}} \frac{q}{v} \right) \end{cases} \quad (1)$$

Esse sistema de equações apresentam os seguintes resultados para cada uma de suas variáveis.

No *software* MATLAB foram simulados os estímulos, função  $u(t)$ , recebidos pelo paciente na maquina de ressonância como mostrado na Figura 2.4, onde 1 representa o estímulo recebido e 0 o repouso.

Figura 2.4. Sinais de entrada Neura  $lu(t)$



Utilizando o sinal de entrada acima (0 e 1) junto com os valores típicos da Tabela 2.1, foram simulados os parâmetros do modelo hemodinâmico (2.1). O primeiro parâmetro simulado foi o fluxo cerebral sanguíneo (sinal  $f$ ), Figura 2.5. Assim também como o volume cerebral sanguíneo (sinal  $v$ ), observado na figura 2.6,

e a quantidade de deoxihemoglobina nas veias cerebrais (sinal q), observado na figura 2.7.

Figura 2.5. Fluxo sanguíneo cerebral (sinal f)

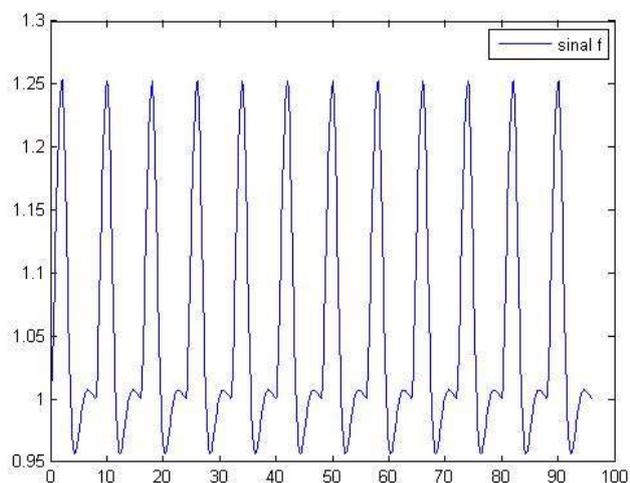


Figura 2.6. Volume Sanguíneo Cerebral (sinal v)

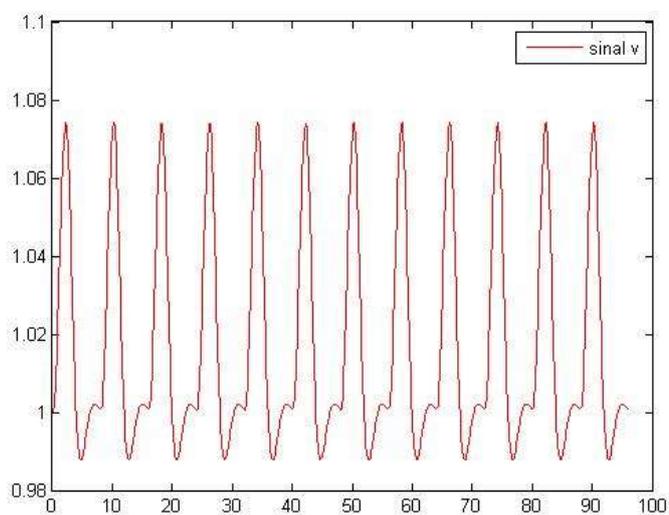
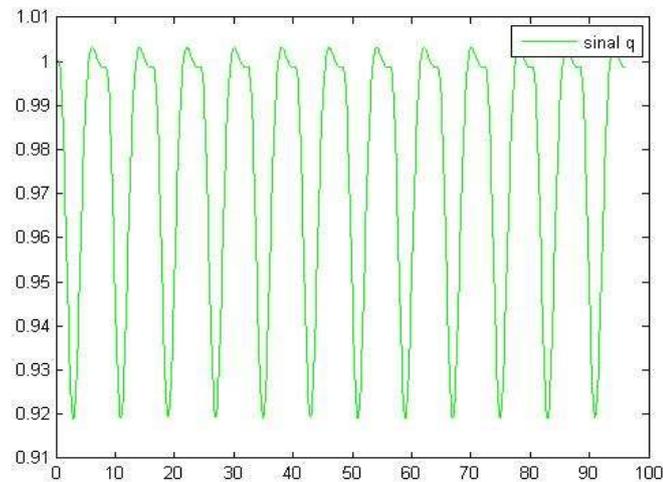
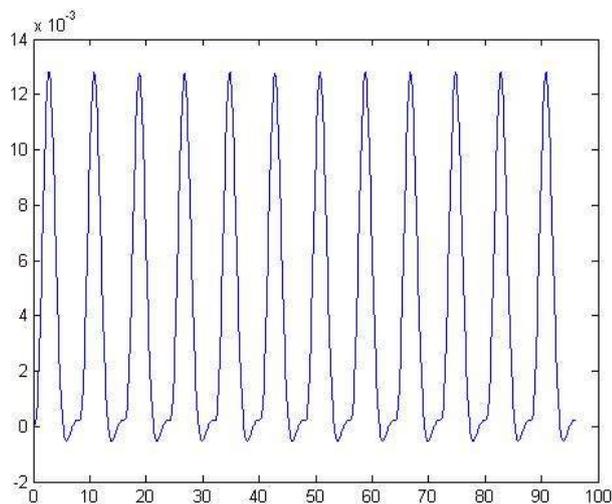


Figura 2.7. Quantidade de deoxihemoglobina (sinal q)



Para a obtenção desses parâmetros foi necessário aplicar o método de Runge-Kutta a fim de realizar aproximação para as EDO's do modelo. Depois de obtidos os valores do modelo de Buxton-Friston, foram gerados o sinal da Função Resposta Hemodinâmica como mostrado na Figura 2.8.

Figura 2.8. Função de resposta Hemodinâmica.



No capítulo 4, o filtro de Kalman é aplicado no sinal  $y(t)$ , com a presença de um ruído branco, para recuperar os sinais  $f$ ,  $v$  e  $q$ , além dos parâmetros do modelo hemodinâmico.

## CAPITULO 3

### O FILTRO DE KALMAN

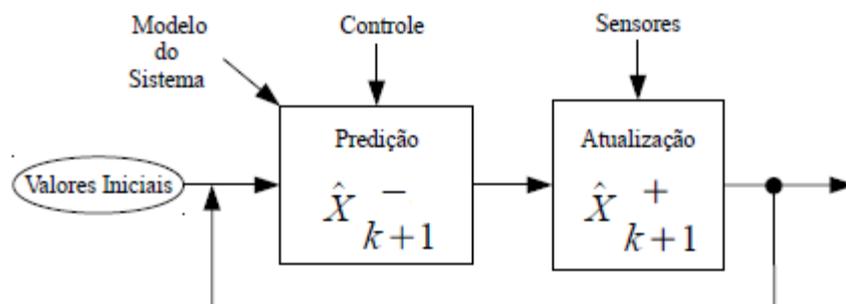
#### 3.1. O Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é um conjunto de equações matemáticas que constitui um processo recursivo eficiente de estimação, uma vez que o erro quadrático é minimizado. Através da observação da variável denominada “variável de observação” outra variável, não observável, denominada “variável de estado” pode ser estimada eficientemente. Podem ser estimados os estados passados, o estado presente e mesmo previstos os estados futuros [4].

O filtro é utilizado em uma grande variedade de aplicações em engenharia e econometria, desde radar e visão computacional até modelos macroeconômicos [16]. Talvez o tipo mais usado e simples do filtro de Kalman seja em phase-locked loop (malhas de captura de fase), bastante comuns em rádios FM e na maioria dos equipamentos de telecomunicações existentes. Extensões e generalizações do método também foram desenvolvidas [2].

A estimativa produzida pelo método tende a estar mais perto dos valores reais do que as medições iniciais, dado que a média ponderada tem uma incerteza de estimativa melhor do que qualquer um dos valores individuais que realizam essa mesma média. A Figura 3.1 mostra a estrutura geral do Filtro de Kalman e suas duas fases: (a) predição e (b) atualização. A filtragem de Kalman tem muitas aplicações na tecnologia e as respectivas extensões e generalizações do método também foram desenvolvidas, por exemplo, estendida (EKF) e unscented (UKF, do inglês Unscented Kalman Filter ) [9].

Figura 3.1: Fases do Filtro de Kalman



Fonte:[5]

De modo a utilizar o filtro de Kalman para estimar o estado completo de um processo dado apenas uma sequência de observações ruidosas, é necessário modelar o processo especificando as seguintes matrizes:  $F_k$ , o modelo de transição de estados;  $H_k$ , o modelo de observação;  $Q_k$  a covariância do ruído do processo;  $R_k$ , a covariância do ruído da observação; e, ocasionalmente,  $B_k$ , o modelo das entradas de controle, para cada passo de tempo  $k$ , como descrito abaixo.

O modelo para o filtro de Kalman assume que o estado real no tempo  $k$  é obtido através do estado no tempo  $(k - 1)$  de acordo com:

$$x_k = F_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k \quad (3.1)$$

onde,

$F_k$  é o modelo de transição de estados, aplicado no estado anterior  $x_{k-1}$

$B_k$  é o modelo das entradas de controle, aplicado no vetor de entradas de controle  $u_k$

$w_k$  é o ruído do processo, assumido como sendo amostrado de uma distribuição normal de média zero e covariância  $Q_k$ .  $w_k \sim N(0, Q_k)$ .

No tempo  $k$ , uma observação (ou medição)  $z_k$  do estado real  $x_k$  é feita de acordo com:

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (3.2)$$

onde  $H_k$  é o modelo de observação, que mapeia o espaço de estados real no espaço de estados observado, e  $v_k$  é o ruído da observação, assumido como sendo um ruído branco gaussiano de média zero e covariância  $R_k$ .  $v_k \sim N(0, R_k)$ .

O estado inicial e os vetores de ruído a cada passo  $\{x_0, w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_k\}$  são assumidos como sendo mutuamente independentes.

Condições iniciais:

$$\hat{x}_0 = E[x_0] \quad (3.3)$$

$$P_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \quad (3.4)$$

Do ponto de vista teórico, o filtro de Kalman é um algoritmo para realizar, de forma eficiente, inferências exatas sobre um sistema dinâmico linear, que é um modelo Bayesiano semelhante a um Modelo oculto de Markov, mas onde o espaço

de estados das variáveis não observadas é contínuo e todas as variáveis, observadas e não observadas, apresentam distribuição normal (ou, frequentemente, distribuição normal multivariada).

### 3.1.1-Previsão

Previsão do estado (estimativa *a priori*):

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_k \quad (3.5)$$

Previsão da covariância (estimativa *a priori*):

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k \quad (3.6)$$

### 3.1.2-Assimilação

Resíduo da medição:

$$\tilde{y}_k = z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \quad (3.7)$$

Resíduo da covariância:

$$S_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k \quad (3.8)$$

Ganho *ótimo* de Kalman:

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1} \quad (3.9)$$

Estado atualizado (estimativa *a posteriori*):

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \tilde{y}_k \quad (3.10)$$

Covariância estimada (estimativa *a posteriori*):

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (3.11)$$

### 3.2. Filtro de Kalman Estendido

Como mencionado anteriormente, o Filtro de Kalman é um excelente estimador de estados para sistemas lineares, porém pode ser difícil a sua aplicação na prática. O filtro de Kalman estendido supera essa limitação: a presunção de linearidade do sistema.

O filtro de Kalman estendido (EKF) calcula uma aproximação do valor verdadeiro. Ele representa essa aproximação por uma Gaussiana. Em particular, a crença  $bel(x_t)$  no tempo  $t$  é representada por uma média  $\mu_t$  e covariância  $\Sigma_t$ .

A principal ideia para a aplicação do EKF se chama linearização. Suponha que temos uma função  $f()$  não linear. A Gaussiana projetada através desta função é tipicamente não Gaussiana. Isto acontece porque a não linearidade em  $f()$  distorce a forma Gaussiana para o próximo estado.

A linearização aproxima  $f()$  por uma função linear, que é tangente a  $f()$  na média da Gaussiana. Ao projetar a Gaussiana através desta aproximação linear, a crença posterior é Gaussiana. De fato, uma vez que  $f()$  é linearizada, a mecânica de propagação da crença é equivalente à do filtro de Kalman. O mesmo se aplica para a multiplicação de Gaussianas quando a função de medição de  $h()$  está envolvida. Mais uma vez, o EKF aproxima  $h()$  por uma tangente à função linear  $h()$ , mantendo assim a natureza gaussiana da crença posterior.

Dado o seguinte sistema não-linear, descrito pela equação de diferenças e o modelo de observação com ruído:

$$x_k = M(x_{k-1}) + w_k \quad (3.12)$$

$$z_k = h(x_k) + v_k \quad (3.13)$$

O estado inicial  $x_0$  é um vetor aleatório onde o valor esperado é  $\hat{x} = m_0 = E[x_0]$ ; e a covariância é  $P_0 = E[(x_0 - m_0)(x_0 - m_0)^T]$ ,  $w_k$  captura incertezas no modelo e  $v_k$  denota o ruído da medida, e ambos não são correlacionados:

$$E[w_k] = 0$$

$$E[w_k w_k^T] = Q_k$$

$$E[w_k w_j^T] = 0 \quad (3.14)$$

para  $k \neq j$ ;  $E[w_k x_0^T] = 0$  para todo  $k$

$$\begin{aligned} E[v_k] &= 0 \\ E[v_k v_k^T] &= \mathcal{R}_k \\ E[v_k v_j^T] &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

para  $k \neq j$ ;  $E[v_k x_0^T] = 0$  para todo  $k$

Também os vetores aleatórios  $w_k$  e  $v_j^T$  não são correlacionados:  $E[w_k v_j^T] = 0$  para todo  $k$  e  $j$ .

Tabela 3.1 - Dimensão e descrição das variáveis do EKF.

Variáveis	Dimensão	Descrição
$x_k$	$n \times 1$	Vetor de Estados
$w_k$	$n \times 1$	Vetor de ruído do processo
$z_k$	$m \times 1$	Vetor de observação
$v_k$	$m \times 1$	Vetor de ruído da medida
$M(\cdot)$	$n \times 1$	Função vetorial do processo não-linear
$H(\cdot)$	$m \times 1$	Função vetorial da observação não-linear
$Q_k$	$n \times n$	Matriz de covariância de ruído do processo
$R_k$	$m \times m$	Matriz de covariância de medida do processo

### 3.2.1- Previsão:

$$\hat{x} = m_0 = E[x_0] \quad (3.16)$$

$$P_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \quad (3.17)$$

Assumindo que a estimativa ótica  $\hat{x}_{k-1} \equiv E[x_{k-1} | Z_{k-1}]$  com covariância  $P_{k-1}$ , no tempo  $k - 1$ . A parte previsível de  $x_k$  é dada por:

$$\begin{aligned} x_k^f &\equiv E[x_k | Z_{k-1}] \\ &\equiv E[M(x_{k-1}) + w_k | Z_{k-1}] \\ &\equiv E[M(\hat{x}_{k-1}) | Z_{k-1}] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aplicando as propriedades de esperança e a série de Taylor sobre  $M(\cdot)$  expandindo em torno de  $\hat{x}_{k-1}$ :

$$M(x_{k-1}) \equiv M(\hat{x}_{k-1}) + J_M(\hat{x}_{k-1})(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + H.O.T. \quad (3.29)$$

Onde H.O.T é a ordem do erro de truncamento.

Tendo seu jacobiano definido como

$$J_M \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x_1} & \frac{\partial M_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial M_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial M_n}{\partial x_1} & \frac{\partial M_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial M_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$M(x) = (M_1(x), M_2(x), \dots, M_n(x))^T$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$M(x_{k-1}) \approx M(\hat{x}_{k-1}) + J_M(\hat{x}_{k-1})e_{k-1} \quad (3.20)$$

Tomando a esperança em ambos os lados, condicionada por  $Z_{k-1}$ :

$$E[M(x_{k-1}) | Z_{k-1}] \approx M(\hat{x}_{k-1}) + J_M(\hat{x}_{k-1})E[e_{k-1} | Z_{k-1}] \quad (3.21)$$

em que  $E[e_{k-1} | Z_{k-1}] = 0$

Assim, substituindo (3.21) em (3.18), o valor previsto de  $x_k$  fica:

$$x_k^f \approx M(\hat{x}_{k-1}) \quad (3.22)$$

e o seu erro predito é

$$\begin{aligned}
e_k^f &\equiv x_k - x_k^f \\
&= M(x_{k-1} + w_k - M(\hat{x}_{k-1})) \\
&\approx J_M(\hat{x}_{k-1})e_{k-1} + w_k
\end{aligned} \tag{3.23}$$

A covariância prevista do erro é

$$\begin{aligned}
P_k^f &\equiv E[e_k^f (e_k^f)^T] \\
&= J_M(\hat{x}_{k-1})E[e_{k-1}e_{k-1}^T]J_M^T(\hat{x}_{k-1}) + E[w_k w_k^T] \\
&= J_M(\hat{x}_{k-1})P_{k-1}J_M^T(\hat{x}_{k-1}) + Q_k
\end{aligned} \tag{3.24}$$

onde  $Q_k = E[w_k w_k^T]$

### 3.2.2 – Atualização

Na parte de atualização de dados obtemos o seguinte:

-No tempo  $k$ , temos duas partes de informação:

- O valor previsto  $x_k^f$  com covariância  $P_k^f$
- Medida  $z_k$  com covariância  $R_k$

-O objetivo é encontrar a melhor estimativa não tendenciosa, no sentido dos mínimos quadrados  $\hat{x}_k$  de  $x_k$ .

-Uma maneira é assumir que a estimativa é uma combinação linear de  $x_k^f$  e  $z_k$

Seja:  $\hat{x}_k = a + K_k z_k$

Considerando que a estimativa não é tendenciosa:

$$\begin{aligned}
0 &= E[x_k - \hat{x}_k | Z_k] \\
&= E[(x_k^f + e_k^f) - (a + K_k h(x_k) + K_k v_k) | Z_k] \\
&= x_k^f - a - K_k E[h(x_k) | Z_k] \\
a &= x_k^f - K_k E[h(x_k) | Z_k]
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Substituindo o valor de a:

$$\hat{x}_k = x_k^f + K_k (z_k - E[h(x_k) | Z_k]); \text{ (valor de } x \text{ estimado),} \quad (3.26)$$

Aplicando as propriedades de esperança e expandindo em série de Taylor  $h(\cdot)$  em torno de  $x_k^f$  tem-se,  $(h(x_k) \equiv h(x_k^f) + J_h(x_k^f)(x_k - x_k^f) + H.O.T.)$ , onde o seu jacobiano é definido como:

$$J_h \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \frac{\partial h_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$h(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x))^T$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

Tomando a esperança dos dois lados da equação de  $h(x_k)$  condicionada por  $Z_k$ :

$$E[h(x_k) | Z_k] \approx h(x_k^f) + J_h(x_k^f)E[e_k^f | Z_k] \quad (3.27)$$

Em que  $E[e_k^f | Z_k] = 0$

Substituindo (3.27) em (3.26), temos o estado estimado de:

$$\hat{x}_k = x_k^f + K_k (z_k - E[h(x_k) | Z_k])$$

se obtém a seguinte fórmula:

$$\hat{x}_k \approx x_k^f + K_k (z_k - h(x_k^f)). \quad (3.28)$$

O erro no valor estimado de  $\hat{x}_k$  é

$$\begin{aligned}
e_k &\equiv x_k - \hat{x}_k \\
&= M(x_{k-1}) + w_k - x_k^f - K_k(z_k - h(x_k^f)) \\
&\approx M(x_{k-1}) - M(\hat{x}_{k-1}) + w_k - K_k(h(x_k) - h(x_k^f)) + v_k \\
&\approx J_m(\hat{x}_{k-1})e_{k-1} + w_k - K_k(J_h(x_k^f)e_k^f + v_k) \\
&\approx J_m(\hat{x}_{k-1})e_{k-1} + w_k - K_k J_h(x_k^f)(J_m(\hat{x}_{k-1})e_{k-1} + w_k) - K_k v_k \\
&\approx (I - K_k J_h(x_k^f))J_m(\hat{x}_{k-1})e_{k-1} + (I - K_k J_h(x_k^f))w_k - K_k v_k
\end{aligned} \tag{3.29}$$

E covariância posterior da nova estimativa é:

$$\begin{aligned}
P_k &\equiv E[e_k e_k^T] \\
&= (I - K_k J_h(x_k^f))J_m(\hat{x}_{k-1})P_{k-1}J_m^T(\hat{x}_{k-1})(I - K_k J_h(x_k^f))^T \\
&\quad + (I - K_k J_h(x_k^f))Q_k(I - K_k J_h(x_k^f))^T + K_k R_k K_k^T \\
&= (I - K_k J_h(x_k^f))P_k^f(I - K_k J_h(x_k^f))^T + K_k R_k K_k^T \\
&= P_k^f - K_k J_h(x_k^f)P_k^f - P_k^f J_h^T(x_k^f)K_k^T + K_k J_h(x_k^f)P_k^f J_h^T(x_k^f)K_k^T + K_k R_k K_k^T
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Essa fórmula é válida para qualquer  $K_k$

Como no filtro de Kalman padrão,  $K_k$  é descoberto por minimizar o  $tr(P_k)$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial tr(P_k)}{\partial K_k} \\
&= -(J_h(x_k^f)P_k^f)^T - P_k^f J_h^T(x_k^f) + 2K_k J_h(x_k^f)P_k^f J_h^T(x_k^f) + 2K_k R_k
\end{aligned}$$

Substituindo novamente em  $P_k$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
P_k &= (I - K_k J_h(x_k^f))P_k^f - (I - K_k J_h(x_k^f))P_k^f J_h^T(x_k^f)K_k^T + K_k R_k K_k^T \\
&= (I - K_k J_h(x_k^f))P_k^f - (P_k^f J_h^T(x_k^f) - K_k J_h(x_k^f)P_k^f J_h^T(x_k^f) - K_k R_k)K_k^T \\
&= (I - K_k J_h(x_k^f))P_k^f - [P_k^f J_h^T(x_k^f) - K_k (J_h(x_k^f)P_k^f J_h^T(x_k^f) + R_k)]K_k^T \\
&= (I - K_k J_h(x_k^f))P_k^f - [P_k^f J_h^T(x_k^f) - P_k^f J_h^T(x_k^f)]K_k^T \\
&= (I - K_k J_h(x_k^f))P_k^f
\end{aligned}$$

E após esses cálculos temos:

$$P_k = (I - K_k J_h(x_k^f))P_k^f \tag{3.31}$$

O filtro de Kalman Estendido é amplamente aplicado em estimativas de sistemas não lineares, técnica é de fácil implementação, aplicação em tempo real, sequencial e recursivo.

### 3.3 - Filtro de Kalman Unscented

O Filtro de Kalman Unscented (UKF) é capaz de lidar melhor com sistemas não lineares para as funções não lineares do sistema dinâmico, como faz o EKF, o UKF utiliza a Transformada Unscented para aproximar diretamente os dois primeiros momentos da distribuição alvo, o que difere significativamente da estratégia de linearização  $g(\cdot)$  por expansão em série de Taylor de primeira ordem. Para entender o funcionamento da Transformada Unscented, veja:

$$y = g(x) ,$$

Onde  $x = N(\hat{x}_k, P_x)$ .

A Transformada Unscented escolhe deterministicamente pontos no espaço de estado do sistema dinâmico que capturam a média e a covariância da distribuição de  $x$ . Esses pontos são denominados pontos sigmas. Os pontos sigmas são então propagados pela não linearidade  $g(\cdot)$ , e a média e a covariância de  $y$  são estimadas a partir dos pontos sigmas propagados.

A distribuição do estado é novamente aproximada por uma GRV, mas agora é representada usando um conjunto mínimo de pontos de amostragem cuidadosamente escolhidos, conhecidos como Transformada Unscented. Estes pontos de amostragens capturam completamente a média verdadeira e covariância da GRV, e quando propagadas através do *verdadeiro* sistema não linear, capta a média posterior e covariância com precisão para a 3ª ordem (expansão da série de Taylor) para qualquer Não linearidade. O EKF, em contraste, apenas atinge precisão de primeira ordem. Notavelmente, a complexidade computacional do UKF e da mesma ordem do EKF [26].

Acreditamos que o uso do UFK torna nossa estimacão mais exata, além de recuperar outros parâmetros, que EKF não consegue recuperar assim como é dito no trabalho de trabalho de Moraes [21]: A assimilação dos parâmetros do sinal sem e com ruído pelo EKF foi boa. Contudo, o EKF apenas recuperou os parâmetros

principais  $f$ ,  $v$  e  $q$  não conseguindo estimar os demais parâmetros fisiológicos, como por exemplo: o tempo de transição, eficácia neuronal ou a extração e fração de oxigênio. Utilizemos UKF para a tentativa de recuperação de todos os parâmetros do modelo hemodinâmico, comparando a eficiência da utilização dos filtros para a estimação.

Os erros inerentes do Filtro de Kalman Estendido (EKF) são devido às linearizações realizadas para o cálculo da média e da covariância de uma variável aleatória, que sofre uma transformação não-linear. O filtro de Kalman Unscented (UKF) evita estes erros utilizando um conjunto de "amostragem" determinística para calcular a média e a covariância. Basicamente,  $2n + 1$  sigma-pontos ( $n$  é a dimensão do estado) são cuidadosamente escolhidos baseados na decomposição da raiz quadrada da covariância anterior. Estes sigmapontos são propagadas através da verdadeira função não linear, sem aproximação, e em seguida uma média ponderada e covariância são calculadas. O UKF tem várias vantagens sobre o EKF, incluindo: 1) o erro é menor do que o esperado pelo EKF, 2) o novo filtro pode ser aplicado a funções não diferenciáveis, 3) o UKF evita a derivação de matrizes Jacobianas, e 4) o novo filtro é válido para expansões de ordem superior ao EKF padrão [10].

Dados o vetor de estado e a matriz de covariância no instante  $k$ , é computado um conjunto de sigma-pontos que são alocados nas  $(2n_x + 1)$  colunas da matriz sigma-ponto  $x_k$ . As colunas de  $y_k$  são calculadas por

$$\begin{aligned} (x_{k-1})_0 &= \hat{x}_{k-1} \\ (x_{k-1})_i &= \hat{x}_{k-1} + \left(\sqrt{(n+k)P_{k-1}}\right)_i, \quad i = 1, \dots, n \\ (x_{k-1})_{i+n} &= \hat{x}_{k-1} - \left(\sqrt{(n+k)P_{k-1}}\right)_i \end{aligned} \quad (3.32)$$

Com  $k \in \mathcal{R}$ ,  $\left(\sqrt{(n+k)P_k}\right)_i$  é a  $i$ -ésima linha ou coluna da matriz quadrada de  $\sqrt{(n+k)P_k}$  e o escalar  $k$  é o parâmetro que fornece a informação a respeito dos momentos de ordem superior da distribuição.

Uma vez  $x_k$  computado, é feita uma propagação de cada vetor através do sistema não linear:

$$(x_k)_i = f((x_{k-1})_i) \quad , i = 0, \dots, 2n \quad (3.33)$$

A media propagada  $\bar{x}_{k+1}$ , e a covariância,  $\bar{P}_{k+1}$ , são determinadas a partir das estatística dos sigma-pontos propagados, dadas por:

$$\bar{x}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_i (x_k)_i, \quad (3.34)$$

$$\bar{P}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_i [(x_k)_i - \bar{x}_k] [(x_k)_i - \bar{x}_k]^T \quad (3.35)$$

Sendo  $w_i$  os pesos, onde eles são definidos por

$$W_0 = \frac{k}{(n+k)}, W_i = \frac{1}{2(n+k)}, W_{i+n} = \frac{1}{2(n+k)} \quad (3.36)$$

Na fase de atualização do filtro, primeiramente transforma-se as colunas de  $x_k$  através da função de medidas  $Y_k$ . Desta forma

$$Y_k = h(x_k) \quad (3.37)$$

$$\bar{y}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_i (Y_k)_i \quad (3.38)$$

$$P_y = \sum_{i=0}^{2n} (\hat{y}_k - \bar{y}_k)(\hat{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^T + R_k \quad (3.39)$$

Com a média do vetor de medidas,  $\bar{y}_{k+1}$ , é possível estimar um vetor de estado usando

$$\bar{x}_k = \hat{x}_k + K_k (y_k - \bar{y}_{k+1}) \quad (3.40)$$

onde  $K_k$  é o ganho de Kalman. Na formulação do UKF o ganho de Kalman é definido por

$$K_{k+1} = P_{xy} (P_{yy})^{-1} \quad (3.41)$$

Com

$$P_{xy} = \sum_{i=0}^{2n} W_i [(x_k)_i - \hat{x}_k] [(Y_k)_i - \bar{y}_k]^T \quad (3.42)$$

$$P_{yy} = \sum_{i=0}^{2n} W_i [(Y_k)_i - \bar{y}_k] [(Y_k)_i - \bar{y}_k]^T + K_k \quad (3.43)$$

Finalmente obtém-se a estimativa da covariância do erro dada por

$$\hat{P}_x = \bar{P}_k - K_k P_{yy} K_k^T \quad (3.44)$$

O processo de propagação e atualização se repete até que o filtro atinja a convergência desejada. Abaixo na Tabela 3.2 faremos uma comparação das formas utilizadas para estimação de cada tipo de Filtro de Kalman.

Tabela 3.2: Estimativas de acordo com cada Filtro

	Filtro de Kalman	Filtro de Kalman Estendido	Filtro de Kalman Unscented
Valor esperado	$\hat{x}_{k k} = \hat{x}_{k k-1} + K_k \tilde{y}_k$	$\hat{x}_k \approx x_k^f + K_k (z_k - h(x_k^f))$	$\bar{x}_k = \hat{x}_k + K_k (y_k - \bar{y}_{k+1})$
Covariância	$P_{k k} = (I - K_k H_k) P_{k k-1}$	$P_k = (I - K_k J_h(x_k^f)) P_k^f$	$\hat{P}_x = \bar{P}_k - K_k P_{yy} K_k^T$
Ganho de Kalman	$K_k = P_{k k-1} H_k^T S_k^{-1}$	$K_k = P_k J_h^T (J_h P_k J_h^T + H_k)^{-1}$	$K_{k+1} = P_{xy} (P_{yy})^{-1}$

## CAPITULO 4

### RESULTADOS

Neste capítulo serão mostrados os resultados obtidos após a aplicação de filtro de kalman estendido e Unscented em dados do fMRI. Para isso será utilizado o modelo hemodinâmico de Buxton-Friston, que descreve certos estados fisiológicos de fMRI, através do sinal BOLD.

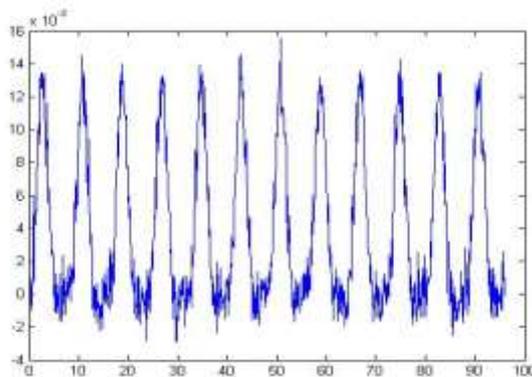
Para a resolução desse trabalho foi utilizado o software MATLAB 2009, onde através do software foi utilizado um sinal ruidoso para uma estimação conjunta das variáveis de estado do modelo de Buxton-Friston: fluxo sanguíneo, volume sanguíneo e quantidade de deoxihemoglobina, gerados a partir dos valores típicos da Tabela 2.1 (observados no capítulo do 2 nas figuras 2.4, 2.5 e 2.6 respectivamente); e o sinal BOLD (Figuras 2.7).

#### 4.1. Resultados Do EKF

Após isso será aplicado à técnica do EKF, para recuperar os valores das variáveis e parâmetros do modelo de Buxton-Friston a partir do sinal BOLD. Também será feito uma análise nas covariâncias para determinar se seus valores interferem na apresentação dos resultados estimados.

A partir do sinal BOLD Ruidoso, mostrado na figura 4.1, será aplicado o EKF a fim de recuperar os parâmetros do modelo de Buxton-Friston.

Figura 4.1. Resposta Hemodinâmica contaminada com Ruído Branco Gaussiano.



Dado a matriz jacobiana abaixo das derivadas de equação 2.2.



veias cerebrais, como visto na Figura 4.6, e o erro associado ao final verdadeiro e estimado na figura 4.7 e a partir dos sinais recuperados anteriores emulamos o sinal BOLD original como visto na Figura 4.8 e comparamos seu sinal original com sinal emulado através do erro da figura 4.9. Para isso utilizamos uma matriz de covariância dos ruídos, que é uma matriz diagonal, nos valores que corresponde a  $f$ ,  $s$ ,  $v$  e  $q$  igual a 0, ou seja o valor de  $w_k$  na equação 3.1.

Figura 4.2. Estimação do parâmetro  $f$  (fluxo sanguíneo cerebral) através do EKF na Resposta Hemodinâmica com ruído Branco Gaussiano.

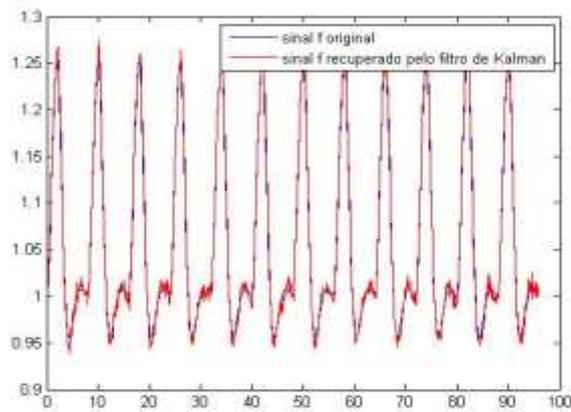


Figura 4.3. Erro entre o sinal  $f$  original e o estimado.

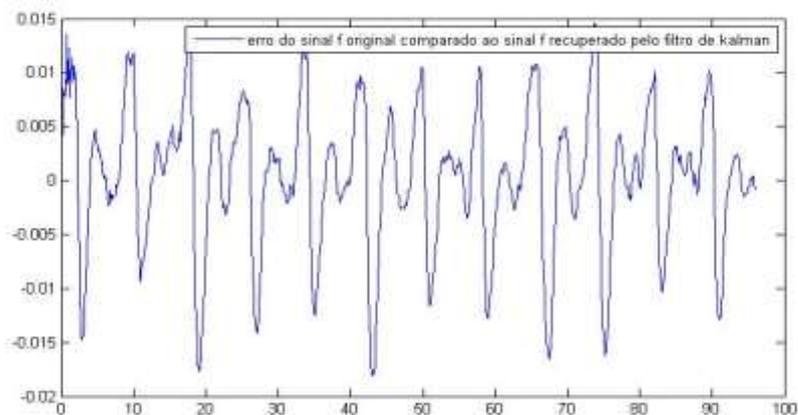


Figura 4.4. Estimação do parâmetro  $v$  (volume sanguíneo cerebral) através do EKF na Resposta Hemodinâmica com ruído Branco Gaussiano.

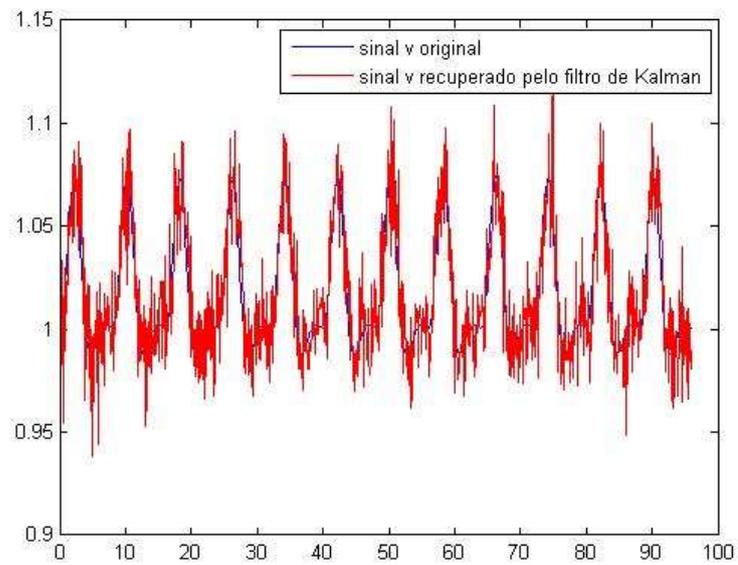


Figura 4.5. Erro entre o sinal  $v$  original e o estimado.

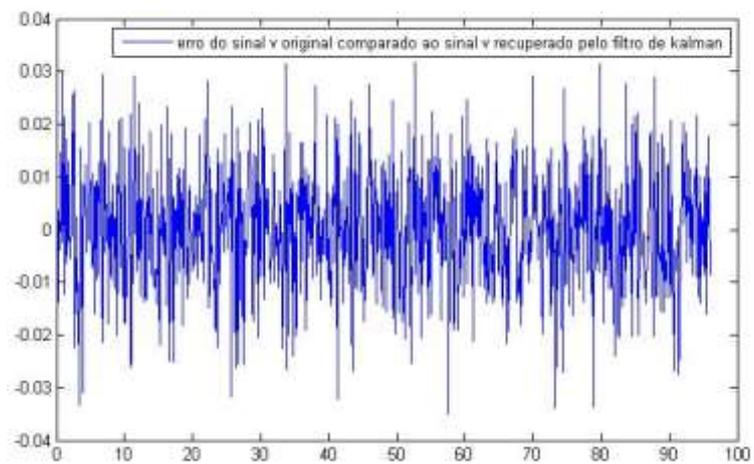


Figura 4.6. Estimação do parâmetro  $q$  (quantidade de deoxihemoglobina no cérebro) através do EKF na Resposta Hemodinâmica com ruído Branco Gaussiano.

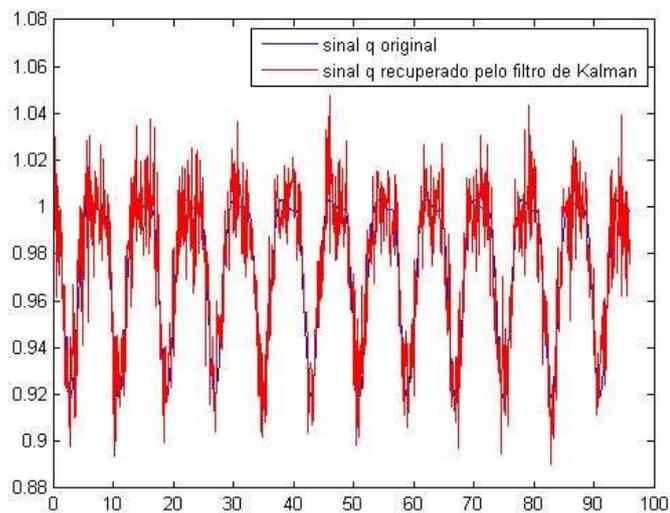


Figura 4.7. Erro entre o sinal  $q$  original e o estimado.

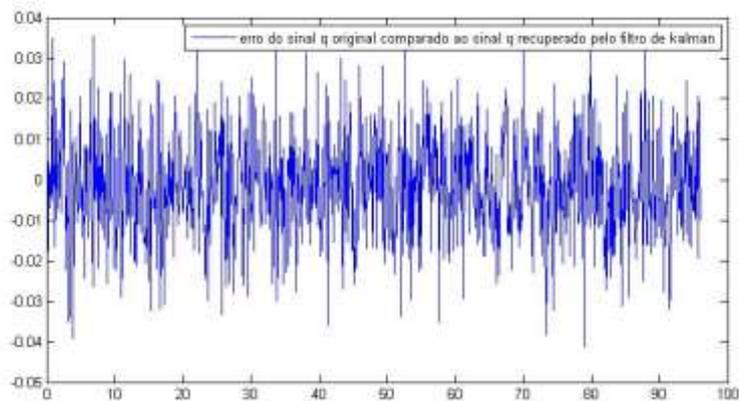


Figura 4.8 – Estimação do sinal BOLD através do EKF com ruído Branco Gaussiano

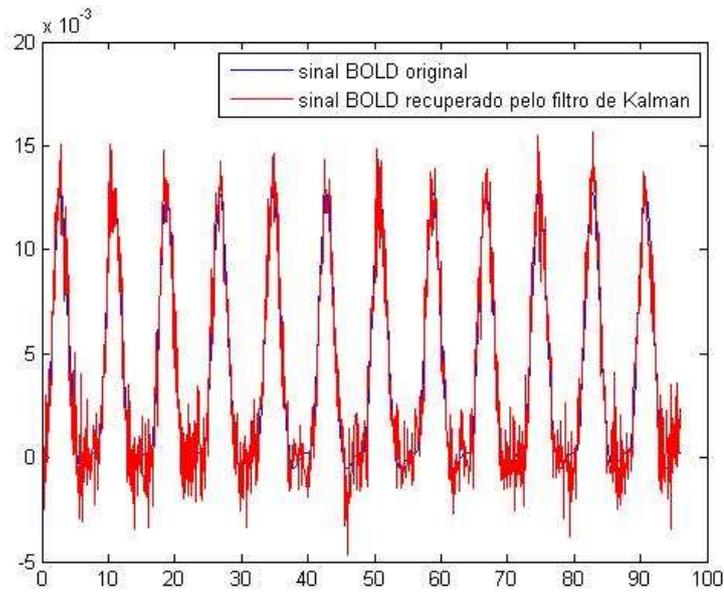
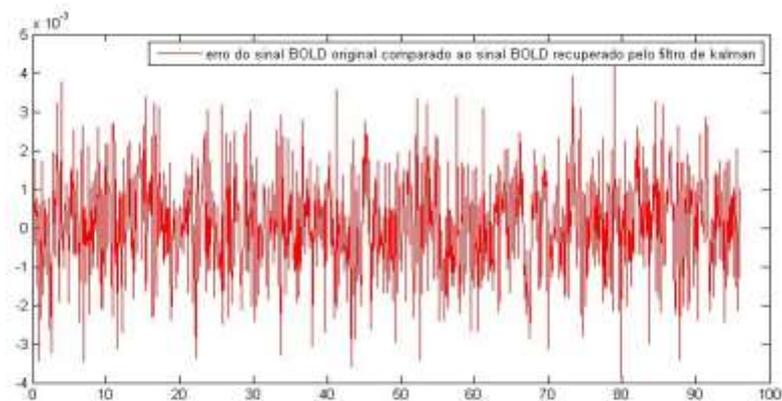


Figura 4.9. Erro entre o sinal BOLD original e o estimado.



O que diz respeito aos parâmetros do modelo hemodinâmico de Buxton-Friston, o sinal de decaimento ( $\tau_f$ ), a constante do tempo auto regulação de retorno ( $\tau_s$ ), o tempo de transição ( $\tau_0$ ), a eficácia neuronal ( $\varepsilon$ ), a extração e fração de oxigênio ( $E_0$ ). Quando utilizado o valor de 0 na minha matriz de covariância não obtemos êxito na nossa estimativa como podemos ver nas Figuras 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15.

Figura 4.10. Sinal de decaimento ( $\tau_f$ )

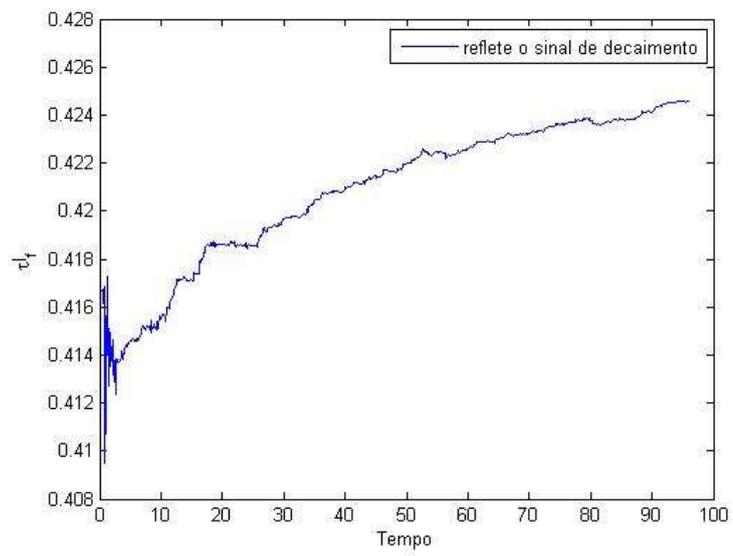


Figura 4.11. Constante do tempo auto regulação de retorno ( $\tau_s$ )

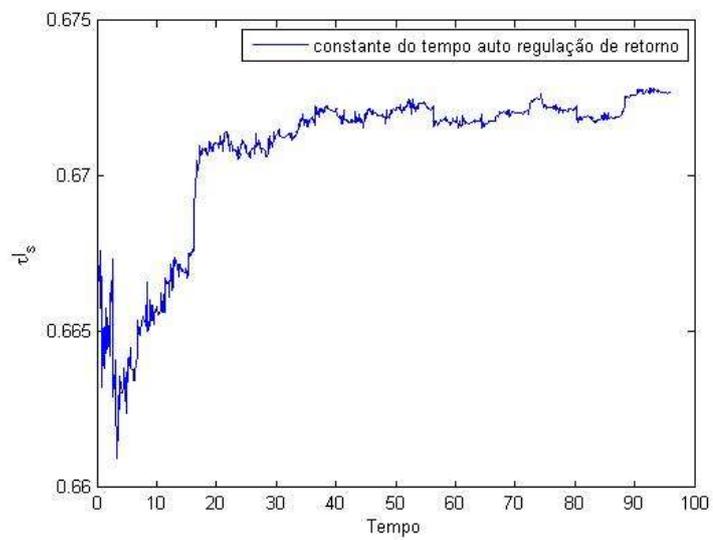


Figura 4.12. Tempo de transição ( $\tau_0$ )

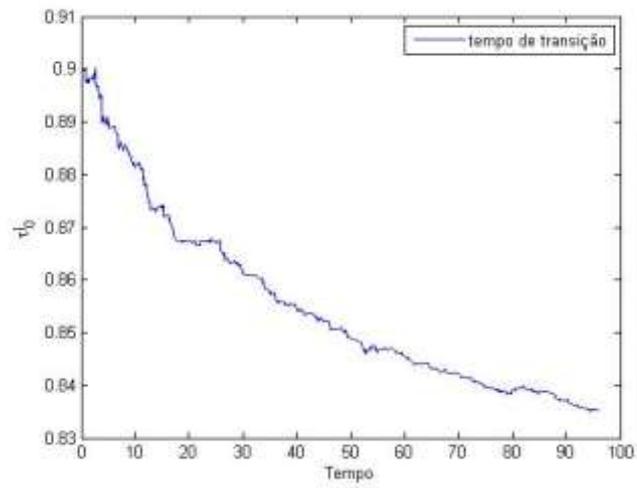


Figura 4.13. Eficácia neuronal ( $\epsilon$ )

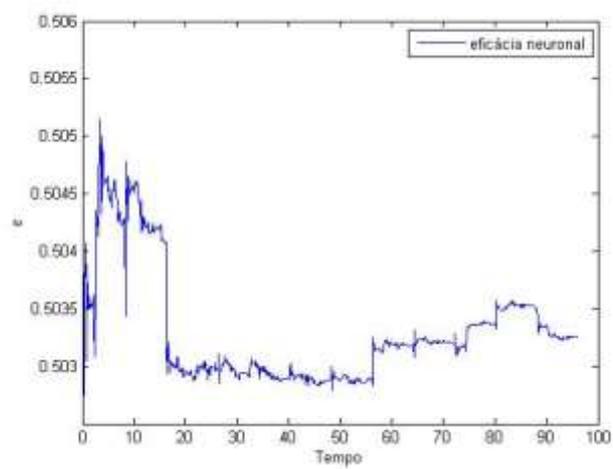
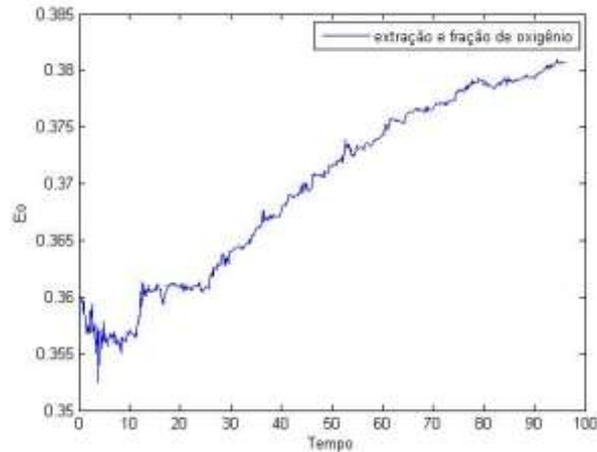


Figura 4.14. Extração e fração de oxigênio ( $E_0$ ).



Percebemos que o EKF recuperou as variáveis de estados, porém sua estimação não foi precisa e em relação ao sinal  $q$  e  $v$ , sua estimação não foi boa como podemos observar que seus erros associados apresentam uma maior dispersão. E ele não conseguiu recuperar os parâmetros do modelo pois os mesmo não encontraram uma instabilidade. Para solucionar essa ineficiência nas estimações dos parâmetros, resolvemos utilizar outros valores das covariâncias utilizadas para fazer a estimação acima. Em vez de 0 para os valores  $f$ ,  $s$ ,  $v$ ,  $q$  na nossa matriz diagonal de covariância dos ruídos, usaremos -100.

Após isso foi realizada novamente a assimilação conjunta, dessa vez com os valores  $f$ ,  $s$ ,  $v$ ,  $q$  na nossa matriz diagonal de covariância dos ruídos diminuído em -100 e após isso, como visto na assimilação realizada acima, verificou que o EKF recuperou o Fluxo sanguíneo cerebral, como visto na Figura 4.15. Recuperou o Volume sanguíneo cerebral, como visto na Figura 4.17. Recuperou a quantidade de deoxihemoglobina nas veias cerebrais, como visto na Figura 4.19 e recuperou o sinal BOLD original como visto na Figura 4.21. Assim como também, não de uma forma muito eficaz, recuperar os demais parâmetros do modelo tais como o sinal de decaimento ( $\tau_f$ ) Figura 4.23, a constante do tempo auto regulação de retorno ( $\tau_s$ ) Figura 4.24, o tempo de transição ( $\tau_0$ ) Figura 4.25, a eficácia neuronal ( $\varepsilon$ ) Figura 4.26, a extração e fração de oxigênio ( $E_0$ ) Figura 4.27.

Calculamos também o erro associado a cada estimativa das variáveis de estado. Como observado na figura 4.16 o erro entre o Sinal  $f$  original e o Sinal  $f$  estimado, na figura 4.18 o erro entre o Sinal  $v$  original e sinal  $v$  estimado, na figura 4.20 temos o erro do sinal  $q$  original e sinal  $q$  estimado, assim também como o erro do sinal BOLD original e sinal BOLD emulado.

Figura 4.15. Estimação do parâmetro  $f$  (fluxo sanguíneo cerebral) através do EKF na Resposta Hemodinâmica com ruído Branco Gaussiano.

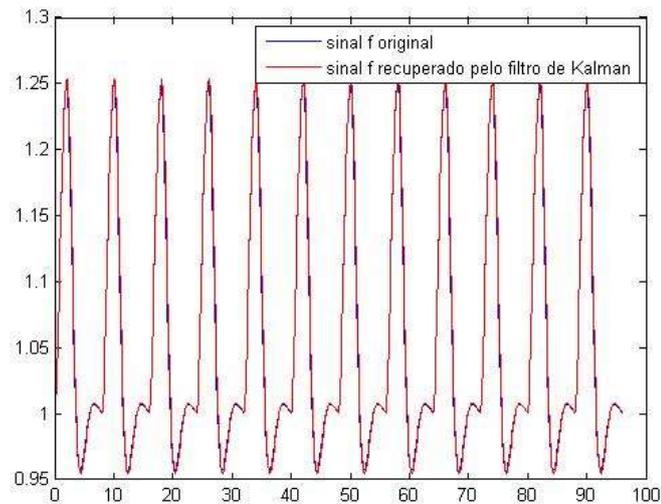


Figura 4.16. Erro entre o sinal  $f$  original e o estimado.

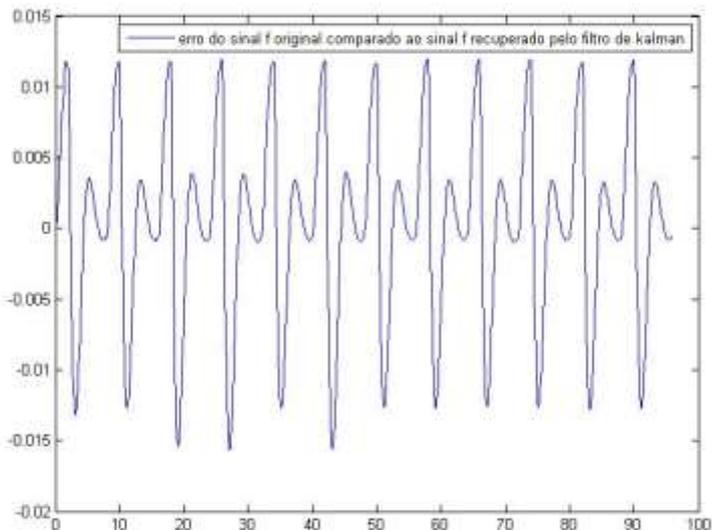


Figura 4.17. Estimação do parâmetro  $v$  (volume sanguíneo cerebral) através do EKF na Resposta Hemodinâmica com ruído Branco Gaussiano.

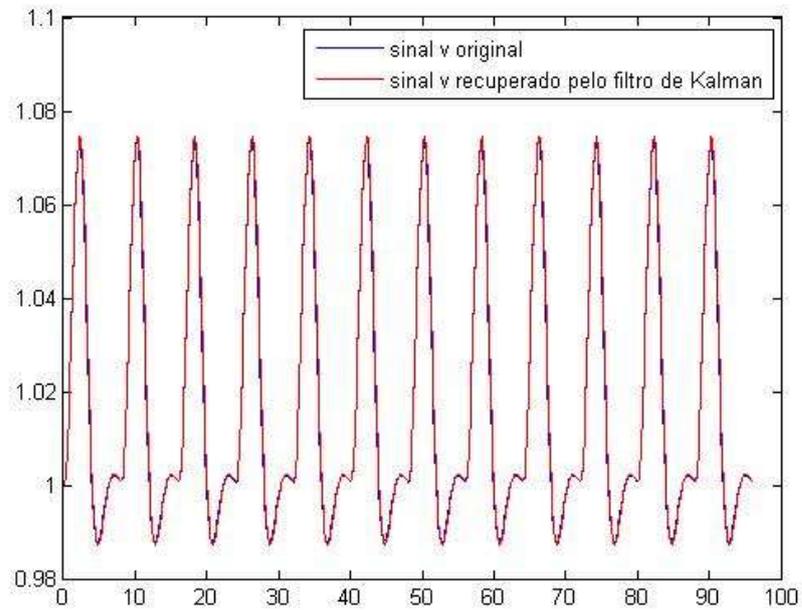


Figura 4.18. Erro entre o sinal  $v$  original e o estimado.

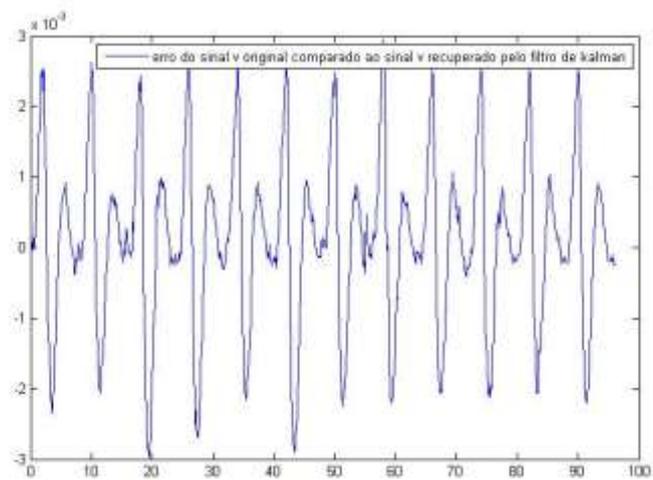


Figura 4.19. Estimação do parâmetro  $q$  (quantidade de deoxihemoglobina no cérebro) através do EKF na Resposta Hemodinâmica com ruído Branco Gaussiano.

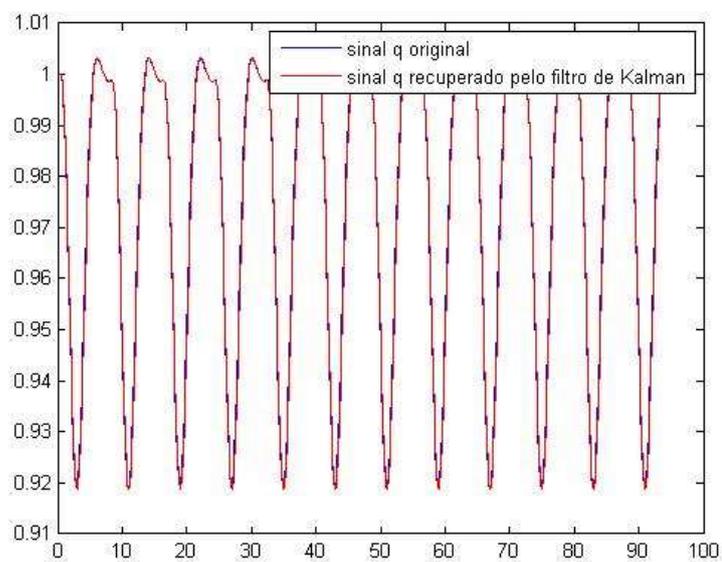


Figura 4.20. Erro entre o sinal  $q$  original e o estimado.

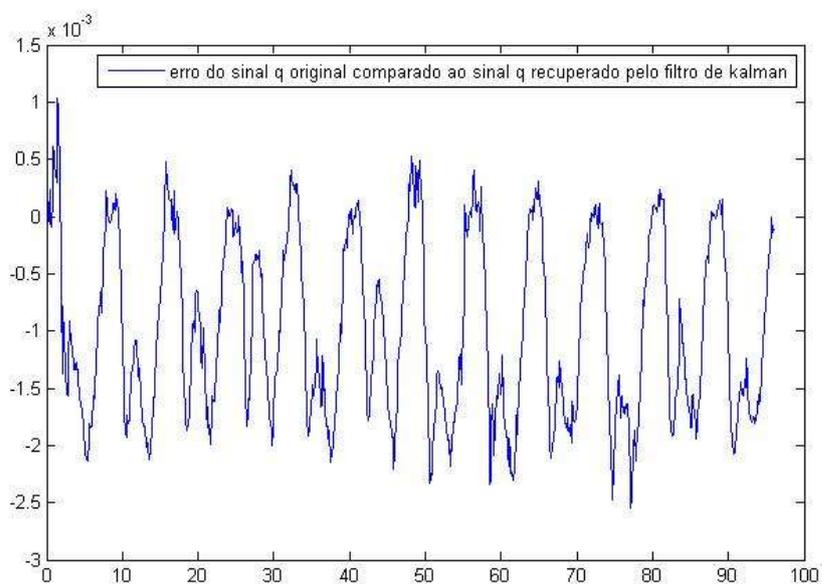


Figura 4.21. Estimação do sinal BOLD através do EKF com ruído Branco Gaussiano.

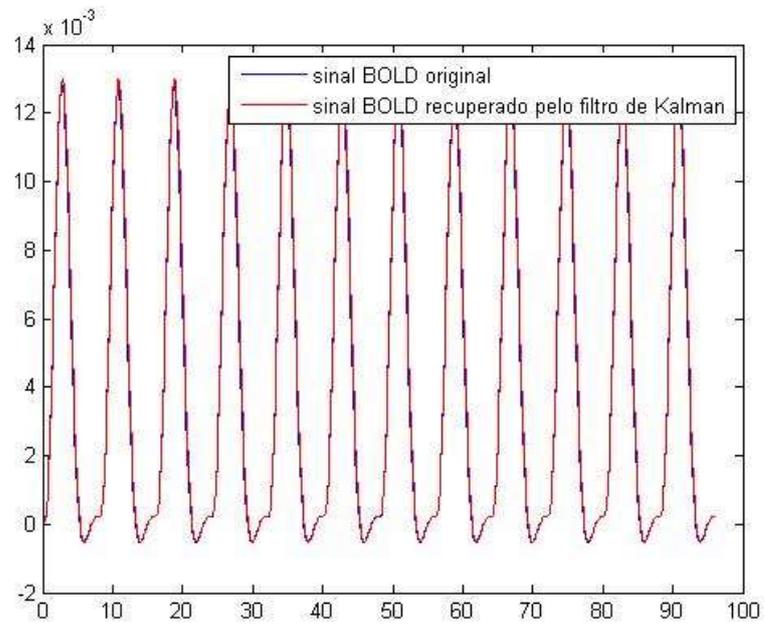


Figura 4.22. Erro entre o sinal BOLD original e o estimado.

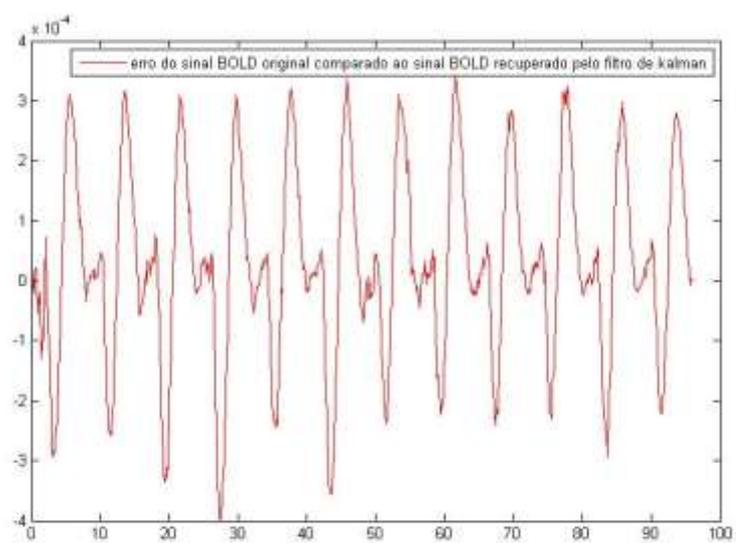


Figura 4.23. Sinal de decaimento ( $\tau_f$ ).

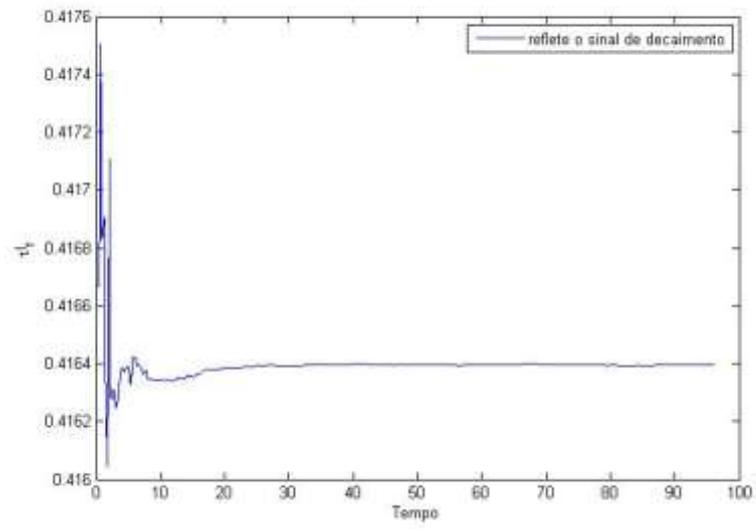


Figura 4.24. Constante do tempo auto regulação de retorno ( $\tau_s$ ).

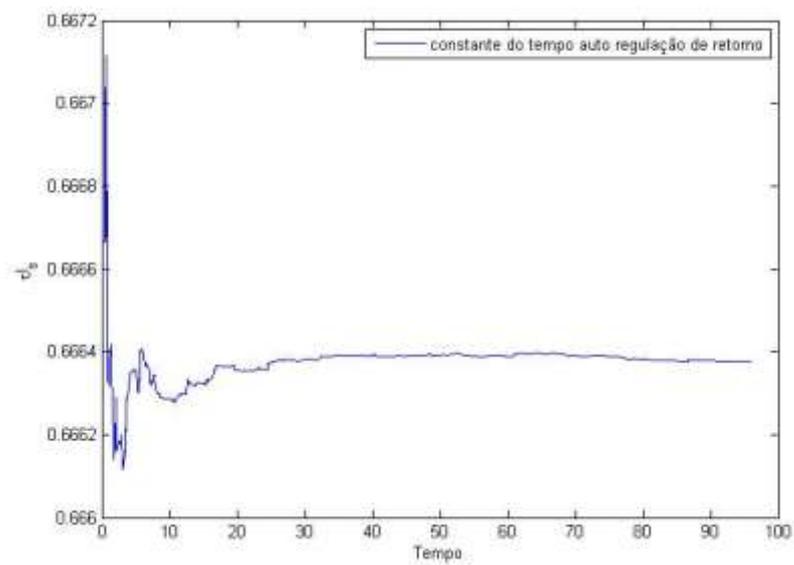


Figura 4.25. Tempo de transição ( $\tau_0$ ).

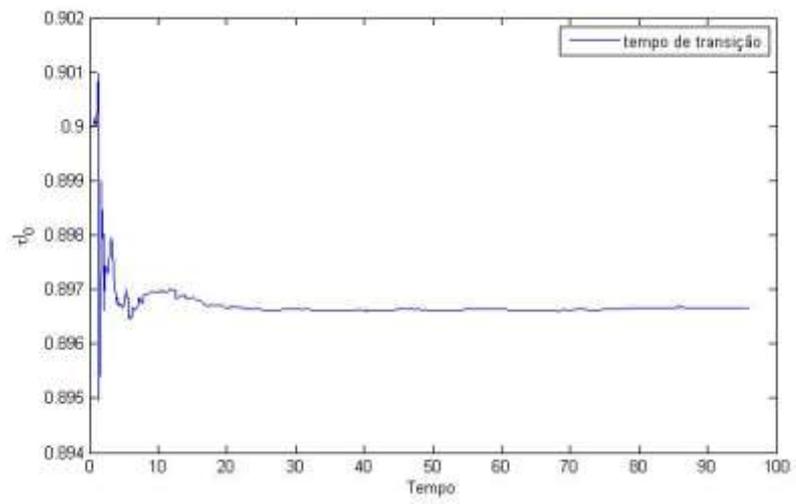


Figura 4.26. Eficácia neuronal ( $\epsilon$ ).

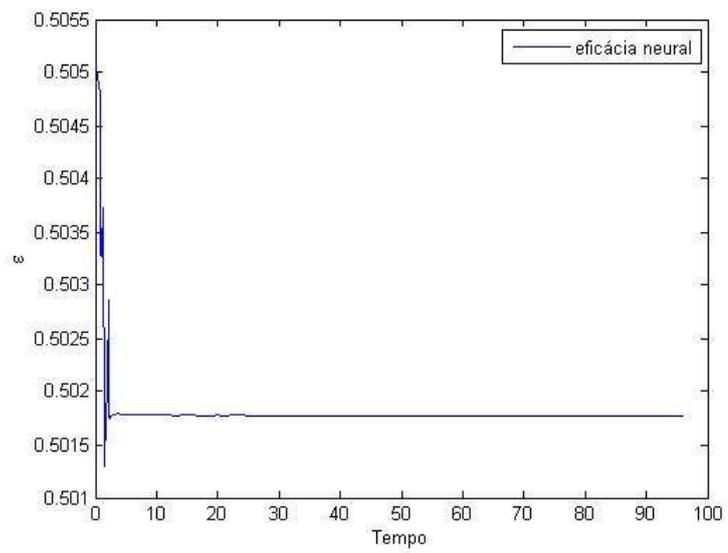
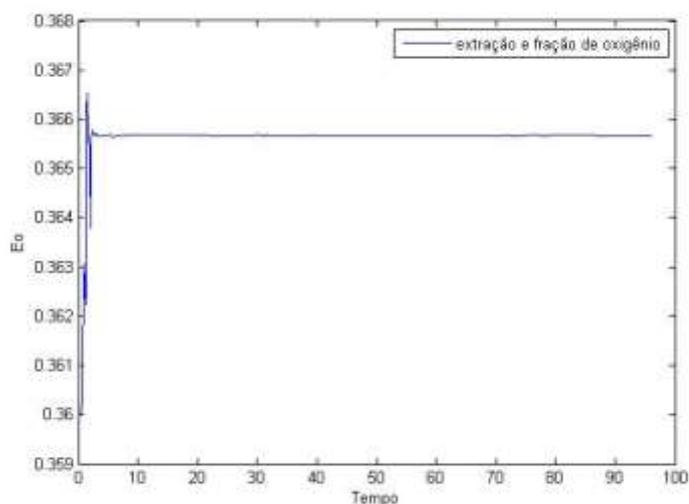


Figura 4.27. Extração e fração de oxigênio ( $E_0$ ).



Observamos que quanto melhor for às covariâncias melhor será nossa estimativa, observando isso comparando as dispersões de seus erros, de nossas variáveis e dos nossos parâmetros, assim como notamos também que os valores do sinal  $v$  e sinal  $q$  são mais difícil de estimar, comparando as estimações, eles dois foram que tiveram uma maior desregularidade, observando isso na dispersões dos erros em ambas as estimações.

## 4.2. Resultados para UKF

Primeiramente foi realizada a assimilação conjunta dos dados a partir do sinal BOLD com o ruído (Figura 4.1) e após isso verificou que o UKF recuperou o Fluxo sanguíneo cerebral, como visto na Figura 4.28. Recuperou o Volume sanguíneo cerebral, como visto na Figura 4.29. Recuperou a quantidade de deoxihemoglobina nas veias cerebrais, como visto na Figura 4.30 e recuperou o sinal BOLD original como visto na Figura 4.31. a partir de varias simulações feita.

Assim também com cada erro associado sinal original e estimado, na figura 4.29 temos o erro do sinal  $f$  original e o sinal  $f$  estimado, na figura 4.31 temos o erro do sinal  $v$  original e o sinal  $v$  estimado, na figura 4.33 temos o erro associado do sinal  $q$  original com o sinal  $q$  estimado.

Figura 4.28. Estimação do parâmetro  $f$  (fluxo sanguíneo cerebral) através do UKF na Resposta Hemodinâmica com ruído Branco Gaussiano.

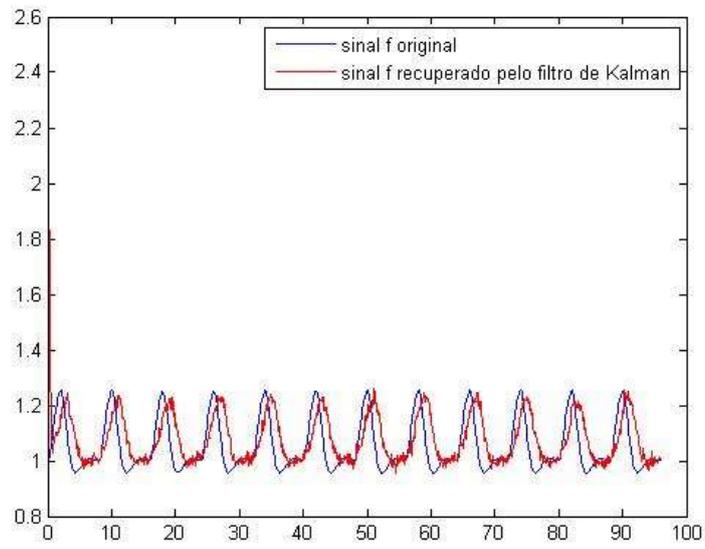


Figura 4.29. Erro entre o sinal  $f$  original e o estimado

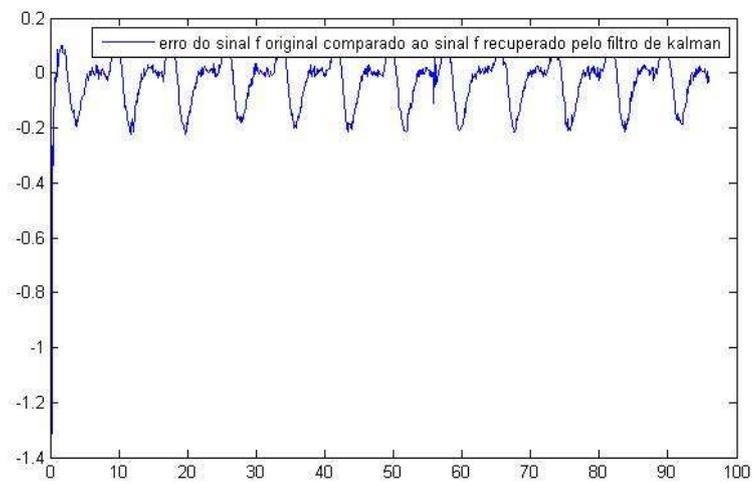


Figura 4.30. Estimação do parâmetro  $v$  (volume sanguíneo cerebral) através do UKF na Resposta Hemodinâmica com ruído Branco Gaussiano.

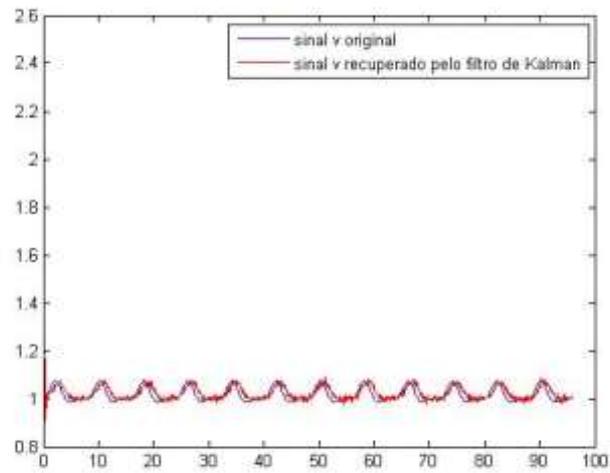


Figura 4.31. Erro entre o sinal  $v$  original e o estimado

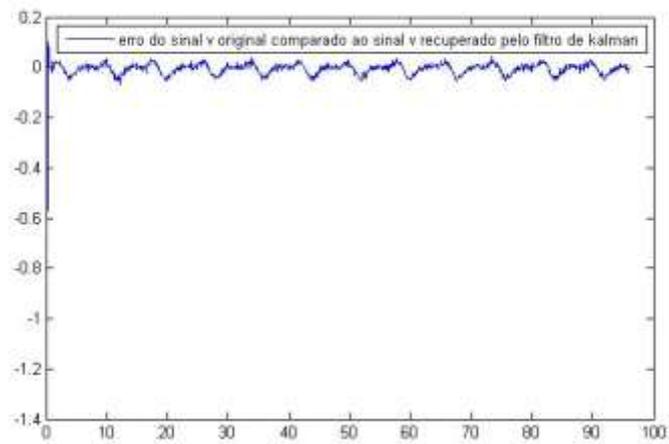


Figura 4.32. Estimação do parâmetro  $q$  (quantidade de deoxihemoglobina no cérebro) através do UKF na Resposta Hemodinâmica com ruído Branco Gaussiano.

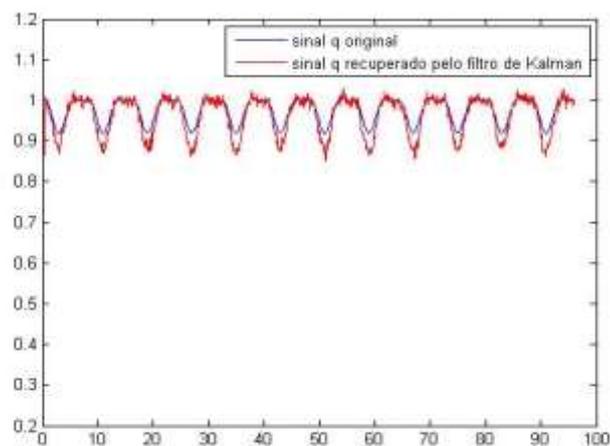


Figura 4.33. Erro entre o sinal q original e o estimado

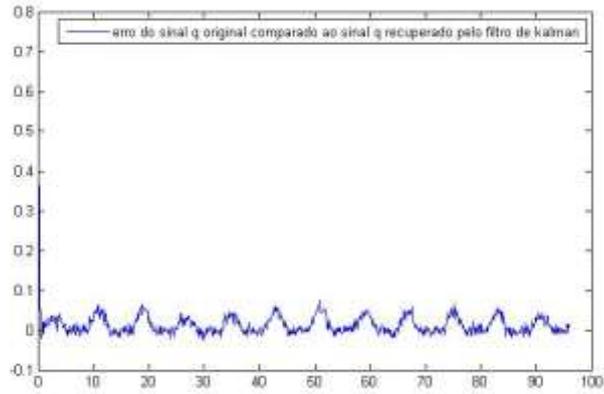


Figura 4.34. Estimação do sinal BOLD através do UKF com ruído Branco Gaussiano.

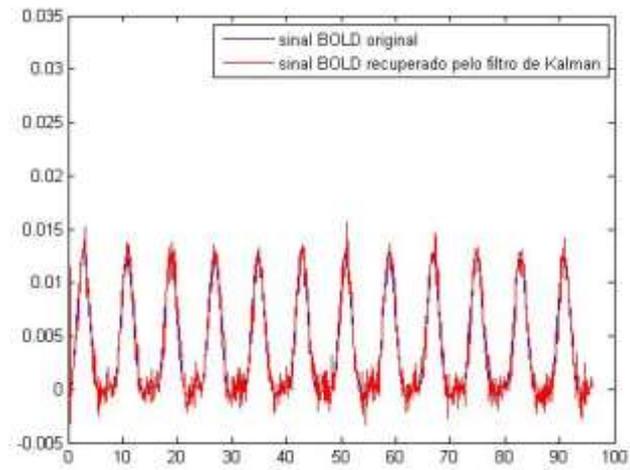
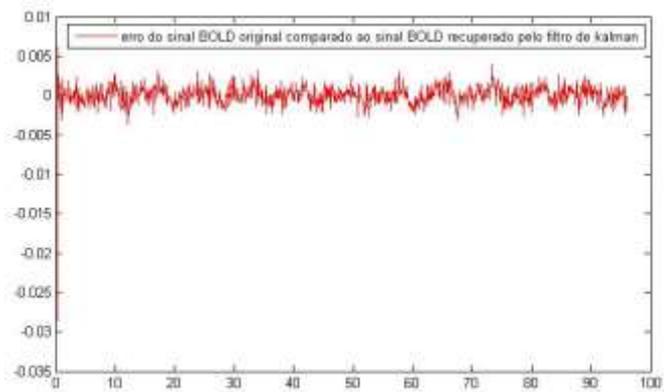


Figura 4.35. Erro entre o sinal BOLD original e o estimado.



Tentamos recuperar os parâmetros do modelo tais como o sinal de decaimento ( $\tau_f$ ) Figura 4.36, a constante do tempo auto regulação de retorno ( $\tau_s$ ) Figura 4.37, o tempo de transição ( $\tau_0$ ) Figura 4.38, a eficácia neuronal ( $\varepsilon$ ) Figura 4.39, a extração e fração de oxigênio ( $E_0$ ) Figura 4.40, porem não obtivemos um sucesso nessas estimações, pois os resultados não convergiram.

Figura 4.36. Sinal de decaimento ( $\tau_f$ ).

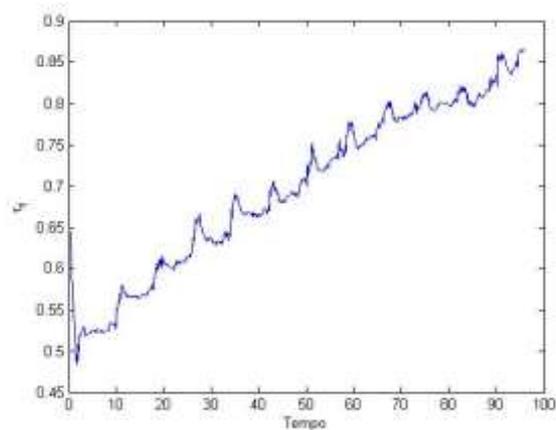


Figura 4.37. Constante do tempo auto regulação de retorno ( $\tau_s$ ).

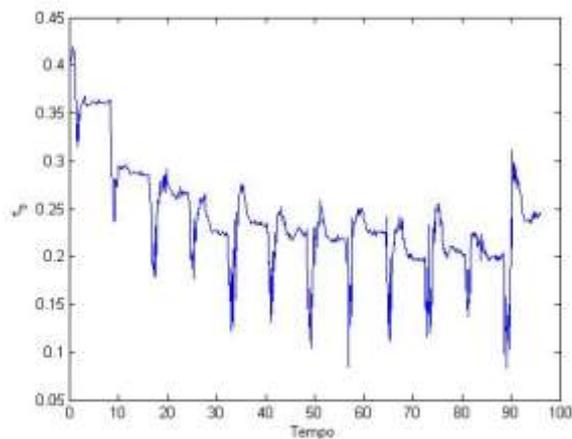


Figura 4.38. Tempo de transição ( $\tau_0$ ).

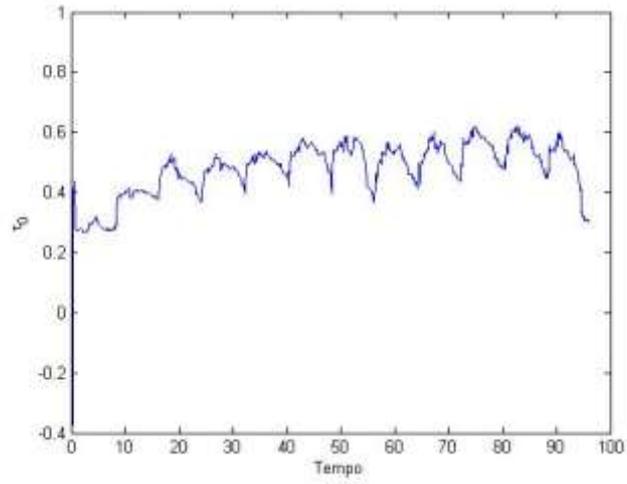


Figura 4.39. Eficácia neuronal ( $\epsilon$ ).

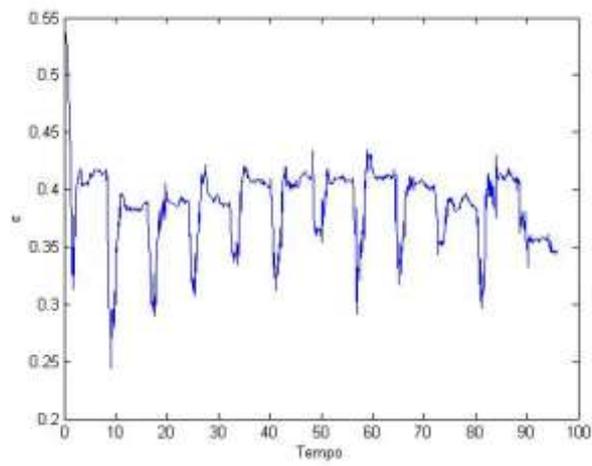
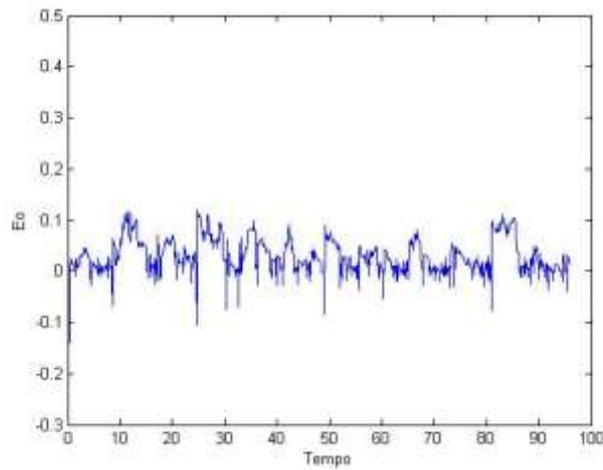


Figura 4.40. Extração e fração de oxigênio ( $E_0$ ).



Notamos que apesar do Filtro de Kalman Unscented Recuperar nosso sinal  $f, v, q$  e sinal BOLD, sua estimação não foi muito boa, como podemos ver isso pelos seus erros associados que obtiveram um valor numa escala de  $10^{-1}$  diferente do EKF que apresentou um erro numa escala de  $10^{-2}$  à  $10^{-3}$ , acreditamos que isso acontece devido o filtro ser muito sensível as matrizes de covariâncias e precisamos encontrar as matrizes que melhor se adeque ao sistema, varias simulações foram feitas com diversos valores para as matrizes de covariância e encontramos esses resultados como os melhores estimados. O que diz respeito a estimação dos o parâmetros do modelo hemodinâmico de Buxton-Friston, não conseguimos uma estimação para esses parâmetros utilizando o UKF, pois os mesmo não tiveram uma estabilização nos valores como observados nas figuras 3.36, 3.37, 3.38, 3.39, 3.40.

## CAPITULO 5

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

Utilizamos o filtro de Kalman estendido para uma estimação conjunta de no modelo hemodinâmico de Buxton-Friston, e percebemos que esse método consegue recuperar as variáveis de estado: fluxo sanguíneo (sinal  $f$ ), volume cerebral sanguíneo (sinal  $v$ ), quantidade de hemoglobina no sangue (sinal  $q$ ) e o sinal BOLD original. Assim como os demais parâmetros do modelo de Buxton-Friston, diferente do que foi dito por Eluan [10] e Moraes [21].

Notou-se também que a estimação está ligada a matriz de covariância, ou seja, quanto melhor for o ajuste nas matrizes de covariâncias melhor será a estimação desses parâmetros.

No que diz respeito ao UKF percebemos também que o UKF não foi um bom estimador para os nossos parâmetros do modelo, acreditamos que sua estimação está ligada a matriz de covariância e ainda não encontramos as matrizes que melhor adequa ao sistema, foram feitas várias simulações para obter os resultados que temos.

Logo para até o momento o Filtro de Kalman estendido apresenta um melhor valor para as variáveis e os parâmetros do modelo de Buxton-Friston na assimilação dos dados do fMRI que o Filtro de Kalman Unscented, para o nosso caso. Pois ainda não conseguimos fazer um ajuste nas matrizes de covariância.

Sugerimos como continuação desse trabalho ou ideias para trabalhos futuros tentar encontrar um mecanismo que encontre uma matriz de covariância que melhor se adeque ao sistema, tornando o resultado do UKF mais preciso que o EKF, também sugerimos a utilização de outros filtros para futuras comparações.

## REFERÊNCIAS

- [1] Acessado em <https://www.ndcn.ox.ac.uk/divisions/fmrib/what-is-fmri/introduction-to-fmri>. Data 21/01/2017
- [2] Acessado em [https://pt.wikipedia.org/wiki/Filtro\\_de\\_Kalman](https://pt.wikipedia.org/wiki/Filtro_de_Kalman).
- [3] Acessado em <http://neuromarca.com/neuromarketing/fmri>
- [4] Acessado em [https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/7604/7604\\_5.PDF](https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/7604/7604_5.PDF)
- [5] Aiube, F. A. L.; Modelagem dos preços futuros de commodities: abordagem pelo filtro de partículas
- [6] Biazoli Junior, Claudinei Eduardo. Inferência do Tempo de atividade neural a partir do efeito BOLD em ressonância magnética funcional. São Paulo, 2010. Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo.
- [7] Campelo, Anderson David de Souza Análise de dados de Imagem por Ressonância Magnética Funcional utilizando Mapas auto-organizáveis/(Anderson David de Souza Campelo); orientador, Valcir João da Cunha Farias. - 2010.
- [8] CHIARADIA, A. P. M.; KUGA, H. K.; MASAGO B. Y. P. L.; 2013-Análise Do Filtro de Kalman Estendido Para Determinação de Órbita a Bordo Considerando Arcos Curtos;
- [9] Cruz, SÉRGIO MESSIAS. Implementação De Um Filtro De Kalman Estendido Em Arquiteturas Reconfiguráveis Aplicado Ao Problema De Localização Em Robótica Móvel. Dissertação de Mestrado ( Universidade de Brasília, 2013)
- [10] Eluan, Raul Barbosa. Filtro de Kalman Estendido aplicado a dados de FMRI. Trabalho de conclusão de curso (UFPA 2014).

- [11] Friston K.J. Functional and effective connectivity in neuroimaging: a synthesis. Hum. Brain Mapp. 1994.
- [12] Huettel, S. A.; Song, A. W.; McCarthy, G. (2009), Functional Magnetic Resonance Imaging (2 ed.), Massachusetts: Sinauer, ISBN 978-0-87893-286-3.
- [13] Hu, Z. H.; Zhao, X.; Liu, H.; Shi, P., Nonlinear Analysis of the BOLD Signal. Journal on Advances in Signal Processing, 2009.
- [14] Kety SS, Schmidt CF, (1948) The nitrous oxide method for the quantitative determination of cerebral bloodflow in man: Theory, procedure and normal values. J Clin Invest 27:476–483 Google Scholar CrossRef, Medline
- [15] K. J. Friston, A. Mechelli, R. Turnet and C. J. Price, NonLinear response in fMRI: the balloon model, volterra kernels, and other hemodynamics. Neuro image, Vol. 12, no 4, p. 466-477, 2000.
- [16] K. J. Friston, "Bayesian estimation of dynamical systems: an application to fMRI," Neuro Image, vol. 16, no. 2, pp. 513–530, 2002.
- [17] Langleben, D. D.; Moriarty, J. C. (2013). "Using brain imaging for lie detection: Where science, law, and policy collide". Psychology, Public Policy, and Law 19 (2): 222
- [18] MULERT, C. e LEMIEUX, L., 2010. EEG-fMRI Physiological Basis, Technique and Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [19] Massago, Sadao. Matriz Hessiana e Aplicações. 2010.
- [20] Martin Møller Andreasen (2008). Non-linear DSGE Models, The Central Difference Kalman Filter, and The Mean Shifted Particle Filter.

[21] Moraes, Alice Nabiça. Aplicação do filtro estendido de Kalman e o filtro de Kalman “Unscented” para análise de dados de FMRI. Relatório Técnico Científico, (UFPA 2015)

[22] Nunes, Patrícia R. e.t. Ressonância magnética funcional: mapeamento do córtex motor através do efeito BOLD. SAÚDE & TECNOLOGIA ed. Online. 2014.

[23] R. B. Buxton, E. C. Wong, and L. R. Frank, “Dynamics of blood flow and oxygenation changes during brain activation: the balloon model,” *Magnetic Resonance in Medicine*, vol. 39, no. 6, pp. 855–864, 1998

[24] Ogawa S, Lee TM, Kay AR, Tank DW. (1990): BRAIN MAGNETIC-RESONANCE-IMAGING WITH CONTRAST DEPENDENT ON BLOOD OXYGENATION. Proceeding of the National Academy of Science of the United States of America.

[25] Souza, Miguel Monteiro de. INTERPRETAÇÃO DE DADOS DE FMRI APLICANDO A TEORIA DA RESPOSTA AO ITEM. Trabalho de conclusão de curso (UFPA 2017).

[26] Wan, Eric A. and Merwe, Rudolph van der. The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation. SD.