



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

OBSERVABILIDADE PARA SISTEMAS DE TIMOSHENKO VIA DESIGUALDADE DE INGHAM

Por

Mauricio da Silva Vinhote

BELÉM
Junho de 2016



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

OBSERVABILIDADE PARA SISTEMAS DE TIMOSHENKO VIA DESIGUALDADE DE INGHAM

Mauricio da Silva Vinhote

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará (PPGME-UFGPA) como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior.

BELÉM
Junho de 2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Vinhote, Mauricio da Silva, 1990-
Observabilidade para sistemas de Timoshenko via
desigualdade de Ingham / Mauricio da Silva Vinhote. -
2016.

Orientador: Dilberto da Silva Almeida
Junior;

Coorientador: Mauro de Lima Santos.
Dissertação (Mestrado) - Universidade
Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e
Naturais, Programa de Pós-Graduação em
Matemática e Estatística, Belém, 2016.

1. Matemática na engenharia. 2.
Desigualdades (matemática). 3. Vigas de
Timoshenko. 4. Desigualdade de observabilidade.
5. Teorema de Inghan. I. Título.

CDD 22. ed. 620

OBSERVABILIDADE PARA SISTEMAS DE TIMOSHENKO VIA DESIGUALDADE DE INGHAN

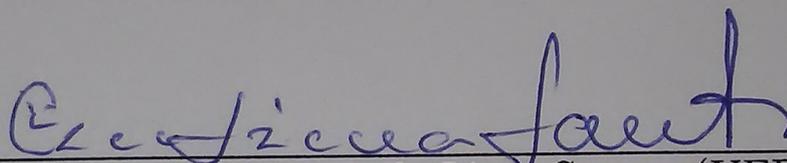
Por

Mauricio da Silva Vinhote

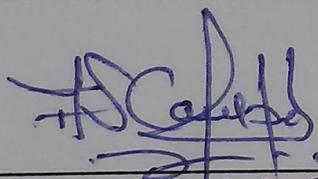
Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará (PPGME-UFPA) como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.



Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (UFPA)



Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (UFPA)



Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo (UFPA)

DATA DA AVALIAÇÃO: 29 de junho de 2016

CONCEITO: APROVADO

Em Cristo “estão escondidos todos os
tesouros da sabedoria e da ciência.”

Colossenses 2:3

Dedico este trabalho a Deus e à
minha flor de açucena, Antônia
Vinhote, exemplo de Mãe e de
Mulher.

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus por ter-me permitido realizar o sonho de cursar uma faculdade e, em seguida, um curso de pós-graduação;
- Agradeço à minha família pelo apoio e incentivo que recebi e, em particular, gostaria de agradecer a uma pessoa que já não está mais entre nós: minha mãe, Antônia Vinhote, pois nós batalhamos muito para que eu pudesse chegar até aqui;
- Agradeço aos amigos que fiz durante esta árdua jornada. Todos, de alguma forma, ajudaram-me, seja numa lista de exercícios, na prova de um teorema, esclarecendo alguma dúvida cotidiana ou, simplesmente, fazendo-me sorrir nas horas de tensão;
- Agradeço aos meus professores pelo incentivo, pelos desafios propostos, pela força que me deram nos momentos difíceis e por acreditarem que eu romperia barreiras. Em particular, quero agradecer ao Prof. Dr. Mauro de Lima Santos pelas oportunidades de desenvolvimento intelectual durante os anos de iniciação científica e agradeço também ao Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior, meu orientador, por sua compreensão e paciência nos momentos de grande dificuldade pelos quais passei e por ter me incentivado a continuar e lutar até o final. Foi uma jornada difícil, porém divertida.
- Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro nessa jornada.

RESUMO

Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

OBSERVABILIDADE PARA SISTEMAS DE TIMOSHENKO VIA DESIGUALDADE DE INGHAN

Por Mauricio da Silva Vinhote.

Este trabalho propõe a obtenção da desigualdade de observabilidade, via desigualdade de Inghan, para um sistema de Timoshenko com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann. Analisando o comportamento assintótico de sequências associadas ao espectro, podemos obter, para um índice grande o suficiente, uma aproximação entre as ramificações positiva e negativa do espectro associado ao sistema, desde que estejamos sob a hipótese da igualdade das velocidades. A desigualdade de observabilidade provada neste trabalho vale para uma classe de soluções em série de Fourier gerada pelas autofunções associadas aos autovalores do problema espectral.

Palavras-Chave: Vigas de Timoshenko, Desigualdade de Observabilidade, Teorema de Inghan.

ABSTRACT

Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

OBSERVABILITY FOR SYSTEMS OF TIMOSHENKO THROUGH INGHAN INEQUALITY

by Mauricio da Silva Vinhote.

This paper proposes obtaining the observability inequality through unequal Inghan for a Timoshenko system with boundary conditions of the Dirichlet-Neumann type. Analyzing the asymptotic behavior of sequences associated with the spectrum, we can get to a large enough index, an approximation of the positive and negative ramifications spectrum associated with the system, since we are under the assumption of equal speeds. The observability inequality proved in this work applies to a class solutions in Fourier series generated by the eigenfunctions associated with eigenvalues of the spectral problem.

Keywords: Beams of Timoshenko, Observability Inequality, Inghan Theorem.

Sumário

1	Introdução	2
2	Desigualdade de Inghan	5
3	Análise Espectral do Sistema de Timoshenko	10
3.1	Aproximação do Espectro em Série de Taylor	13
4	Desigualdade de Observabilidade para o Sistema de Timoshenko	19

Capítulo 1

Introdução

O uso de modelos matemáticos para o estudo de vibrações em vigas tem se mostrado importante tanto para a engenharia, em relação a seus aspectos técnicos, quanto para a matemática aplicada devido aos aspectos teóricos e computacionais desses modelos. Atualmente, os modelos mais usados na descrição de vibrações em vigas são os modelos de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Antes de estabelecermos a diferença entre esses modelos, devemos ter em mente o conceito de flexão. Em engenharia, flexão é uma deformação que ocorre em um corpo que está sob a ação de uma força que atua perpendicularmente ao seu eixo longitudinal (no caso de uma viga) e a direção de tal força é a mesma da deformação. A figura a seguir ilustra esta definição.

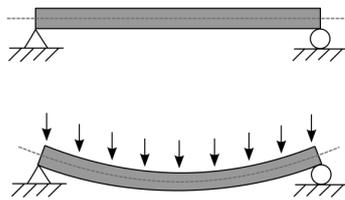


Figura 1.1: Flexão de uma viga sob a ação de um força.

O modelo de Euler-Bernoulli descreve a deformação rígida vertical de uma viga de modo que a seção transversal permanece plana, inalterada e ortogonal ao eixo longitudinal. Já o modelo de Timoshenko considera também o cisalhamento da viga durante a deformação da viga. Este cisalhamento provoca uma deformação na secção transversal.

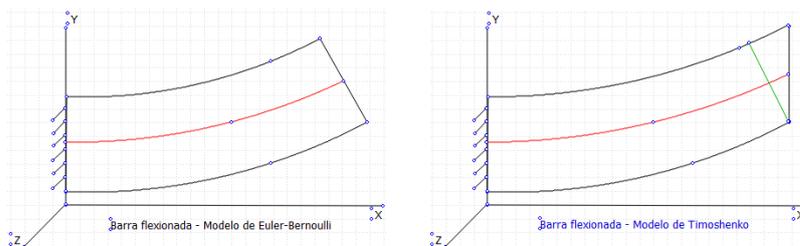


Figura 1.2: Representação da flexão de uma viga nos modelos Euler-Bernoulli (esquerda) e Timoshenko (direita).

De forma geral, as equações

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T)\end{aligned}\quad (1.1)$$

compõe o modelo para uma viga de Timoshenko onde $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $b = EI$, $\kappa = \kappa'GA$ com $A = ah$, $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ e $I = \frac{ah^3}{12}$ sendo ρ a densidade de massa por unidade de volume da viga, a a largura, h a espessura, κ o módulo de elasticidade, $\kappa' \in (0, 1/2)$ o coeficiente de cisalhamento, $\mu \in (0, 1/2)$ o coeficiente de Poisson, E o módulo de Young, I o momento de inércia e A a área da secção transversal.

Associamos ao sistema (1.1) as seguintes condições iniciais

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0, \varphi_t(x, 0) = \varphi_1, \psi(x, 0) = \psi_0, \psi_t(x, 0) = \psi_1 \text{ em } (0, L). \quad (1.2)$$

A energia associada ao sistema (1.1) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_1|\varphi_t(x, t)|^2 + \rho_2|\psi_t(x, t)|^2 + b|\psi_x(x, t)|^2 + \kappa|\varphi_x(x, t) + \psi(x, t)|^2] dx$$

e satisfaz

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

o que mostra que este sistema é conservativo. Todavia, para efeito de aplicações e coerência quanto às interpretações físicas do problema, muitas pesquisas tem se desenvolvido no sentido de estudar a existência de um mecanismo que provoque a dissipação da energia associada ao modelo. Quando falamos em mecanismo de dissipação da energia, estamos nos referindo precisamente ao que se conhece hoje como *Teoria da Estabilização*. Além disso, outra importante teoria nesse contexto é a *Teoria do Controle*. Basicamente, a controlabilidade de equações diferenciais parciais consiste na existência de uma força (ou controle) que atua no sistema a qual conduz a solução ao estado de equilíbrio.

Proposto por Lions [3], o chamado Método de Unicidade Hilbertiana (HUM) nos diz que para provar a controlabilidade para o sistema de Timoshenko é equivalente a mostrar a chamada desigualdade de observabilidade a qual Lions demonstra através de técnicas multiplicativas.

Este trabalho propõe a obtenção de uma desigualdade de observabilidade para o sistema (1.1) via Teorema de Inghan. De forma mais precisa, considerando o sistema de Timoshenko

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T) \\ \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) &= 0 \text{ em } (0, T)\end{aligned}\quad (1.3)$$

com condições iniciais tais como em (1.2), mostraremos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$E(0) \leq C \int_0^T |\psi_t(L, t)|^2 dt$$

onde T é um tempo maior que um $T_0 > 0$.

Estrutura do Trabalho

Esta dissertação está composta segundo a descrição abaixo.

No **Capítulo 2** veremos a demonstração do Teorema de Inghan, que nos garante a existência de constantes positivas $C_1(T, \gamma)$ e $C_2(T, \gamma)$ tais que

$$C_1(T, \gamma) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 \leq \int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq C_2(T, \gamma) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2,$$

para todo $T > T_0$, sendo (α_n) uma sequência em l^2 e $\gamma > 0$ uma constante tal que

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

No **Capítulo 3** faremos a análise espectral para o sistema (1.1) obtendo os autovalores $\lambda_n = \pm \lambda_n^\pm$ e mostraremos que sob a hipótese $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$, podemos obter a aproximação

$$\lambda_n^+ \approx \lambda_n^-, \quad (1.4)$$

para todo n suficientemente grande, isto é, para todo n maior ou igual a um $N_0 \in \mathbb{N}$.

No **Capítulo 4**, vamos considerar a classe de soluções de (1.1) da forma

$$\{\varphi(x, t), \psi(x, t)\} = \sum_{n \geq N_0} \left(a_n e^{-i\lambda_n^+ t} + b_n e^{-i\lambda_n^- t} \right) \{\sin(\theta_n x), B_n \cos(\theta_n x)\}.$$

Uma vez provado que, para todo $n \geq N_0$, $|\lambda_{n+1}^+ - \lambda_n^+| \approx \lambda_{n+1}^- - \lambda_n^- > 0$, desde que $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$, usaremos o Teorema de Inghan para garantir a existência de uma constante positiva $C_1(T, \gamma)$ tal que

$$\sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 \leq \frac{1}{C_1(T, \gamma)} \int_0^T |\psi_t(L, t)|^2 dt \quad (1.5)$$

para então majorar $E(0)$ por uma constante multiplicada pela série em (1.5) e obter a desigualdade dada por

$$E(0) \leq C(T, \gamma) \int_0^T |\psi_t(L, t)|^2 dt.$$

Capítulo 2

Desigualdade de Inghan

Neste capítulo provaremos o Teorema de Ingham [2], que nos fornecerá uma desigualdade bastante útil na prova do principal resultado desta dissertação, a saber, a desigualdade de observabilidade.

Teorema 2.0.1. (Teorema de Ingham) *Seja (λ_n) , $n \in \mathbb{Z}$, uma sequência de números reais tais que*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma > 0, \quad \forall \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Então para qualquer $T > \frac{2\pi}{\gamma}$ existem constantes positivas $C_j(T, \gamma) > 0$, $j = 1, 2$ tal que

$$C_1(T, \gamma) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 \leq \int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq C_2(T, \gamma) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2, \quad (2.1)$$

para toda sequência de números complexos $(\alpha_n) \in l^2$.

Demonstração: Provaremos este teorema para o caso em que $T = 2\pi$ e $\gamma > 1$. Seja $T > \frac{2\pi}{\gamma}$. Através da mudança de variável $s = \frac{2\pi t}{T}$ escrevemos

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt = \frac{T}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds,$$

onde $\mu_n = \frac{T\lambda_n}{2\pi}$. Note que $\mu_{n+1} - \mu_n = \frac{T}{2\pi}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \geq \frac{T\gamma}{2\pi} := \gamma_1 > 0$, ou seja,

$$\mu_{n+1} - \mu_n \geq \frac{T\gamma}{2\pi} := \gamma_1 > 0.$$

Agora vamos mostrar que existe uma constante positiva $C_1(T, \gamma)$ tal que

$$C_1(T, \gamma) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt. \quad (2.2)$$

Esta é a desigualdade que usaremos na demonstração da desigualdade de observabilidade. Para isto, considere o funcional $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ dado por

$$h(s) = \begin{cases} \cos\left(\frac{s}{2}\right), & \text{se } |s| \leq \pi \\ 0, & \text{se } |s| > \pi. \end{cases} \quad (2.3)$$

e considere a transformada de Fourier como a seguir

$$H(\xi) = \mathcal{F}(h(s)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)e^{i\xi s} ds. \quad (2.4)$$

Aplicamos a transformada de Fourier em 2.4 para obter

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)e^{i\xi s} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds \end{aligned}$$

e integramos por partes.

$$\begin{aligned} H(\xi) &= 2 \sin\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} \Big|_{-\pi}^{\pi} - 2\xi i \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds \\ &= 2(e^{i\xi\pi} + e^{-i\xi\pi}) - 2\xi i \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds. \end{aligned}$$

Usando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ temos que

$$H(\xi) = 4 \cos(\pi\xi) - 2\xi i \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds.$$

Novamente integramos por partes.

$$\begin{aligned} H(\xi) &= 4 \cos(\pi\xi) - 2i\xi \left(-2 \cos\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} \Big|_{-\pi}^{\pi} + 2\xi i \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds \right) \\ &= 4 \cos(\pi\xi) + 4\xi^2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds}_{H(\xi)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$H(\xi) = \frac{4 \cos(\pi\xi)}{1 - 4\xi^2}. \quad (2.5)$$

Como $0 \leq h(s) < 1$, para qualquer $s \in [-\pi, \pi]$, vem

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n s} \right|^2 ds \geq \frac{T}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds. \quad (2.6)$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds &= \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \overline{a_m e^{i\mu_m s}} ds \\
&= \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \overline{a_m} e^{-i\mu_m s} ds \\
&= \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} e^{i(\mu_n - \mu_m)s} ds \\
&= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} \int_{-\pi}^{\pi} h(s) e^{i(\mu_n - \mu_m)s} ds,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} H(\mu_n - \mu_m) = H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} H(\mu_n - \mu_m).$$

Tomando o valor absoluto na identidade anterior e usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\left| H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} H(\mu_n - \mu_m) \right| &\geq \left| H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \right| - \left| \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} H(\mu_n - \mu_m) \right| \\
&\geq H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 - \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |a_n \overline{a_m} H(\mu_n - \mu_m)|.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder na última parcela da indentidade anterior, obtemos

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds \geq H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 - \left(\sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |a_n \overline{a_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e, portanto,

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds \geq H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 - \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |a_n \overline{a_m}| \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)|.$$

Pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |a_n \overline{a_m}| &\leq \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\overline{a_m}|^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.
\end{aligned}$$

Então

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds \geq H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)|. \quad (2.7)$$

Faremos agora uma estimativa para $\sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)|$. Por 2.5 temos

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)| &= \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} \left| \frac{4 \cos((\mu_n - \mu_m)\pi)}{1 - 4(\mu_n - \mu_m)^2} \right| \\ \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)| &\leq \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} \frac{4}{|1 - 4(\mu_n - \mu_m)^2|} \\ &\leq \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} \frac{4}{4|(\mu_n - \mu_m)^2 - 1|}. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\mu_{n+1} - \mu_n > \gamma_1 > 0$, então $\mu_{n+1} > \mu_n + \gamma_1$. Para $n = 1$ temos $\mu_2 > \mu_1 + \gamma_1$ e, para $n = 2$, $\mu_3 > \mu_2 + \gamma_1 = \mu_1 + \gamma_1 + \gamma_1 = \mu_1 + 2\gamma_1$. Repetindo esse processo n vezes teremos

$$\mu_n > \mu_1 + (n - 1)\gamma_1.$$

Assim, para $n > m$ temos $\mu_n > \mu_m$ e daí vem que

$$\mu_n - \mu_m \geq (n - m)\gamma_1 \Rightarrow \frac{1}{\mu_n - \mu_m} \leq \frac{1}{(n - m)\gamma_1}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)| &\leq \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} \frac{4}{4\gamma_1^2 |n - m|^2 - 1} \\ &\leq \frac{4}{\gamma_1^2} \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4|n - m|^2 - \frac{1}{\gamma_1^2}} \\ &\leq \frac{8}{\gamma_1^2} \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4|n - m|^2 - 1}. \end{aligned}$$

Fazendo $r := |n - m|$, $r \in \mathbb{Z}$ temos

$$\sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)| \leq \frac{8}{\gamma_1^2} \sum_{r \geq 1} \frac{1}{4r^2 - 1} = \frac{8}{\gamma_1^2} \frac{1}{2} \sum_{r \geq 1} \left(\frac{1}{2r - 1} - \frac{1}{2r + 1} \right) = \frac{4}{\gamma_1^2}. \quad (2.8)$$

De (1.7) e (1.8), temos

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds \geq H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 - \frac{4}{\gamma_1^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 = \left(4 - \frac{4}{\gamma_1^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \quad (2.9)$$

Combinando (1.6) e (1.9) vem

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n s} \right|^2 ds \geq \frac{T}{2\pi} \left(4 - \frac{4}{\gamma_1^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

Como $\gamma_1 = \frac{T\gamma}{2\pi}$, então

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n s} \right|^2 ds \geq \frac{T}{2\pi} \left(4 - \frac{4}{\frac{T^2\gamma^2}{4\pi^2}} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \geq \frac{2}{T\pi} \left(T^2 - \frac{4\pi^2}{\gamma^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

Assim, se $T > \frac{2\pi}{\gamma}$, então existe uma constante $C_1(T, \gamma) := \frac{2}{T\pi} \left(T^2 - \frac{4\pi^2}{\gamma^2} \right) > 0$ tal que

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n s} \right|^2 ds \geq C_1(T, \gamma) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \quad (2.10)$$

Agora vamos mostrar que existe uma constante positiva $C_2(T, \gamma)$ tal que

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq C_2(T, \gamma) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

Para isso, consideramos o funcional $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ dado por

$$h(s) = \begin{cases} \cos\left(\frac{s}{2}\right), & \text{se } |s| \leq \pi/2 \\ 0, & \text{se } |s| > \pi/2. \end{cases} \quad (2.11)$$

Como na primeira parte da demonstração, podemos deduzir que

$$H(\xi) = \frac{4}{1 - 4\xi^2} \cos(\pi\xi). \quad (2.12)$$

Sendo $h(s) \in [\sqrt{2}/2, 1)$, obtemos

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq \frac{T}{\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds \quad (2.13)$$

e

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds = H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + \sum_{m \neq n \in \mathbb{Z}} |a_n \overline{a_m} H(\mu_n - \mu_m)|. \quad (2.14)$$

Pela desigualdade triangular, segue

$$\begin{aligned} H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + \sum_{m \neq n \in \mathbb{Z}} |a_n \overline{a_m} H(\mu_n - \mu_m)| &\leq 4 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + \frac{4}{\gamma_1^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \\ &\leq \left(4 + \frac{4}{\gamma_1^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \\ &\leq \frac{4}{\pi} \left(T^2 + \frac{4\pi^2}{\gamma^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Logo, para todo $T > 0$ existe a constante $C_2(T, \gamma) := \frac{4}{T\pi} \left(T^2 + \frac{4\pi^2}{\gamma^2} \right) > 0$ tal que

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq C_2(T, \gamma) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2, \quad (2.16)$$

como queríamos provar. ■

Capítulo 3

Análise Espectral do Sistema de Timoshenko

Aqui obteremos os autovalores associados correspondentes ao problema espectral associado ao sistema (1.3) e analisaremos o comportamento assintótico de sequências associadas ao espectro $\lambda_n = \pm\lambda_n^\pm$. Então, considerando a hipótese da igualdade das velocidades, mostraremos que podemos obter a aproximação $\lambda_n^+ \approx \lambda_n^-$, para todo n suficientemente grande.

Podemos escrever o sistema (1.3) como

$$\Phi' = A\Phi \tag{3.1}$$

no qual $\Phi = [\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t]^T$ e $A : D(A) \subset \chi \rightarrow \chi$ é um operador definido por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{1}{\rho_2} \left(b \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \kappa \right) & 0 \end{bmatrix}$$

com

$$\chi = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H^1(0, L) \times L^2(0, L)$$

e

$$D(A) = [H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)] \times H_0^1(0, L) \times W \times H^1(0, L)$$

sendo

$$W = \{v \in H^2(0, L); v_x(0) = v_x(L) = 0\}.$$

O problema de autovalor do operador \mathcal{A} é dado por

$$(A - \lambda I)\Phi = 0, \tag{3.2}$$

de onde obtemos as identidades

$$\begin{aligned}\rho_1 \lambda \varphi_t - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \\ \rho_2 \lambda \psi_t - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

e também $\varphi_t = \lambda\varphi$ e $\psi_t = \lambda\psi$. Através de simples derivações no tempo obtemos

$$\varphi_{tt} = \lambda\varphi_t = \lambda^2\varphi \quad \text{e} \quad \psi_{tt} = \lambda\psi_t = \lambda^2\psi. \quad (3.4)$$

De (3.3) e (3.4) vem

$$\begin{aligned}\rho_1 \lambda^2 \varphi - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \\ \rho_2 \lambda^2 \psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0\end{aligned}\quad (3.5)$$

Agora vamos em busca do autovalor λ . Para isto considere a solução de (1.3) em série de Fourier na forma

$$\{\varphi(x, t), \psi(x, t)\} = e^{\lambda t} \{u(x), v(x)\} \quad (3.6)$$

com $u(x) = \sin(\theta_n x)$ e $v(x) = B_n \cos(\theta_n x)$ e $\theta_n = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{N}$. Note que as funções u e v definidas em $(0, L)$ satisfazem as condições de contorno em (1.3), isto é, $u(0) = u(L) = v_x(0) = v_x(L) = 0$. Por (3.5) e (3.6) podemos escrever

$$\begin{aligned}\rho_1 \lambda^2 u - \kappa(u_x + v)_x &= 0 \\ \rho_2 \lambda^2 v - b v_{xx} + \kappa(u_x + v) &= 0 \\ u(0) = u(L) = v_x(0) = v_x(L) &= 0,\end{aligned}\quad (3.7)$$

que é o problema espectral associado ao sistema (1.3). Substituímos $u(x) = \sin(\theta_n x)$ e $v(x) = B_n \cos(\theta_n x)$ na primeira equação de (3.7).

$$\rho_1 \lambda^2 \sin(\theta_n x) - \kappa(\theta_n \cos(\theta_n x) + B_n \cos(\theta_n x))_x = 0,$$

isto é,

$$\{\rho_1 \lambda^2 + \kappa \theta_n^2 + \kappa B_n \theta_n\} \sin(\theta_n x) = 0.$$

Naturalmente queremos que a solução de (1.3) seja não nula. Então devemos ter

$$\rho_1 \lambda^2 + \kappa \theta_n^2 + \kappa B_n \theta_n = 0$$

ou, equivalentemente,

$$B_n = - \left(\frac{\rho_1 \lambda^2 + \kappa \theta_n^2}{\kappa \theta_n} \right). \quad (3.8)$$

Fazendo o mesmo para a segunda equação de (3.7) obtemos

$$B_n = - \left(\frac{\kappa \theta_n}{\rho_2 \lambda^2 + b \theta_n^2 + \kappa} \right). \quad (3.9)$$

Daí temos,

$$\begin{aligned}\frac{\rho_1 \lambda^2 + \kappa \theta_n^2}{\kappa \theta_n} &= \frac{\kappa \theta_n}{\rho_2 \lambda^2 + b \theta_n^2 + \kappa} \\ (\rho_1 \lambda^2 + \kappa \theta_n^2)(\rho_2 \lambda^2 + b \theta_n^2 + \kappa) &= \kappa^2 \theta_n^2 \\ \rho_1 \rho_2 \lambda^4 + \rho_1 b \theta_n^2 \lambda^2 + \rho_1 \kappa \lambda^2 + \rho_2 \kappa \theta_n^2 \lambda^2 + \kappa b \theta_n^4 + \kappa^2 \theta_n^2 &= \kappa^2 \theta_n^2 \\ \rho_1 \rho_2 \lambda^4 + [(\rho_1 b + \rho_2 \kappa) \theta_n^2 + \rho_1 \kappa] \lambda^2 + \kappa b \theta_n^4 &= 0.\end{aligned}$$

Multiplicando a última identidade por $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ obtemos a equação

$$\lambda^4 + \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \lambda^2 + \frac{\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4 = 0$$

cuja solução é

$$\lambda_n = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \pm \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2}} \quad (3.10)$$

onde

$$\Delta_n = \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]^2 - \frac{4\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

Vamos mostrar que $\Delta_n > 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right)^2 \theta_n^4 + \left(\frac{\kappa}{\rho_2} \right)^2 + 2 \frac{\kappa}{\rho_2} \left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 - \frac{4\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4 \\ &= \left(\frac{b}{\rho_2} \right)^2 \theta_n^4 + \left(\frac{\kappa}{\rho_1} \right)^2 \theta_n^4 - \frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4 + \left(\frac{\kappa}{\rho_2} \right)^2 + 2 \frac{\kappa}{\rho_2} \left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 \\ &= \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right)^2 \theta_n^4 + \left(\frac{\kappa}{\rho_2} \right)^2 + 2 \frac{\kappa}{\rho_2} \left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 > 0. \end{aligned}$$

Além disso, é imediato que a sequência (Δ_n) é crescente. Note que

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]^2 - \frac{4\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4 \\ &< \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]^2. \end{aligned}$$

Daí temos que

$$-\left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \pm \sqrt{\Delta_n} < 0.$$

Então

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \pm \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{-\left[\frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \pm \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2} \right]} \\ &= \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \pm \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2}} \end{aligned}$$

isto é,

$$\lambda_n = \pm i \lambda_n^\pm \quad (3.12)$$

onde

$$\lambda_n^\pm = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \pm \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2}}. \quad (3.13)$$

3.1 Aproximação do Espectro em Série de Taylor

Nesta seção obteremos uma aproximação para o espectro λ_n^\pm via série de Taylor e, em seguida, uma relação entre as ramificações λ_n^+ e λ_n^- do espectro. De posse dessa relação, provaremos que se é verdade que $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$, então existe um $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n^+ \approx \lambda_n^-$, $\forall n \geq N_0$, sendo esta aproximação tão boa quanto maior for N_0 . Isso significa que, para n suficientemente grande, podemos usar apenas uma ramificação do espectro a fim de obter o resultado final, ou seja, a desigualdade de observabilidade.

Da relação (3.11) podemos escrever

$$\sqrt{\Delta_n} = \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \left\{ 1 - \frac{\frac{4\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4}{\left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]^2} \right\}^{1/2} \quad (3.14)$$

Como $\Delta_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é imediato que

$$\frac{\frac{4\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4}{\left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]^2} < 1.$$

Sendo assim, podemos usar a aproximação em série de Taylor

$$\sqrt{1-x} \approx 1-x, \text{ se } 0 < x < 1 \quad (3.15)$$

para obter

$$\sqrt{\Delta_n} \approx \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \left\{ 1 - \frac{\frac{4\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4}{\left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]^2} \right\}. \quad (3.16)$$

Então, de 3.13 e 3.16, temos

$$\begin{aligned} [\lambda_n^+]^2 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] + \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2} \\ &\approx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \left\{ 1 - \frac{\frac{4\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4}{\left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]^2} \right\} \\ &= \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \left\{ 1 - \frac{\frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4}{\left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]^2} \right\} \end{aligned}$$

ou seja,

$$[\lambda_n^+]^2 \approx \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] - \frac{\frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4}{\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}}. \quad (3.17)$$

Também temos que

$$\begin{aligned} [\lambda_n^-]^2 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] - \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2} \\ &\approx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \left\{ 1 - \frac{\frac{4\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4}{\left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]^2} \right\} \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$[\lambda_n^-]^2 \approx \frac{\frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4}{\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} \quad (3.18)$$

De (3.17) e (3.18) vem

$$\begin{aligned} [\lambda_n^+]^2 &\approx \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] - [\lambda_n^-]^2 \\ &= \frac{\left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]}{\frac{\frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4}{\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}}} \frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4 - [\lambda_n^-]^2 \\ &= \frac{1}{[\lambda_n^-]^2} \frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^4 - [\lambda_n^-]^2, \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{[\lambda_n^+]^2}{\theta_n^2} \approx \frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \frac{\theta_n^2}{[\lambda_n^-]^2} - \frac{[\lambda_n^-]^2}{\theta_n^2}. \quad (3.19)$$

Fazendo $P_n^+ = \frac{[\lambda_n^+]^2}{\theta_n^2}$ e $P_n^- = \frac{[\lambda_n^-]^2}{\theta_n^2}$, reescrevemos (3.19) como

$$P_n^+ \approx \frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \frac{1}{P_n^-} - P_n^-. \quad (3.20)$$

Veremos a seguir algumas propriedades das seqüências P_n^+ e P_n^- .

Afirmamos que (P_n^-) é uma seqüência crescente e positiva, ou seja, $P_n^- > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De fato,

$$0 < P_n^- = \frac{\frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^2}{\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} = \frac{\frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2}}{\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) + \frac{\kappa}{\theta_n^2 \rho_2}} < \frac{\frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2}}{\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) + \frac{\kappa}{\theta_{n+1}^2 \rho_2}} = P_{n+1}^-$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^- = \frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right)^{-1} = L^-,$$

de onde segue que

$$|P_n^-| \leq L^- \quad (3.21)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, já que (P_n^-) é crescente e limitada, pois é convergente. A estimativa (3.21) será usada na prova da desigualdade de observabilidade. Como (P_n^-) é crescente, temos que $\frac{1}{P_n^-} > \frac{1}{P_{n+1}^-}$ e $-P_n^- > -P_{n+1}^-$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de onde segue que

$$P_n^+ \approx \frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \frac{1}{P_n^-} - P_n^- > \frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \frac{1}{P_{n+1}^-} - P_{n+1}^- \approx P_{n+1}^+,$$

ou seja, (P_n^+) é decrescente. Também

$$\begin{aligned} P_n^+ &\approx \frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \frac{1}{P_n^-} - P_n^- \\ &= \frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \frac{\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}}{\frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^2} - \frac{\frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^2}{\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} \\ &= \left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) + \frac{\kappa}{\theta_n^2 \rho_2} - \frac{\frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2}}{\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) + \frac{\kappa}{\theta_n^2 \rho_2}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^+ = \left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right) - \frac{\frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2}}{\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right)} = \left[\left(\frac{b}{\rho_2} \right)^2 + \left(\frac{\kappa}{\rho_1} \right)^2 \right] \left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right)^{-1} = L^+.$$

Disso segue que $P_n^+ > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 3.1.1. *Seja $P_n = P_n^+ - P_n^-$. Se $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0.$$

Demonstração: Como (P_n^+) e (P_n^-) convergem, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n^+ - P_n^-) = L^+ - L^- \\ &= \left[\left(\frac{b}{\rho_2} \right)^2 + \left(\frac{\kappa}{\rho_1} \right)^2 - \frac{2\kappa b}{\rho_1 \rho_2} \right] \left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right)^2 \left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right)^{-1} \end{aligned}$$

e o resultado é imediato. ■

O gráfico a seguir nos mostra como se comporta a sequência (P_n) definida na proposição anterior.

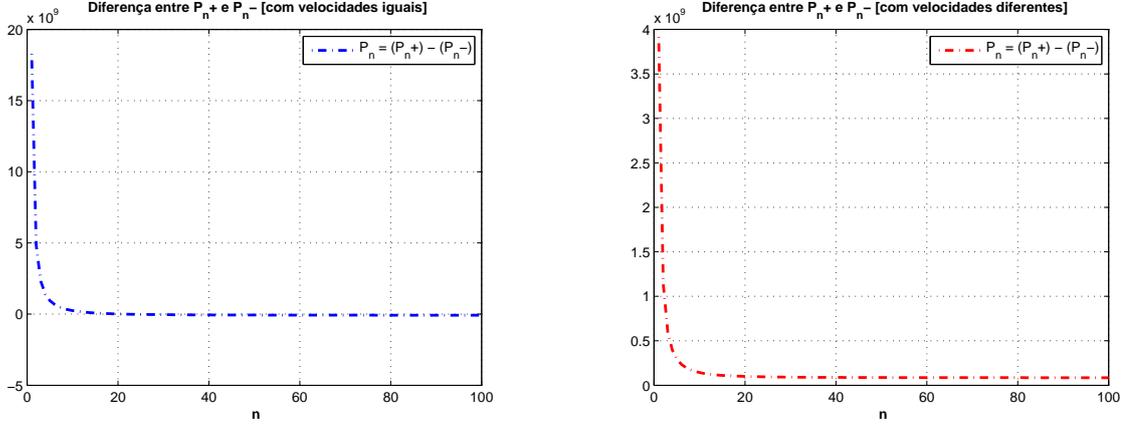


Figura 3.1: Simulação numérica de (P_n)

Observe que, quando $\frac{b}{\rho_2} \neq \frac{\kappa}{\rho_1}$, P_n não converge para zero. Note que, para n suficientemente grande, $P_n \approx 0$, ou seja, $P_n^+ \approx P_n^-$ desde que $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$. Mas dizer que isto é verdade para n suficientemente grande implica na existência de um $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $P_n^+ \approx P_n^-$, $\forall n \geq N_0$. A proposição a seguir nos fornecerá N_0 .

Proposição 3.1.2. *Suponhamos que $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe um $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$P_n^+ \approx P_n^-, \quad \forall n \geq N_0.$$

Demonstração: Como $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$, temos

$$\begin{aligned} P_n &\approx \frac{\left[\frac{2\kappa}{\rho_1} \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]^2 - \frac{4\kappa^2}{\rho_1^2} \theta_n^4}{\theta_n^2 \left[\frac{2\kappa}{\rho_1} \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]} \\ &= \frac{\frac{4\kappa^2}{\rho_1^2} \theta_n^4 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2} + \frac{4\kappa^2}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^2 - \frac{4\kappa^2}{\rho_1^2} \theta_n^4}{\theta_n^2 \left[\frac{2\kappa}{\rho_1} \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]} = \frac{\frac{4\kappa^2}{\rho_1 \rho_2} \theta_n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}}{\frac{2\kappa}{\rho_1} \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \theta_n^2} = \frac{\frac{4\kappa^2}{\rho_1 \rho_2} \frac{\pi^2}{L^2} n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}}{\frac{2\kappa}{\rho_1} \frac{\pi^4}{L^4} n^4 + \frac{\kappa}{\rho_2} \frac{\pi^2}{L^2} n^2} \end{aligned}$$

e, pela proposição anterior, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$. Seja $P : [1, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ a função contínua dada por

$$P(x) = \frac{\frac{4\kappa^2}{\rho_1 \rho_2} \frac{\pi^2}{L^2} x^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}}{\frac{2\kappa}{\rho_1} \frac{\pi^4}{L^4} x^4 + \frac{\kappa}{\rho_2} \frac{\pi^2}{L^2} x^2}$$

de modo que $P_n = P(n) = P_n^+ - P_n^-$, $n \in \mathbb{N}$. Como

$$P(x) = \frac{\frac{4\kappa^2 \pi^2}{\rho_1 \rho_2 L^2} x^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}}{\frac{2\kappa \pi^4}{\rho_1 L^4} x^4 + \frac{\kappa \pi^2}{\rho_2 L^2} x^2} = \frac{\frac{4\kappa^2 \pi^2}{\rho_1 \rho_2 L^2} \frac{1}{x^2} + \frac{\kappa^2}{x^4 \rho_2^2}}{\frac{2\kappa \pi^4}{\rho_1 L^4} + \frac{\kappa \pi^2}{\rho_2 L^2} \frac{1}{x^2}}$$

é imediato que $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = 0$. Além disso, temos que

$$P'(x) = - \left\{ \frac{\frac{16\kappa^3 \pi^6}{\rho_1^2 \rho_2 L^6} x^5 + \frac{8\kappa^2 \pi^4}{\rho_1 \rho_2 L^4} x^3 + \frac{2\kappa^2 \pi^2}{\rho_2^2 L^2} x}{\left[\frac{2\kappa \pi^4}{\rho_1 L^4} x^4 + \frac{\kappa \pi^2}{\rho_2 L^2} x^2 \right]^2} \right\} < 0, \quad 1 \leq x$$

o que mostra que $P(x)$ é sempre decrescente. Para provar esta proposição, vamos mostrar que dado $\epsilon > 0$ tão pequeno quanto se queira, encontraremos um número real $r = r(\epsilon)$ tal que no intervalo $(r, +\infty)$ a derivada $P'(x)$ seja tão próxima de zero quanto menor for ϵ , ou seja, $|P'(x)| < \epsilon$. Assim, se ϵ for muito pequeno, $P(x) = P^+(x) - P^-(x) \approx 0$ desde que $r < x$, pois, em $(r, +\infty)$, $P(x)$ será quase constante (igual a zero) já que converge para zero. Daí, definindo N_0 como o menor natural maior ou igual a r , para todo $n \geq N_0$, $n \in \mathbb{N}$, teremos $P(n) = P_n^+ - P_n^- \approx 0$, isto é, $P_n^+ \approx P_n^-$.

De fato, dado $\epsilon > 0$ tal que

$$|P'(x)| = \frac{\frac{16\kappa^3 \pi^6}{\rho_1^2 \rho_2 L^6} x^5 + \frac{8\kappa^2 \pi^4}{\rho_1 \rho_2 L^4} x^3 + \frac{2\kappa^2 \pi^2}{\rho_2^2 L^2} x}{\left[\frac{2\kappa \pi^4}{\rho_1 L^4} x^4 + \frac{\kappa \pi^2}{\rho_2 L^2} x^2 \right]^2} < \epsilon$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} &< \frac{\left[\frac{2\kappa \pi^4}{\rho_1 L^4} x^4 + \frac{\kappa \pi^2}{\rho_2 L^2} x^2 \right]^2}{\frac{16\kappa^3 \pi^6}{\rho_1^2 \rho_2 L^6} x^5 + \frac{8\kappa^2 \pi^4}{\rho_1 \rho_2 L^4} x^3 + \frac{2\kappa^2 \pi^2}{\rho_2^2 L^2} x} < \frac{\left[\frac{2\kappa \pi^4}{\rho_1 L^4} x^4 + \frac{\kappa \pi^2}{\rho_2 L^2} x^2 \right]^2}{\frac{16\kappa^3 \pi^6}{\rho_1^2 \rho_2 L^6} + \frac{8\kappa^2 \pi^4}{\rho_1 \rho_2 L^4} + \frac{2\kappa^2 \pi^2}{\rho_2^2 L^2}} \\ &< \frac{x^8 \left[\frac{2\kappa \pi^4}{\rho_1 L^4} + \frac{\kappa \pi^2}{\rho_2 L^2} \right]^2}{\frac{16\kappa^3 \pi^6}{\rho_1^2 \rho_2 L^6} + \frac{8\kappa^2 \pi^4}{\rho_1 \rho_2 L^4} + \frac{2\kappa^2 \pi^2}{\rho_2^2 L^2}} \end{aligned}$$

Logo,

$$r = r(\epsilon) = \left\{ \frac{\frac{16\kappa^3 \pi^6}{\rho_1^2 \rho_2 L^6} + \frac{8\kappa^2 \pi^4}{\rho_1 \rho_2 L^4} + \frac{2\kappa^2 \pi^2}{\rho_2^2 L^2}}{\epsilon \left[\frac{2\kappa \pi^4}{\rho_1 L^4} + \frac{\kappa \pi^2}{\rho_2 L^2} \right]^2} \right\}^{1/8} < x.$$

■

Corolário 3.1.1. Se $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$, então, para todo $n \geq N_0$,

$$\lambda_n^+ \approx \lambda_n^-.$$

Com efeito, sabendo-se que $P_n^+ = \frac{[\lambda^+]^2}{\theta_n^2}$ e $P_n^- = \frac{[\lambda^-]^2}{\theta_n^2}$, podemos escrever

$$\lambda_n^+ = \theta_n \sqrt{P_n^+} \quad \text{e} \quad \lambda_n^- = \theta_n \sqrt{P_n^-}.$$

Da proposição anterior temos que $\sqrt{P_n^+} \approx \sqrt{P_n^-}$ para todo $n \geq N_0$, de onde segue o resultado. ■

Com base nos resultados anteriores, vimos que para todo $n \geq N_0$, sendo N_0 como na **Proposição 2.1.2**, obtemos a aproximação $\lambda_n^+ \approx \lambda_n^-$ desde que $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$. Note que, se

$\frac{b}{\rho_2} \neq \frac{\kappa}{\rho_1}$, teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n^+ - P_n^-) = \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right)^2 \left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1} \right)^{-1} = L^+ - L^- = \delta > 0.$$

Como pela **Proposição 2.1.2** (P_n) é decrescente, segue que

$$P_n^+ - P_n^- \geq \delta > 0,$$

ou seja, se as velocidades não forem iguais, não é possível obter uma aproximação para as ramificações λ_n^+ e λ_n^- do espectro ou, na melhor das hipóteses, caso δ seja muito pequeno, a aproximação $\lambda_n^+ \approx \lambda_n^-$, para n grande o suficiente, certamente não será tão boa quanto no caso em que as velocidades são iguais, visto que $P_n^+ - P_n^- \rightarrow 0$ se $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$. Note que, no caso em que supomos a igualdade das velocidades, ambas sequências (P_n^+) e (P_n^-) têm a mesma assintota. Os gráficos a seguir ilustram bem este fato.

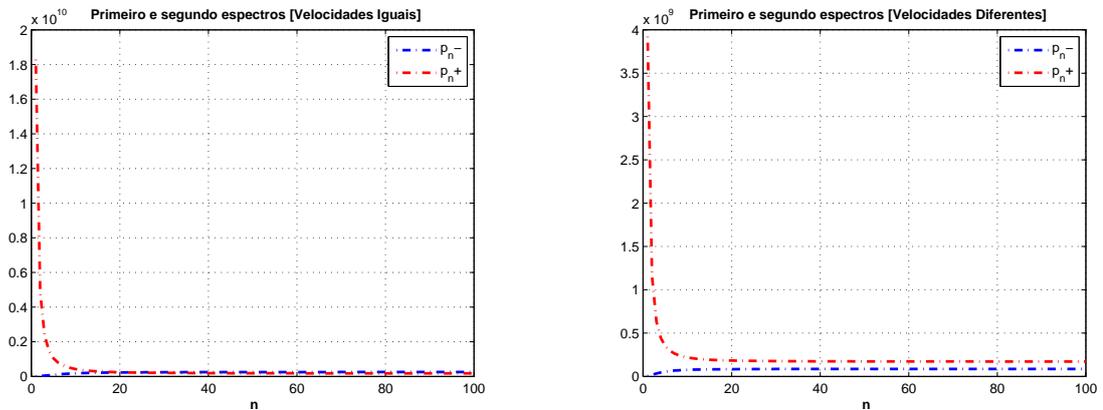


Figura 3.2: Comportamento assintótico de (P_n^+) e (P_n^-).

No próximo capítulo veremos o motivo pelo qual é tão importante obter uma boa aproximação para as ramificações λ_n^+ e λ_n^- do espectro.

Capítulo 4

Desigualdade de Observabilidade para o Sistema de Timoshenko

Consideremos a classe de soluções de (2.1) gerada pelas autofunções associadas aos autovalores $\lambda_n = -i\lambda_n^\pm$, isto é, para soluções da forma

$$\{\varphi(x, t), \psi(x, t)\} = \sum_{n \geq N_0} \left(a_n e^{-i\lambda_n^+ t} + b_n e^{-i\lambda_n^- t} \right) \{\sin(\theta_n x), B_n \cos(\theta_n x)\}. \quad (4.1)$$

onde a_n e b_n são os coeficientes de Fourier dados por

$$a_n = \frac{\kappa\theta_n + \frac{\kappa\pi}{L}}{n^3 \lambda_n^- (\rho_1 [\lambda_n^-]^2 + \kappa\theta_n^2)} \quad \text{e} \quad b_n = -\frac{\frac{\kappa\pi}{L}}{n^3 \lambda_n^- (\rho_1 [\lambda_n^-]^2 + \kappa\theta_n^2)}.$$

Neste capítulo vamos mostrar que existe uma constante positiva $C(T, \gamma)$ tal que

$$E(0) \leq C(T, \gamma) \int_0^T |\psi_t(L, t)|^2 dt \quad (4.2)$$

onde γ é uma constante positiva que limita inferiormente o gap para a sequência (λ_n^-) e $\psi(x, t)$ como em (4.1). Antes porvaremos alguns resultados que usaremos na demonstração da desigualdade (4.2).

Proposição 4.0.1. *Se $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$, então existe uma constante positiva γ tal que*

$$\lambda_{n+1}^- - \lambda_n^- > \gamma, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Escrevemos

$$\lambda_{n+1}^- - \lambda_n^- = \theta_{n+1} \sqrt{P_{n+1}^-} - \theta_n \sqrt{P_n^-}. \quad (4.3)$$

Note que, como $P_n^- < P_{n+1}^-$, temos que $\sqrt{P_n^-} < \sqrt{P_{n+1}^-}$, de onde obtemos

$$-\theta_n \sqrt{P_n^-} > -\theta_n \sqrt{P_{n+1}^-}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

De (4.3) e (4.4) temos

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}^- - \lambda_n^- &> (\theta_{n+1} - \theta_n) \sqrt{P_{n+1}^-} \\ &= \frac{\pi}{L} \sqrt{P_{n+1}^-} \\ &> \frac{\pi}{L} \sqrt{P_1^-} = \gamma \end{aligned}$$

onde

$$\gamma = \frac{\pi}{L} \left\{ \frac{\frac{2\kappa^2 \pi^2}{\rho_1^2 L^2}}{\frac{2\kappa \pi^2}{\rho_1 L^2} + \frac{\kappa}{\rho_2}} \right\}^{1/2} > 0.$$

■

Corolário 4.0.1. Se $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$, então

$$|\lambda_{n+1}^+ - \lambda_n^+| > \gamma, \quad \forall n \geq N_0.$$

Com efeito, do **Corolário 2.1.1** e da proposição anterior segue que

$$|\lambda_{n+1}^+ - \lambda_n^+| \approx \lambda_{n+1}^- - \lambda_n^- > \gamma$$

para todo $n \geq N_0$.

■

A proposição a seguir será muito útil na demonstração do próximo teorema.

Proposição 4.0.2. Para todo $n, k \in \mathbb{N}$ com $\theta_n = \frac{n\pi}{L}$, temos

$$\int_0^L \sin(\theta_n x) \sin(\theta_k x) dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & \text{se } n = k \\ 0, & \text{se } n \neq k \end{cases} \quad (4.5)$$

e

$$\int_0^L \cos(\theta_n x) \cos(\theta_k x) dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & \text{se } n = k \\ 0, & \text{se } n \neq k \end{cases} \quad (4.6)$$

Demonstração: Usaremos as seguintes relações trigonométricas:

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

Supondo que $n \neq k$, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin(\theta_n x) \sin(\theta_k x) dx &= \int_0^L \frac{1}{2} [\cos((\theta_n - \theta_k)x) - \cos((\theta_n + \theta_k)x)] dx \\ &= \frac{1}{2(\theta_n - \theta_k)} \sin((\theta_n - \theta_k)x) \Big|_0^L - \frac{1}{2(\theta_n + \theta_k)} \sin((\theta_n + \theta_k)x) \Big|_0^L \\ &= \frac{1}{2(\theta_n - \theta_k)} \left[\sin((n - k)\pi) - \sin\left(\frac{(n - k)\pi}{L} 0\right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2(\theta_n + \theta_k)} \left[\sin((n + k)\pi) - \sin\left(\frac{(n + k)\pi}{L} 0\right) \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^L \sin(\theta_n x) \sin(\theta_k x) dx = 0.$$

Se $n = k$, temos

$$\int_0^L \sin(\theta_n x) \sin(\theta_n x) dx = \int_0^L \sin^2(\theta_n x) dx = \int_0^L \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\theta_n x)}{2} \right) dx,$$

de onde obtemos

$$\int_0^L \sin^2(\theta_n x) dx = \frac{L}{2}.$$

Para a integral (4.6) a demonstração é análoga. ■

As relações (4.5) e (4.6) são chamadas de Relações de Ortogonalidade para senos e cossenos.

Seja $\psi(x, t)$ como em (4.1). Temos que

$$|\psi_t(L, t)|^2 = \left| \sum_{n \geq N_0} \left(a_n \lambda_n^+ e^{-i\lambda_n^+ t} + b_n \lambda_n^- e^{-i\lambda_n^- t} \right) B_n (-1)^n \right|^2.$$

A partir de agora vamos representar λ_n^- por λ_n , para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lambda_n^+ \approx \lambda_n^- = \lambda_n$, para todo $n \geq N_0$ se $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$, podemos escrever

$$|\psi_t(L, t)|^2 \approx \left| \sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n) \lambda_n B_n (-1)^n e^{-i\lambda_n t} \right|^2. \quad (4.7)$$

Lema 4.0.1. *Suponhamos que $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$. Então existem constantes positivas $C_1(T, \gamma)$ e $C_2(T, \gamma)$ tais que*

$$C_1(T, \gamma) \sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 \leq \int_0^T |\psi_t(L, t)|^2 dt \leq C_2(T, \gamma) \sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 \quad (4.8)$$

para todo $T > T_0 = \frac{2\pi}{\gamma}$, onde

$$\gamma = \frac{\pi}{L} \left\{ \frac{\frac{2\kappa^2 \pi^2}{\rho_1^2 L^2}}{\frac{2\kappa \pi^2}{\rho_1 L^2} + \frac{\kappa}{\rho_2}} \right\}^{1/2} > 0.$$

Demonstração: Sabendo-se que $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$, temos que

$$|\psi_t(L, t)|^2 \approx \left| \sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n) \lambda_n B_n (-1)^n e^{-i\lambda_n t} \right|^2.$$

Da **Proposição 4.0.1** temos que $\lambda_{n+1} - \lambda_n > \gamma$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para provar o lema, basta mostrar que a sequência $x_n = (a_n + b_n) \lambda_n B_n (-1)^n$ pertence a l^2 , ou seja,

$$\sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 < \infty.$$

Daí, o Teorema de Ingham garante o resultado. De fato,

$$\begin{aligned} (a_n + b_n) \lambda_n B_n (-1)^n &= \left\{ \frac{\kappa \theta_n + \frac{\kappa \pi}{L}}{n^3 \lambda_n^- (\rho_1 [\lambda_n^-]^2 + \kappa \theta_n^2)} - \frac{\frac{\kappa \pi}{L}}{n^3 \lambda_n^- (\rho_1 [\lambda_n^-]^2 + \kappa \theta_n^2)} \right\} \lambda_n B_n (-1)^n \\ &= \left\{ \frac{\kappa \theta_n}{n^3 \lambda_n^2 (\rho_1 \lambda_n^2 + \kappa \theta_n^2)} \right\} \lambda_n B_n (-1)^n \\ &= \frac{\kappa \theta_n}{n^3 (\rho_1 \lambda_n^2 + \kappa \theta_n^2)} \frac{\rho_1 \lambda_n^2 + \kappa \theta_n^2}{\kappa \theta_n} (-1)^{n+1} = \frac{1}{n^3} (-1)^{n+1}, \quad n \geq N_0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 = \sum_{n \geq N_0} \frac{1}{n^6} < \infty.$$

Então, pelo Teorema de Ingham, existem constantes positivas $C_1(T, \gamma)$ e $C_2(T, \gamma)$ tais que

$$C_1(T, \gamma) \sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 \leq \int_0^T |\psi_t(L, t)|^2 dt \leq C_2(T, \gamma) \sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2$$

para todo $T > T_0$ e o lema está provado. ■

Lema 4.0.2. *Existem constantes positivas M_B , M_λ e M_P tais que*

$$\left| \frac{1}{B_n^2} \right| \leq M_B, \quad \left| \frac{1}{\lambda_n} \right| \leq M_\lambda \quad e \quad \left| \frac{1}{P_n^-} \right| \leq M_P \quad (4.9)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Note que de 3.8 e 3.18, temos

$$B_n = - \left[\frac{\rho_1 \lambda_n^2 + \kappa \theta_n^2}{\kappa \theta_n} \right] = -\theta_n \left[\frac{\rho_1 P_n^- + \kappa}{\kappa} \right]$$

$$\lambda_n^2 \approx \frac{\frac{2\kappa^2}{\rho_1^2} \theta_n^4}{\frac{2\kappa}{\rho_1} \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} = \theta_n^2 \left[\frac{\frac{2\kappa^2}{\rho_1^2}}{\frac{2\kappa}{\rho_1} + \frac{\kappa}{\theta_n^2 \rho_2}} \right],$$

de onde vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty,$$

isto é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{B_n^2} \right) = 0.$$

Como (P_n^-) converge para $L^- \neq 0$, então $\left(\frac{1}{P_n^-} \right)$ é convergente. O resultado segue do fato de que seqüências convergentes são limitadas. ■

Agora podemos provar a desigualdade de observabilidade

Teorema 4.0.1. (Desigualdade de Observabilidade) *Se $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$, existe uma constante positiva $C(T, \gamma)$ tal que*

$$E(0) \leq C(T, \gamma) \int_0^T |\psi_t(L, t)|^2 dt$$

para todo $T > T_0 = \frac{2\pi}{\gamma}$, com γ como no **Lema 4.0.1**.

Demonstração: Como $\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1}$, pelo **Lema 4.0.1** temos que existe uma constante positiva $C_1(T, \gamma)$ tal que

$$\sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 \leq \frac{1}{C_1(T, \gamma)} \int_0^T |\psi_t(L, t)|^2 dt. \quad (4.10)$$

Faremos agora uma estimativa para $E(0)$ e a combinaremos com a desigualdade (4.10) para obter o resultado. A energia em $t = 0$ é dada por

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_1 |\varphi_t(x, 0)|^2 + \rho_2 |\psi_t(x, 0)|^2 + b |\psi_x(x, 0)|^2 + \kappa |\varphi_x(x, 0) + \psi(x, 0)|^2] dx,$$

onde φ e ψ são soluções conforme (4.1). Calculando suas respectivas derivadas no tempo e no espaço em $(x, 0)$ e substituindo na identidade anterior, escrevemos

$$\begin{aligned}
 2E(0) &= \int_0^L \rho_1 \left| \sum_{n \geq N_0} (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-) \sin(\theta_n x) \right|^2 dx \\
 &+ \int_0^L \rho_2 \left| \sum_{n \geq N_0} (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-) B_n \cos(\theta_n x) \right|^2 dx \\
 &+ \int_0^L b \left| \sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n) B_n \theta_n \sin(\theta_n x) \right|^2 dx \\
 &+ \int_0^L \kappa \left| \sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n) (\theta_n + B_n) \cos(\theta_n x) \right|^2 dx.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Calculamos separadamente cada integral de (4.11) usando as relações de ortogonalidade. Nos cálculos a seguir, para evitar abuso de notação, iremos omitir o conjunto no qual variam os índices dos somatórios, porém ficará subentendido que os mesmos são contados a partir de N_0 .

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^L \rho_1 \left| \sum (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-) \sin(\theta_n x) \right|^2 dx \\
 &= \int_0^L \rho_1 \sum_{n=k} (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-)^2 \sin^2(\theta_n x) dx \\
 &+ \int_0^L \rho_1 \sum_{n \neq k} (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-) (a_k \lambda_k^+ + b_k \lambda_k^-) \sin(\theta_n x) \sin(\theta_k x) dx \\
 &= \rho_1 \sum_{n=k} (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-)^2 \int_0^L \sin^2(\theta_n x) dx \\
 &+ \rho_1 \sum_{n \neq k} (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-) (a_k \lambda_k^+ + b_k \lambda_k^-) \int_0^L \sin(\theta_n x) \sin(\theta_k x) dx
 \end{aligned}$$

Pelas relações de ortogonalidade, temos

$$I_1 = \frac{\rho_1 L}{2} \sum (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-)^2. \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^L \rho_2 \left| \sum_{n \geq N_0} (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-) B_n \cos(\theta_n x) \right|^2 dx \\
 &= \int_0^L \rho_2 \sum_{n=k} (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-)^2 B_n^2 \cos^2(\theta_n x) dx \\
 &+ \int_0^L \rho_2 \sum_{n \neq k} (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-) (a_k \lambda_k^+ + b_k \lambda_k^-) B_n B_k \cos(\theta_n x) \cos(\theta_k x) dx \\
 &= \rho_2 \sum_{n=k} (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-)^2 B_n^2 \int_0^L \cos^2(\theta_n x) dx \\
 &+ \rho_2 \sum_{n \neq k} (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-) (a_k \lambda_k^+ + b_k \lambda_k^-) B_n B_k \int_0^L \cos(\theta_n x) \cos(\theta_k x) dx
 \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$I_2 = \frac{\rho_2 L}{2} \sum (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-)^2 B_n^2. \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_0^L b \left| \sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n) B_n \theta_n \sin(\theta_n x) \right|^2 dx \\
 &= \int_0^L b \sum_{n=k} (a_n + b_n)^2 B_n^2 \theta_n^2 \sin^2(\theta_n x) dx \\
 &+ \int_0^L b \sum_{n \neq k} (a_n + b_n) (a_k + b_k) B_n B_k \theta_n \theta_k \sin(\theta_n x) \sin(\theta_k x) dx \\
 &= b \sum_{n=k} (a_n + b_n)^2 B_n^2 \theta_n^2 \int_0^L \sin^2(\theta_n x) dx \\
 &+ b \sum_{n \neq k} (a_n + b_n) (a_k + b_k) B_n B_k \theta_n \theta_k \int_0^L \sin(\theta_n x) \sin(\theta_k x) dx
 \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$I_3 = \frac{bL}{2} \sum (a_n + b_n)^2 B_n^2 \theta_n^2. \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_0^L \kappa \left| \sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n)(\theta_n + B_n) \cos(\theta_n x) \right|^2 dx \\
 &= \int_0^L \kappa \sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n)^2 (\theta_n + B_n)^2 \cos^2(\theta_n x) dx \\
 &\quad + \int_0^L \kappa \sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n)(a_k + b_k)(\theta_n + B_n)(\theta_k + B_k) \cos(\theta_n x) \cos(\theta_k x) dx \\
 &= \kappa \sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n)^2 (\theta_n + B_n)^2 \int_0^L \cos^2(\theta_n x) dx \\
 &\quad + \kappa \sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n)(a_k + b_k)(\theta_n + B_n)(\theta_k + B_k) \int_0^L \cos(\theta_n x) \cos(\theta_k x) dx \\
 \Rightarrow & \quad I_4 = \frac{L\kappa}{2} \sum (a_n + b_n)^2 (\theta_n + B_n)^2. \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Substituindo (4.12) – (4.15) em 4.11, temos

$$\begin{aligned}
 2E(0) &= \frac{\rho_1 L}{2} \sum (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-)^2 + \frac{\rho_2 L}{2} \sum (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-)^2 B_n^2 \\
 &\quad + \frac{bL}{2} \sum_{n=k} (a_n + b_n)^2 B_n^2 \theta_n^2 + \frac{\kappa L}{2} \sum (a_n + b_n)^2 (\theta_n + B_n)^2
 \end{aligned}$$

Como $\lambda_n^+ \approx \lambda_n^- = \lambda_n$, para todo $n \geq N_0$, temos que

$$\begin{aligned}
 2E(0) &\approx \frac{\rho_1 L}{2} \sum (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 \frac{1}{B_n^2} + \frac{\rho_2 L}{2} \sum (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 \\
 &\quad + \frac{bL}{2} \sum_{n=k} (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 \frac{1}{P_n} + \frac{\kappa L}{2} \sum (a_n + b_n)^2 (\theta_n + B_n)^2. \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young, escrevemos

$$\theta_n B_n \leq |\theta_n B_n| \leq \frac{\theta_n^2}{2} + \frac{B_n^2}{2}.$$

Dai segue que

$$\begin{aligned}
 \sum (a_n + b_n)^2 (\theta_n + B_n)^2 &= \sum (a_n + b_n)^2 (\theta_n^2 + B_n^2 + 2\theta_n B_n) \\
 &\leq 2 \sum (a_n + b_n)^2 (\theta_n^2 + B_n^2) \\
 &= 2 \sum (a_n + b_n)^2 \theta_n^2 + 2 \sum (a_n + b_n)^2 B_n^2,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum (a_n + b_n)^2 (\theta_n + B_n)^2 \leq 2 \sum (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 \frac{1}{P_n^-} \frac{1}{B_n^2} + 2 \sum (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 \frac{1}{\lambda_n^2}. \quad (4.17)$$

De (4.16) e (4.17) obtemos

$$\begin{aligned} 2E(0) &\leq \frac{\rho_1 L}{2} \sum (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 \frac{1}{B_n^2} + \frac{\rho_2 L}{2} \sum (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 \\ &+ \frac{bL}{2} \sum_{n=k} (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 \frac{1}{P_n^-} + \kappa L \sum (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 \frac{1}{P_n^-} \frac{1}{B_n^2} \\ &+ \kappa L \sum (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2 \frac{1}{\lambda_n^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Pelo **Lema 4.0.2** vem

$$E(0) \leq C' \sum_{n \geq N_0} (a_n + b_n)^2 \lambda_n^2 B_n^2, \quad (4.19)$$

onde

$$C' = \frac{L}{4} \{ \rho_1 M_B + \rho_2 + b M_P + 2\kappa (M_P M_B + M_\lambda) \}.$$

De 4.10 e 4.19 segue que

$$E(0) \leq \frac{\bar{C}}{C_1(T, \gamma)} \int_0^T |\psi_t(L, t)|^2 dt$$

e o teorema está provado. ■

Considerações Finais

Neste trabalho provamos uma desigualdade de observabilidade para um sistema de Timoshenko com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann. Partindo da análise espectral do sistema, obtemos um resultado que nos garante que as ramificações λ_n^+ e λ_n^- dos autovalores $\lambda_n = \pm\lambda_n^\pm$ podem ser aproximadas para n suficientemente grande desde que as velocidades sejam iguais. Daí, usando o Teorema de Ingham como ferramenta essencial, obtemos uma estimativa a partir da qual chegamos à desigualdade de observabilidade para uma classe de soluções em série de Fourier do sistema gerada pelas autofunções associadas aos autovalores $\lambda_n = \pm\lambda_n^\pm$.

Referências Bibliográficas

- [1] YOUSSEF, W. *Contrôle et Stabilisation de Systèmes Élastiques Couplés*. 192 f. Tese(Doutorado em Matemática Aplicada) - Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz, Université Paul Verlaine, Metz, 2009.
- [2] INGHAM, A.E. *Some Trigonometrical Inequalities with Applications to the Theory of Series*. *Mathematische Zeitschrift*, 41:367-379, 1936.
- [3] LIONS, J.L. *Contrôlabilité Exact de Systèmes Distribués*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.302, 1986, pp. 471-475.
- [4] ZUAZUA, E. *Controlabilidad Exacta Y Estabilizacion de la Ecuacion de Ondas*. Madrid. 194 f.
- [5] MEDEIROS, L.A.; MIRANDA, M.M.; LOUREDO, A.T. *Introduction to Exact Control Theory: Method HUM*. Campina Grande, EDUEPB, 2013. 153 f.
- [6] ALMEIDA JÚNIOR, D. S; RIBEIRO, L. M.; CAVALCANTI, M. M.; SANTOS, M. L. *Observability Inequality for the Space Semi-discretization in Finite-Difference of the 1-D Timoshenko Systems*, Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.
- [7] RAMOS, A. J. A. *Análise Numérica em Diferenças Finitas da Desigualdade de Observabilidade de Sistemas Hiperbólicos Conservativos*. 134f. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2015.
- [8] MURILLO, K.P. *Controlabilidade Exata e Aproximada da Equação da Onda Linear*.119f. Trabalho de Conclusão de Curso - Centro de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2008.
- [9] BARBOSA, R.C. *Desigualdade de Ingham Aplicada à Observabilidade para Sistemas de Timoshenko*. 34f. Trabalho de Conclusão de Curso - Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2015.
- [10] FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, 4ª Edição. Rio de Janeiro, IMPA, 2012.