



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E**  
**ESTATÍSTICA**

**Análise numérica de soluções espúrias  
para semi-discretizações espaciais de  
equações de ondas**

**Alberto Sancho Noé**

Belém

2017

Alberto Sancho Noé

**Análise numérica de soluções espúrias para  
semi-discretizações espaciais de equações de ondas**

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará como um pré-requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior**

Belém

2017

Dados Internacionais de Catalogação - na- Publicação (CIP)  
Biblioteca de Pós-Graduação do ICEN/UFPA

---

Noé, Alberto Sancho

Análise numérica de soluções espúrias para semi-discretizações espaciais de equações de ondas/Alberto Sancho Noé; orientador, Dilberto da Silva Almeida Junior.-2017.

55 f.: il. 29 cm

Inclui bibliografias

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística – PPGME, Belém, 2017.

1. Análise numérica. 2. Soluções espúrias. 3. Equação de onda-Soluções numéricas. 4. Semi-discretização. 5. Desigualdades (Matemática). I. Almeida Junior, Dilberto da Silva, orient. II. Título.

---

CDD 22 ed. 518

# Análise numérica de soluções espúrias para semi-discretizações espaciais de equações de ondas

por

Alberto Sancho Noé

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará como um pré-requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 23 de Fevereiro de 2017 por:



---

Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (UFPA)



---

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (UFPA)



---

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo (UFPA)



---

Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos (UFPA- Salinas)

*A Dedico aos meus antepassados que foram forçados a deixar sua terra.*

# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar ao programa CNPq-MCT-Moçambique por financiar essa pesquisa, a Universidade Federal do Pará, por conceder uma vaga de estudo no Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística.

Agradeço a todos os professores que me acompanharam ao longo desses dois anos, em especial, aos professores Anderson de Jesus e Anderson Campelo pela disponibilidade de esclarecer as minhas dúvidas e principalmente ao professor Dilberto de Almeida Júnior que me aceitou como seu orientando, pela paciência e disponibilidade.

Obrigado a todos do Grupo de Pesquisa em Análise Matemática Numérica - GPAMN em especial aos colegas João Fortes, Leonardo Rogério, Marcos Lima, Manoel Jeremias, pela paciência em esclarecer as minhas dúvidas.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional. Agradeço minha mãe Lídia Murombo, heroína que me deu apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo cansaço. Ao meu pai Noé Alberto que apesar de todas as dificuldades me fortaleceu. Obrigado meus irmãos, irmãs, sobrinhos e sobrinhas, que nos momentos de minha ausência dedicados aos estudo superior, sempre fizeram entender que o futuro é feito partir de constante dedicação no presente.

Obrigado primos, primas, tias e tios pela contribuição valiosa.

Meus agradecimentos aos amigos João Felipe, Welber, Helen Cristina e César Carvalho companheiros de trabalhos irmãos na amizade que fizeram parte da minha formação que vão continuar presentes na minha vida.

Obrigado minha mãe da vida Nilda, minhas irmãs da vida Aurilene da Silva e Sandra Picardo pelos bons e maus momentos que passamos juntos.

E finalmente, agradeço a minha namorada Denise da Graça pela paciência.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

# Resumo

Instituto de Ciências Exatas e Naturais  
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

## **Análise numérica de soluções espúrias para semi-discretizações espaciais de equações de ondas**

por Alberto Sancho Noé

Neste trabalho estudamos o problema que diz respeito a uma representação numérica semi-discreta, na qual somente a variável espacial é discretizada, para um importante problema no contexto da Teoria de Controle em Equações Diferenciais Parciais, a saber, o problema de observabilidade ou desigualdade inversa para energias que representam sistemas hiperbólicos.

**Palavras-chave:** Análise numérica, soluções espúrias, ondas acopladas, semi-discretizações e desigualdade de observabilidade.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

## **Abstract**

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

### **Numerical analysis of spurious solutions for spatial semi-discretizations of wave equations.**

Alberto Sancho Noé

*Advisor:* Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

*Abstract* of the Master Dissertation presented to the Graduate Program in Mathematics and Statistics of the Federal University of Pará (PPGME-UFPA) as part of the requisites required to obtain a Master's Degree in Mathematics .

In this work we study the problem with respect to a semi-discrete numerical representation, in which only the spatial variable is discretized, for an important problem in the context of the Control Theory in Partial Differential Equations, namely, the problem of observability or inverse inequality For energies that represent systems Hyperbolic.

**Keywords:** Numerical analysis, spurious solutions, coupled waves, semi-discretizations and inequality of observability.

---

## Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Considerações gerais e motivação . . . . .	1
1.2	Objetivos e organização da dissertação . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Sistema de equação de ondas acopladas</b>	<b>8</b>
2.1	Sistema acoplado . . . . .	8
2.2	Resultados no cenário contínuo . . . . .	9
2.3	Aproximação por diferenças finitas semi-discreta . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Semi-discretização via <math>\theta</math>-esquema</b>	<b>15</b>
3.1	Apresentação do problema . . . . .	15
3.2	Conservação e positividade das energias semi-discretas . . . . .	16
3.3	Observabilidade uniforme: sem filtragem numérica . . . . .	23
3.4	Análise espectral semi-discreta . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Observabilidade uniforme</b>	<b>40</b>
<b>5</b>	<b>Conclusão e Trabalhos Futuros</b>	<b>51</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>53</b>

# CAPÍTULO 1

---

## Introdução

---

### 1.1 Considerações gerais e motivação

Na Física dizemos que “onda é uma perturbação que se propaga no espaço ou em qualquer outro meio”, isto é, se por alguma razão as moléculas das substâncias que compõem o meio, se deslocam da posição de equilíbrio e vão transmitindo a sua energia em moléculas vizinhas, por meio da interação molecular desencadando um deslocamento progressivo, então nessas condições temos a onda.

As ondas são classificadas em dois grandes grupos, que são: Ondas Mecânicas e Ondas Eletromagnéticas. As duas classificações dependem da composição do meio em que elas se propagam. Quanto a direção de propagação, elas se classificam em unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.

O interesse pelo estudo de ondas remota desde o século XVI. O primeiro registo que se tem, foi o livro “Monumental Principia” publicado em 1687 de Isaac Newton (1643-1727). Nesse livro ele estuda a Mecânica como sendo um modelo para a investigação matemática da natureza. Em seguida, muitos outros cientistas tais como Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) , Jean le

Rond d'Alembert( 1717-1783), Leonhard Euler (1707-1783) e Daniel Bernoulli (1700-1782) se interessaram pelo estudo do problema da corda vibrante, surgindo assim, a necessidade de modelar matematicamente a vibração da corda, de onde passamos a ter o estudo da equação de onda[21].

Primeiramente vamos tentar entender os conceitos de observabilidade e controlabilidade a partir das seguintes perguntas:

- Obsevabilidade: Assumindo que ondas se propagam em conformidade com uma dada equação de onda e com apropriadas condições de fronteiras, pode-se garantir que a energia total possa ser estimada (independentemente da solução) em termos da energia concentrada em uma sub-região do domínio ou até mesmo de sua fronteira onde ocorre as oscilações para um dado intervalo de tempo?
- Controlabilidade: É possível que as soluções de um problema de propagação de ondas possam ser direcionadas de um estado inicial para um estado final por meio de um mecanismo de controle atuando sobre o sistema?

No trabalho de J.A. Infante e E. Zuazua[8], os autores abordaram o problema no contínuo, onde trabalharam com a questão da energia nos seus aspectos conservativos, observabilidade e também a análise semi-discreta. Para compreender melhor, consideremos o sistema conservativo de propagação de ondas em 1-D

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \forall t \geq 0 \quad (1.2)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0(\cdot), u_t(\cdot, 0) = u_1(\cdot), \forall x \in (0, L). \quad (1.3)$$

Como podemos observar, este sistema está bem posto no espaço da energia  $H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$ , isto é, para qualquer  $(u_0, u_1) \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$ , existe única solução  $u \in C([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L))$ . A energia do sistema acima é dada por

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L u_t^2 dx, \quad (1.4)$$

a qual é conservativa ao longo de tempo, isto é,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0), \forall 0 < t < T. \quad (1.5)$$

O problema de observabilidade da fronteira do sistema (1.2)-(1.3) consiste em uma desigualdade inversa para a respectiva energia associada, a qual é dada da seguinte forma

$$\varepsilon(0) \leq C(T) \int_0^T |u_x(L, t)|^2 dt. \quad (1.6)$$

Como o sistema é conservativo, esta desigualdade de observabilidade nos diz que a energia total da equação da onda é estimada por meio da tensão  $u_x(L; t)$  medida na norma  $L^2(0; T)$ . Notemos que é uma importante propriedade pois temos “controle” total sobre o sistema por meio de um único termo. Esta estimativa é conhecida como problema de observabilidade da fronteira e a melhor constante  $C$  é chamada de constante de observabilidade, ver Lions [7] e Komornik [20] em trabalhos clássicos sobre a teoria de controle em equações diferenciais parciais. Em particular, os autores tratam da equivalência existente entre a controlabilidade e a observabilidade por meio do Método de Unicidade Hilbertiana.

Por outro lado, no início do anos 90 do século passado, alguns pesquisadores dedicaram seus estudos ao tratamento numérico (teórico e computacional) da teoria de controle. Entre os principais trabalhos destacamos os de R. Glowinski et al. [13, 14, 15]. Tendo em mente que controle implica em observabilidade, nesses trabalhos os autores identificam uma imprecisão numérica no problema de controle para equação de ondas 2-D quando discretizadas no contexto do método das diferenças finitas e de elementos finitos. Esse fato suscitou uma série de questionamentos e os autores inferiram que tais métodos geram soluções numéricas espúrias que não estariam presentes na contrapartida do contínuo e que uma análise mais profunda seria necessária para identificar as causas dessas anomalias numéricas. Precisamente falando, qualquer dinâmica numérica semi-discreta gera oscilações espúrias à alta frequências que não são próprias do respectivos modelo contínuo. Elas devem convergir fracamente para zero na medida em que o parâmetro de discretização espacial  $h$  tende para zero e, essa medida, é consistente com a propriedade de convergência numérica. Porém, em se tratando de representações semi-discretas para desigualdades do tipo (1.6), um limite uniforme para a constante  $C(T)$  é

necessário para que não se ocorra uma degeneração da mesma com o limite  $h \rightarrow 0$ . No entanto, isto não acontece para dinâmicas numéricas elementares como é o caso das diferenças finitas e de elementos finitos (standard). Prova-se que a constante de observabilidade em estimativas numéricas semi-discretas do tipo

$$\varepsilon_h(0) \leq C(T; h) \int_0^T \left| \frac{u_{J+1}(t) - u_J(t)}{h} \right|^2; \quad (1.7)$$

sofre de “blow-up” quando  $h \rightarrow 0$ . Nessa direção, as conjecturas levantadas por R. Glowinski et al. [15, 13, 14] foram resolvidas no trabalho de Infante e Zuazua [8]. Nesse artigo, os autores fizeram uma análise detalhada para o problema da perda de observabilidade numérica em diferenças finitas e elementos finitos no contexto das semi discretizações e esse trabalho se tornou uma das referências em análise numérica teórica para a teoria de controle em equações diferenciais parciais.

Pretendemos estudar o problema que diz respeito a uma representação numérica semi-discreta, na qual somente a variável espacial é discretizada, para um importante problema no contexto da Teoria de Controle em Equações Diferenciais Parciais, a saber, o problema de observabilidade ou desigualdade inversa para energias que representam sistemas de equações de ondas acopladas.

Tomando por base  $\theta$ -esquema dado por

$$(1 - 2\theta)u_j'' + \theta(u_{j+1}'' + u_{j-1}'') - \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = 0, t \geq 0, j = 1, 2, \dots, J \quad (1.8)$$

$$u_0(t) = 0, u_{j+1} = 0, t \geq 0 \quad (1.9)$$

$$u_j(0) = u_j^0, u_j'(0) = u_j^1, j = 1, 2, \dots, J, \quad (1.10)$$

Os autores D.S.Almeida Júnior, A.J.A. Ramos e M.L. Santos em [3] conseguiram identificar de modo preciso o operador numérico espúrio introduzido que é responsável pela perda de observabilidade numérica, tal como caracterizado na introdução. O esquema acima foi objeto de estudo nos trabalhos de Loreti e Mehrenberger [22, 23] em conexão com a observabilidade uniforme do método "two-grid". Eles mostraram que a energia de (1.8)-(1.10) é dada por

$$\varepsilon_h^\theta(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ |u'_j|^2 - \theta |u'_{j+1} - u'_j| + \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 \right], \quad (1.11)$$

e, em [22], os autores destacaram que  $\varepsilon_h^\theta$  satisfaz

$$\varepsilon_h^\theta(t) \geq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ (1 - 4\theta) |u'_j|^2 + \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 \right], \quad (1.12)$$

e portanto a positividade de  $\varepsilon_h^\theta(t)$  vale para  $\theta \in [0, 1/4]$ . Os autores destacaram também que o esquema (1.8)-(1.10) está inspirado em uma aproximação dispersiva para a equação da onda dada por

$$u_{tt} - \theta h^2 u_{ttxx} - u_{xx} = 0, \quad (1.13)$$

e nesse sentido o operador  $h^2 u_{ttxx}$  para qualquer  $\theta \in [0, 1/4]$  caracteriza uma inconsistência numérica.

Diferentemente de Loreti e Mehrenberger [22], nós mostramos que a energia de (1.8)-(1.10) é dada precisamente em função de  $\theta$  por

$$E_h^\theta(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u'_{j+1} - u'_j}{2} \right|^2 + \frac{1 - 4\theta}{2} \frac{h^3}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u'_{j+1} - u'_j}{h} \right|^2 + \frac{h^3}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2, \quad (1.14)$$

e sua positividade permanece válida para  $\theta \in [0, 1/4]$ . Além disso, através de um cálculo simples, mostra-se que  $E_h^\theta(t)$  é a energia para a equação dada por

$$\frac{u''_{j+1} + 2u''_j + u''_{j-1}}{4} - \frac{1 - 4\theta}{4} h^2 \Delta_h u''_j - \Delta_h u_j = 0, j = 1, \dots, J, \quad (1.15)$$

onde as equações acima contêm um termo extra do tipo dispersivo dado por  $\frac{1-4\theta}{4} h^2 \Delta_h u''_j$  para todo  $\theta \in [0, 1/4]$ . Em particular, tomando  $\theta = 0$  resulta nas equações de diferenças finitas  $u''_j - \Delta_h u_j = 0$  e tomando  $\theta = 1/6$  resulta na equação de elementos finitos  $(u''_{j+1} + 4u''_j + u''_{j-1})/6 - \Delta_h u_j = 0$  (ver [8]).

Aqui, diferentemente da aproximação dispersiva (1.13), podemos concluir que (1.16) está inspirada em outra aproximação dispersiva da equação de ondas dada por

$$u_{tt} - \frac{1-4\theta}{4} h^2 u_{ttxx} - u_{xx} = 0. \quad (1.16)$$

Tendo em mente que somente para  $\theta = 1/4$  obtemos uma consistência numérica, ou seja, livre do termo espúrio e uniformemente observável para todas as soluções de Fourier, somos induzidos a pensar que  $\frac{1-4\theta}{4} h^2 \Delta_h u_j''$  para todo  $\theta \in [0, 1/4[$  geram as oscilações espúrias de alta frequência e a respectiva perda de observabilidade uniforme. Assim, (1.16) é uma equação predominantemente dispersiva para  $\theta \in [0, 1/4[$ . Além disso, esse termo gera no cenário multiplicativo o termo extra dado por

$$\left(\theta - \frac{1}{4}\right) h^3 \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{u'_{j+1} - u'_j}{h} \right|^2 dt. \quad (1.17)$$

De acordo com os resultados de Infante e Zuazua [8], os modos espúrios são

$$-\frac{h^2}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{u'_{j+1} - u'_j}{h} \right|^2 dt \quad \text{e} \quad -\frac{h^2}{12} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{u'_{j+1} - u'_j}{h} \right|^2 dt \quad (1.18)$$

correspondendo aos valores  $\theta = 0$  e  $\theta = 1/6$ , respectivamente.

Finalmente, podemos notar uma importante diferença entre as equações (1.13) e (1.16). Tomando  $\theta = 0$  em (1.13) o termo extra desaparece e não detectamos a presença de  $h^2 u_{ttxx}$  ao nível do contínuo, fato que não acontece em (1.16) onde prevalece  $u_{tt} - \frac{h^2}{4} u_{ttxx} u_{xx} = 0$  que, naturalmente, é inconsistente com  $u_{tt} - u_{xx} = 0$  para  $h$  fixado.

No sentido exposto acima, acreditamos que abordagem em resolver o problema da observabilidade uniforme para o esquema constitui-se em uma importante contribuição em análise numérica teórica, porque torna explícito o operador de natureza dispersiva numérica que gera as modos espúrios para qualquer  $\theta \in [0, 1/4[$ .

## 1.2 Objetivos e organização da dissertação

A dissertação está dividida em cinco capítulos. No capítulo I, fizemos a introdução do trabalho e a fundamentação teórica que consistiu em apresentar o caso clássico da equação de onda e alguns resultados de Infante e Zuazua [8].

No capítulo II, apresentamos o sistema acoplado de duas ondas conservativas. Tratamos resultados importantes, tais como, a questão da observabilidade uniforme no cenário contínuo e aproximação por diferenças finitas. Estes resultados já foram apresentados por J. C. Pantoja em [24].

No capítulo III, apresentamos o nosso problema que consistiu em aplicar o  $\theta$  esquema ao sistema de ondas acopladas estudado em [24]. Nesse sistema, estudamos a influência dos parâmetros  $h$  e  $\theta$  sobre a representação numérica para a observabilidade e controlabilidade do sistema.

Os pontos importantes abordados no capítulo III são:

- Identificação precisa dos termos de sobre-estimação que afetam as propriedades de observabilidade. Isto foi feito usando o método de energia devidamente adaptado para esse ambiente numérico;
- Construção da energia numérica e procedendo com devidas adaptações seremos capazes de identificar os operadores numéricos artificiais que o método introduz para valores específicos do parâmetro  $\theta$ ;
- Construção do espectro numérico e a série de Fourier das soluções semi-discretas;
- Construção de desigualdades de observabilidade para o espectro semi-discreto e identificamos então, sob que condições ocorre a perda de observabilidade do espectro e consequentemente a perda de observabilidade das soluções dos sistemas semi-discretos;
- Filtragem das soluções espúrias e construção da observabilidade uniforme.

No capítulo IV, construímos a observabilidade uniforme usando desigualdades do tipo Ingham. Finalmente, no capítulo V, apresentamos as conclusões e perspectivas futuras.

---

### Sistema de equação de ondas acopladas

---

Neste capítulo vamos apresentar o sistema hiperbólico de ondas acopladas estudado por D. S. Almeida Júnior, J. C. Pantoja Fortes e M. L. Santos em [24], destacaremos alguns resultados importantes discutidos neste trabalho.

#### 2.1 Sistema acoplado

Consideremos o sistema 1-D de duas equações de ondas acopladas dado por

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha v = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T), \quad (2.1)$$

$$v_{tt} - v_{xx} + \alpha u = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T), \quad (2.2)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \forall x \in (0, L) \quad (2.4)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), \quad \forall x \in (0, L), \quad (2.5)$$

onde a constante  $\alpha > 0$  acopla as equações de onda representadas por  $u$  e  $v$ . Em análise matemática, esses sistemas aparecem nos trabalhos de M. Najafi[12,17] e em suas referências. Em sua quase totalidade, os trabalhos de análise matemática sobre o sistema acima dizem respeito a estabilização espacial. O sistema acima, também foi objeto de estudo de D. S. Almeida Júnior, J. C. Pantoja Fortes e M. L. Santos em [24]. Ele estuda o problema de observabilidade, tanto para o modelo contínuo, como para aproximação de diferenças finitas semi-discretas.

O sistema (2.1)–(2.5) é bem posto no espaço da energia  $(H_0^1(0, L) \times L^2(0, L))^2$ , isso significa que, denotando de  $U = (u, u_t, v, v_t)$  temos que  $U_0 \in (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L))^2$ , existe única solução  $U \in (C([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L)))^2$ . Sobre existência e unicidade de soluções consulte [26].

Passamos agora a apresentar alguns resultados importantes obtidos em [24], os quais nortearam esta dissertação.

## 2.2 Resultados no cenário contínuo

A energia do sistema (2.1)–(2.5) é dada por

$$\varepsilon(t) := \frac{1}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_x^2 dx + \alpha \int_0^L uv dx. \quad (2.6)$$

de onde tem-se que

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0), \forall t \in [0, T]. \quad (2.7)$$

Desacomplando o sistema (2.1)–(2.5), passamos a ter dois sistemas distintos dados por

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} - \alpha\psi = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T), \quad (2.8)$$

$$\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2.9)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad \forall x \in (0, L), \quad (2.10)$$

com  $\psi := u - v$  e outro dado por

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \alpha\phi = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T), \quad (2.11)$$

$$\phi(0, t) = \phi(L, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2.12)$$

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x), \quad \forall x \in (0, L), \quad (2.13)$$

com  $\phi := u + v$ . Esses sistemas são conservativos e as suas respectivas energias são dadas por

$$\varepsilon_1(t) := \frac{1}{2} \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx - \frac{\alpha}{2} \int_0^L \psi^2 dx, \quad (2.14)$$

e

$$\varepsilon_2(t) := \frac{1}{2} \int_0^L \phi_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^L \phi^2 dx. \quad (2.15)$$

as quais são também conservativas. Note que  $\varepsilon(t) := (\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t))/2$ , de fato

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left( \psi_t^2 + \psi_x^2 - \alpha\psi^2 + \phi_t^2 + \phi_x^2 + \alpha\phi^2 \right) dx \end{aligned} \quad (2.16)$$

e usando o fato de  $u = (\phi + \psi)/2$  e  $v = (\phi - \psi)/2$ , concluímos que

$$\varepsilon(t) := \frac{1}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_x^2 dx + \alpha \int_0^L uv dx. \quad (2.17)$$

De acordo com esse desacoplamento, as propriedades que objetivaram os estudos em [24], foram feitas nos sistemas desacoplados (2.8)-(2.10) e (2.11)-(2.13) e, ao final, as propriedades foram compostas por meio das funções  $\psi := u - v$  e  $\phi := u + v$ .

Antes de mostrar o resultado sobre a desigualdade de observabilidade, o autor em [24], mostrou a positividade da energia. Portanto, segue o teorema

**Teorema 1.** Seja  $U = (u, u_t, v, v_t)$  a solução do sistema (2.1)–(2.5). Então, para todo  $\alpha \leq \pi^2/L^2$  temos que

$$\varepsilon(t) \geq \frac{\pi^2 - \alpha L^2}{2\pi^2} \left[ \int_0^L u_x^2 dx + \int_0^L v_x^2 dx \right] \geq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.18)$$

onde  $\mathcal{E}(t)$  é a energia dada em (2.17).

**Prova:** Veja a demonstração em [24].

■

O teorema dado a seguir, diz respeito a uma particular desigualdade de observabilidade para o sistema (2.1)–(2.5).

**Teorema 2.** Seja  $U = (u, u_t, v, v_t)$  a solução do sistema (2.1)–(2.5). Então, para todo  $\alpha \leq \pi^2/L^2$  existe  $T_0 > 0$  tal que para todo  $T > T_0$  existe  $C(T, \alpha) > 0$  tal que a seguinte estimativa vale

$$\mathcal{E}(0) \leq C(T, \alpha) \left[ \alpha \int_0^T \int_0^L (u^2 + v^2) dx dt + \frac{L}{2} \int_0^T u_x^2(L, t) dt + \frac{L}{2} \int_0^T v_x^2(L, t) dt \right], \quad (2.19)$$

onde  $\varepsilon(t)$  é a energia dada em (2.17) e  $C(T, \alpha) = \frac{\pi^2 - \alpha L^2}{T(\pi^2 - \alpha L^2) - 2L\pi^2}$ .

**Prova:** Veja a demonstração em [24].

## 2.3 Aproximação por diferenças finitas semi-discreta

Para o sistema em (2.1)–(2.5), temos a seguinte aproximação por diferenças finitas :

$$u_j''(t) - \Delta_h u_j(t) + \alpha v_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad 0 < t < T, \quad (2.20)$$

$$v_j''(t) - \Delta_h v_j(t) + \alpha u_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad 0 < t < T, \quad (2.21)$$

$$u_0(t) = u_{J+1}(t) = 0, \quad v_0(t) = v_{J+1}(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2.22)$$

$$u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, \quad v_j(0) = v_j^0, \quad v_j'(0) = v_j^1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J + 1, \quad (2.23)$$

onde

$$\Delta_h u_j(t) := \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2} \quad \text{e} \quad \Delta_h v_j(t) := \frac{v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t)}{h^2}. \quad (2.24)$$

A energia de (2.20)–(2.23) é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h(t) &:= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ |u_j'(t)|^2 + \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 + |v_j'(t)|^2 + \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha u_j(t)v_j(t) \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

a qual é conservativa. Para simplificar a análise do problema, do mesmo modo como no caso contínuo, consideramos os dois sistemas associado a (2.20) - (2.23). O primeiro é obtido fazendo  $\phi_j(t) := u_j(t) + v_j(t)$  de onde obtemos

$$\phi_j''(t) - \Delta_h \phi_j(t) + \alpha \phi_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad 0 < t < T, \quad (2.26)$$

$$\phi_0(t) = \phi_{J+1}(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2.27)$$

$$\phi_j(0) = \phi_j^0, \quad \phi_j'(0) = \phi_j^1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J + 1. \quad (2.28)$$

e o outro é obtido para  $\psi_j(t) := u_j(t) - v_j(t)$ , de onde segue que

$$\psi_j''(t) - \Delta_h \psi_j(t) - \alpha \psi_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad 0 < t < T, \quad (2.29)$$

$$\psi_0(t) = \psi_{J+1}(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2.30)$$

$$\psi_j(0) = \psi_j^0, \quad \psi_j'(0) = \psi_j^1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J + 1. \quad (2.31)$$

As suas respectivas energias são dadas por

$$\varepsilon_{2h}(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ |\phi'_j(t)|^2 + \left| \frac{\phi_{j+1}(t) - \phi_j(t)}{h} \right|^2 + \alpha |\phi_j(t)|^2 \right], \quad (2.32)$$

e

$$\varepsilon_{1h}(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ |\psi'_j(t)|^2 + \left| \frac{\psi_{j+1}(t) - \psi_j(t)}{h} \right|^2 - \alpha \psi_j^2(t) \right], \quad (2.33)$$

e estas energias também são conservativas. Tal como no contínuo, a energia de (2.20)–(2.23) também preserva a positividade, como podemos ver na seguinte proposição.

**Proposição 1** (Positividade da Energia). Para qualquer  $h > 0$  e  $(u_j, v_j) \forall j$ , solução de (2.20)–(2.23) temos

$$\mathcal{E}_h(t) \geq \frac{\pi^2 - \alpha L^2}{\pi^2} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 \right] \geq 0, \forall t \geq 0 \quad (2.34)$$

desde que  $\alpha \leq \pi^2/L^2$  com  $\mathcal{E}(t)$  dada em (2.25). Ver demonstração em [24].

Os dois resultados seguintes, são referentes a desigualdade de observabilidade das equações desacopladas em (2.29)–(2.31) e (2.26)–(2.28) respetivamente.

**Teorema 3.** Seja  $\psi_j$  a solução do problema (2.29)–(2.31). Então, para todo  $\alpha \leq \pi^2/L^2$  existe  $T_0 > 0$  tal que  $T > T_0$  existe  $C(T, \alpha) > 0$  que é independente de  $h$ , onde  $h > 0$ , a seguinte desigualdade de observabilidade detém

$$\varepsilon_{1h}(0) \leq C(T, \alpha) \left[ \frac{h^3}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left( \frac{\psi'_{j+1} - \psi'_j}{h} \right)^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_j}{h} \right|^2 dt \right], \quad (2.35)$$

onde  $\varepsilon_{1h}(0)$  é a energia em (2.33).

**Prova:** Veja a demonstração em [24].

■

**Teorema 4.** Seja  $\phi_j$  solução do problema (2.26)–(2.28). Então, para todo  $T > 2L$  existe  $C(T) > 0$  que é independente de  $h$ , com  $h > 0$ , segue

$$\varepsilon_{2h}(0) \leq C(T) \left[ \frac{h^3}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left( \frac{\phi'_{j+1} - \phi'_j}{h} \right)^2 dt + \alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\phi_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\phi_J}{h} \right|^2 dt \right], \quad (2.36)$$

onde  $\varepsilon_{2h}(\cdot)$  é a energia em (2.32) e  $C(T) = 1/(T - 2L)$ .

Usando os dois resultados anteriores, chegamos ao seguinte resultado que podemos considerar como sendo um dos principais resultado em [24], que é a desigualdade de observabilidade para o sistema (2.20)–(2.23) sem usar técnicas de filtragem.

**Teorema 5.** Seja  $(u_j, v_j)$  a solução do sistema (2.20)–(2.23). Para todo  $\alpha \leq \pi^2/L^2$  existe  $T_0 > 0$  tal que, para todo  $T > T_0$  existe a constante  $C(T, \alpha) > 0$  tal que, para todo  $h > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h(0) \leq C(T, \alpha) & \left[ \frac{h^3}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left( \frac{u'_{j+1} - u'_j}{h} \right)^2 dt + \frac{h^3}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left( \frac{v'_{j+1} - v'_j}{h} \right)^2 dt \right. \\ & \left. + \alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T (u_j^2 + v_j^2) dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left( \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_J}{h} \right|^2 \right) dt \right], \quad (2.37) \end{aligned}$$

Para toda solução  $(u_j, v_j)$  de (2.20)–(2.23).

**Prova** Veja a demonstração em [24].

■

Todos os resultados aqui apresentados foram norteados para o desenvolvimento da dissertação. No próximo capítulo, os principais pontos a serem abordados são:

- A construção da energia numérica do  $\theta$  - esquema;
- A construção do espectro numérico e a série de Fourier das soluções semi-discretas;
- A Desigualdade de observabilidade para o espectro semi-discreto.

---

## Semi-discretização via $\theta$ -esquema

---

Neste capítulo, apresentamos o nosso principal problema, que é um sistema hiperbólico de ondas acopladas. Este sistema resultou da discretização do sistema (2.1)-(2.5) usando o  $\theta$  – esquema. Pretendemos estudar sobre as propriedades de observabilidade e controlabilidade com  $\theta \in [0, 1/4]$ . Faremos também, algumas comparações com os resultados obtidos no capítulo anterior.

### 3.1 Apresentação do problema

Consideramos o seguinte sistema

$$\delta_\theta u_j''(t) - \Delta_h u_j(t) + \alpha v_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad 0 < t < T \quad (3.1)$$

$$\delta_\theta v_j''(t) - \Delta_h v_j(t) + \alpha u_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad 0 < t < T \quad (3.2)$$

$$u_0(t) = u_{J+1}(t) = 0, \quad v_0(t) = v_{J+1}(t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (3.3)$$

$$u_j(0) = u^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, \quad v_j(0) = v_j^0, \quad v_j'(0) = v_j^1 \quad j = 0, 1, 2, \dots, J, J + 1, \quad (3.4)$$

sendo  $\delta_\theta$  a combinação linear convexa dada por

$$\delta_\theta v_j(t) := (1 - 2\theta)v_j(t) + \theta(v_{j+1} + v_{j-1})(t). \quad (3.5)$$

Essa combinação linear convexa também é conhecida como  $\theta$ -esquema.

## 3.2 Conservação e positividade das energias semi-discretas

Nesta seção, vamos mostrar as propriedades de conservação da energia e as suas respectivas propriedades de positividade.

Para facilitar o estudo nesta seção, vamos definir  $\varphi_j(t) := (u_j + v_j)(t)$  e  $\omega_j(t) := (u_j - v_j)(t)$ . Então, desacoplando as equações (3.1)-(3.4) podemos reescrever da seguinte forma:

$$\delta_\theta \varphi_j''(t) - \Delta_h \varphi_j + \alpha \varphi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (3.6)$$

$$\varphi_0(t) = \varphi_{J+1}(t) = 0; \quad 0 < t < T \quad (3.7)$$

$$\varphi_j(0) = \varphi_j^0, \quad \varphi_j'(0) = \varphi_j^1 \quad j = 0, 1, 2, \dots, J, J+1, \quad (3.8)$$

e

$$\delta_\theta \omega_j''(t) - \Delta_h \omega_j - \alpha \omega_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (3.9)$$

$$\omega_0(t) = \omega_{J+1}(t) = 0; \quad 0 < t < T \quad (3.10)$$

$$\varphi_j(0) = \omega_j^0, \quad \omega_j'(0) = \omega_j^1 \quad j = 0, 1, 2, \dots, J, J+1. \quad (3.11)$$

**Proposição 2.** As energias de (3.6)-(3.8) e (3.9)-(3.11) são dadas respectivamente por:

$$\varepsilon_{1h}^\theta(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ |\varphi_j'|^2 - \theta |\varphi_{j+1}' - \varphi_j'|^2 + \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 + \alpha |\varphi_j|^2 \right], \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_{2h}^\theta(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ |\omega_j'|^2 - \theta |\omega_{j+1}' - \omega_j'|^2 + \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 - \alpha |\omega_j|^2 \right], \quad (3.13)$$

com  $\theta \in [0, 1/4]$ , além disso, temos que  $\varepsilon_{1h}^\theta(t) = \varepsilon_{1h}^\theta(0)$  e  $\varepsilon_{2h}^\theta(t) = \varepsilon_{2h}^\theta(0)$ ,  $\forall t \geq 0$ , isto é, os sistemas (3.6)-(3.8) e (3.9)-(3.11) são conservativos.

**Prova:** Para determinar as energias de (3.6)-(3.8) e (3.9)-(3.11), devemos multiplicar as equações (3.6) e (3.9) por  $h\varphi'_j$  e  $h\omega'_j$ , respectivamente, e somar com  $j = 1, \dots, J$ . Então, segue

$$h \sum_{j=1}^J \delta_\theta \varphi_j'' \varphi'_j - h \sum_{j=1}^J (\Delta_h \varphi_j) \varphi'_j + \alpha h \sum_{j=1}^J \varphi_j \varphi'_j = 0. \quad (3.14)$$

Usando (3.5) na equação anterior, obtemos a seguinte equação

$$h \sum_{j=1}^J [(1-2\theta)\varphi'_j + \theta(\varphi'_{j+1} + \varphi'_{j-1})] \varphi_j'' - h \sum_{j=1}^J \Delta_h \varphi_j \varphi'_j + \alpha h \sum_{j=1}^J \varphi_j \varphi'_j = 0. \quad (3.15)$$

Desenvolvendo os termos da equação (3.15) de forma separada e levando em conta as condições de contorno, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} & h \sum_{j=1}^J [(1-2\theta)\varphi'_j + \theta(\varphi'_{j+1} + \varphi'_{j-1})] \varphi_j'' \\ &= (1-2\theta)h \sum_{j=1}^J \varphi'_j \varphi_j'' + \theta h \sum_{j=1}^J (\varphi'_{j+1} + \varphi'_{j-1}) \varphi_j'' \\ &= (1-2\theta)h \sum_{j=1}^J \varphi'_j \varphi_j'' + \theta h \sum_{j=1}^J \varphi'_{j+1} \varphi_j'' + \theta h \sum_{j=1}^J \varphi'_{j-1} \varphi_j'' \\ &= (1-2\theta)h \sum_{j=0}^J \varphi'_j \varphi_j'' + \theta h \sum_{j=0}^J \varphi'_{j+1} \varphi_j'' + \theta h \sum_{j=0}^J \varphi'_j \varphi_{j+1}'' \\ &= \frac{(1-2\theta)}{2} h \sum_{j=0}^J \frac{d}{dt} |\varphi'_j|^2 + \theta h \sum_{j=0}^J \frac{d}{dt} (\varphi'_{j+1} \varphi'_j). \end{aligned}$$

Analogamente

$$-h \sum_{j=1}^J (\Delta_h \varphi_j) \varphi'_j = -h \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} \varphi'_j$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{h}{h^2} \sum_{j=1}^J (\varphi_{j+1} - \varphi_j) \varphi'_j + \frac{h}{h^2} \sum_{j=1}^J (\varphi_j - \varphi_{j-1}) \varphi'_j \\
&= -\frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J (\varphi_{j+1} - \varphi_j) \varphi'_j + \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J (\varphi_{j+1} - \varphi_j) \varphi'_{j+1} \\
&= \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J (\varphi'_{j+1} - \varphi'_j) (\varphi_{j+1} - \varphi_j) \\
&= \frac{h}{2h^2} \sum_{j=0}^J \frac{d}{dt} |\varphi_{j+1} - \varphi_j|^2,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

além disso, temos também

$$\alpha h \sum_{j=1}^J \varphi_j \varphi'_j = \frac{\alpha h}{2} \sum_{j=0}^J \frac{d}{dt} |\varphi_j|^2.$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{h}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^J \left[ (1 - 2\theta) |\varphi'_j|^2 + 2\theta (\varphi'_j \varphi'_{j+1}) + \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 + \alpha |\varphi_j|^2 \right] &= 0 \\
\frac{h}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^J \left[ |\varphi'_j|^2 - 2\theta (|\varphi'_j|^2 - \varphi'_j \varphi'_{j+1}) + \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 + \alpha |\varphi_j|^2 \right] &= 0
\end{aligned}$$

usando o fato de  $\sum_{j=0}^J |\varphi'_j|^2 = \sum_{j=0}^J |\varphi'_{j+1}|^2$ , definimos

$$\varepsilon_{1h}^\theta(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ |\varphi'_j|^2 - \theta |\varphi'_{j+1} - \varphi'_j|^2 + \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 + \alpha |\varphi_j|^2 \right]. \tag{3.17}$$

Veja que

$$\frac{d}{dt} \varepsilon_{1h}^\theta(t) = 0 \rightarrow \varepsilon_{1h}^\theta(t) = \varepsilon_{1h}^\theta(0), \tag{3.18}$$

portanto, a energia  $\varepsilon_{1h}^\theta$  é conservativa.

Usando o mesmo procedimento na equação (3.9), chegamos a seguinte energia

$$\varepsilon_{2h}^\theta(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ |\omega'_j|^2 - \theta |\omega'_{j+1} - \omega'_j|^2 + \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 - \alpha |\omega_j|^2 \right]. \quad (3.19)$$

**Proposição 3.** A energia de (3.1)-(3.4) é dada por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_h^\theta(t) &:= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ |u'_j|^2 + |v'_j|^2 - \theta |u'_{j+1} - u'_j|^2 - \theta |v'_{j+1} - v'_j|^2 + \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right|^2 + 2\alpha u_j v_j \right], \end{aligned} \quad (3.20)$$

além de satisfazer  $\varepsilon_h^\theta(t) = \varepsilon_h^\theta(0), \forall t \geq 0$ .

**Prova:** Usando o fato de  $\varepsilon_h^\theta(t) := \frac{1}{2} (\varepsilon_{1h}^\theta(t) + \varepsilon_{2h}^\theta(t))$ , então temos

$$\begin{aligned} \varepsilon_h^\theta(t) &= \frac{1}{2} [\varepsilon_{1h}^\theta(t) + \varepsilon_{2h}^\theta(t)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \left[ |\varphi'_j|^2 - \theta |\varphi'_{j+1} - \varphi'_j|^2 + \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 + \alpha |\varphi_j|^2 \right. \\ &\quad \left. + |\omega'_j|^2 - \theta |\omega'_{j+1} - \omega'_j|^2 + \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 - \alpha |\omega_j|^2 \right], \end{aligned} \quad (3.21)$$

e sabendo que  $\varphi_j(t) := (u_j + v_j)(t)$  e  $\omega_j(t) := (u_j - v_j)(t)$ , concluímos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_h^\theta(t) &:= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ |u'_j|^2 + |v'_j|^2 - \theta |u'_{j+1} - u'_j|^2 - \theta |v'_{j+1} - v'_j|^2 + \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right|^2 + 2\alpha u_j v_j \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Daí temos que

$$\frac{d}{dt} \varepsilon_h^\theta(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \varepsilon_{1h}^\theta(t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \varepsilon_{2h}^\theta(t) = 0 \rightarrow \varepsilon_h^\theta(t) = \varepsilon_h^\theta(0), \forall t \geq 0, \quad (3.23)$$

portanto, a energia é conservativa.

**Lema 1.** (Positividade da energia) A energia  $\varepsilon_{2h}^\theta(t)$  do sistema (3.9)-(3.11) preserva a positividade desde que  $\alpha \leq \frac{\pi^2}{L^2}$  e  $\theta \in [0, 1/4]$ . Mais precisamente

$$\varepsilon_{2h}^\theta(0) \geq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ (1 - 4\theta) |\omega'_j|^2 + \frac{\pi^2 - \alpha L^2}{\pi^2} \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 \right] \geq 0 \forall t \geq 0. \quad (3.24)$$

**Prova:** Reescrevendo a energia em (3.13), obtemos o seguinte,

$$\varepsilon_{2h}^\theta(t) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ (1 - 2\theta) |\omega'_j|^2 + 2\theta \omega'_j \omega'_{j+1} + \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 - \alpha |\omega_j|^2 \right],$$

de onde segue pela desigualdade  $2ab \geq -a^2 - b^2$ , que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2h}^\theta(t) &\geq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ (1 - 2\theta) |\omega'_j|^2 - \theta |\omega'_j|^2 - \theta |\omega'_{j+1}|^2 + \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 - \alpha |\omega_j|^2 \right] \\ &= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ (1 - 2\theta) |\omega'_j|^2 - 2\theta |\omega'_j|^2 + \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 - \alpha |\omega_j|^2 \right] \\ &= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ (1 - 4\theta) |\omega'_j|^2 + \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 - \alpha |\omega_j|^2 \right]. \end{aligned}$$

Seja

$$h \sum_{j=0}^J |u_j|^2 \leq \frac{L^2}{\pi^2} h \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2, \quad (3.25)$$

que é a versão discreta da desigualdade de Poincaré [8]. Aplicando (3.25), no terceiro termo do somatório anterior, obtemos,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2h}^\theta(t) &\geq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ (1 - 4\theta) |\omega'_j|^2 + \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 - \alpha \frac{L^2}{\pi^2} \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 \right] \\ &= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ (1 - 4\theta) |\omega'_j|^2 + \frac{\pi^2 - \alpha L^2}{\pi^2} \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 \right], \end{aligned}$$

portanto, para  $\theta \in [0, 1/4]$  e  $\alpha \leq \frac{\pi^2}{L^2}$ , obtemos o resultado desejado.

■

**Lema 2.** (Positividade da energia) A energia  $\varepsilon_{1h}^\theta(t)$  do sistema (3.6)-(3.8) preserva a positividade, isto é,

$$\varepsilon_{1h}^\theta(t) \geq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ (1 - 4\theta) |\varphi_j'|^2 + \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 + \alpha |\varphi_j|^2 \right], \quad (3.26)$$

desde que  $\theta \in [0, 1/4]$ .

**Prova:** Da mesma forma, como na demonstração anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1h}^\theta(t) &\geq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ (1 - 2\theta) |\varphi_j'|^2 - \theta |\varphi_j'|^2 - \theta |\varphi_{j+1}'|^2 + \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 + \alpha |\omega_j|^2 \right] \\ &= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ (1 - 2\theta) |\varphi_j'|^2 - 2\theta |\varphi_j'|^2 + \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 + \alpha |\omega_j|^2 \right] \\ &= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ (1 - 4\theta) |\varphi_j'|^2 + \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 + \alpha |\omega_j|^2 \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

e portanto a energia é positiva para  $\theta \in [0, 1/4]$ .

■

**Proposição 4.** (Positividade da energia) Para qualquer  $h > 0$  e  $(u_j, v_j)$  solução de (3.1)-(3.4)

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_h^\theta(t) &\geq h \sum_{j=0}^J \left[ (1 - 4\theta) (|u_j'|^2 + |v_j'|^2) + \left( \frac{\pi^2 - \alpha L^2}{\pi^2} \right) \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\pi^2 - \alpha L^2}{\pi^2} \right) \left| \frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right|^2 \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

desde que  $\alpha \leq \frac{\pi^2}{L^2}$  e  $\varepsilon_h^\theta(t)$  é a energia em (3.20),  $\theta \in [0, 1/4] \forall t \geq 0$ .

**Prova:** A energia em (3.20) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_h^\theta(t) &:= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ (1-2\theta)(|u'_j|^2 + |v'_j|^2) + 2\theta(u'_j u'_{j+1} + v'_j v'_{j+1}) + \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right|^2 + 2\alpha u_j v_j \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Usando a desigualdade dada por  $2u_j v_j \geq -u_j^2 - v_j^2$ , aplicando em (3.29) obtemos

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_h^\theta(t) &\geq h \sum_{j=0}^J \left[ (1-2\theta)(|u'_j|^2 + |v'_j|^2) - \theta|u'_j|^2 - \theta|u'_{j+1}|^2 - \theta|v'_j|^2 - \theta|v'_{j+1}|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right|^2 - \alpha|u_j|^2 - \alpha|v_j|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Por outro lado, tendo em consideração que  $h \sum_{j=0}^J |u_j|^2 = h \sum_{j=0}^J |u_{j+1}|^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_h^\theta(t) &\geq h \sum_{j=0}^J \left[ (1-2\theta)(|u'_j|^2 + |v'_j|^2) - 2\theta|u'_j|^2 - 2\theta|v'_j|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right|^2 - \alpha|u_j|^2 - \alpha|v_j|^2 \right] \\ &\geq h \sum_{j=0}^J \left[ (1-4\theta)(|u'_j|^2 + |v'_j|^2) + \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right|^2 - \alpha|u_j|^2 - \alpha|v_j|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

temos que combinando (3.31) e (3.25), obtemos

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_h^\theta(t) &\geq h \sum_{j=0}^J \left[ (1-4\theta)(|u'_j|^2 + |v'_j|^2) + \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. - \alpha \frac{L^2}{\pi^2} \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 - \alpha \frac{L^2}{\pi^2} \left| \frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right|^2 \right] \\ &\geq h \sum_{j=0}^J \left[ (1-4\theta)(|u'_j|^2 + |v'_j|^2) + \left(1 - \alpha \frac{L^2}{\pi^2}\right) \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \alpha \frac{L^2}{\pi^2}\right) \left| \frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right|^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq h \sum_{j=0}^J \left[ (1 - 4\theta)(|u'_j|^2 + |v'_j|^2) + \left( \frac{\pi^2 - \alpha L^2}{\pi^2} \right) \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\pi^2 - \alpha L^2}{\pi^2} \right) \left| \frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right|^2 \right].
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Portanto, temos a positividade de energia desde que  $\alpha \leq \frac{\pi^2}{L^2}$  e  $0 \leq \theta \leq 1/4$ .

■

### 3.3 Observabilidade uniforme: sem filtragem numérica

Nesta seção mostraremos um resultado uniforme de observabilidade numérica no contexto da semi-discretização sem a necessidade de efetuarmos a técnica de filtragem numérica.

**Lema 3.** Para qualquer  $h > 0$  e  $\omega_j$  solução de (3.9)-(3.11), temos:

$$\begin{aligned}
 T\varepsilon_{2h}^\theta(0) + x_h^\theta|_0^T + \frac{\alpha h}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\omega_{j+1} + \omega_j|^2 dt &= \frac{(1 - 4\theta)h^3}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\omega'_{j+1} - \omega'_j}{h} \right|^2 dt \\
 &\quad + \frac{\theta L}{2} \int_0^T |\omega'_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\omega_J}{h} \right|^2 dt, \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

onde

$$x_h^\theta = \frac{(1 - 2\theta)h}{2} \sum_{j=1}^J j\omega'_j(\omega_{j+1} - \omega_{j-1}) + \frac{\theta h}{2} \sum_{j=1}^J j(\omega'_{j+1} + \omega'_{j-1})(\omega_{j+1} - \omega_{j-1}).$$

**Prova:** Multiplicando a equação (3.9) por  $j \frac{\omega_{j+1} - \omega_{j-1}}{2}$ , temos

$$h \sum_{j=1}^J \int_0^T j(\delta_\theta \omega_j'') \frac{\omega_{j+1} - \omega_{j-1}}{2} dt - h \sum_{j=1}^J \int_0^T j(\Delta_h \omega_j) \frac{\omega_{j+1} - \omega_{j-1}}{2} dt$$

$$-\alpha h \sum_{j=1}^J \int_0^T j \omega_j \frac{\omega_{j+1} - \omega_{j-1}}{2} dt = 0. \quad (3.34)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} h \sum_{j=1}^J \int_0^T j \delta_\theta \omega_j'' \frac{\omega_{j+1} - \omega_{j-1}}{2} dt &= \\ &= \frac{h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j [(1-2\theta)\omega_j'' + \theta(\omega_{j+1}'' + \omega_{j-1}'')] (\omega_{j+1} - \omega_{j-1}) dt \\ &= \frac{(1-2\theta)h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j \omega_j'' (\omega_{j+1} - \omega_{j-1}) dt + \frac{\theta h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j (\omega_{j+1}' + \omega_{j-1}'') (\omega_{j+1} - \omega_{j-1}) dt \\ &= \frac{(1-2\theta)h}{2} \sum_{j=1}^J j \omega_j' (\omega_{j+1} - \omega_{j-1}) \Big|_0^T - \frac{(1-2\theta)h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j \omega_j' (\omega_{j+1}' - \omega_{j-1}') dt \\ &+ \frac{\theta h}{2} \sum_{j=1}^J j (\omega_{j+1}' + \omega_{j-1}') (\omega_{j+1} - \omega_{j-1}) \Big|_0^T - \frac{\theta h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j (\omega_{j+1}' + \omega_{j-1}') (\omega_{j+1}' - \omega_{j-1}') dt \\ &= x_{1h}^\theta \Big|_0^T - \frac{(1-2\theta)h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j \omega_j' (\omega_{j+1}' - \omega_{j-1}') dt + x_{2h}^\theta \Big|_0^T - \frac{\theta h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j (|\omega_{j+1}'|^2 - |\omega_{j-1}'|^2) dt \\ &= x_h^\theta \Big|_0^T + \frac{(1-2\theta)h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T \omega_j' \omega_{j+1}' dt + \theta h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\omega_j'|^2 dt - \frac{(J+1)\theta h}{2} \int_0^T |\omega_J'|^2 dt \\ &= x_h^\theta \Big|_0^T - \frac{(1-2\theta)h^3}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\omega_{j+1}' - \omega_j'}{h} \right|^2 dt + \frac{(1-2\theta)h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\omega_j'|^2 dt + \theta h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\omega_j'|^2 dt \\ &- \frac{(J+1)\theta h}{2} \int_0^T |\omega_J'|^2 dt, \end{aligned}$$

onde

$$x_{1h}^\theta = \frac{(1-2\theta)h}{2} \sum_{j=1}^J j \omega_j' (\omega_{j+1} - \omega_{j-1}), \quad x_{2h}^\theta = \frac{\theta h}{2} \sum_{j=1}^J j (\omega_{j+1}' + \omega_{j-1}') (\omega_{j+1} - \omega_{j-1})$$

e

$$x_h^\theta := x_{1h}^\theta + x_{2h}^\theta \quad (3.35)$$

além disso, temos também

$$\begin{aligned} -\frac{h}{2h^2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j(\Delta_h \omega_j)(\omega_{j+1} - \omega_{j-1}) dt &= -\frac{h}{2h^2} \int_0^T \sum_{j=0}^J j(|\omega_{j+1}|^2 - |\omega_{j-1}|^2) dt \\ &+ \frac{h}{h^2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j\omega_j(\omega_{j+1} - \omega_{j-1}) \\ &= \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\omega_j|^2 dt - \frac{(J+1)h}{2h^2} \int_0^T |\omega_J|^2 dt \\ &- \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \omega_j \omega_{j+1} dt \\ &= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 dt - \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\omega_J}{h} \right|^2 dt, \end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned} -\alpha h \sum_{j=1}^J \int_0^T j\omega_j \frac{\omega_{j+1} - \omega_{j-1}}{2} dt &= -\frac{\alpha h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j\omega_j \omega_{j+1} dt + \frac{\alpha h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T (j+1)\omega_j \omega_{j+1} dt \\ &= \frac{\alpha h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T \omega_j \omega_{j+1} dt. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} x_h^\theta|_0^T &- \frac{(1-2\theta)h^3}{4} \sum_{j=1}^J \int_0^T \left| \frac{\omega'_{j+1} - \omega'_j}{h} \right|^2 dt + \frac{(1-2\theta)h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\omega'_j|^2 dt \\ &+ \theta h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\omega'_j|^2 dt - \frac{\theta L}{2} \int_0^T |\omega'_J|^2 dt + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 dt - \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\omega_J}{h} \right|^2 dt \end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T \omega_j \omega_{j+1} dt = 0,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} x_h^\theta|_0^T - \frac{(1-2\theta)h^3}{4} \sum_{j=1}^J \int_0^T \left| \frac{\omega'_{j+1} - \omega'_j}{h} \right|^2 dt + \frac{(1-2\theta)h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\omega'_j|^2 dt \\ + \theta h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\omega'_j|^2 dt + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 dt + \frac{\alpha h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T \omega_j \omega_{j+1} dt \\ = \frac{\theta L}{2} \int_0^T |\omega'_J|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\omega_J}{h} \right|^2 dt. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Adicionando  $\frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T (\alpha |\omega_j|^2 + 2\theta \omega'_j \omega'_{j+1}) dt$  em ambos membros da equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} T\varepsilon_{2h}^\theta(0) + x_h^\theta|_0^T + \frac{\alpha h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T [|\omega_j|^2 + \omega_j \omega_{j+1}] dt + \theta h \sum_{j=0}^J \int_0^T [|\omega'_j|^2 - \omega'_j \omega'_{j+1}] dt \\ = \frac{(1-2\theta)h^3}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\omega'_{j+1} - \omega'_j}{h} \right|^2 dt + \frac{\theta L}{2} \int_0^T |\omega'_J|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\omega_J}{h} \right|^2 dt, \end{aligned} \quad (3.37)$$

além disso, note que

$$\frac{\alpha h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T [|\omega_j|^2 + \omega_j \omega_{j+1}] dt = \frac{\alpha h}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\omega_{j+1} + \omega_j|^2 dt, \quad (3.38)$$

bem como

$$\theta h \sum_{j=0}^J \int_0^T [|\omega'_j|^2 - \omega'_j \omega'_{j+1}] dt = \frac{\theta h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\omega'_{j+1} - \omega'_j|^2 dt, \quad (3.39)$$

e de (3.37), (3.38) e (3.39) obtemos

$$\begin{aligned}
 T\varepsilon_{2h}^\theta(0) + x_h^\theta|_0^T + \frac{\alpha h}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\omega_{j+1} + \omega_j|^2 dt &= \frac{(1-4\theta)h^3}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\omega'_{j+1} - \omega'_j}{h} \right|^2 dt \\
 &+ \frac{\theta L}{2} \int_0^T |\omega'_J|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\omega_J}{h} \right|^2 dt. \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

■

**Lema 4.** Para qualquer  $h \geq 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $\alpha \leq \pi^2/L^2$  e  $\omega_j$  solução de (3.9)-(3.11), temos

$$|x_h^\theta(t)| \leq L \frac{\pi^2}{\pi^2 - \alpha L^2} \varepsilon_{2h}^\theta(0), \quad (3.41)$$

onde

$$x_h^\theta(t) = \frac{(1-2\theta)h}{2} \sum_{j=1}^J j \omega'_j (\omega_{j+1} - \omega_{j-1}) + \frac{\theta h}{2} \sum_{j=1}^J j (\omega'_{j+1} + \omega'_{j-1}) (\omega_{j+1} - \omega_{j-1}).$$

**Prova:** O termo  $x_h^\theta(t)$  pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 x_h^\theta(t) &= \frac{(1-2\theta)h}{2} \sum_{j=1}^J j \omega'_j (\omega_{j+1} - \omega_{j-1}) + \frac{\theta h}{2} \sum_{j=1}^J j (\omega'_{j+1} + \omega'_{j-1}) (\omega_{j+1} - \omega_{j-1}) \\
 &= h \sum_{j=1}^J j \frac{\omega_{j+1} - \omega_{j-1}}{2} [\theta \omega'_{j+1} + (1-2\theta) \omega'_j + \theta \omega'_{j-1}] \\
 &= m_{i,j}^\theta a_i b_j,
 \end{aligned}$$

com

$$a_i = i \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2}, \quad b_i = \omega'_i,$$

e  $m_{i,j}^\theta$  são as entradas da seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} 1 - 2\theta & \theta & 0 \dots & 0 \\ \theta & 1 - 2\theta & \theta \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \theta & 1 - 2\theta \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos a desigualdade dada por

$$x_h^\theta(t) \leq [h \sum_{i,j=1}^J m_{i,j}^\theta a_i a_j]^{1/2} [h \sum_{i,j=1}^J m_{i,j}^\theta b_i b_j]^{1/2}. \quad (3.42)$$

Além disso, com base nas condições de contorno, temos que

$$\begin{aligned} h \sum_{i,j=1}^J m_{i,j}^\theta b_i b_j &= h \sum_{j=1}^J [(1 - 2\theta)|\omega'_j|^2 + \theta(\omega'_{j+1} + \omega'_{j-1})\omega'_j] \\ &= h \sum_{j=0}^J [(1 - 2\theta)|\omega'_j|^2 + 2\theta\omega'_j\omega'_{j+1}], \end{aligned} \quad (3.43)$$

e

$$\begin{aligned} h \sum_{i,j=1}^J m_{i,j}^\theta a_i a_j \leq h \sum_{j=1}^J |a_i|^2 &= \frac{h}{4} \sum_{j=1}^J j^2 |\omega_{j+1} - \omega_{j-1}|^2 \\ &= \frac{h}{4} \sum_{j=1}^J j^2 |\omega_{j+1} - \omega_j + \omega_j - \omega_{j-1}|^2 \\ &= \frac{h}{4} \sum_{j=1}^J j^2 [|\omega_{j+1} - \omega_j|^2 + |\omega_j - \omega_{j-1}|^2 + 2(\omega_{j+1} - \omega_j)(\omega_j - \omega_{j-1})] \\ &\leq \frac{h}{4} \sum_{j=1}^J j^2 [|\omega_{j+1} - \omega_j|^2 + |\omega_j - \omega_{j-1}|^2 + |\omega_{j+1} - \omega_j|^2 + |\omega_j - \omega_{j-1}|^2] \\ &= \frac{h}{4} \sum_{j=1}^J j^2 [2|\omega_{j+1} - \omega_j|^2 + 2|\omega_j - \omega_{j-1}|^2] \\ &= h \sum_{j=1}^J [\frac{j^2}{2} |\omega_{j+1} - \omega_j|^2 + \frac{j^2}{2} |\omega_j - \omega_{j-1}|^2] \\ &= h \sum_{j=0}^J [\frac{j^2}{2} |\omega_{j+1} - \omega_j|^2 + \frac{(j+1)^2}{2} |\omega_{j+1} - \omega_j|^2] \end{aligned}$$

$$\leq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J (J+1)^2 |\omega_{j+1} - \omega_j|^2.$$

Observe que  $j^2 \leq (j+1)^2 \leq (J+1)^2$ , então segue que

$$\begin{aligned} h \sum_{i,j=1}^J m_{i,j}^\theta a_i a_j &\leq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J (J+1)^2 h^2 \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 \\ &= \frac{hL^2}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2, \end{aligned} \quad (3.44)$$

além disso, de (3.43) e (3.44), usando a desigualdade de Young e a energia definida em (3.13), obtemos,

$$\begin{aligned} |x_h^\theta| &\leq L \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ (1-2\theta) |\omega'_j|^2 + 2\theta \omega'_j \omega'_{j+1} + \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 \right] \\ &\leq L \left[ \varepsilon_{2h}^\theta(t) + \alpha \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J |\omega_j|^2 \right], \end{aligned} \quad (3.45)$$

e pela desigualdade (3.25), segue

$$\begin{aligned} |x_h^\theta| &\leq L \left[ \varepsilon_{2h}^\theta(t) + \alpha \frac{h}{2} \left( \frac{L}{\pi} \right)^2 \sum_{j=0}^J \left| \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{h} \right|^2 \right] \\ &\leq L \left[ \varepsilon_{2h}^\theta(t) + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{L}{\pi} \right)^2 \frac{2\pi^2}{\pi^2 - \alpha L^2} \varepsilon_{2h}^\theta(0) \right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Portanto, o resultado segue pela lei de conservação de energia. ■

**Teorema 6.** Seja  $\omega_j$  solução de (3.9)-(3.11). Para todo  $\alpha \leq \pi^2/L^2$ , existe  $T_0 \geq 0$  tal que  $T \geq T_0$ , existe  $C(T, \alpha) \geq 0$  que é independente de  $h$  e  $h \geq 0$  temos a seguinte desigualdade de observabilidade

$$\varepsilon_{2h}^\theta(0) \leq C(T, \alpha) \left[ \frac{h^3}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\omega'_{j+1} - \omega'_j}{h} \right|^2 dt + \frac{\theta L}{2} \int_0^T |\omega'_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\omega_j}{h} \right|^2 dt \right].$$

onde  $T_0 = \frac{2\pi^2 L}{\pi^2 - \alpha L^2}$ .

**Prova:** De (3.33) e (3.41) segue que

$$\begin{aligned} T\varepsilon_{2h}^\theta(0) - \frac{2\pi^2 L}{\pi^2 - \alpha L^2}\varepsilon_{2h}^\theta(0) + \frac{\alpha h}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\omega_{j+1} + \omega_j|^2 dt &\leq \frac{h^3}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\omega'_{j+1} - \omega'_j}{h} \right|^2 dt \\ &+ \frac{\theta L}{2} \int_0^T |\omega'_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\omega_J}{h} \right|^2 dt, \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\varepsilon_{2h}^\theta(0) \leq C(T, \alpha) \int_0^T \left[ \frac{h^3}{4} \sum_{j=0}^J \left| \frac{\omega'_{j+1} - \omega'_j}{h} \right|^2 + \frac{\theta L}{2} |\omega'_j|^2 + \frac{L}{2} \left| \frac{\omega_J}{h} \right|^2 \right] dt \quad (3.47)$$

com  $C(T, \alpha) = \frac{\pi^2 - \alpha L^2}{T(\pi^2 - \alpha L^2) - 2\pi^2 L}$ .

■

**Teorema 7.** Seja  $\varphi_j$ , solução de (3.6)-(3.8). Para todo  $T \geq 2L$ , existe  $C(T) \geq 0$  que é independente de  $h$ , tal que  $h \geq 0$ , temos a seguinte desigualdade de observabilidade

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1h}^\theta(0) &\leq C(T) \int_0^T \left[ \frac{h^3}{4} \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi'_{j+1} - \varphi'_j}{h} \right|^2 + \alpha h \sum_{j=0}^J |\varphi_j|^2 + \frac{\theta L}{2} |\varphi'_j|^2 \right. \\ &\left. + \frac{L}{2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 \right] dt, \end{aligned} \quad (3.48)$$

com  $\varepsilon_{1h}^\theta(t)$  dado em (3.12) e  $C(T) = 1/(T - 2L)$ .

**Prova:** Usamos os mesmos procedimentos da demonstração anterior e devemos tomar em consideração a energia em (3.12).

■

**Teorema 8.** Sejam  $(u_j, v_j)$  soluções do sistema (3.1)-(3.4). Para qualquer  $\alpha \leq \pi^2/L^2$ , existe  $T_0 \geq 0$  tal que  $T \geq T_0$ , então existe  $C(T, \alpha) \geq 0$ , com  $h \geq 0$  temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \varepsilon_h^\theta(0) &\leq C(T, \alpha) \int_0^T \left[ \frac{h^3}{4} \sum_{j=0}^J \left( \left| \frac{u'_{j+1} - u'_j}{h} \right|^2 + \left| \frac{v'_{j+1} - v'_j}{h} \right|^2 \right) + \alpha h \sum_{j=0}^J (u_j^2 + v_j^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta L}{2} (|u'_J|^2 + |v'_J|^2) + \frac{L}{2} \left( \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_J}{h} \right|^2 \right) \right] dt. \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde  $C(T, \alpha) = \frac{\pi^2 - \alpha L^2}{T(\pi^2 - \alpha L^2) - 2\pi^2 L}$ .

**Prova:** Usamos o fato de  $\varepsilon_h^\theta(t) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{1h}^\theta + \varepsilon_{2h}^\theta)(t)$ .

■

### 3.4 Análise espectral semi-discreta

Nesta subseção, vamos apresentar as soluções dos sistemas desacoplados via série de Fourier e, por fim, apresentaremos a solução do sistema (3.1)-(3.4) via série de Fourier.

**Proposição 5.** A solução do sistema (3.9)-(3.11) via série de Fourier é dada por:

$$\omega_h^\theta(t) = \sum_{j=1}^J \left[ a_k \sin \left( \sqrt{\lambda_k^-} t \right) + b_k \cos \left( \sqrt{\lambda_k^-} t \right) \right] \phi^k, \quad k = 1, \dots, J : \forall t > 0, \quad (3.50)$$

com  $\phi^k = (\phi_{k,1}, \phi_{k,2}, \dots, \phi_{k,J})$ , onde  $\phi_{k,j} = \sin \left( \frac{k\pi x_0}{L} \right)$ ,  $a_k$  e  $b_k$  são os coeficientes de Fourier e  $\lambda_k^-(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left( \frac{k\pi h}{2L} \right) - \alpha$ .

**Prova:** Tomando  $\omega_j = T(t)\phi_j$ , substituindo na equação (3.9), obtemos

$$\delta_\theta T''(t)\phi_j - \Delta_h \phi_j T(t) - \alpha \phi_j T(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (3.51)$$

Por meio de separação de variáveis, temos o seguinte

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = [\Delta_h \phi + \alpha \phi_j] \frac{1}{\delta_\theta \phi_j} = -\lambda^-, \quad (3.52)$$

de onde segue que

$$-[\Delta_h \phi_j + \alpha \phi_j] = \lambda^- \delta_\theta \phi_j, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (3.53)$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0; \forall t > 0. \quad (3.54)$$

Substituindo com (3.5) em (3.53), obtemos

$$-\frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{h^2} - \lambda^- \theta (\phi_{j+1} + \phi_{j-1}) = [\alpha + \lambda^- (1 - 2\theta)] \phi_j, \quad (3.55)$$

$$\phi_0 = \phi_{J+1} = 0 \quad (3.56)$$

e tendo em consideração as condições de contorno, segue que  $\phi_{k,j} = \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right)$ , com  $j = 1, \dots, J, J+1$ , satisfaz as condições do problema. Observe que

$$\phi_{k,0} = \sin\left(\frac{k\pi x_0}{L}\right) = \sin\left(\frac{k\pi 0}{L}\right) = 0 \quad (3.57)$$

$$\phi_{k,J+1} = \sin\left(\frac{k\pi x_{J+1}}{L}\right) = \sin\left(\frac{k\pi L}{L}\right) = 0. \quad (3.58)$$

Substituindo em (3.55) por  $\sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right)$ , segue

$$\begin{aligned} \frac{-\sin\left(\frac{k\pi x_{j+1}}{L}\right) + 2\sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) - \sin\left(\frac{k\pi x_{j-1}}{L}\right)}{h^2} - \lambda^- \theta \left[ \sin\left(\frac{k\pi x_{j+1}}{L}\right) + \sin\left(\frac{k\pi x_{j-1}}{L}\right) \right] \\ = [\alpha + \lambda(1 - 2\theta)] \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right), \end{aligned} \quad (3.59)$$

sabendo que

$$\sin(x_{j-1}) = \sin(x_j - h) = \sin(x_j) \cos(h) - \sin(h) \cos(x_j), \quad (3.60)$$

$$\sin(x_{j+1}) = \sin(x_j + h) = \sin(x_j) \cos(h) + \sin(h) \cos(x_j), \quad (3.61)$$

temos

$$\sin(x_j - h) + \sin(x_j + h) = 2 \sin(x_j) \cos(h). \quad (3.62)$$

Com o último resultado, aplicamos na equação (3.53), de onde concluímos que

$$\lambda_k^-(h) = \frac{\frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) - \alpha}{1 - 4\theta \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right)}, k = 1, \dots, J \quad (3.63)$$

com  $\theta \in [0, 1/4]$ . Por outro lado, a solução de (3.54) é dada por

$$T_h^\theta(t) = a_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k^-} t\right) + b_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k^-} t\right), k = 1, \dots, J, \forall t > 0. \quad (3.64)$$

Portanto, concluímos que a solução de (3.9)-(3.11) é dada por

$$\omega_h^\theta(t) = \sum_{j=1}^J \left[ a_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k^-} t\right) + b_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k^-} t\right) \right] \phi^k, k = 1, \dots, J, \forall t > 0, \quad (3.65)$$

com  $\varphi^k = (\varphi_{k,1}, \varphi_{k,2}, \dots, \varphi_{k,J})$  e  $a_k$  e  $b_k$  são os coeficientes de Fourier.

**Proposição 6.** A solução do sistema (3.6)-(3.8) via série de Fourier é dada por:

$$\varphi_h^\theta(t) = \sum_{j=1}^J \left[ c_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k^+} t\right) + d_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k^+} t\right) \right] \phi^k, k = 1, \dots, J, \forall t > 0, \quad (3.66)$$

onde  $c_k$  e  $d_k$ , são os coeficientes de Fourier e  $\lambda_k^+(h) = \frac{\frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) + \alpha}{1 - 4\theta \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right)}$ .

**Prova:** A demonstração é análoga a da proposição anterior. ■

Das duas proposições anteriores, temos que

**Proposição 7.** A solução do sistema (3.1)-(3.4) via série de Fourier é dada por:

$$u_h^\theta(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \left[ a_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k^-} t\right) + b_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k^-} t\right) + c_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k^+} t\right) + d_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k^+} t\right) \right] \phi^k \quad (3.67)$$

$$v_h^\theta(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \left[ c_k \sin \left( \sqrt{\lambda_k^+} t \right) + d_k \cos \left( \sqrt{\lambda_k^+} t \right) - a_k \sin \left( \sqrt{\lambda_k^-} t \right) - b_k \cos \left( \sqrt{\lambda_k^-} t \right) \right] \phi^k. \quad (3.68)$$

onde  $a_k, b_k, c_k$  e  $d_k$  são os coeficientes de Fourier,  $\lambda_k^+(h) = \frac{\frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) + \alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{k\pi h}{2L})}$  e  $\lambda_k^-(h) = \frac{\frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) - \alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{k\pi h}{2L})}$ .

**Prova:** Basta usar as duas proposições anteriores e considerar  $u = \frac{\varphi + \omega}{2}$  e  $v = \frac{\varphi - \omega}{2}$ .

■

Os dois lemas seguintes desempenham um papel importante para obter uma observabilidade uniforme na fronteira do sistema (3.1)-(3.4). Esses lemas se referem à observabilidade de fronteira dos espectro associados aos sistemas desacoplados (3.6)- (3.8) e (3.9)- (3.11).

**Lema 5.** ( Observabilidade dos autovalores) Para qualquer  $\phi^k = (\phi_{k,1}, \phi_{k,2}, \dots, \phi_{k,J})$  solução do problema espectral relacionado ao sistema (3.9)- (3.11)-vale a seguinte identidade

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{h} \right|^2 = \frac{2(1 + \lambda^- \theta h^2)L}{4 - [(1 - 4\theta)\lambda^- + \alpha]h^2} \left| \frac{\phi_J}{h} \right|^2, \quad (3.69)$$

onde  $\lambda_k^-(h) = \frac{\frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) - \alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{k\pi h}{2L})}$ .

**Prova:** Multiplicando a equação (3.53) por  $j \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{2}$  e somando para  $j = 1, \dots, J$ ; temos

$$\begin{aligned} -h \sum_{j=1}^J j \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{h^2} \frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{2} - \alpha h \sum_{j=1}^J j \phi_j \frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{2} = \\ \lambda h \sum_{j=1}^J j [(1 - 2\theta)\phi_j + \theta(\phi_{j+1} + \phi_{j-1})] \left[ \frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Após simplificações temos,

$$- h \sum_{j=1}^J j \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{h^2} \frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{h}{2h^2} \sum_{j=1}^J j[|\phi_{j+1}|^2 - |\phi_{j-1}|^2] + \frac{h}{h^2} \sum_{j=1}^J j\phi_j(\phi_{j+1} - \phi_j) \\
 &= \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J |\phi_j|^2 - \frac{(J+1)h}{2h^2} |\phi_J|^2 - \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J \phi_{j+1}\phi_j,
 \end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned}
 -\alpha h \sum_{j=1}^J j\phi_j \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{2} &= -\frac{\alpha h}{2} \sum_{j=1}^J j\phi_j(\phi_{j+1} - \phi_{j-1}) \\
 &= -\frac{\alpha h}{2} \sum_{j=1}^J j\phi_j\phi_{j+1} + \frac{\alpha h}{2} \sum_{j=1}^J j\phi_j\phi_{j-1} \\
 &= -\frac{\alpha h}{2} \sum_{j=0}^J j\phi_j\phi_{j+1} + \frac{\alpha h}{2} \sum_{j=0}^J (j+1)\phi_j\phi_{j+1} \\
 &= \frac{\alpha h}{2} \sum_{j=0}^J \phi_j\phi_{j+1}.
 \end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned}
 \lambda^{-h} \sum_{j=1}^J [(1 - 2\theta)\phi_j + \theta(\phi_{j+1} + \phi_{j-1})] \left[ \frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{2} \right] &= \\
 &= \lambda^{-h} \frac{(1-2\theta)}{2} h \sum_{j=1}^J \phi_j(\phi_{j+1} - \phi_{j-1}) + \lambda\theta h \sum_{j=1}^J (\phi_{j+1} + \phi_{j-1})(\phi_{j+1} - \phi_{j-1}) \\
 &= \lambda^{-h} \frac{(1-2\theta)}{2} h \sum_{j=0}^J \phi_{j+1}\phi_j + \frac{\lambda^{-h}\theta}{2} h \sum_{j=1}^J (|\phi_{j+1}|^2 - |\phi_{j-1}|^2) \\
 &= -\lambda^{-h} \frac{(1-2\theta)}{2} h \sum_{j=0}^J \phi_{j+1}\phi_j - \lambda^{-h}\theta h \sum_{j=0}^J |\phi_j|^2 + \frac{(J+1)\lambda^{-h}\theta h}{2} |\phi_J|^2.
 \end{aligned}$$

Combinando as parcelas anteriores nobtemos,

$$\begin{aligned}
 &\frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J |\phi_j|^2 - \frac{(J+1)h}{2h^2} |\phi_J|^2 - \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J \phi_{j+1}\phi_j + \frac{\alpha h}{2} \sum_{j=0}^J \phi_j\phi_{j+1} \\
 &= -\lambda^{-h} \frac{(1-2\theta)}{2} h \sum_{j=0}^J \phi_{j+1}\phi_j - \lambda^{-h}\theta h \sum_{j=0}^J |\phi_j|^2 + \frac{(J+1)\lambda^{-h}\theta}{2} |\phi_J|^2,
 \end{aligned}$$

e sabendo que  $h = L/(J + 1)$  e fazendo  $h \sum_{j=0}^J |\phi_j|^2 = 1$ , teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} - \frac{(J+1)h}{2h^2} |\phi_J|^2 - \left( \frac{1}{h^2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda^-(1-2\theta)}{2} \right) h \sum_{j=0}^J \phi_{j+1} \phi_j &= -\lambda^- \theta + \frac{(J+1)\lambda^- \theta h}{2} |\phi_J|^2 \\ \frac{1 + \lambda^- \theta h^2}{h^2} - \left( \frac{1}{h^2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda^-(1-2\theta)}{2} \right) h \sum_{j=0}^J \phi_{j+1} \phi_j &= \frac{(1 + \lambda^- \theta h^2)L}{2} \left| \frac{\phi_J}{h^2} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.71)$$

Agora, multiplicando a equação (3.53) por  $h\phi_j$  e somando de  $j = 1, \dots, J$ , segue que

$$-h \sum_{j=1}^J \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{h^2} \phi_j - \alpha h \sum_{j=1}^J |\phi_j|^2 = \lambda^- h \sum_{j=1}^J [(1-2\theta)\phi_j + \theta(\phi_{j+1} + \phi_{j-1})] \phi_j.$$

Desenvolvendo o termo de lado esquerdo da equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} -h \sum_{j=1}^J \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{h^2} \phi_j - \alpha h \sum_{j=1}^J |\phi_j|^2 &= -h \sum_{j=1}^J \frac{\phi_{j+1} + \phi_{j-1}}{h^2} \phi_j + \frac{2h}{h^2} \sum_{j=1}^J \phi_j^2 - \alpha h \sum_{j=1}^J \phi_j^2 \\ &= h \sum_{j=1}^J \frac{\phi_{j+1} + \phi_{j-1}}{h^2} \phi_j + \left( \frac{2}{h^2} - \alpha \right) h \sum_{j=1}^J |\phi_j|^2, \end{aligned} \quad (3.72)$$

e do lado direito da mesma equação, temos

$$\lambda h \sum_{j=1}^J [(1-2\theta)\phi_j + \theta(\phi_{j+1} + \phi_{j-1})] \phi_j = \lambda(1-2\theta)h \sum_{j=1}^J |\phi_j|^2 + \lambda\theta h \sum_{j=1}^J (\phi_{j+1} + \phi_{j-1}) \phi_j.$$

Combinado os dois termos anteriores e normalizando por  $h \sum_{j=0}^J |\phi_j|^2 = 1$ , segue que

$$\lambda = -\alpha + p(\lambda^-) h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{h} \right|^2, \quad (3.73)$$

onde  $p(\lambda^-) = 1 + \lambda^- \theta h^2$ .

Por outro lado, temos

$$-h \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{h^2} \phi_j + h \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{h^2} \phi_{j+1} = [\alpha + \lambda(1 - 2\theta)]h \sum_{j=0}^J |\phi_j|^2 + 2\lambda\theta h \sum_{j=0}^J \phi_j \phi_{j+1}.$$

Tendo em conta as condições de contorno, temos que  $h \sum_{j=0}^J |\phi_{j+1}|^2 = h \sum_{j=0}^J |\phi_j|^2$ . Então, a equação anterior pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} -h \sum_{j=0}^J \frac{2|\phi_j|^2 - 2\phi_j \phi_{j+1}}{h^2} &= [\alpha + \lambda(1 - 2\theta)]h \sum_{j=0}^J |\phi_j|^2 + 2\lambda\theta h \sum_{j=0}^J \phi_j \phi_{j+1} \\ \frac{2h}{h^2} \sum_{j=0}^J |\phi_j|^2 - \frac{2h}{h^2} \sum_{j=0}^J \phi_j \phi_{j+1} &= [\alpha + \lambda(1 - 2\theta)]h \sum_{j=0}^J |\phi_j|^2 + 2\lambda\theta h \sum_{j=0}^J \phi_j \phi_{j+1} \\ \frac{2}{h^2} - 2 \left( \frac{1}{h^2} + \lambda\theta \right) h \sum_{j=0}^J \phi_j \phi_{j+1} &= [\alpha + \lambda(1 - 2\theta)] \\ h \sum_{j=0}^J \phi_j \phi_{j+1} &= \frac{1}{p(\lambda^-)} - \frac{\alpha h^2}{2p(\lambda^-)} - \frac{\lambda(1 - 2\theta)h^2}{2p(\lambda^-)}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Combinando (3.71) e (3.74), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{p(\lambda^-)}{h^2} - \left( \frac{p(\lambda^-)}{h^2} - \frac{\alpha + \lambda}{2} \right) \left( 1 - \frac{(\alpha + \lambda)h^2}{2p(\lambda^-)} \right) &= \frac{(p(\lambda^-)L}{2} \left| \frac{\phi_J}{h^2} \right|^2 \\ (\alpha + \lambda) \left[ 1 - \frac{(\alpha + \lambda)h^2}{4p(\lambda^-)} \right] &= \frac{p(\lambda^-)L}{2} \left| \frac{\phi_J}{h^2} \right|^2 \\ (\alpha + \lambda) \left[ \frac{4p(\lambda^-) - (\alpha + \lambda)h^2}{4p(\lambda^-)} \right] &= \frac{p(\lambda^-)L}{2} \left| \frac{\phi_J}{h^2} \right|^2 \\ \lambda &= -\alpha + \frac{2p^2(\lambda^-)L}{4p(\lambda^-) - (\alpha + \lambda^-)h^2} \left| \frac{\phi_J}{h^2} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Finalmente, de (3.73) e (3.75), concluímos que

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{h} \right|^2 = \frac{2p(\lambda^-)L}{4p(\lambda^-) - (\lambda^- + \alpha)h^2} \left| \frac{\phi_J}{h} \right|^2, \quad (3.76)$$

e tendo em conta que  $p(\lambda^-) = 1 + \lambda^- \theta h^2$ , da equação anterior obtemos

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{h} \right|^2 = \frac{2(1 + \lambda^- \theta h^2)L}{4 - [(1 - 4\theta)\lambda^- + \alpha]h^2} \left| \frac{\phi_J}{h} \right|^2, \quad (3.77)$$

com  $\lambda_k^-(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) - \alpha$  e  $0 \leq \theta < 1/4$ .

■

**Lema 6.** Para qualquer  $\phi^k = (\phi_{k,1}, \phi_{k,2}, \dots, \phi_{k,J})$  solução do problema espectral relacionado ao sistema (3.6)- (3.8) vale a seguinte identidade

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{h} \right|^2 = \frac{2(1 + \lambda^+ \theta h^2)L}{4 - [(1 - 4\theta)\lambda^+ - \alpha]h^2} \left| \frac{\phi_J}{h} \right|^2, \quad (3.78)$$

com  $\lambda_k^+(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) + \alpha$  e  $0 \leq \theta < 1/4$ .

**Prova:** A prova segue análoga ao caso anterior.

**Observação 1.** Se tomarmos  $\theta = 0$  (diferenças finitas) em (3.78) temos que

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{h} \right|^2 = \frac{2L}{4 - (\lambda^+ - \alpha)h^2} \left| \frac{\phi_J}{h} \right|^2, \quad (3.79)$$

este resultado está em [25]. Quando  $[\lambda^+ - \alpha]h^2 \rightarrow 4$  resulta em "blow-up". E, se  $\theta = 1/6$  (elementos finitos) obtemos o seguinte

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{h} \right|^2 = \frac{6 + \lambda^+ h^2 L}{12 - (\lambda^+ - 3\alpha)h^2} \left| \frac{\phi_J}{h} \right|^2, \quad (3.80)$$

note que para  $[\lambda^+ - 3\alpha]h^2 \rightarrow 12$ , também resulta em "blow-up", veja que, se  $\theta = 1/4$

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{h} \right|^2 = \frac{2 \left( 1 + \frac{\lambda h^2}{4} \right) L}{4 + \alpha h^2} \left| \frac{\phi_J}{h} \right|^2, \quad (3.81)$$

nesta última situação não há risco de "blow-up", portanto,  $\theta = 1/4$  é um valor ótimo.

As identidades (3.69) e (3.78), referentes à observabilidade de fronteira do problema espectral, fornecem uma relação explícita entre a energia total dos autovetores e a energia concentrada em  $x = L$  de acordo com quantidade medida por  $|\phi_J/h|^2$ .

Para perceber melhor como acontece o blow-up no problema em estudo para  $\theta \in [0, 1/4[$ , tomemos  $J$ - autovalor em (3.69) e obtemos o seguinte limite com  $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} [(1 - 4\theta)\lambda_k^- + \alpha]h^2 &= (1 - 4\theta) \frac{4 \sin\left(\frac{J\pi h}{2L}\right) - \alpha h^2}{1 - 4\theta \sin\left(\frac{J\pi h}{2L}\right)} + \alpha h^2 \\ &= \frac{4(1 - 4\theta) \sin^2\left(\frac{J\pi h}{2L}\right) + 4\theta \alpha h^2 (1 - \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right))}{1 - 4\theta \sin^2\left(\frac{J\pi h}{2L}\right)} \\ &= \frac{4(1 - 4\theta) \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi h}{2L}\right)}{1 - 4\theta \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi h}{2L}\right)} \\ &= \frac{4(1 - 4\theta) \cos^2\left(\frac{\pi h}{2L}\right)}{1 - 4\theta \cos^2\left(\frac{\pi h}{2L}\right)} \rightarrow \frac{4}{1 - 4\theta} (1 - 4\theta) = 4. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Assim sendo, para  $\theta \in [0, 1/4[$  teremos

$$4 - [(1 - 4\theta)\lambda^- + \alpha]h^2 \rightarrow 4 - \frac{4}{1 - 4\theta} (1 - 4\theta) \rightarrow 0, \quad (3.83)$$

assim, ocorre "blow-up" no lado esquerdo de (3.69) e bem como em (3.78). Em ambos os casos, as desigualdades observabilidade são escritas como referimos anteriormente.

## CAPÍTULO 4

---

### Observabilidade uniforme

---

Neste capítulo analisamos as propriedades de observabilidade dos sistemas (3.9)-(3.11) e (3.6)-(3.8) via desigualdade de Ingham[1], e por meio delas, construímos a desigualdade de observabilidade do sistema (3.1)-(3.4). Essas desigualdades são feitas na classe de soluções filtradas que são numericamente observáveis.

É importante salientar que, a desigualdade de observabilidade e o controle de equações diferenciais parciais são equivalentes. Portanto, se numericamente um dado esquema numérico não é uniformemente observável então não temos controle numérico, esses aspectos podem ser encontrados em [8, 14, 20]

**Teorema 9.** (Desigualdade de Ingham) Seja  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , uma sequência de números reais tal que

$$\mu_{k+1} - \mu_k \geq \gamma \geq 0, \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (4.1)$$

Então, para qualquer  $T \geq \frac{2\pi}{\gamma}$  existem constantes positivas  $C_i(T, \gamma) \geq 0, i = 1, 2$  tais que

$$C_1(T, \gamma) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{i\mu_k t} \right|^2 dt \leq C_2(T, \gamma) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2, \quad (4.2)$$

para toda sequência de números complexos  $(a_k) \in l^2$ . A demonstração pode ser encontrada em [1].

Tomando  $0 \leq \gamma \leq \frac{4}{1-4\theta}$  introduzimos a classe de soluções filtradas do sistema (3.9)-(3.11) dada por,

$$\mathcal{P} := \left[ \omega_h^\theta(t) = \sum_{\lambda_k(h) \leq \gamma h^{-2}} \left[ a_k \sin \left( \sqrt{\sigma_k^-(h)} t \right) + b_k \cos \left( \sqrt{\sigma_k^-(h)} t \right) \right] \varphi^k \right], \quad (4.3)$$

com  $\sigma_k^-(h) := \frac{\frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) - \alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{k\pi h}{2L})}$  e  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ . Analogamente, a solução filtrada do sistema (3.6)-(3.8) é dada por

$$\mathcal{Q} := \left[ \varphi_h^\theta(t) = \sum_{\lambda_k(h) \leq \gamma h^{-2}} \left[ c_k \sin \left( \sqrt{\sigma_k^+(h)} t \right) + d_k \cos \left( \sqrt{\sigma_k^+(h)} t \right) \right] \varphi^k \right], \quad (4.4)$$

com  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ .

**Lema 7.** Assuma  $\theta \in [0, 1/4]$ . Para qualquer  $0 \leq \varepsilon < 1$  e  $(j+1)/h \leq \varepsilon h$ , o "gap" (lacuna) entre as raízes de autovalores consecutivos obedece o seguinte

$$\sqrt{\sigma_{j+1}^+(h)} - \sqrt{\sigma_j^+(h)} \geq \frac{\pi}{L} \left[ \frac{1 + \cos(\frac{\pi\varepsilon}{2})}{2(1 - 2\theta(1 - \cos(\frac{\pi\varepsilon}{2})))} \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0, \quad (4.5)$$

para todo autovalor  $\sigma_j^+(h) = \lambda_j(h) + \frac{\alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}$  tal que  $\lambda h^2 \geq \gamma$ , com  $\lambda_j(h) = \frac{\frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{k\pi h}{2L})}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{k\pi h}{2L})}$ ,  $j = 1, \dots, J$ .

**Prova:** Vamos calcular a diferença entre os autovalores, inicialmente temos que para qualquer  $a, b \geq 0$  vale a seguinte identidade

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad (4.6)$$

e

$$\begin{aligned}\sqrt{\sigma_j^+(h)} &= \sqrt{\lambda_j(h) + \frac{\alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}} = \sqrt{\lambda_j(h)} \sqrt{1 + \frac{\alpha}{\frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}} \\ &\approx \sqrt{\lambda_j(h)} \left(1 + \frac{\alpha}{\frac{8}{h^2} \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}\right), \forall j = 1, \dots, J,\end{aligned}\quad (4.7)$$

daí temos

$$\begin{aligned}\sqrt{\sigma_{j+1}^+(h)} - \sqrt{\sigma_j^+(h)} &= \sqrt{\lambda_{j+1}(h) + \frac{\alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}} - \sqrt{\lambda_j(h) + \frac{\alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}} \\ &\approx \left(\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2\sqrt{\frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{(j+1)\pi h}{2L})} \frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}\right), \forall j = 1, \dots, J,\end{aligned}$$

Tomando em consideração o fato de  $\lambda_{j+1}(h) \geq \lambda_j(h)$ ,  $j = 1, \dots, J$ , temos

$$\begin{aligned}\sqrt{\sigma_{j+1}^+(h)} - \sqrt{\sigma_j^+(h)} &\geq \left(\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2\sqrt{\frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{(j+1)\pi h}{2L})} \frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}\right) \\ &\geq \left(\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2\sqrt{\frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})} \frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}\right) \\ &\geq \left(\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2} \frac{h^2}{4 \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}\right) \\ &\geq \left(\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)}\right) \left(1 - \alpha \frac{h^2}{4 \sin^2(\frac{\pi \varepsilon}{2})}\right) \\ &\geq \left(\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)}\right) \left(1 - \frac{\alpha h^2}{\gamma(\varepsilon)}\right),\end{aligned}\quad (4.9)$$

para  $\alpha = \gamma(\varepsilon)/2h^2 \leq \gamma(\varepsilon)/h^2$ , de onde segue que

$$\sqrt{\sigma_{j+1}^+(h)} - \sqrt{\sigma_j^+(h)} \geq \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)}). \quad (4.10)$$

Por outro lado, tomando  $\lambda_j(h) = \frac{4}{h^2} \frac{\sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}$  para todo  $j = 1, \dots, J$ , temos

$$\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)} = \frac{\lambda_{j+1}(h) - \lambda_j(h)}{\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} + \sqrt{\lambda_j(h)}}.$$

Primeiro, vamos calcular  $\lambda_{j+1}(h) - \lambda_j(h)$ , de onde segue que

$$\begin{aligned} \lambda_{j+1}(h) - \lambda_j(h) &= \frac{4}{h^2} \left[ \frac{\sin^2 \frac{(j+1)\pi h}{2L}}{1 - 4\theta \sin^2 \frac{(j+1)\pi h}{2L}} - \frac{\sin^2 \frac{j\pi h}{2L}}{1 - 4\theta \sin^2 \frac{j\pi h}{2L}} \right] \\ &= \frac{4 \sin^2 \frac{(j+1)\pi h}{2L} (1 - 4\theta \sin^2 \frac{j\pi h}{2L}) - \sin^2 \frac{j\pi h}{2L} (1 - 4\theta \sin^2 \frac{(j+1)\pi h}{2L})}{h^2 [1 - 4\theta \sin^2 \frac{(j+1)\pi h}{2L}] [1 - 4\theta \sin^2 \frac{j\pi h}{2L}]} \\ &= \frac{4}{h^2} \left[ \frac{\sin^2 \frac{(j+1)\pi h}{2L} - \sin^2 \frac{j\pi h}{2L}}{[1 - 4\theta \sin^2 \frac{(j+1)\pi h}{2L}] [1 - 4\theta \sin^2 \frac{j\pi h}{2L}]} \right] \\ &= \frac{2}{h^2} \frac{\cos \frac{j\pi h}{L} - \cos \frac{(j+1)\pi h}{L}}{[1 - 2\theta(1 - \cos \frac{(j+1)\pi h}{L})] [1 - 2\theta(1 - \cos \frac{j\pi h}{L})]} \\ &= \frac{2}{h^2} \frac{2 \sin \frac{(2j+1)\pi h}{L} \sin \frac{\pi h}{L}}{[1 - 2\theta(1 - \cos \frac{(j+1)\pi h}{L})] [1 - 2\theta(1 - \cos \frac{j\pi h}{L})]} \\ &= \frac{4 \pi h}{h^2 2L} \frac{\sin \xi}{[1 - 2\theta(1 - \cos \xi)] [1 - 2\theta(1 - \cos \xi)]} \\ &= \frac{2\pi}{hL} \frac{\sin \xi}{[1 - 2\theta(1 - \cos \xi)]^2}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

para  $\xi \in [j\pi h/L, (j+1)\pi h/L]$ .

Por outro lado

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_{j+1}(h)} + \sqrt{\lambda_j(h)} &= \sqrt{\frac{4}{h^2} \frac{\sin^2 \frac{(j+1)\pi h}{2L}}{1 - 4\theta \sin^2 \frac{(j+1)\pi h}{2L}}} + \sqrt{\frac{4}{h^2} \frac{\sin^2 \frac{j\pi h}{2L}}{1 - 4\theta \sin^2 \frac{j\pi h}{2L}}} \\ &= \frac{2}{h} \left[ \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{(j+1)\pi h}{2L}}{1 - 4\theta \sin^2 \frac{(j+1)\pi h}{2L}}} + \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{j\pi h}{2L}}{1 - 4\theta \sin^2 \frac{j\pi h}{2L}}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{h} \left[ \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1 - \cos \frac{(j+1)\pi h}{L})}{1 - 2\theta(1 - \cos \frac{(j+1)\pi h}{L})}} + \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1 - \cos \frac{j\pi h}{L})}{1 - 2\theta(1 - \cos \frac{j\pi h}{L})}} \right] \\
&= \frac{2}{h} \left[ \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1 - \cos \xi)}{1 - 2\theta(1 - \cos \xi)}} + \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1 - \cos \xi)}{1 - 2\theta(1 - \cos \xi)}} \right] \\
\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} + \sqrt{\lambda_j(h)} &= \frac{4}{h} \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos \xi)}{1 - 2\theta(1 - \cos \xi)} \right] \right]^{1/2}, \tag{4.12}
\end{aligned}$$

para  $\xi \in [j\pi h/L, (j+1)\pi h/L]$ . De (4.11) e (4.12), temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)} &= \frac{\lambda_{j+1}(h) - \lambda_j(h)}{\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} + \sqrt{\lambda_j(h)}} \\
&= \frac{\frac{2\pi}{hL} \frac{\sin \xi}{[1 - 2\theta(1 - \cos \xi)]^2}}{\frac{4}{h} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \cos \xi}{1 - 2\theta(1 - \cos \xi)} \right) \right]^{1/2}} \\
&= \frac{\sqrt{2} \pi (1 - 2\theta(1 - \cos \xi))^{\frac{1}{2}} \sin \xi}{2 L (1 - 2\theta(1 - \cos \xi))^2 (1 - \cos \xi)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{\pi (1 + \cos \xi)^{\frac{1}{2}}}{L [1 - 2\theta(1 - \cos \xi)]^{3/2}} \\
&= \frac{\pi}{L} \left[ \frac{1 + \cos \xi}{2(1 - 2\theta(1 - \cos \xi))^3} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \frac{\pi}{L} \left[ \frac{1 + \cos \xi}{2(1 - 2\theta(1 - \cos \xi))} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Veja que  $\xi \leq (j+1)\pi h/L \leq \pi\varepsilon/2$ , e então

$$\cos \xi \geq \cos \left( \frac{\pi\varepsilon}{2} \right), \tag{4.14}$$

portanto,

$$\sqrt{\sigma_{j+1}^+(h)} - \sqrt{\sigma_j^+(h)} \geq \frac{\pi}{L} \left[ \frac{1 + \cos(\frac{\pi\varepsilon}{2})}{2(1 - 2\theta(1 - \cos(\frac{\pi\varepsilon}{2})))} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.15}$$

finalizando a demonstração do lema. ■

**Lema 8.** Assumindo  $\theta \in [0, 1/4]$ . Para qualquer  $0 \leq \varepsilon < 1$  e  $(j+1)/h \leq \varepsilon h$ , o "gap" (lacuna) entre as raízes de autovalores consecutivos obedece o seguinte

$$\sqrt{\sigma_{j+1}^-(h)} - \sqrt{\sigma_j^-(h)} \geq \frac{\pi}{L} \left[ \frac{1 + \cos(\frac{\pi\varepsilon}{2})}{2(1 - 2\theta(1 - \cos(\frac{\pi\varepsilon}{2})))} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.16)$$

para todo autovalor  $\sigma_j^+ = \lambda_j(h) - \frac{\alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}$ , tal que  $\lambda h^2 \leq \gamma$ , com  $\lambda = \frac{\frac{4}{h^2 \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}}{1 + 4\theta \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}$ ,  $j = 1, \dots, J$ .

**Prova:** Tendo em considerção que  $\alpha \leq \pi^2/L^2$ , temos de imediato que

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_j^-(t)} &= \sqrt{\lambda_j(h) - \frac{\alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}} = \sqrt{\lambda_j(h)} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\frac{4}{h^2 \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}}} \\ &\approx \sqrt{\lambda_j(h)} \left[ 1 - \frac{\alpha}{\frac{8}{h^2 \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}} \right], \forall j = 1, \dots, J, \end{aligned} \quad (4.17)$$

daí temos o seguinte

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_{j+1}^-(h)} - \sqrt{\sigma_j^-(h)} &= \sqrt{\lambda_{j+1}(h) - \frac{\alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}} - \sqrt{\lambda_j(h) - \frac{\alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}} \\ &\approx \left( \sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)} \right) \left( 1 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\frac{4}{h^2 \sin^2(\frac{(j+1)\pi h}{2L})} \frac{4}{h^2 \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}}} \right) \\ &\geq \left( \sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)} \right) \left( 1 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\frac{4}{h^2 \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})} \frac{4}{h^2 \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})}}} \right) \\ &\geq \left( \sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)} \right) \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \frac{h^2}{4 \sin^2(\frac{j\pi h}{2L})} \right) \\ &\geq \left( \sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)} \right), \forall j = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (4.18)$$

daí, basta usar o mesmo procedimento da demonstração do lema anterior, provamos a nossa afirmação. ■

A seguir, pretendemos construir um resultado de observabilidade de fronteira das soluções filtradas, aplicando a desigualdade de Ingham [1].

**Teorema 10.** Para qualquer  $0 < \gamma < \frac{4}{1-4\theta}$  e  $\theta \in [0, 1/4[$  existe  $T(\gamma) > 0$ , tal que para qualquer  $T > T(\gamma)$ , existe uma constante positiva  $C(T, \alpha, \gamma(\varepsilon))$  tal que

$$\varepsilon_{1h}^\theta(0) \leq C(T, \alpha, \gamma(\varepsilon)) \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J}{h} \right| dt, \quad (4.19)$$

para qualquer solução do sistema (3.6)-(3.8) na classe de soluções filtradas  $\mathcal{Q}(\gamma(\varepsilon))$ .

**Prova:** Pela desigualdade de Ingham e por *Lema 7*, segue que para qualquer  $0 \leq \varepsilon < 1$  e  $T \geq 2L \left[ \frac{2(1 - 2\theta(1 - \cos \frac{\pi\varepsilon}{2}))}{1 + \cos \frac{\pi\varepsilon}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$ , então existem constantes positivas  $C_i(T, \varepsilon) \geq 0$   $i = 1, 2$  satisfazendo o seguinte,

$$C_1(T, \varepsilon) \sum_{|\mu_k| h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{|\mu_k| h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} a_k e^{i\mu_k t} \right|^2 dt \leq C_2(T, \varepsilon) \sum_{|\mu_k| h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} |a_k|^2, \quad (4.20)$$

com  $\gamma(\varepsilon) = 4 \sin^2 \frac{\pi\varepsilon}{2}$ . Além disso, sabendo que

$$\begin{aligned} h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 &= \frac{2 \left[ 1 + \frac{4}{h^2} \frac{\sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) + \alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{k\pi h}{2L})} \theta h^2 \right] L}{4 - \left[ (1 - 4\theta) \frac{4}{h^2} \frac{\sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) + \alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{k\pi h}{2L})} - \alpha \right] h^2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 \\ &= \frac{2 \left[ 1 - 4\theta \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) + (\frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) + \alpha) \theta h^2 \right] L}{4 \left[ 1 - 4\theta \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) \right] - \left[ (1 - 4\theta) \frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) - 4\alpha\theta + 4\alpha\theta \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) \right] h^2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 \\ &= \frac{2 \left[ 1 + \alpha\theta h^2 \right] L}{4 \left[ 1 - \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) + \alpha\theta h^2 - \alpha\theta h^2 \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) \right]} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 \\ &\leq \frac{\left[ 1 + \alpha\theta h^2 \right] L}{2 \left[ 1 - \sin^2(\frac{\pi\varepsilon}{2}) + \alpha\theta h^2 (1 - \sin^2(\frac{\pi\varepsilon}{2})) \right]} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 \\ &= \frac{\left[ 1 + \alpha\theta h^2 \right] L}{2 \left[ (1 + \alpha\theta h^2) (1 - \sin^2(\frac{\pi\varepsilon}{2})) \right]} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 \\ &= \frac{L}{2 \cos^2(\frac{\pi\varepsilon}{2})} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2, \end{aligned} \quad (4.21)$$

para qualquer autovetor  $\varphi$ , associado a qualquer autovalor  $\lambda$  tal que  $\lambda h^2 \leq \gamma(\varepsilon)$ .

Consideramos  $\varphi$  solução do sistema (3.6)-(3.8) na classe das soluções filtradas  $\mathcal{Q}(\gamma(\varepsilon))$  dada por,

$$\varphi = \sum_{|\mu_k| h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} a_k e^{i\mu_k t} \phi^k, \quad (4.22)$$

com  $\mu_k = \sqrt{\sigma^+(h)}$ . De (4.20) e (4.21) podemos deduzir que para  $T \geq 2L \left[ \frac{2(1 - 2\theta(1 - \cos \frac{\pi\varepsilon}{2}))}{1 + \cos \frac{\pi\varepsilon}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 dt &= \frac{L}{2h^2} \int_0^T \left| \sum_{|\mu_k| h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} a_k e^{i\mu_k t} \phi_{k,J} \right|^2 dt \\ &\geq C_1(T, \varepsilon) \cos^2\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \sum_{|\mu_k| h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} |a_k|^2 h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\phi_{k,j+1} - \phi_{k,j}}{h} \right|^2, \end{aligned} \quad (4.23)$$

note que

$$\sum_{|\mu_k| h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} \left[ |a_k|^2 h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\phi_{k,j+1} - \phi_{k,j}}{h} \right|^2 \right] = \frac{\sigma_J(h) - \alpha}{\sigma_J(h)} \varepsilon_{1h}^\theta(0). \quad (4.24)$$

Combinando (4.23) e (4.24) chegamos ao seguinte

$$\varepsilon_{1h}^\theta(0) \leq \frac{\sigma_J(h)}{\sigma_J(h) - \alpha} \frac{1}{C_1(T, \varepsilon) \cos^2\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)} \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi}{h} \right|^2 dt, \quad (4.25)$$

provando nossa afirmação. ■

**Teorema 11.** Assumindo que  $0 < \gamma < \frac{1}{1 - 4\theta}$  e  $\theta \in [0, 1/4[$ , existe  $T(\gamma) > 0$ , tal que para qualquer  $T > T(\gamma)$ , existe uma constante positiva  $\bar{C}(T, \alpha, \gamma(\varepsilon)) > 0$  tal que

$$\varepsilon_{2h}^\theta(0) \leq \bar{C}(T, \alpha, \gamma(\varepsilon)) \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\omega_J}{h} \right| dt, \quad (4.26)$$

para qualquer solução do sistema (3.9)-(3.11) na classe de soluções filtradas  $\mathcal{P}(\gamma(\varepsilon))$ .

**Prova:** Da desigualdade de Ingham e de *Lema 8.*, temos que para qualquer  $0 \leq \varepsilon < 1$  e  $T \geq 2L \left[ \frac{2(1 - 2\theta(1 - \cos \frac{\pi\varepsilon}{2})}{1 + \cos \frac{\pi\varepsilon}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$ , existem constantes positivas  $D_i(T, \varepsilon) > 0$ ,  $i = 1, 2$  satisfazendo

$$D_1(T, \varepsilon) \sum_{|\mu_k| h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{|\mu_k| h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} a_k e^{i\mu_k t} \right|^2 dt \leq D_2(T, \varepsilon) \sum_{|\mu_k| h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} |a_k|^2, \quad (4.27)$$

com  $\gamma(\varepsilon) = 4 \sin^2 \frac{\pi\varepsilon}{2}$ .

De (3.69), escrevemos o seguinte

$$\begin{aligned} h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 &= \frac{2[1 + \sigma^- \theta h^2] L}{4 - [(1 - 4\theta)\sigma^- + \alpha]} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 \\ &= \frac{2 \left[ 1 + \frac{\frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) - \alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{k\pi h}{2L})} \theta h^2 \right] L}{4 - \left[ (1 - 4\theta) \frac{\frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) - \alpha}{1 - 4\theta \sin^2(\frac{k\pi h}{2L})} + \alpha \right] h^2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 \\ &= \frac{2 \left[ 1 - 4\theta \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) + (\frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) - \alpha) \theta h^2 \right] L}{4 \left[ 1 - 4\theta \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) \right] - \left[ (1 - 4\theta) \frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) + 4\alpha\theta - 4\alpha\theta \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) \right] h^2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 \\ &= \frac{2[1 - \alpha\theta h^2] L}{4 \left[ 1 - \sin^2(\frac{k\pi h}{2L}) + \alpha\theta h^2(1 - \sin^2(\frac{k\pi h}{2L})) \right]} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 \\ &\leq \frac{[1 - \alpha\theta h^2] L}{2 \left[ (1 - \alpha\theta h^2)(1 - \sin^2(\frac{\pi\varepsilon}{2})) \right]} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 \\ &= \frac{[1 - \alpha\theta h^2] L}{2 \left[ (1 - \alpha\theta h^2) \cos^2(\frac{\pi\varepsilon}{2}) \right]} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 \\ &= \frac{L}{2 \cos^2(\frac{\pi\varepsilon}{2})} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

para qualquer autovetor  $\phi$ , associado a qualquer autovalor  $\lambda$  tal que  $\lambda h^2 \leq \gamma(\varepsilon)$ . Consideremos  $\varphi$  solução do sistema (3.9)-(3.11) na classe das soluções filtradas  $\mathcal{P}(\gamma(\varepsilon))$  dada por,

$$\omega = \sum_{|\mu_k| h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} a_k e^{i\mu_k t} \phi^k, \quad (4.29)$$

com  $\mu_k = \sqrt{\sigma^-(h)}$ . Combinando (4.28) e (4.29) podemos deduzir que para  $T \geq 2L \left[ \frac{2(1-2\theta(1-\cos \frac{\pi\varepsilon}{2})}{1+\cos \frac{\pi\varepsilon}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\omega_J}{h} \right|^2 dt &= \frac{L}{2h^2} \int_0^T \left| \sum_{|\mu_k|h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} a_k e^{i\mu_k t} \phi_{k,J} \right|^2 dt \\ &\geq D_1(T, \varepsilon) \cos^2\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \sum_{|\mu_k|h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} |a_k|^2 h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\phi_{k,j+1} - \phi_{k,j}}{h} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Além disso, note que

$$\sum_{|\mu_k|h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} \left[ |a_k|^2 h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\phi_{k,j+1} - \phi_{k,j}}{h} \right|^2 \right] = \frac{\sigma_J(h) + \alpha}{\sigma_J(h)(1 - \alpha\theta h^2)} \varepsilon_{2h}^\theta(0), \quad (4.31)$$

e combinando (4.30) e (4.31) chegamos ao seguinte

$$\varepsilon_{2h}^\theta(0) \leq \frac{\sigma_J(h)(1 - \alpha\theta h^2)}{\sigma_J(h) + \alpha} \frac{1}{D_1(T, \varepsilon) \cos^2\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)} \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi}{h} \right|^2 dt. \quad (4.32)$$

Portanto, para  $\bar{C}(T, \alpha, \gamma(\varepsilon)) = \frac{\sigma_J(h)(1 - \alpha\theta h^2)}{\sigma_J(h) + \alpha} \frac{1}{D_1(T, \varepsilon) \cos^2\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)}$ . Concluimos a prova

■

**Teorema 12.** Assuma que  $0 < \gamma < \frac{1}{1-4\theta}$ . Então, para todo  $\alpha < \lambda_J(h)$ , existe  $T(\gamma) > 0$  tal que para qualquer  $T > T(\gamma)$ , existe constante positiva  $\tilde{C}(T, \alpha\gamma(\varepsilon)) > 0$  tal que

$$\varepsilon_h^\theta(0) \leq \tilde{C}(T, \alpha\gamma(\varepsilon)) \frac{L}{2} \int_0^T \left[ \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_J}{h} \right|^2 \right] dt, \quad (4.33)$$

para qualquer solução do sistema (3.1)-(3.4) na classe das soluções filtradas  $\mathcal{R}(\gamma(\varepsilon))$

Antes da demonstração do teorema, vamos apresentar a classe de soluções filtradas para o sistema (3.1)-(3.4).

$$\mathcal{R}(\gamma(\varepsilon)) := \begin{cases} U = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_k(h) \leq \lambda h^{-2}} \left[ a_k \sin(\sqrt{\sigma_k^-} t) + b_k \cos(\sqrt{\sigma_k^-} t) + c_k \sin(\sqrt{\sigma_k^+} t) + d_k \cos(\sqrt{\sigma_k^+} t) \right] \phi^k \\ V = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_k(h) \leq \lambda h^{-2}} \left[ c_k \sin(\sqrt{\sigma_k^+} t) + d_k \cos(\sqrt{\sigma_k^+} t) - a_k \sin(\sqrt{\sigma_k^-} t) - b_k \cos(\sqrt{\sigma_k^-} t) \right] \phi^k \end{cases}$$

$$\text{com } \sigma_J^+(h) = \lambda_J(h) + \frac{\alpha}{1 - 4\theta \sin^2\left(\frac{j\pi h}{2L}\right)}, \sigma_J^-(h) = \lambda_J(h) - \frac{\alpha}{1 - 4\theta \sin^2\left(\frac{j\pi h}{2L}\right)} \text{ e } a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{R}$$

**Prova:** Sabendo que  $\varepsilon_h^\theta(0) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{1h}^\theta(0) + \varepsilon_{2h}^\theta(0))$ , então, dos resultados obtidos nos dois teoremas anteriores chegamos a

$$2\varepsilon_h^\theta(0) = \varepsilon_{1h}^\theta(0) + \varepsilon_{2h}^\theta(0) \leq \max [C(T, \alpha\gamma(\varepsilon)), \bar{C}(T, \alpha\gamma(\varepsilon))] \frac{L}{2} \int_0^T \left[ \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 + \left| \frac{\omega_J}{h} \right|^2 \right] dt \quad (4.34)$$

sabendo que  $\varphi = u_j + v_j$  e  $\omega = u_j - v_j$  segue que

$$\varepsilon_h^\theta(0) \leq \tilde{C}(T, \alpha\gamma(\varepsilon)) \frac{L}{2} \int_0^T \left[ \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_J}{h} \right|^2 \right] dt, \quad (4.35)$$

$$\text{com } \tilde{C} = 2 \max \left[ \frac{\sigma_J(h)(1 - \alpha\theta h^2)}{\sigma_J(h) + \alpha} \frac{1}{D_1(T, \varepsilon) \cos^2\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)}, \frac{\sigma_J(h)}{\sigma_J(h) - \alpha} \frac{1}{C_1(T, \varepsilon) \cos^2\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)} \right]$$

■

---

### Conclusão e Trabalhos Futuros

---

O objetivo principal deste trabalho foi estudar o problema que diz respeito a uma representação numérica semi-discreta, em que apenas a variável espacial é discretizada, para um importante problema no contexto da Teoria de Controle em Equações diferenciais Parciais.

No início do trabalho, fizemos a apresentação de resultados obtidos por Infante e Zuazua no seu trabalho publicado em 1999, eles detalharam as causas da perda de observabilidade de esquemas numéricos em diferenças finitas e em elementos finitos que antes foram identificados por R. Lions, Glowinski e outros pesquisadores.

Este trabalho, generaliza o trabalho desenvolvido em [24]. Em particular, se tomarmos  $\theta = 0$ , obtemos o sistema (2.1)-(2.5), assim validando os resultados obtidos em [24], e se tomarmos  $\theta = 1/6$  teremos elementos finitos e se  $\theta$  for igual a  $1/4$ , temos diferenças finitas. Como prevíamos no nosso projeto de pesquisa, obtemos a observabilidade uniforme no limite  $h$  tendendo para 0 quanto  $\theta = 1/4$ .

Para trabalhos futuros, pretendemos estudar os diagramas de dispersão e a velocidade de grupo e semi-discretização do espaço do problema desenvolvido neste trabalho. Pretendemos também, fazer os estudos dos seguintes problemas

$$\delta_\theta u_j''(t) - \Delta_h u_j(t) + \alpha \delta_\theta v_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad 0 < t < T \quad (5.1)$$

$$\delta_\theta v_j''(t) - \Delta_h v_j(t) + \alpha \delta_\theta u_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J; \quad 0 < t < T \quad (5.2)$$

$$u_0(t) = u_{J+1}(t) = 0, \quad v_0(t) = v_{J+1}(t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (5.3)$$

$$u_j(0) = u^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, \quad v_j(0) = v_j^0, \quad v_j'(0) = v_j^1 \quad j = 0, 1, 2, \dots, J, J+1, \quad (5.4)$$

bem como

$$\delta_\theta u_j''(t) - \Delta_h u_j(t) + \alpha \delta_\theta (u_j - v_j)(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad 0 < t < T \quad (5.5)$$

$$\delta_\theta v_j''(t) - \Delta_h v_j(t) + \alpha \delta_\theta (v_j - u_j)(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J; \quad 0 < t < T \quad (5.6)$$

$$u_0(t) = u_{J+1}(t) = 0, \quad v_0(t) = v_{J+1}(t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (5.7)$$

$$u_j(0) = u^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, \quad v_j(0) = v_j^0, \quad v_j'(0) = v_j^1 \quad j = 0, 1, 2, \dots, J, J+1, \quad (5.8)$$

sendo  $\delta_\theta$  a combinação linear convexa dada por

$$\delta_\theta v_j(t) := (1 - 2\theta)v_j(t) + \theta(v_{j+1} + v_{j-1})(t). \quad (5.9)$$

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] A.E. Ingham: *Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series*, Mathematische Zeitschrift 41 (1936) 367–379.
- [2] C. Castro and S. Micu: *Boundary Controllability of a linear semi-discrete 1-D wave equations derived a mixed finite element method*, Numerische Mathematik, 102, (2006), 413-462;
- [3] D.S. Almeida Júnior, A.J.A Ramos and M.L. Santos: *Observability inequality for the finite-difference semi-discretization of the 1-d coupled wave equations*, Adv. Comput. Math. (2015) 41:105-130;
- [4] E. Zuazua: *Boundary observability for the finite-difference space semi-discretizations of the 2-d wave equation in the square*, J. Math. Pures Appli., (1999) 26, 523-563;
- [5] E. Zuazua: *Propagation, Observation, Control and Numerical Approximation of Waves*, SIAM Rev.47 (2005), 197–243;
- [6] E. Zuazua: *Contrôlabilité exacte en un temps arbitrairement petit de quelques modèles de plaques*, In Lions *Contrôlabilité exacte, stabilization et perturbations de systèmes distribués*. Tome 1. *Contrôlabilité exacte*, Masson, RMA8, 1988.465–491;
- [7] J.L. Lions: *Contrôlabilité exacte, stabilization et perturbations de systèmes distribués. Tome 1. Contrôlabilité exacte*, Masson, RMA8, 1988.

- [8] J.A. Infante and E. Zuazua: *Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1-D wave equation*, Math. Model. Num. An. 33(1999), 407–438;
- [9] L.R. Tcheugoué Tébou and E. Zuazua: *Uniform exponential long time decay for the space semi-discretization of a locally damped wave equation via an artificial numerical viscosity*, Numerische Mathematik, 95 (2003), 563-598;
- [10] L. R. T. Tebou and E. Zuazua: *Uniform boundary stabilization of the finite difference space discretization of the 1-d wave equation*, Advances in Computational Mathematics, (2007) 26, 337-365;
- [11] L. R. T. Tebou: *Sharp Observability Estimates for a System of Two Coupled Nonconservative Hyperbolic Equations*, Applied Mathematics & Optimization, (2012), 66, Issue 2, 175–207;
- [12] M. Najafi: *The study of stabilizability of the coupled wave equations under various end conditions*, The 3 IEEE Conference on Decision and Control, Dec. (1992), pp. 374-379;
- [13] R. Glowinski: *Ensuring well-posedness by analogy; Stokes problem and boundary control for the wave equation*. Journal Comput. Physics (1992), 103 , 189-221;
- [14] R. Glowinski and J.L. Lions: *Exact and Approximate Controllability for Distributed Parameter System* Acta Numerica (1996), 159-333;
- [15] R. Glowinski, C.H. Li and J.L. Lions: *A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation. (I). Dirichlet Controls: Description of the numerical methods*. Jap. J. Appl. Math. 103 (1990), 1-76;
- [16] R. Temam: *Infinity-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, New York: Springer;
- [17] R. Rajaram and M. Najafi: *Exact controllability of wave equations in  $R^n$  coupled in parallel*, JMAA, 356 (2009), 7–12;
- [18] S. Ervedoza, A. Marica and E. Zuazua: *Numerical meshes ensuring uniform observability of 1d waves: construction and analysis*, to appear in IMA J. Numerical Anal.;
- [19] S. Ervedoza and E. Zuazua: *The wave equation: Control and numerics*. In P. M. Canarsa and J. M. Coron, editors, Control of Partial Differential Equations, Lecture Notes

- in Mathematics , CIME Subseries. Springer Verlag, 2011. to appear in IMA J. Numerical Anal.;
- [20] V. Komornik:*Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*, John Wiley & Sons-Masson, 1994;
- [21] Cannon, John T.; Dostrovsky, Sigalia (1981). *The evolution of dynamics, vibration theory from 1687 to 1742*». *Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 6* (New York: Springer-Verlag): ix + 184 pp. ISBN 0-3879-0626-6. GRAY, JW (1983). «BOOK REVIEWS». BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY [S.l.: s.n.] 9 (1). (retrieved 13 Nov 2012);
- [22] P. Loreti and M. Mehrenberger: An Ingham type proof for a two-grid observability theorem, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations 14(2008), 604-631;
- [23] P. Loreti and M. Mehrenberger: *Observabilite Uniforme de Lequation des ondes 1D*, ESAIM: Proceedings 25(2008), 6879;
- [24] D.S. Almeida Júnior, J.C. Pantoja Fontes and M.L. Santos: *A uniform observability inequality to coupled wave equations using Ingham type approach*, Adv. Comput. Math. (2016) 41:105-130, submetido;
- [25] J.C. Pantoja Fontes: *Um resultado de observabilidade para um sistema acoplado de equações de onda e sua contrapartida semi-discreta em diferenças finitas*, 2016;
- [26] J. E. M. Riveira: *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*, R.J., 2008.