



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - PPGME

José Luiz Solon Sampaio

*Análise de Estabilidade Qualitativa da Equação de Burgers
em Malha Deslocada*

Belém
2016

José Luiz Solon Sampaio

*Análise de Estabilidade Qualitativa da Equação de Burgers
em Malha Deslocada*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da UFPA, como requisito para a obtenção do grau de mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

PPGME - PDM - UFPA

Belém

2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Sampaio, José Luiz Solon, 1993-
Análise de estabilidade qualitativa da equação de
burgers em malha deslocada / José Luiz Solon Sampaio. -
2016.

Orientador: Dilberto da Silva Almeida
Junior.

Dissertação (Mestrado) - Universidade
Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e
Naturais, Programa de Pós-Graduação em
Matemática e Estatística, Belém, 2016.

1. Equação de Burgers. 2. Diferenças
finitas. 3. Energia-Estabilidade qualitativa. 4.
Equação de Burgers-Malha deslocada. I. Título.

CDD 22. ed. 515.3534

José Luiz Solon Sampaio

*Análise de Estabilidade Qualitativa da Equação de Burgers
em Malha Deslocada*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da UFPA, como requisito para a obtenção do grau de mestre em matemática.

Aprovado em 7 de Abril de 2016

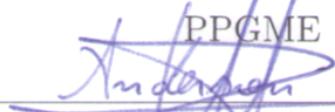
Banca Examinadora


Prof. Dr. Dilberto da Siva Almeida Júnior - Orientador
UFPA



Prof. Dr. Mauro de Lima Santos
UFPA


Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo
PPGME


Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
UFPA Salinas

*Dedico este trabalho a todos que acreditaram
em mim.*

Resumo

Neste trabalho faremos a análise de estabilidade qualitativa em relação a energia para um esquema numérico de diferenças finitas não-usual que descreve numericamente a equação de Burgers em malha deslocada. Para um esquema numérico não-usual em diferenças finitas combinado com o esquema θ , asseguramos que para $\theta \in [1/2, 1]$ mais condições de contorno do tipo implícita em malha deslocada, a energia numérica possui o mesmo comportamento decrescente da energia no caso contínuo. Portanto, asseguramos que o esquema numérico é qualitativamente estável com relação a energia.

Palavras-chave: Equação de Burgers; Malha deslocada; Estabilidade qualitativa; θ -esquema; Energia.

Abstract

In this work we will do the qualitative stability analysis in relation to energy for a non-standard numerical scheme in finite difference describing numerically the Burgers equation in staggered grid. For an non-standard scheme in finite difference combined with the θ scheme we assure that, for $\theta \in [1/2, 1]$ more boundary conditions of the implicit type in staggered grid, the numeric energy has the same decreasing behavior of energy as the continuous case. Therefore, we assure that the numerical scheme is qualitatively stable with respect to energy.

Keywords: Burgers Equation; Staggered grid; Qualitative stability; θ -scheme; Energy.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por todas as bênçãos que derramou ao longo da minha vida.

Agradeço a minha família, por sempre me apoiarem e auxiliarem em meus sonhos.

Agradeço a meu orientador, Dilberto Júnior, por sua disposição em me orientar.

Agradeço a meus amigos que sempre estiveram comigo em todos os momentos.

Agradeço a meus professores por todo o conhecimento transmitido.

Por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente auxiliaram em minha vida acadêmica.

“Quem sabe faz a hora, não espera acontecer”.

Geraldo Vandré

Sumário

1	Apresentação de alguns resultados	4
2	Equação do calor	9
2.1	Energia do problema contínuo	9
2.2	Estabilidade qualitativa	10
2.3	Energia do problema discreto	11
3	Equação do calor em malha deslocada	14
3.1	Malha deslocada	14
3.2	Problema do calor em malha deslocada	15
4	Equação de Burgers	19
4.1	Apresentação do problema	19
4.2	Energia da equação de Burgers	19
4.3	Modelo discreto em diferenças finitas	21
4.4	Energia discreta da equação de Burgers	21
4.4.1	Condições de Contorno Explícitas	23
4.4.2	Condições de contorno implícitas	24
4.4.3	Desigualdade de Poincaré discreta	26
4.5	Simulação Numérica	32
5	Conclusão e problemas em aberto	33
	Referências Bibliográficas	35

Introdução

Ao estudar métodos numéricos aplicados em Equações Diferenciais Parciais buscamos sempre que a solução do nosso esquema convirja para a solução do problema contínuo. No caso do método de diferenças finitas, o principal resultado que nos leva a essa convergência para problemas lineares é o Teorema da Equivalência de Lax [6], que afirma o seguinte:

Teorema da equivalência de Lax: *Um esquema de diferenças consistente é convergente se, e somente se, é estável.*

A partir deste teorema a análise de estabilidade se tornou um dos tópicos mais importantes para o estudo de métodos numéricos. Esta análise pode ser feita de várias formas como por exemplo, Análise de estabilidade de Fourier, Análise espectral, entre outras. Em alguns casos a análise de estabilidade apresenta muita dificuldade ou não pode ser feita, como no caso das equações não-lineares. Nestes casos fazemos uma análise que nos dá apenas condição necessária mas não suficiente de estabilidade. Um exemplo é a análise de estabilidade qualitativa em relação a uma propriedade específica ao nível do contínuo, esta análise tem como objetivo definir condições para que a solução do esquema de diferenças finitas satisfaça uma determinada propriedade da solução do problema contínuo.

Neste trabalho faremos uma análise de estabilidade qualitativa em relação a energia de um esquema de diferenças finitas em malha deslocada para a equação de Burgers dada por

$$u_t + \psi(t)uu_x - \varphi(t)u_{xx} = 0, (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, t \in (0, T], \quad (2)$$

$$u(x, 0) = g(x), x \in [0, L], \quad (3)$$

onde, $\psi(t)$ e $\varphi(t)$ não identicamente nulas e $\varphi(t) \geq 0$.

Esta equação é importante por se tratar de uma simplificação da equação de Navier-Stokes e modelar fenômenos físicos a exemplo de dinâmica de gases, hidrodinâmica e acústica [1].

Nosso trabalho está dividido basicamente em quatro capítulos. Nos três primeiros, descrevemos os resultados que formam a base de nossas pesquisas. O último capítulo é um resultado novo que decorreu de nossas investigações.

No primeiro capítulo enunciaremos alguns resultados que serviram de motivação e guia para que nosso trabalho fosse feito. Estes resultados estão em dois artigos, em que o primeiro de Oishi *te al* [2] nos apresenta a malha deslocada, malha esta que será utilizada em nossas análises e o segundo artigo de Anguelov *et al* [1], faz a análise de estabilidade qualitativa do mesmo problema que será apresentado, entretanto o faz em malha comum.

No segundo capítulo faremos a análise da estabilidade qualitativa em relação a energia para a equação do calor em malha comum, no qual apresentaremos a ideia desta análise ao leitor. Concluiremos que neste problema apesar de ser uma condição necessária, a análise qualitativa de estabilidade nos apresenta a mesma condição encontrada na análise de Von Neumann que nos dá condição necessária e suficiente para a estabilidade [3].

No terceiro capítulo faremos a apresentação da malha deslocada ao leitor. Nesta malha temos uma nova análise visto que os contornos do problema contínuo não coincidem com o contorno do problema discreto. Neste caso, definimos novas condições de contorno satisfazendo condições específicas, e assim alterando a análise do comportamento assintótico da energia.

No quarto capítulo faremos a análise da estabilidade qualitativa em relação a energia da equação de diferenças finitas que discretiza a equação de Burgers em malha deslocada. Nesta análise faremos uma nova apresentação da desigualdade de Poincaré na forma numérica, visto que a versão clássica numérica de tal desigualdade exige condições de contorno nulas, que não necessariamente ocorrem em malha deslocada.

1 Apresentação de alguns resultados

Neste capítulo demonstraremos alguns resultados de dois artigos que foram fundamentais para este trabalho. O primeiro é

Stability analysis of Crank-Nicolson and Euler schemes for time-dependent diffusion equations,

dos autores Oishi, Yuan, Cuminato e Stewart [2]. Neste artigo os autores fazem a análise do critério de estabilidade para a equação de diferenças finitas que descreve a difusão com coeficientes dependentes do tempo. O diferencial se dá no domínio discretizado, o qual muda consideravelmente o padrão para o critério de estabilidade.

O segundo é o artigo de Anguelov, Djoko e Lubuma [1], intitulado

Energy Properties Preserving Schemes for Burgers' Equation,

nele os autores fazem uma análise de estabilidade qualitativa em relação a energia, ou seja definir condições para que o comportamento da energia da equação de Burgers no contínuo, seja o mesmo da equação de diferenças finitas que a descreve. Tal equação tem como característica o fato desta não ser linear, o que não nos possibilita uma análise usual de estabilidade. Por este motivo os autores recorreram a análise de estabilidade qualitativa com relação a energia.

No artigo de Oishi *et al.* [2] os autores nos apresentam a malha deslocada em diferenças finitas que descrevem o seguinte problema linear:

$$u_t = d(t)u_{xx} + q(x, t), x \in [0, 1] \text{ e } t \in [0, T], \quad (1.1)$$

$$u(0, 1) = u(1, t) = 0, t \in [0, T], \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = u_0, x \in [0, 1], \quad (1.3)$$

onde $d(t) > 0$ é o coeficiente de difusão e $q(x, t)$ é o termo fonte.

A equação de diferenças finitas é dada por,

$$u_i^{n+1} - \theta \frac{d^{n+\theta} \delta t}{\delta x^2} (u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}) = u_i^n - (\theta - 1) \frac{d^{n+\theta} \delta t}{\delta x^2} (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) + \delta t q_i^{n+\theta},$$

onde $u_i^n \approx u(x_i, t_n)$, $x_i = (i - 1/2)\delta x$, $t_n = n\delta t$ e $d^{n+\theta} = d((n + \theta)\delta t)$, com θ podendo assumir três valores:

- $\theta = 0$ - Euler Explícito;
- $\theta = 1$ - Euler Implícito;
- $\theta = 1/2$ - Crank-Nicolson.

Entretanto ao definir a malha deslocada, os autores encontraram um problema: o contorno da malha deslocada não coincide com o contorno do problema contínuo e para resolver este problema fez-se uso de uma interpolação polinomial, por exemplo

$$P_1(x) = \frac{1}{\delta x}((x - x_0)u_1^r - (x - x_1)u_0^r),$$

onde r descreve um passo de tempo genérico. Aplicando em $x = 0$, obtemos

$$0 = P_1(0) = \frac{1}{2}(u_1^r + u_0^r) \Rightarrow u_1^r = -u_0^r.$$

A partir desta análise os autores obtiveram duas novas condições de contorno: Condições explícitas dadas por

$$u_{M+1}^{n+1} = -u_M^n, \quad u_{M+1}^n = -u_M^n, \quad u_0^{n+1} = -u_1^n, \quad u_0^n = -u_1^n.$$

e condições implícitas dadas por

$$u_{M+1}^{n+1} = -u_M^{n+1}, \quad u_{M+1}^n = -u_M^n, \quad u_0^{n+1} = -u_1^{n+1}, \quad u_0^n = -u_1^n.$$

Algo que não será utilizado neste trabalho mas vale ser destacada é análise de estabilidade feita por Oishi *et al.* [2], que consiste em uma análise espectral a partir da equação matricial

$$A(\sigma^n)\mathbf{u}^{n+1} = B(\sigma^n)\mathbf{u}^n + \mathbf{c}^{n+\theta},$$

com

$$\sigma^n = (d^{n+\theta})\delta t / (\delta x)^2.$$

Escrito desta forma, pode-se fazer a análise espectral de estabilidade e determinar condições de fazer com que o erro convirja para zero. Aplicando essa técnica os autores conseguiram a seguinte tabela de critérios de estabilidade para a equação de diferenças finitas em malha deslocada:

Condições de Contorno	Método de Crank-Nicolson	Euler Implícito	Euler Explícito
Explícita	Condicionalmente estável com $0 < \sigma < 2$	Incondicionalmente estável	Condicionalmente estável com $0 < \sigma < 1/2$
Implícita	Incondicionalmente estável	Incondicionalmente estável	Não se aplica

No artigo de Anguelov *et al.* [1], os autores apresentam o estudo de estabilidade qualitativa com relação a energia da equação de Burgers dada por

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = f, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (1.4)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (1.5)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1.6)$$

com $\nu > 0$, f uma fonte externa e u^0 uma função dependente apenas de x .

Com o problema apresentado, os autores demonstraram um teorema muito importante, que descreve o comportamento da energia do problema contínuo.

Teorema 1.0.1. *Assuma que f é limitada no tempo, isto é, $\sup \|f(t)\|_0^2 < \infty$. Então, a energia $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx$ é limitada no tempo por uma constante que é linearmente depende da energia inicial $E(u^0)$ e do termo $\sup \|f(t)\|_0^2$ da seguinte forma:*

(P1) Se $f = 0$ e $\nu > 0$, então a energia é monótona decrescente, i.e.,

$$E(t_2) \leq E(t_1), \quad \text{para } 0 \leq t_1 \leq t_2.$$

(P2) Se $f \neq 0$ e $\nu > 0$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) \leq M \sup \|f(t)\|_0^2.$$

Com o teorema demonstrado, se inicia o estudo para a equação de diferenças finitas, que descreve (1.4), a qual é dada por

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \gamma_i(u^{n+\theta}) - \nu \frac{u_{i+1}^{n+\theta} - 2u_i^{n+\theta} + u_{i-1}^{n+\theta}}{\Delta x^2} = f_i^{n+\theta}, \quad (1.7)$$

onde $u_i^{n+\theta} = \theta u_i^{n+1} + (1 - \theta)u_i^n$. Para o termo não-linear os autores propõem a seguinte

formulação não-usual

$$\begin{aligned}
uu_x \approx \gamma_i(u^{n+\theta}) &= (\alpha_1 u_{i+1}^{n+\theta} + \alpha_2 u_i^{n+\theta} + \alpha_3 u_{i-1}^{n+\theta}) \frac{u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta}}{\Delta x} + \\
&+ (\beta_1 u_{i+1}^{n+\theta} + \beta_2 u_i^{n+\theta} + \beta_3 u_{i-1}^{n+\theta}) \frac{u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta}}{\Delta x},
\end{aligned} \tag{1.8}$$

esta formulação é adotada para que posteriormente a energia deste termo zere de modo análogo ao termo discretizado no caso contínuo.

Define-se que um método é qualitativamente estável com relação a energia, quando a energia da equação de diferenças finitas assume o mesmo comportamento da energia do problema contínuo. Neste caso, mostrar que a energia é decrescente, preservando a propriedade da versão contínua.

O primeiro passo é determinar as constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ e β_3 de modo que a energia do termo $\gamma_i(u^{n+\theta})$ seja identicamente nula. Nessa direção, concluímos que

$$\begin{aligned}
\alpha_2 + \alpha_3 &= \frac{1}{3}, \\
\alpha_2 &= \beta_2, \\
\alpha_3 &= \beta_1, \\
\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 &= \beta_3.
\end{aligned}$$

Denotando $\alpha_1 = p$ e $\alpha_2 = q$ temos,

$$\begin{aligned}
\gamma_i &= (pu_{i+1}^{n+\theta} + qu_i^{n+\theta} + (\frac{1}{3} - q) u_{i-1}^{n+\theta}) \frac{u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta}}{\Delta x} + \\
&+ ((\frac{1}{3} - q) u_{i+1}^{n+\theta} + qu_i^{n+\theta} + (\frac{1}{3} - p) u_{i-1}^{n+\theta}) \frac{u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta}}{\Delta x}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Definidas as condições para a aproximação do termo não linear, foi proposto e provado o teorema equivalente ao da energia do problema contínuo, dado da seguinte forma:

Teorema 1.0.2. *O esquema (1.7), com γ_i escrito como (1.9) para, $p, q \in \mathbb{R}$, é qualitativamente estável com relação as propriedades afirmadas no Teorema 1.0.1 nas seguintes formas específicas:*

(i) *Para $\nu \neq 0, f = 0$ e $\theta \in [1/2, 1]$, a energia discreta $E(\mathbf{u}^n)$ é decrescente quando n aumenta e nós temos,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\mathbf{u}^n) = 0;$$

(ii) *Se $\nu \neq 0, f$ é limitada independente do tempo, ou seja, $\|f\|_{l_2}^2 \leq K$ e $\theta \in [1/2, 1]$ então a energia discreta $E(\mathbf{u}^n)$ satisfaz a desigualdade, dada por*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\mathbf{u}^n) \leq \frac{K^2}{(2c_{dp}^2 \nu^2) [(1 - \theta)(1 - \theta - \frac{\theta}{\epsilon}) + (\theta(\theta - (1 - \theta)\epsilon))]} \text{ com } \frac{1 - \theta}{\theta} < \epsilon < \frac{\theta}{1 - \theta}$$

Podemos observar que a estabilidade qualitativa para $\theta \in [0, 1/2)$ não foi demonstrada neste artigo, este problema ainda está em aberto. Nossos estudos nos levam a crer que para demonstrar este caso, deverá ser aplicada uma técnica diferente da utilizada pelos autores no artigo.

2 Equação do calor

Neste capítulo faremos a análise de estabilidade qualitativa para a equação de diferenças finitas do esquema de Euler Explícito aplicado a equação do calor. A escolha deste foi feita por já ser um problema muito conhecido e com muitos resultados na literatura, com isso poderíamos avaliar as condições de estabilidade qualitativa, em relação as condições do critério de estabilidade.

2.1 Energia do problema contínuo

Considere uma barra retilínea, de seção uniforme, homogênea de comprimento L e vamos supor que a superfície lateral desta barra esteja termicamente isolada. Além disso, vamos considerar que o comprimento desta barra seja muito maior que o seu diâmetro, de modo que a temperatura em cada seção transversal possa ser considerada constante. Nestas condições podemos modelar a temperatura u na posição x e instante t . Supondo temperaturas nulas nas extremidades da barra, a temperatura após um determinado tempo t na posição x obedece a bem conhecida equação diferencial parcial

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, x \in (0, L), t > 0, \quad (2.1)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, L). \quad (2.3)$$

Definido o problema podemos propor e provar o seguinte teorema, com o intuito de observar o comportamento da energia.

Teorema 2.1.1. *Considere o problema de difusão de calor (2.1)-(2.3), definindo a energia como*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx, \quad (2.4)$$

então vale a seguinte desigualdade,

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.5)$$

Demonstração: Para a análise de energia desta equação, multiplicaremos (2.1) por u e integraremos com relação a x no intervalo $[0, L]$. Obtemos então,

$$\int_0^L uu_t dx = \alpha^2 \int_0^L uu_{xx} dx.$$

Analisando o lado esquerdo da igualdade, obtemos

$$\int_0^L uu_t dx = \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{u^2}{2} dx,$$

de onde segue que

$$\int_0^L uu_t dx = \frac{d}{dt} E(u).$$

Por outro lado, tendo as condições de contorno (2.2), obtemos

$$\int_0^L uu_{xx} dx = uu_x|_0^L - \int_0^L u_x^2 dx = - \int_0^L u_x^2 dx,$$

e dessa forma,

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L u_x^2 dx \leq 0.$$

Logo,

$$E(t_2) \leq E(t_1),$$

sempre que $t_1 \leq t_2$. Portanto

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t \geq 0.$$

■

2.2 Estabilidade qualitativa

O estudo de estabilidade qualitativa é importante, pois determina condições necessárias para a estabilidade, estabilidade esta que associada a consistência, faz da solução da equação de diferenças finitas convergente para a solução do problema contínuo através do Teorema de Equivalência de Lax [6]. Vamos então definir estabilidade qualitativa.

Definição 2.2.1. Seja P uma propriedade da solução exata u de uma equação diferencial. Um esquema numérico que produz uma sequência u_i^n de soluções aproximadas para u é dito qualitativamente estável com respeito a P se, para todo Δx e Δt , a solução discreta reproduz a propriedade P . [1]

Neste caso, a propriedade que reproduziremos será o decrescimento da energia como visto em (2.5).

2.3 Energia do problema discreto

Definimos a equação de diferenças finitas que descreve a equação do calor (2.1) por,

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad (2.6)$$

com $r = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2}$ e condições de contorno $u_0^n = u_{M+1}^n = 0$. Definimos sua energia por

$$E^n = \Delta x \sum_{i=1}^M (u_i^n)^2. \quad (2.7)$$

Desta forma, podemos enunciar e provar o seguinte teorema:

Teorema 2.3.1. *A equação de diferenças finitas dada por (2.6) que descreve a equação do calor (2.1) com aproximação avançada no tempo, é qualitativamente estável com relação a energia (2.7), ou seja,*

$$E^{n+1} \leq E^n, \quad \forall n = 0, 1, \dots \quad (2.8)$$

desde que

$$r \leq \frac{1}{2}.$$

Demonstração: Para esta demonstração vamos analisar a diferença entre a energia discreta nos tempo $n + 1$ e n , para então definir o critério para a estabilidade qualitativa.

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} E^{n+1} - E^n &= \Delta x \sum_{i=1}^M [(u_i^{n+1})^2 - (u_i^n)^2] \\ &= \Delta x \sum_{i=1}^M (u_i^{n+1} + u_i^n)(u_i^{n+1} - u_i^n) \\ &= r \Delta x \sum_{i=1}^M (u_i^{n+1} + u_i^n)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \\ &= r \Delta x \sum_{i=1}^M [(u_i^n)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - 2u_i^{n+1}u_i^n + u_i^{n+1}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)] \\ &= r \Delta x \left[\sum_{i=1}^M (u_i^n)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - 2 \sum_{i=1}^M u_i^{n+1}u_i^n + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^M u_i^{n+1}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) \right] \quad (2.9) \end{aligned}$$

Analisando o primeiro somatório a direita da igualdade temos,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^M (u_i^n)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) &= \sum_{i=1}^M (u_{i+1}^n u_i^n - 2(u_i^n)^2 + u_i^n u_{i-1}^n) \\
&= \sum_{i=0}^M [u_{i+1}^n u_i^n - (u_i^n)^2 - (u_{i+1}^n)^2 + u_{i+1}^n u_i^n] \\
&= -\sum_{i=0}^M [(u_{i+1}^n)^2 - 2u_{i+1}^n u_i^n + (u_i^n)^2] \\
&= -\sum_{i=0}^M (u_{i+1}^n - u_i^n)^2, \tag{2.10}
\end{aligned}$$

enquanto os outros somatórios são dados por

$$-2 \sum_{i=1}^M u_i^{n+1} u_i^n = -2 \sum_{i=1}^M (u_i^n)^2 + 2r \sum_{i=0}^M (u_{i+1}^n - u_i^n)^2, \tag{2.11}$$

$$\sum_{i=1}^M u_i^{n+1} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) \leq \sum_{i=1}^M [(u_i^{n+1})^2 + (u_i^n)^2]. \tag{2.12}$$

Aplicando (2.10),(2.11) e (2.12) em (2.9) temos,

$$\begin{aligned}
E^{n+1} - E^n &\leq r \Delta x \left\{ -\sum_{i=0}^M (u_{i+1}^n - u_i^n)^2 - 2 \sum_{i=1}^M (u_i^n)^2 + 2r \sum_{i=0}^M (u_{i+1}^n - u_i^n)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^M [(u_i^{n+1})^2 + (u_i^n)^2] \right\} \\
&\leq r (E^{n+1} - E^n) + r(2r - 1) \Delta x \sum_{i=1}^M (u_{i+1}^n - u_i^n)^2,
\end{aligned}$$

logo,

$$(1 - r) (E^{n+1} - E^n) \leq r(2r - 1) \Delta x \sum_{i=1}^M (u_{i+1}^n - u_i^n)^2$$

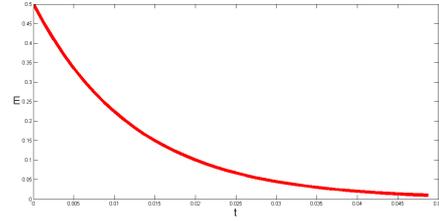
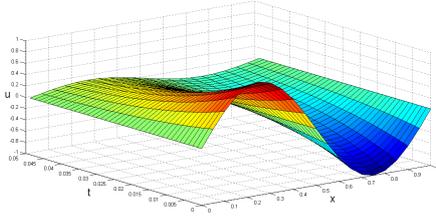
Para que (2.8) seja verdadeira basta que $r(2r - 1) \Delta x \sum_{i=1}^M (u_{i+1}^n - u_i^n)^2 \leq 0$ e para isto concluímos que devemos ter

$$r \leq \frac{1}{2}.$$

■

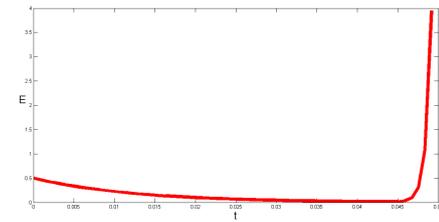
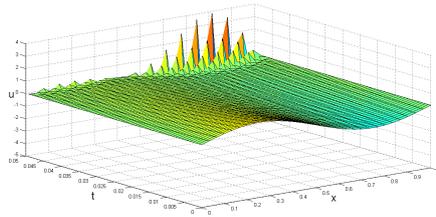
Este critério de estabilidade qualitativa é o mesmo resultado encontrado em outras análises de estabilidades, como por exemplo o critério encontrado na análise Von Neumann [3].

A seguinte solução numérica é produzida quando obedecemos a condição de estabilidade qualitativa. Neste caso consideramos $r = 1/2$,



Solução numérica e sua energia para o problema do calor utilizando (2.6) com $L = 1$, $\Delta t = 0,0013$, $\Delta x = 0,05$, tempo final de $0,05$, $\alpha = 1$ e condição inicial de $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$.

A estabilidade qualitativa, como foi afirmado, conserva a propriedade do decaimento da energia como pôde ser visto no gráfico. Observe agora o que acontece quando não obedecemos a condição de estabilidade qualitativa. Considerando $r = 45/61$



Solução numérica e sua energia do problema do calor utilizando (2.6) com $L = 1$, $\Delta t = 0,0008$, $\Delta x = 0,0333$, tempo final de $0,05$, $\alpha = 1$ e condição inicial de $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$.

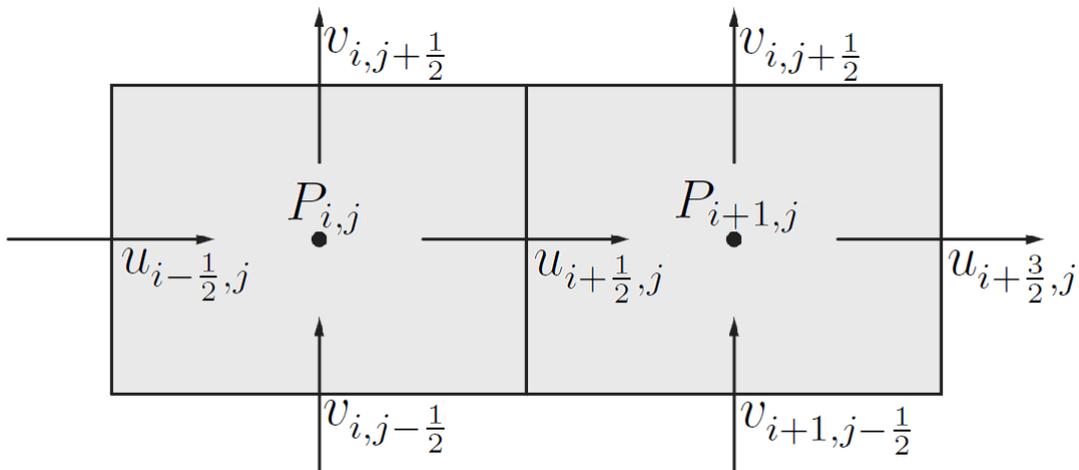
Não há estabilidade qualitativa, pois não foi respeitada a condição $r \leq 1/2$, portanto a solução numérica não conservou a propriedade do decaimento da energia como pôde ser visto no gráfico.

3 Equação do calor em malha deslocada

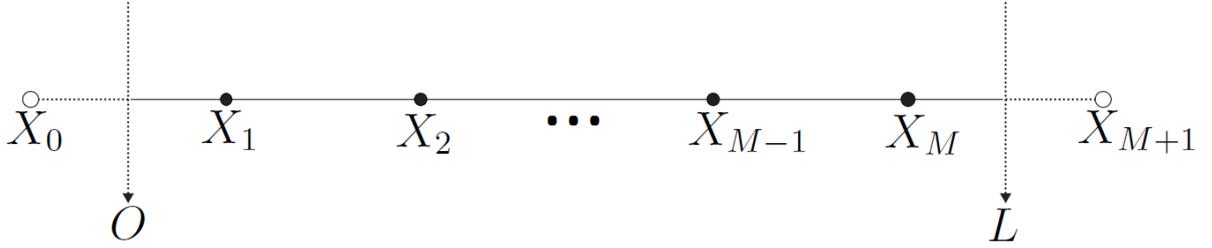
Neste capítulo vamos apresentar a malha deslocada ao leitor e então fazer novamente a análise da estabilidade qualitativa da equação do calor, visto que neste domínio as condições de contorno se alteram.

3.1 Malha deslocada

A utilização de malha deslocada se iniciou no estudo de equações de Navier-Stokes [4]. Tal malha trazia como diferencial a alocação dos pontos da equação da continuidade no centro da célula de forma usual, enquanto os pontos utilizados para os cálculos das equações do momentos eram alocados de modo diferente onde a do momento x era alocado nas fronteiras laterais da célula enquanto a do momento y é alocado nas extremidades superior e inferior.



Para domínio unidimensional, dividimos o domínio espacial em intervalos de comprimento Δx calculados da seguinte forma $\Delta x = \frac{L}{M}$. Entretanto diferente da formulação usual em que $u_i^n \approx u(i\Delta x, n\Delta t)$, na malha deslocada a aproximação é definida por $u_i^n \approx u\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x, n\Delta t\right)$.



Assim, nosso domínio espacial discretizado terá $M+2$ pontos. Entretanto dois destes pontos (u_0^n e u_{M+1}^n) não representam pontos do domínio contínuo, pois nesta discretização os pontos das extremidades não coincidem com os contornos do domínio contínuo, sendo intitulados pontos fantasmas. Tais pontos são o diferencial em relação a discretização usual pois nesta discretização as condições de contorno de Dirichlet ficam aplicadas em duas formas [2].

Condições de contorno explícitas:

$$u_{M+1}^{n+1} = -u_M^n, \quad u_{M+1}^n = -u_M^n, \quad u_0^{n+1} = -u_1^n \text{ e } u_0^n = -u_1^n. \quad (3.1)$$

e condições de contorno implícitas:

$$u_{M+1}^{n+1} = -u_M^{n+1}, \quad u_{M+1}^n = -u_M^n, \quad u_0^{n+1} = -u_1^{n+1} \text{ e } u_0^n = -u_1^n \quad (3.2)$$

3.2 Problema do calor em malha deslocada

Consideramos a aproximação explícita dada por

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad (3.3)$$

com $r = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2}$. Neste caso não há a necessidade de se escolher uma condição de contorno, pois em ambas só será aplicada a condição dada por

$$u_{M+1}^n = -u_M^n \text{ e } u_0^n = -u_1^n, \quad (3.4)$$

com a energia definida por

$$E^n = \Delta x \sum_{i=1}^M (u_i^n)^2. \quad (3.5)$$

podemos enunciar e provar o seguinte teorema.

Teorema 3.2.1. *A equação de diferenças finitas dada por (3.3), que descreve a equação do calor (2.1) com aproximação avançada no tempo, aplicada em malha deslocada utilizando a condição de contorno (3.4), é qualitativamente estável com relação a energia (3.5), ou seja,*

$$E^{n+1} \leq E^n, \quad (3.6)$$

desde que

$$r \leq \frac{1}{2}.$$

Demonstração: Para esta demonstração novamente vamos analisar a diferença entre a energia discreta nos tempos $n+1$ e n , para então definir o critério para a estabilidade qualitativa. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} E^{n+1} - E^n &= \Delta x \sum_{i=1}^M [(u_i^{n+1})^2 - (u_i^n)^2] \\ &= \Delta x \sum_{i=1}^M (u_i^{n+1} + u_i^n)(u_i^{n+1} - u_i^n) \\ &= r\Delta x \sum_{i=1}^M (u_i^{n+1} + u_i^n)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \\ &= r\Delta x \sum_{i=1}^M [(u_i^n)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - 2u_i^{n+1}u_i^n + u_i^{n+1}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)] \\ &= r\Delta x \sum_{i=1}^M (u_i^n)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - 2r\Delta x \sum_{i=1}^M u_i^{n+1}u_i^n + \\ &\quad + r\Delta x \sum_{i=1}^M u_i^{n+1}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Até aqui o resultado encontrado é o mesmo de (2.9), o diferencial será agora quando aplicarmos as condições de contorno (3.4).

Analisando o primeiro somatório a direita da igualdade temos,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^M (u_i^n)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) &= \sum_{i=1}^M [u_{i+1}^n u_i^n - 2(u_i^n)^2 + u_i^n u_{i-1}^n] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M [2u_{i+1}^n u_i^n - 2(u_i^n)^2 - 2(u_i^n)^2 + 2u_i^n u_{i-1}^n] \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M [(u_{i+1}^n)^2 - 2u_{i+1}^n u_i^n + (u_i^n)^2 + (u_i^n)^2 - 2u_i^n u_{i-1}^n + \\
&\quad + (u_{i-1}^n)^2] + \frac{1}{2} [-(u_1^n)^2 + (u_{M+1}^n)^2 - (u_M^n)^2 + (u_0^n)^2] \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M [(u_{i+1}^n - u_i^n)^2 + (u_i^n - u_{i-1}^n)^2] + \\
&\quad + \frac{1}{2} [-(u_1^n)^2 + (-u_M^n)^2 - (u_M^n)^2 + (-u_1^n)^2] \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M [(u_{i+1}^n - u_i^n)^2 + (u_i^n - u_{i-1}^n)^2]. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

analisando os outros somatórios

$$-2 \sum_{i=1}^M u_i^{n+1} u_i^n = -2 \sum_{i=1}^M (u_i^n)^2 + r \sum_{i=1}^M [(u_{i+1}^n - u_i^n)^2 + (u_i^n - u_{i-1}^n)^2]. \tag{3.9}$$

$$\sum_{i=1}^M u_i^{n+1} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) \leq \sum_{i=1}^M [(u_i^{n+1})^2 + (u_i^n)^2]. \tag{3.10}$$

Aplicando (3.8),(3.9) e (3.10) em (3.7) temos,

$$\begin{aligned}
E^{n+1} - E^n &\leq r \Delta x \sum_{i=1}^M \left[-\frac{1}{2} (u_{i+1}^n - u_i^n)^2 - \frac{1}{2} (u_i^n - u_{i-1}^n)^2 - 2(u_i^n)^2 + \right. \\
&\quad \left. + r (u_{i+1}^n - u_i^n)^2 + r (u_i^n - u_{i-1}^n)^2 + (u_i^{n+1})^2 + (u_i^n)^2 \right] \tag{3.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^{n+1} - E^n &\leq r (E^{n+1} - E^n) + r \left(r - \frac{1}{2} \right) \Delta x \sum_{i=1}^M [(u_{i+1}^n - u_i^n)^2 + \\
&\quad (u_i^n - u_{i-1}^n)^2] \tag{3.12}
\end{aligned}$$

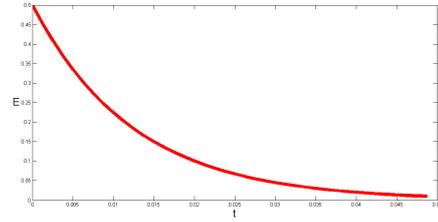
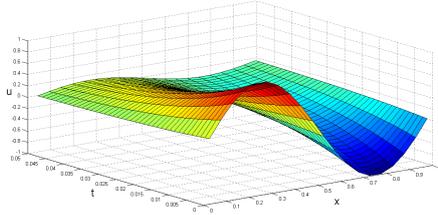
$$(1-r)(E^{n+1} - E^n) \leq r \left(r - \frac{1}{2} \right) \Delta x \sum_{i=1}^M [(u_{i+1}^n - u_i^n)^2 + (u_i^n - u_{i-1}^n)^2]. \tag{3.13}$$

Se $r \left(r - \frac{1}{2} \right) \Delta x \sum_{i=1}^M [(u_{i+1}^n - u_i^n)^2 + (u_i^n - u_{i-1}^n)^2] \leq 0$ energia será decrescente, e para tal finalidade concluímos que

$$r \leq \frac{1}{2}.$$

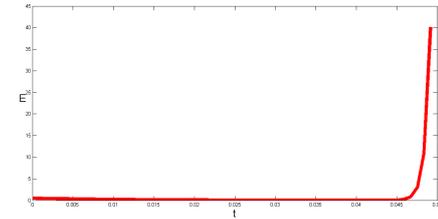
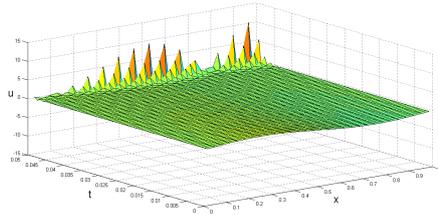
Mesmo resultado encontrado em malha comum e na análise de Von Neumann [3].

Produzindo a seguinte solução numérica para $r = 1/2$, ou seja obedecendo a condição de estabilidade qualitativa.



Solução numérica e sua energia para o problema do calor utilizando (3.3) com $L = 1$, $\Delta t = 0,0013$, $\Delta x = 0,05$, tempo final de $0,05$, $\alpha = 1$ e condição inicial de $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$ e condições de contorno $u_0^n = -u_1^n$ e $u_{M+1}^n = -u_M^n$.

E assim como em malha comum, podemos conservar a propriedade do decaimento da energia. Observe agora o que acontece quando $r = 45/61$, como não obedecemos a condição de estabilidade qualitativa podemos observar que a energia a partir de um ponto deixa de ser decrescente.



Solução numérica e sua energia para o problema do calor utilizando (2.6) com $L = 1$, $\Delta t = 0,0008$, $\Delta x = 0,0333$, tempo final de $0,05$, $\alpha = 1$, condição inicial de $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$ e condições de contorno $u_0^n = -u_1^n$ e $u_{M+1}^n = -u_M^n$.

4 Equação de Burgers

Neste capítulo apresentaremos ao leitor o problema de Burgers e em seguida faremos a análise de energia do problema contínuo, sua discretização e por fim faremos a análise de estabilidade qualitativa em relação a energia para a equação discretizada.

4.1 Apresentação do problema

O problema de Burgers tem este nome como uma homenagem a Johannes Martinus Burgers (13/01/1895 - 07/06/1981), que o apresentou no artigo *Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion*(1939), iremos trabalhar neste problema na seguinte forma

$$u_t + \psi(t)uu_x - \varphi(t)u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \quad (4.1)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (4.2)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L], \quad (4.3)$$

onde, $\psi(t)$ e $\varphi(t)$ não identicamente nulas e $\varphi(t) \geq 0$. Neste artigo esta equação representa um modelo de fluido com turbulência. Entretanto esta equação tem diversas aplicações e é considerada como uma simplificação da equação de Navier-Stokes.

4.2 Energia da equação de Burgers

Com a equação de energia dada por

$$E(t) = \int_0^L \frac{u^2}{2} dx, \quad (4.4)$$

podemos provar o primeiro resultado importante para a equação (4.1) em nosso trabalho. Será o decrescimento da energia através do teorema a seguir,

Teorema 4.2.1. *Na equação de Burgers dada por (4.1) com condições de contorno (4.2) e inicial (4.3), há um decaimento da energia, ou seja,*

$$E(t) \leq E(0). \quad (4.5)$$

Demonstração: Para a análise de energia, procederemos de uma forma diferente da aplicada na equação do calor (2.5). Para este caso multiplicamos (4.1) por u e integramos com a relação a x em $[0, L]$,

$$\int_0^L [uu_t + \psi(t)u^2u_x - \varphi(t)uu_{xx}] dx = 0, \quad (4.6)$$

$$\int_0^L uu_t dx + \psi(t) \int_0^L u^2u_x dx - \varphi(t) \int_0^L uu_{xx} dx = 0. \quad (4.7)$$

Analisando cada uma das integrais de (4.7) na ordem em que estão dispostas temos,

$$\int_0^L uu_t dx = \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{u^2}{2} dx = \frac{d}{dt} E(t). \quad (4.8)$$

Para o segundo termo, temos

$$\begin{aligned} \int_0^L u^2u_x dx &= u^3|_0^L - 2 \int_0^L u^2u_x dx, \\ 3 \int_0^L u^2u_x dx = 0 &\Rightarrow \int_0^L u^2u_x dx = 0, \end{aligned}$$

logo, independente de $\psi(t)$

$$\psi(t) \int_0^L u^2u_x dx = 0. \quad (4.9)$$

Para o último termo,

$$\begin{aligned} \int_0^L uu_{xx} dx &= uu_x|_0^L - \int_0^L u_x^2 dx \\ &= - \int_0^L u_x^2 dx. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Assim, aplicando (4.8), (4.9) e (4.10) em (4.7), obtemos

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\varphi(t) \int_0^L u_x^2 dx, \quad (4.11)$$

como $\varphi(t) \geq 0$, de onde concluímos que

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq 0, \quad (4.12)$$

e portanto

$$E(t) \leq E(0). \quad (4.13)$$

■

Destacamos a energia do termo não-linear apresentada em (4.9). O fato da energia deste termo ser identicamente nula, deverá ser reproduzido no termo da equação de diferenças finitas que o descreverá a seguir, afim de obtermos uma melhor precisão.

4.3 Modelo discreto em diferenças finitas

Feita a análise do decrescimento da energia para o caso contínuo, faremos agora uma aproximação não usual para a equação (4.1), em que consideraremos

$$u_i^{n+\theta} = \theta u_i^{n+1} + (1 - \theta) u_i^n, \quad \theta \in [0, 1]. \quad (4.14)$$

Assim a forma numérica da equação (4.1) será dada por

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \psi^{n+\theta} \gamma_i(u^{n+\theta}) - \varphi^{n+\theta} \frac{u_{i+1}^{n+\theta} - 2u_i^{n+\theta} + u_{i-1}^{n+\theta}}{\Delta x^2} = 0, \quad (4.15)$$

onde $\psi^{n+\theta} = \psi((n + \theta)\Delta t)$ e $\varphi^{n+\theta} = \varphi((n + \theta)\Delta t)$. Aqui $\gamma_i(u^{n+\theta})$ descreve a aproximação para o termo uu_x . Esta função será dada pela mesma abordagem em (1.8), com base no artigo de Angelov *et al.* [1]. Portanto, assumimos que

$$\begin{aligned} \gamma_i(u^{n+\theta}) &= (\alpha_1 u_{i+1}^{n+\theta} + \alpha_2 u_i^{n+\theta} + \alpha_3 u_{i-1}^{n+\theta}) \frac{u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta}}{\Delta x} + \\ &+ (\beta_1 u_{i+1}^{n+\theta} + \beta_2 u_i^{n+\theta} + \beta_3 u_{i-1}^{n+\theta}) \frac{u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta}}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

A primeira afirmação que podemos fazer, é que para haver consistência de (4.16) teremos que ter

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1. \quad (4.17)$$

Esta condição é importante, pois terá que ser respeitada na análise de estabilidade qualitativa.

4.4 Energia discreta da equação de Burgers

Para a análise do comportamento da energia discreta de (4.15), faremos de modo análogo ao feito por Anguelov *et al.* em [1]. Buscaremos definir os valores de α_1 , α_2 , α_3 , β_1 , β_2 e β_3 de modo que a energia de (4.16) zere, assim como a energia do termo por ele discretizado como visto em (4.9), a energia deste termo é dada por

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_{i=1}^M \gamma_i(u^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} &= \sum_{i=1}^M [(\alpha_1 u_{i+1}^{n+\theta} + \alpha_2 u_i^{n+\theta} + \alpha_3 u_{i-1}^{n+\theta}) (u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta}) + \\ &+ (\beta_1 u_{i+1}^{n+\theta} + \beta_2 u_i^{n+\theta} + \beta_3 u_{i-1}^{n+\theta}) (u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta})] u_i^{n+\theta}, \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_{i=1}^M \gamma_i (u^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} &= \sum_{i=1}^M \left[\alpha_1 (u_{i+1}^{n+\theta})^2 u_i^{n+\theta} + (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1) u_{i+1}^{n+\theta} (u_i^{n+\theta})^2 \right] - \\ &\quad - \sum_{i=1}^M \left[(\alpha_3 - \beta_3 + \beta_2) (u_i^{n+\theta})^2 u_{i-1}^{n+\theta} + \beta_3 u_i^{n+\theta} (u_{i-1}^{n+\theta})^2 \right] + \\ &\quad + (\beta_2 - \alpha_2) \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^3 + (\alpha_3 - \beta_1) \sum_{i=1}^M u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta}. \end{aligned}$$

Separando os termos em que aparecem os pontos fantasmas $u_{M+1}^{n+\theta}$ e $u_0^{n+\theta}$, temos

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_{i=1}^M \gamma_i (u^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} &= \alpha_1 (u_{M+1}^{n+\theta})^2 u_M^{n+\theta} + (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1) u_{M+1}^{n+\theta} (u_M^{n+\theta})^2 - \\ &\quad - (\alpha_3 - \beta_3 + \beta_2) (u_1^{n+\theta})^2 u_0^{n+\theta} - \beta_3 u_1^{n+\theta} (u_0^{n+\theta})^2 + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left[\alpha_1 (u_{i+1}^{n+\theta})^2 u_i^{n+\theta} + (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1) u_{i+1}^{n+\theta} (u_i^{n+\theta})^2 \right] - \\ &\quad - \sum_{i=2}^M \left[(\alpha_3 - \beta_3 + \beta_2) (u_i^{n+\theta})^2 u_{i-1}^{n+\theta} + \beta_3 u_i^{n+\theta} (u_{i-1}^{n+\theta})^2 \right] + \\ &\quad + (\beta_2 - \alpha_2) \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^3 + (\alpha_3 - \beta_1) \sum_{i=1}^M u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta}. \end{aligned}$$

Mudando os índices no segundo somatório a direita da igualdade

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_{i=1}^M \gamma_i (u^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} &= \alpha_1 (u_{M+1}^{n+\theta})^2 u_M^{n+\theta} + (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1) u_{M+1}^{n+\theta} (u_M^{n+\theta})^2 - \\ &\quad - (\alpha_3 - \beta_3 + \beta_2) (u_1^{n+\theta})^2 u_0^{n+\theta} - \beta_3 u_1^{n+\theta} (u_0^{n+\theta})^2 + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left[\alpha_1 (u_{i+1}^{n+\theta})^2 u_i^{n+\theta} + (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1) u_{i+1}^{n+\theta} (u_i^{n+\theta})^2 \right] - \\ &\quad - \sum_{i=1}^{M-1} \left[(\alpha_3 - \beta_3 + \beta_2) (u_{i+1}^{n+\theta})^2 u_i^{n+\theta} + \beta_3 u_{i+1}^{n+\theta} (u_i^{n+\theta})^2 \right] + \\ &\quad + (\beta_2 - \alpha_2) \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^3 + (\alpha_3 - \beta_1) \sum_{i=1}^M u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta}. \end{aligned}$$

Agrupando o termos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta x \sum_{i=1}^M \gamma_i (u^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} &= \alpha_1 (u_{M+1}^{n+\theta})^2 u_M^{n+\theta} + (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1) u_{M+1}^{n+\theta} (u_M^{n+\theta})^2 - \\
&\quad - (\alpha_3 - \beta_3 + \beta_2) (u_1^{n+\theta})^2 u_0^{n+\theta} - \beta_3 u_1^{n+\theta} (u_0^{n+\theta})^2 + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-1} (\alpha_1 - \alpha_3 + \beta_3 - \beta_2) (u_{i+1}^{n+\theta})^2 u_i^{n+\theta} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-1} (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1 - \beta_3) u_{i+1}^{n+\theta} (u_i^{n+\theta})^2 + \\
&\quad + (\beta_2 - \alpha_2) \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^3 + (\alpha_3 - \beta_1) \sum_{i=1}^M u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta}.
\end{aligned}$$

Agora buscaremos condições para que

$$\psi^{n+\theta} \sum_{i=1}^M \gamma_i (u^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} = 0.$$

Desta forma, teremos que ter

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 (u_{M+1}^{n+\theta})^2 u_M^{n+\theta} + (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1) u_{M+1}^{n+\theta} (u_M^{n+\theta})^2 - \\
&\quad - (\alpha_3 - \beta_3 + \beta_2) (u_1^{n+\theta})^2 u_0^{n+\theta} - \beta_3 u_1^{n+\theta} (u_0^{n+\theta})^2 + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-1} (\alpha_1 - \alpha_3 + \beta_3 - \beta_2) (u_{i+1}^{n+\theta})^2 u_i^{n+\theta} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-1} (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1 - \beta_3) u_{i+1}^{n+\theta} (u_i^{n+\theta})^2 + \\
&\quad + (\beta_2 - \alpha_2) \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^3 + (\alpha_3 - \beta_1) \sum_{i=1}^M u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} = 0. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Para prosseguir esta análise teremos que aplicar as condições de contorno, para isto vamos fazer duas análises separadas, a primeira com condições de contorno explícita e depois com condições de contorno implícitas.

4.4.1 Condições de Contorno Explícitas

As condições de contorno explícitas definidas por Oishi *et al.* [2] são dadas por,

$$u_{M+1}^{n+1} = -u_M^n, \quad u_{M+1}^n = -u_M^n, \quad u_0^{n+1} = -u_1^n \text{ e } u_0^n = -u_1^n,$$

dessa forma, para $\theta \in [0, 1]$ como definido em (4.14)

$$\begin{aligned}
u_{M+1}^{n+\theta} &= \theta u_{M+1}^{n+1} + (1 - \theta) u_{M+1}^n = -\theta u_M^n - (1 - \theta) u_M^n = -u_M^n \\
u_0^{n+\theta} &= \theta u_0^{n+1} + (1 - \theta) u_0^n = -\theta u_1^n - (1 - \theta) u_1^n = -u_1^n. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Aplicando (4.14) e (4.19) em (4.18), temos

$$\begin{aligned} & \alpha_1 (u_M^n)^2 (\theta u_M^{n+1} + (1-\theta)u_M^n) - (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1) u_M^n (\theta u_M^{n+1} + (1-\theta)u_M^n)^2 + \\ & + (\alpha_3 - \beta_3 + \beta_2) (\theta u_1^{n+1} + (1-\theta)u_1^n)^2 u_1^n - \beta_3 (\theta u_1^{n+1} + (1-\theta)u_1^n) (u_1^n)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^{M-1} \left[(\alpha_1 - \alpha_3 + \beta_3 - \beta_2) (u_{i+1}^{n+\theta})^2 u_i^{n+\theta} + (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1 - \beta_3) u_{i+1}^{n+\theta} (u_i^{n+\theta})^2 \right] + \\ & + (\beta_2 - \alpha_2) \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^3 + (\alpha_3 - \beta_1) \sum_{i=1}^M u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} = 0 \end{aligned}$$

aplicando a propriedade distributiva, obtemos

$$\begin{aligned} & \theta \alpha_1 (u_M^n)^2 u_M^{n+1} + (1-\theta) \alpha_1 (u_M^n)^3 - (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1) \left[\theta^2 (u_M^{n+1})^2 u_M^n + \right. \\ & + 2\theta(1-\theta) (u_M^n)^2 \theta u_M^{n+1} + (1-\theta)^2 (u_M^n)^3 \left. \right] + (\alpha_3 - \beta_3 + \beta_2) \left[\theta^2 (u_1^{n+1})^2 u_1^n + \right. \\ & + 2\theta(1-\theta) (u_1^n)^2 \theta u_1^{n+1} + (1-\theta)^2 (u_1^n)^3 \left. \right] - \beta_3 \theta (u_1^n)^2 u_1^{n+1} + \\ & + (1-\theta) \beta_3 (u_1^n)^3 + (\beta_2 - \alpha_2) \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^3 + (\alpha_3 - \beta_1) \sum_{i=1}^M u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} + \\ & + \sum_{i=1}^{M-1} \left[(\alpha_1 - \alpha_3 + \beta_3 - \beta_2) (u_{i+1}^{n+\theta})^2 u_i^{n+\theta} + (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1 - \beta_3) u_{i+1}^{n+\theta} (u_i^{n+\theta})^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Entretanto, para $\theta \in]0, 1]$ como definido em (4.14), não existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ e β_3 , pois que tornem a igualdade anterior verdadeira se considerarmos (4.17), pois neste caso seria necessário que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$. Para $\theta = 0$ a equação de diferenças finitas é explícita, logo as condições de contorno se tornam iguais ao caso com condições de contorno implícitas, como visto no capítulo anterior, este caso será analisado a seguir. Portanto, as condições de contorno explícitas não serão utilizadas nesta análise de estabilidade qualitativa.

4.4.2 Condições de contorno implícitas

Faremos agora uma análise análoga a feita anteriormente em (4.19), com condições de contorno implícitas definidas por Oishi *et al.* em [2] da seguinte maneira,

$$u_{M+1}^{n+1} = -u_M^{n+1}, \quad u_{M+1}^n = -u_M^n, \quad u_0^{n+1} = -u_1^{n+1} \text{ e } u_0^n = -u_1^n,$$

aplicando estes valores em (4.14), obtemos

$$\begin{aligned} u_{M+1}^{n+\theta} &= \theta u_{M+1}^{n+1} + (1-\theta) u_{M+1}^n = -\theta u_M^{n+1} - (1-\theta) u_M^n = -u_M^{n+\theta}, \\ u_0^{n+\theta} &= \theta u_0^{n+1} + (1-\theta) u_0^n = -\theta u_1^{n+1} - (1-\theta) u_1^n = -u_1^{n+\theta}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Aplicando (4.20) em (4.18), obtemos

$$\begin{aligned} & \alpha_1 (u_M^{n+\theta})^3 - (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1) (u_M^{n+\theta})^3 + (\alpha_3 - \beta_3 + \beta_2) (u_1^{n+\theta})^3 - \beta_3 (u_1^{n+\theta})^3 + \\ & + \sum_{i=1}^{M-1} \left[(\alpha_1 - \alpha_3 + \beta_3 - \beta_2) (u_{i+1}^{n+\theta})^2 u_i^{n+\theta} + (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1 - \beta_3) u_{i+1}^{n+\theta} (u_i^{n+\theta})^2 \right] + \\ & + (\beta_2 - \alpha_2) \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^3 + (\alpha_3 - \beta_1) \sum_{i=1}^M u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} = 0, \end{aligned}$$

colocando em evidência os termos em comum, temos

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 + \alpha_1) (u_M^{n+\theta})^3 + (\alpha_3 - \beta_3 + \beta_2 - \beta_3) (u_1^{n+\theta})^3 + \\ & + \sum_{i=1}^{M-1} \left[(\alpha_1 - \alpha_3 + \beta_3 - \beta_2) (u_{i+1}^{n+\theta})^2 u_i^{n+\theta} + (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1 - \beta_3) u_{i+1}^{n+\theta} (u_i^{n+\theta})^2 \right] + \\ & + (\beta_2 - \alpha_2) \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^3 + (\alpha_3 - \beta_1) \sum_{i=1}^M u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} = 0, \end{aligned}$$

e desta forma concluímos que

$$\begin{aligned} & (2\alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1) (u_M^{n+\theta})^3 + (\alpha_3 - 2\beta_3 + \beta_2) (u_1^{n+\theta})^3 + \\ & + \sum_{i=1}^{M-1} \left[(\alpha_1 - \alpha_3 + \beta_3 - \beta_2) (u_{i+1}^{n+\theta})^2 u_i^{n+\theta} + (\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1 - \beta_3) u_{i+1}^{n+\theta} (u_i^{n+\theta})^2 \right] + \\ & + (\beta_2 - \alpha_2) \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^3 + (\alpha_3 - \beta_1) \sum_{i=1}^M u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} = 0, \end{aligned}$$

considerando (4.17), a melhor forma desta soma zerar é,

$$2\alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 = 0,$$

$$\alpha_3 - 2\beta_3 + \beta_2 = 0,$$

$$\alpha_1 - \alpha_3 + \beta_3 - \beta_2 = 0,$$

$$\alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1 - \beta_3 = 0,$$

$$\beta_2 - \alpha_2 = 0,$$

$$\alpha_3 - \beta_1 = 0,$$

destas condições, concluímos então que

$$\alpha_1 = \frac{1}{6},$$

$$\beta_3 = \frac{1}{6},$$

$$\alpha_3 = \beta_1,$$

$$\alpha_2 = \beta_2,$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{3}.$$

Definindo $\alpha_2 = q$, (4.16) fica da seguinte forma

$$\begin{aligned} \gamma_i(u^{n+\theta}) &= \left(\frac{1}{6}u_{i+1}^{n+\theta} + qu_i^{n+\theta} + \left(\frac{1}{3} - q \right) u_{i-1}^{n+\theta} \right) \frac{u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta}}{\Delta x} + \\ &+ \left(\left(\frac{1}{3} - q \right) u_{i+1}^{n+\theta} + qu_i^{n+\theta} + \frac{1}{6}u_{i-1}^{n+\theta} \right) \frac{u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta}}{\Delta x}, \end{aligned}$$

aplicando a propriedade distributiva, obtemos

$$\begin{aligned} \gamma_i(u^{n+\theta}) &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ (u_{i+1}^{n+\theta})^2 \left[\frac{1}{6} \right] + (u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta}) \left[\frac{-1}{6} + q + \left(\frac{1}{3} - q \right) \right] + \right. \\ &+ (u_{i+1}^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta}) \left[\left(\frac{1}{3} - q \right) - \left(\frac{1}{3} - q \right) \right] + (u_i^{n+\theta})^2 [-q + q] + \\ &\left. + (u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta}) \left[- \left(\frac{1}{3} - q \right) + \frac{1}{6} - q \right] + (u_{i-1}^{n+\theta})^2 \left[\frac{-1}{6} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, com as condições do contorno implícitas (4.20) o termo γ_i se torna,

$$\gamma_i(u^{n+\theta}) = \frac{1}{6\Delta x} \left[(u_{i+1}^{n+\theta})^2 + (u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta}) - (u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta}) - (u_{i-1}^{n+\theta})^2 \right]. \quad (4.21)$$

Outro resultado importante, que utilizaremos na demonstração do teorema sobre o comportamento da energia discreta que será proposto mais a frente, é a desigualdade de Poincaré discreta:

4.4.3 Desigualdade de Poincaré discreta

No artigo de Angelov *et al.* [1] encontramos a desigualdade de Poincaré discreta da seguinte forma:

Teorema 4.4.1. *Existe uma constante $C_{dp} > 0$ independente dos parâmetros de discretização tal que*

$$C_{dp} \sum_{i=1}^M (v_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{M+1} \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta x} \right)^2, \quad (4.22)$$

para todo $v \in l^2$ com $v_{M+1} = v_0 = 0$.

Obs: $\left(\frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta x} \right)$ pode ser substituído por $\left(\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x} \right)$ ou $\left(\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta x} \right)$.

Definida a equação de diferenças finitas (4.15) com $\gamma_i(u^{n+\theta})$ dado por (4.16), definiremos a energia associada ao problema por

$$E^n = \sum_{i=1}^M \frac{(u_i^n)^2}{2}. \quad (4.23)$$

com estas definições podemos demonstrar que o modelo (4.15) é qualitativamente estável em relação a energia, ou seja, mostrar que a energia discreta é decrescente assim como a energia do problema contínuo.

Teorema 4.4.2. *A equação de diferenças finitas (4.15) com $1/2 \leq \theta \leq 1$ e $\gamma_i(u^{n+\theta})$ dado por (4.21), tem o seguinte comportamento*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_i^n) = 0, \quad (4.24)$$

além disso, é qualitativamente estável com relação a energia para o problema de Burgers dada por (4.5), ou seja,

$$E^{n+1} \leq E^n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.25)$$

Demonstração: Iniciaremos a análise de energia do problema discreto de modo similar ao feito no caso contínuo. Para isso multiplicaremos a equação (4.15) por $u_i^{n+\theta}$ e somaremos variando os índices de $i = 1, \dots, M$. Desta forma obtemos

$$\sum_{i=1}^M \frac{(u_i^{n+1} - u_i^n)}{\Delta t} u_i^{n+\theta} + \psi^{n+\theta} \sum_{i=1}^M \gamma_i(u^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} - \frac{\varphi^{n+\theta}}{\Delta x^2} \sum_{i=1}^M (u_{i+1}^{n+\theta} - 2u_i^{n+\theta} + u_{i-1}^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} = 0. \quad (4.26)$$

Começaremos analisando o termo de (4.26) que aproxima a derivada temporal, ou seja o somatório que tem o seguinte termo geral

$$\begin{aligned} (u_i^{n+1} - u_i^n) u_i^{n+\theta} &= (u_i^{n+1} - u_i^n) (\theta u_i^{n+1} + (1-\theta) u_i^n) \\ &= \theta (u_i^{n+1})^2 + (1-\theta) u_i^{n+1} u_i^n - \theta u_i^{n+1} u_i^n - (1-\theta) (u_i^n)^2 \\ &= \frac{\theta}{2} (u_i^{n+1})^2 - \frac{(1-\theta)}{2} (u_i^n)^2 + \frac{\theta}{2} (u_i^{n+1})^2 - \theta u_i^{n+1} u_i^n + \\ &\quad + \frac{\theta}{2} (u_i^n)^2 + \frac{(1-\theta)}{2} (u_i^{n+1})^2 - \frac{\theta}{2} (u_i^n)^2 - \\ &\quad - \frac{(1-\theta)}{2} (u_i^{n+1})^2 + (1-\theta) u_i^{n+1} u_i^n - \frac{(1-\theta)}{2} (u_i^n)^2 \\ &= \frac{(u_i^{n+1})^2}{2} - \frac{(u_i^n)^2}{2} + \frac{\theta}{2} (u_i^{n+1} - u_i^n)^2 - \frac{(1-\theta)}{2} (u_i^{n+1} - u_i^n)^2 \\ &= \frac{(u_i^{n+1})^2}{2} - \frac{(u_i^n)^2}{2} + \frac{(2\theta-1)}{2} (u_i^{n+1} - u_i^n)^2, \end{aligned}$$

utilizando a definição de energia discreta (4.23), concluímos que

$$\sum_{i=1}^M \frac{(u_i^{n+1} - u_i^n)}{\Delta t} u_i^{n+\theta} = \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} + \frac{2\theta-1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{(u_i^{n+1} - u_i^n)^2}{\Delta t}. \quad (4.27)$$

Analisando o último somatório da equação (4.26), abrindo este somatório afim de destacar os contornos $u_0^{n+\theta}$ e $u_{M+1}^{n+\theta}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^M (u_{i+1}^{n+\theta} - 2u_i^{n+\theta} + u_{i-1}^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} &= \sum_{i=1}^M \left[u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} - 2(u_i^{n+\theta})^2 + u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} \right] \\
&= u_{M+1}^{n+\theta} u_M^{n+\theta} - (u_M^{n+\theta})^2 + \sum_{i=1}^{M-1} \left[u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} - (u_i^{n+\theta})^2 \right] + \\
&\quad + u_1^{n+\theta} u_0^{n+\theta} - (u_1^{n+\theta})^2 + \sum_{i=2}^M \left[u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} - (u_i^{n+\theta})^2 \right] \\
&= u_{M+1}^{n+\theta} u_M^{n+\theta} - (u_M^{n+\theta})^2 + \sum_{i=2}^M \left[u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} - (u_{i-1}^{n+\theta})^2 \right] + \\
&\quad + u_1^{n+\theta} u_0^{n+\theta} - (u_1^{n+\theta})^2 + \sum_{i=2}^M \left[u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} - (u_i^{n+\theta})^2 \right] \\
&= u_{M+1}^{n+\theta} u_M^{n+\theta} - (u_M^{n+\theta})^2 + u_1^{n+\theta} u_0^{n+\theta} - (u_1^{n+\theta})^2 + \\
&\quad + \sum_{i=2}^M \left[u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} - (u_{i-1}^{n+\theta})^2 + u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} - (u_i^{n+\theta})^2 \right].
\end{aligned}$$

Aplicando as condições de contorno como definidas em (3.2), temos

$$\sum_{i=1}^M (u_{i+1}^{n+\theta} - 2u_i^{n+\theta} + u_{i-1}^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} = -2(u_M^{n+\theta})^2 - 2(u_1^{n+\theta})^2 - \sum_{i=2}^M (u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta})^2,$$

a fim de adicionar ao somatório os termos para $i = 1$, podemos observar que

$$4(u_1^{n+\theta})^2 = (2u_1^{n+\theta})^2 = (u_1^{n+\theta} + u_1^{n+\theta})^2 = (u_1^{n+\theta} - u_0^{n+\theta})^2, \quad (4.28)$$

assim, somando e subtraindo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^M (u_{i+1}^{n+\theta} - 2u_i^{n+\theta} + u_{i-1}^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} &= -2(u_M^{n+\theta})^2 - 2(u_1^{n+\theta})^2 + 4(u_1^{n+\theta})^2 - \\
&\quad - (u_1^{n+\theta} - u_0^{n+\theta})^2 - \sum_{i=2}^M (u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta})^2 \\
&= -2(u_M^{n+\theta})^2 + 2(u_1^{n+\theta})^2 - \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta})^2. \quad (4.29)
\end{aligned}$$

De modo análogo ao feito anteriormente, podemos fazer outra análise para este

somatório, só que ao invés de subirmos os índices do somatório, o baixaremos, ou seja

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^M (u_{i+1}^{n+\theta} - 2u_i^{n+\theta} + u_{i-1}^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} &= \sum_{i=1}^M \left[u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} - 2(u_i^{n+\theta})^2 + u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} \right] \\
&= u_{M+1}^{n+\theta} u_M^{n+\theta} - (u_M^{n+\theta})^2 + \sum_{i=1}^{M-1} \left[u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} - (u_i^{n+\theta})^2 \right] + \\
&\quad + u_1^{n+\theta} u_0^{n+\theta} - (u_1^{n+\theta})^2 + \sum_{i=2}^M \left[u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta} - (u_i^{n+\theta})^2 \right] \\
&= u_{M+1}^{n+\theta} u_M^{n+\theta} - (u_M^{n+\theta})^2 + \sum_{i=1}^{M-1} \left[u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} - (u_i^{n+\theta})^2 \right] + \\
&\quad + u_1^{n+\theta} u_0^{n+\theta} - (u_1^{n+\theta})^2 + \sum_{i=1}^{M-1} \left[u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} - (u_{i+1}^{n+\theta})^2 \right] \\
&= u_{M+1}^{n+\theta} u_M^{n+\theta} - (u_M^{n+\theta})^2 + u_1^{n+\theta} u_0^{n+\theta} - (u_1^{n+\theta})^2 + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left[u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} - (u_i^{n+\theta})^2 + u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta} - (u_{i+1}^{n+\theta})^2 \right],
\end{aligned}$$

aplicando as condições de contorno (3.2), obtemos

$$\sum_{i=1}^M (u_{i+1}^{n+\theta} - 2u_i^{n+\theta} + u_{i-1}^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} = -2(u_M^{n+\theta})^2 - 2(u_1^{n+\theta})^2 - \sum_{i=1}^{M-1} (u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta})^2,$$

a fim de adicionar ao somatório os termos para $i = M$, podemos observar que

$$4(u_M^{n+\theta})^2 = (2u_M^{n+\theta})^2 = (u_M^{n+\theta} + u_M^{n+\theta})^2 = (u_{M+1}^{n+\theta} - u_M^{n+\theta})^2, \quad (4.30)$$

assim, somando e subtraindo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^M (u_{i+1}^{n+\theta} - 2u_i^{n+\theta} + u_{i-1}^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} &= -2(u_M^{n+\theta})^2 - 2(u_1^{n+\theta})^2 + 4(u_M^{n+\theta})^2 - \\
&\quad - (u_{M+1}^{n+\theta} - u_M^{n+\theta})^2 - \sum_{i=1}^{M-1} (u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta})^2 \\
&= 2(u_M^{n+\theta})^2 - 2(u_1^{n+\theta})^2 - \sum_{i=1}^M (u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta})^2, \quad (4.31)
\end{aligned}$$

dessa forma podemos somar (4.29) e (4.31), e portanto

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i=1}^M (u_{i+1}^{n+\theta} - 2u_i^{n+\theta} + u_{i-1}^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} &= - \sum_{i=1}^M \left[(u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta})^2 + (u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta})^2 \right], \\
\sum_{i=1}^M (u_{i+1}^{n+\theta} - 2u_i^{n+\theta} + u_{i-1}^{n+\theta}) u_i^{n+\theta} &= - \sum_{i=1}^M \frac{(u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta})^2 + (u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta})^2}{2}. \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.27) e (4.32) em (4.26), e observando como $\gamma_i(u^{n+\theta})$ foi assumido em (4.21) de modo que sua energia zere, temos

$$\begin{aligned} & \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} + \frac{2\theta - 1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{(u_i^{n+1} - u_i^n)^2}{\Delta t} + \\ & + \frac{\varphi^{n+\theta}}{\Delta x^2} \sum_{i=1}^M \frac{(u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta})^2 + (u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta})^2}{2} = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Para utilizarmos a desigualdade de Poincaré discreta do **Teorema 4.4.1**, definimos uma sequência $v_i \in l^2$ da seguinte forma $v_{M+1} = v_0 = 0$ e $v_i = u_i^{n+\theta}$ para $i = 1, \dots, M$, logo se aplica a (4.22), assim separando o primeiro e o último termo do somatório,

$$C_{dp} \sum_{i=1}^M (v_i)^2 \leq \left(\frac{v_{M+1} - v_M}{\Delta x} \right)^2 + \sum_{i=2}^M \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{v_1 - v_0}{\Delta x} \right)^2,$$

substituindo os valores de v_i como definido temos

$$C_{dp} \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^2 \leq \left(\frac{u_M^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2 + \sum_{i=2}^M \left(\frac{u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{u_1^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2,$$

para adicionar o termo do somatório para $i = 1$, utilizamos a igualdade (4.28), logo

$$C_{dp} \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^2 \leq \left(\frac{u_M^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2 + \sum_{i=1}^M \left(\frac{u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2 - 3 \left(\frac{u_1^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2. \quad (4.34)$$

Definindo v_i da mesma forma aplicamos em (4.22) para $\left(\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x} \right)$, temos

$$C_{dp} \sum_{i=1}^M (v_i)^2 \leq \sum_{i=0}^M \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x} \right)^2,$$

analogamente, separando o primeiro e o ultimo termo do somatório,

$$C_{dp} \sum_{i=1}^M (v_i)^2 \leq \left(\frac{v_{M+1} - v_M}{\Delta x} \right)^2 + \sum_{i=1}^{M-1} \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{v_1 - v_0}{\Delta x} \right)^2,$$

substituindo os valores de v_i como definido temos

$$C_{dp} \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^2 \leq \left(\frac{u_M^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2 + \sum_{i=1}^{M-1} \left(\frac{u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{u_1^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2,$$

para adicionar o termo do somatório para $i = M$, utilizamos a igualdade (4.30)

$$C_{dp} \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^2 \leq -3 \left(\frac{u_M^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2 + \sum_{i=1}^M \left(\frac{u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{u_1^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2. \quad (4.35)$$

Tirando a média entre (4.34) e (4.35) temos,

$$C_{dp} \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^2 \leq - \left(\frac{u_M^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2 + \sum_{i=1}^M \frac{\left(\frac{u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2}{2} - \left(\frac{u_1^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2,$$

somando $\left(\frac{u_M^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2$ e $\left(\frac{u_1^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2$ a desigualdade é mantida, portanto

$$C_{dp} \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^2 \leq \sum_{i=1}^M \frac{\left(\frac{u_{i+1}^{n+\theta} - u_i^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{u_i^{n+\theta} - u_{i-1}^{n+\theta}}{\Delta x} \right)^2}{2}. \quad (4.36)$$

Por fim, substituindo (4.36) em (4.33) temos,

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} + \frac{2\theta - 1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{(u_i^{n+1} - u_i^n)^2}{\Delta t} + \varphi^{n+\theta} C_{dp} \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^2 \leq 0, \quad (4.37)$$

se considerarmos $\theta \in [1/2, 1]$ então $\frac{2\theta-1}{2} \geq 0$, dessa forma

$$\frac{2\theta - 1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{(u_i^{n+1} - u_i^n)^2}{\Delta t} + \varphi^{n+\theta} C_{dp} \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^2 \geq 0,$$

e então concluímos que

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} \leq 0.$$

Portanto, E^n é uma sequência decrescente, concluímos assim que este métodos conserva a propriedade do decrescimento da energia do contínuo, dessa forma, podemos concluir que para $1/2 \leq \theta \leq 1$ a equação de diferenças finitas (4.15) é qualitativamente estável em relação a energia.

Por outro lado, como E^n é uma sequência positiva e decrescente, assim convergente, logo é uma sequência de Cauchy, dessa forma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{E(u^{n+1}) - E(u^n)}{\Delta t} \right) = 0,$$

então, aplicando o limite em (4.37) temos,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\theta - 1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{(u_i^{n+1} - u_i^n)^2}{\Delta t} + \varphi^{n+\theta} C_{dp} \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^2 \right) \leq 0,$$

entretanto, como ambos são positivos, concluímos que cada um deles tem limite nulo, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\theta - 1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{(u_i^{n+1} - u_i^n)^2}{\Delta t} \right) = 0,$$

portanto concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_i^{n+1} - u_i^n) = 0. \quad (4.38)$$

Por outro lado,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\varphi^{n+\theta} C_{dp} \sum_{i=1}^M (u_i^{n+\theta})^2 \right) = 0,$$

portanto concluímos também que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_i^{n+\theta}) = 0, \quad (4.39)$$

para todo $\theta \geq \frac{1}{2}$. Portanto, podemos utilizar (4.38) e (4.39) da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_i^n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_i^{n+1}}{2} - \frac{u_i^{n+1}}{2} + \frac{u_i^n}{2} + \frac{u_i^n}{2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_i^{n+1}}{2} + \frac{u_i^n}{2} - \frac{u_i^{n+1}}{2} + \frac{u_i^n}{2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_i^{n+1}}{2} + \frac{u_i^n}{2} \right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_i^{n+1}}{2} - \frac{u_i^n}{2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_i^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_i^{n+1} - u_i^n) \end{aligned}$$

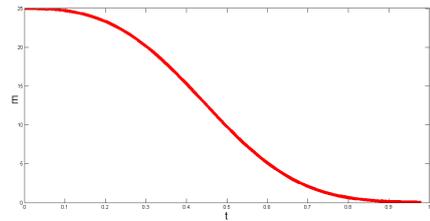
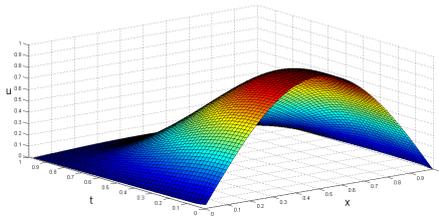
e assim concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_i^n) = 0. \quad (4.40)$$

■

4.5 Simulação Numérica

Com a aproximação (4.15) podemos fazer a simulação numérica do problema. Considerando $\theta = 1/2$, $L=1$, $\varphi(t) = t^2$ (satisfazendo a condição desta ser positiva), $\psi(t) = t$, condição inicial de $\sin(\pi x)$, o tempo final como 1 segundo e particionando o domínio espacial em 100 pontos ($\Delta x = 0,01$) e o temporal em 50 ($\Delta t = 0,02$) temos.



Para esta simulação tivemos que contornar o problema da solução numérica assim como o problema contínuo ser não-linear, para isso utilizamos a seguinte linearização [5]:

$$U^{n+1}V^{n+1} = U^{n+1}V^n + U^nV^{n+1} - U^nV^n. \quad (4.41)$$

5 Conclusão e problemas em aberto

Ao final deste trabalho, observamos primeiramente que a análise de estabilidade qualitativa é uma análise útil, pois faz com que a solução numérica reproduza uma propriedade específica do modelo contínuo. No caso particular da equação do calor, o critério de estabilidade qualitativa em relação a energia dado por

$$\frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (5.1)$$

desenvolve um papel fundamental na análise numérica de estabilidade. Mais precisamente, a condição (5.1) é a mesma condição necessária e suficiente da estabilidade que acarreta a convergência numérica encontrada na literatura.

No terceiro capítulo podemos perceber que a malha deslocada é uma opção de domínio computacional, pois nos fornece novas condições de contorno, e portanto um novo tipo de solução [2]. Podemos também observar que nesta malha encontramos soluções suficientemente próximas da solução analítica preservando entre outros fatores o decaimento de energia e assim atingindo a estabilidade qualitativa.

Por fim, no último capítulo aplicamos as técnicas de análise de estabilidade qualitativa do artigo de Angelov[1], desta vez em malha deslocada para a equação de Burgers com coeficientes dependentes do tempo. Mais precisamente, concluímos que para $\theta \in [1/2, 1]$, a equação de diferenças finitas

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \psi^{n+\theta} \gamma_i(u^{n+\theta}) - \varphi^{n+\theta} \frac{u_{i+1}^{n+\theta} - 2u_i^{n+\theta} + u_{i-1}^{n+\theta}}{\Delta x^2} = 0,$$

com $\gamma_i(u^{n+\theta})$ dado por

$$\gamma_i(u^{n+\theta}) = \frac{1}{6\Delta x} \left[(u_{i+1}^{n+\theta})^2 + (u_{i+1}^{n+\theta} u_i^{n+\theta}) - (u_i^{n+\theta} u_{i-1}^{n+\theta}) - (u_{i-1}^{n+\theta})^2 \right],$$

é qualitativamente estável com relação a energia em malha deslocada com condição de contorno implícitas dadas por

$$u_{M+1}^{n+1} = -u_M^{n+1}, \quad u_{M+1}^n = -u_M^n, \quad u_0^{n+1} = -u_1^{n+1} \text{ e } u_0^n = -u_1^n.$$

Destacamos também os seguintes problemas em aberto:

1. Estabilidade qualitativa com relação a energia para a mesma equação de diferenças finitas em malha deslocada e condições de contorno também implícitas para $0 \leq \theta \leq 1/2$.
2. Estabilidade qualitativa com relação a energia para a mesma equação de diferenças finitas em malha deslocada e condições de contorno explícitas.
3. Estabilidade qualitativa com relação a energia para a mesma equação de diferenças finitas em malha comum com condições de contorno de Dirichlet para $0 \leq \theta \leq 1/2$, problema deixado em aberto no artigo base pelos autores.
4. Análise do decaimento, a fim de se obter decaimento exponencial.
5. Análise de estabilidade qualitativa para outras equações com coeficientes dependentes do tempo.

Referências Bibliográficas

- [1] Anguelov, R.; Djoko, J.M.; Lubuma, -S. - *Energy Properties Preserving Schemes for Burgers' Equation*, Numerical Methods for Partial Differential Equations vol.14, 41-59, Wiley Periodical, 2008.
- [2] Oishi, C. M.; Yuan, J. Y.; Cuminato, J. A.; Stewart, D. E. - *Stability analysis of Crank-Nicolson and Euler schemes for time-dependent diffusion equations*, BIT Number Math vol.55, 487-513, Springer Science + Business Media Dordrecht, 2014.
- [3] Tveito, A.; Winther, R. - *Introduction to Partial Differential Equations: A Computational Approach*, Springer, Nova York, 1998.
- [4] Fortuna, A. O. - *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos - Conceitos Básicos e Aplicações*, EDUSP, São Paulo, 2000.
- [5] Rong-Jun, C.; Yu-Min, C. - *A meshless method for the compound KdV-Burgers equation*, Chinese Physical Society and IOP Publishing vol.20, 07026-(1-6) Ltd, 2011.
- [6] Lax, P. D.; Richtmyer, R. D. - *Survey of the Stability of Linear Finite Difference Equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol.IX, 267-293, 1956.