Isaac Torres Sales

Existência e Multiplicidade de Soluções via Teorema de Ricceri

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

Belém
2016

Certificado de Avaliação

Isaac Torres Sales

Existência e Multiplicidade de Soluções via Teorema de Ricceri

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, julgado pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. AUGUSTO CÉSAR DOS REIS COSTA
Presidente

Prof. Dr. GERALDO MENDES DE ARAÚJO
Membro

Prof. Dr. FRANCISCO JÚLIO SOBREIRA DE ARAÚJO CORRÊA
Membro

Prof. Dr. UBERLANDIO BATISTA SEVERO
Membro

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Sistema de Bibliotecas da UFPA

Sales, Isaac Torres, 1992-
Existência e multiplicidade de soluções via teorema de Ricceri / Isaac Torres Sales. - 2016.

Orientador: Augusto César dos Reis Costa.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2016.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações elípticas. 3. Teorema de Ricceri. 4. Problemas elípticos. 5. Método variacional. I. Título.

CDD 22. ed. 515.3533

Dedico este trabalho à minha família

*O essencial é saber ver,
mas isso, triste de nós que
trazemos a alma vestida,
isso exige um estudo profundo,
aprendizagem de desaprender.
Eu procuro despir-me do que aprendi,
eu procuro esquecer-me do modo
de lembrar que me ensinaram
e raspar a tinta com que
me pintaram os sentidos,
desembrulhar-me e ser eu.*

Alberto Caeiro

Agradecimentos

Agradecimentos são sempre cansativos para quem lê, mas são uma obrigação para quem conclui um trabalho que requer o auxílio valioso de muitas pessoas. Por isso, não posso deixar de lembrar os nomes daqueles que muito me ajudaram ao longo desse trabalho. Algumas pessoas, no entanto, merecem destaque. Sem dúvida, devo este trabalho ao empenho do professor Augusto César dos Reis Costa, que nunca negou-se a prestar um esclarecimento, por mais trivial ou elaborado que ele fosse, sempre me incentivando a seguir em frente e a continuar buscando as soluções dos problemas. Sou muito grato pela sua paciência e pelo seu imenso esforço empregado na consolidação deste trabalho. Ao professor Augusto, meus agradecimentos.

Agradeço a imensa paciência e apoio da minha mãe, dona Maria José Torres Mercês, minha primeira professora de Matemática, que sempre me estimulou a não desistir de estudar, por maiores que fossem as dificuldades e que me ensinou, com muita simplicidade e amor, basicamente tudo que eu sei. Agradeço aos meus irmãos, Cristiano Torres Mercês e David Torres Mercês, que me apoiaram como verdadeiros pais nesse caminho duvidoso de estudante universitário, mesmo sem concordar com ele, muitas vezes. Eles são a minha família, a quem devo a oportunidade de vir à universidade, apesar de tantos impedimentos. Agradeço imensamente a Ingrid Ferreira da Costa, uma grande mulher que me apoiou incondicionalmente durante o curso, especialmente na sua fase mais problemática: a da produção da Dissertação. Agradeço ao seu valioso apoio, com muito amor.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da UFPa por todo o apoio e por ter acreditado em mim, apesar de alguns acidentes de percurso, que foram superados, graças ao seu apoio e à beleza da Matemática, que sempre nos traz de volta à vida.

Serei eternamente grato a todos os meus amigos e a todos os que me apoiaram durante um período de depressão, enfrentado durante o curso. Agradeço especialmente a Bráulio Brendo Vasconcelos Maia e Weslley de Sena Gomes pela parceria e pelos inúmeros cafés, sempre acompanhados de muita matemática e filosofia. Agradeço a Thiago Machado, Rodrigo Cardoso, Ygor Pará, Amanda Almeida, Everton Luis e sua família, Felipe Santos, Tays Miranda e tantos outros que suportaram minha depressão e me ajudaram a superá-la. A todos, meus mais sinceros agradecimentos.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos a demonstração da versão original de um Teorema devido a Biagio Ricceri, que é um método variacional usado para demonstrar a existência de pelo menos três soluções fracas para determinados problemas elípticos. Apresentamos uma aplicação desse resultado, que é feita em uma classe de problemas locais. Aplicamos também uma versão aprimorada do Teorema de Ricceri em uma classe de problemas elípticos não-locais.

Palavras-chave: Método Variacional, Teorema de Ricceri, Problema Local, Problema Não-local.

Abstract

In this work, we present the proof of the original version of a Theorem due to Biagio Ricceri, which is a variational method used to prove the existence of at least three weak solutions for some elliptic problems. We show the application of this original result in a class of local problems. We also apply an improved version of the Ricceri's Theorem in a class of nonlocal elliptic problems.

Keywords: Variational Method, Ricceri's Theorem, Local Problem, Nonlocal Problem.

Sumário

Introdução

Em 2000, o italiano Biagio Ricceri apresentou um método variacional para a obtenção de múltiplas soluções para determinados problemas elípticos. Esse trabalho foi intitulado *Existence of Three Solutions for a Class of Elliptic Eigenvalue Problems*, [20], no qual ele mostra existência de três soluções fracas distintas para um problema de Dirichlet. Seu método utiliza o Teorema do Passo da Montanha e certas propriedades topológicas de multifunções associadas ao funcional.

O objetivo deste trabalho é apresentar esse resultado original de Ricceri, além de mostrar duas aplicações, publicadas por ele. No Capítulo 1, apresentamos detalhadamente a teoria original de [20], mostrando, em particular, como ela se aplica ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_0(f(u)+\mu g(u)), & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, sob certas condições de crescimento para f e g, para garantir a existência das três soluções fracas distintas em $H_0^1(\Omega)$.

Ao longo da década 2000 - 2010, Ricceri fez uma série de aperfeiçoamentos em seu método, culminando no trabalho *A further three critical points theorem*, publicado em 2009 [19]. Já com este resultado melhorado, ele mostrou que o problema

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right)\Delta u = \lambda f(x,u)+\mu g(x,u), & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_2}$$

possui também três soluções fracas distintas em $W_0^{1,2}(\Omega)$, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Este resultado foi publicado no artigo [21], de 2010. Apresentamos este resultado e a sua demonstração, com grande detalhe, no Capítulo 2. Apresentamos também o referido problema envolvendo o termo original de Kirchhoff, $M(t) = a + bt$, problema (P_3). O autor deixa como um problema aberto saber se este caso particular vale para $n = 3$. Como mostrou Giovanni Anello em [5], de 2011, a resposta é negativa. Anello mostrou que existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que o problema

$$\begin{cases} -\left(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right)\Delta u & = & \lambda f(u), & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0, & \text{em} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_3'}$$

possui uma única solução não-trivial em $H_0^1(\Omega)$, não sendo possível, portanto, garantir a multiplicidade de soluções via Teorema de Ricceri. Analisamos este trabalho no Capítulo 3.

Com o objetivo de facilitar a leitura do trabalho, especialmente para o estudante, adicionamos dois apêndices. O Apêndice A reúne alguns resultados básicos de topologia geral, em particular, alguns de espaços métricos e de análise na reta, que são usados frequentemente ao longo do texto. Há também uma seção sobre multifunções, recurso utilizado por Ricceri na construção de seu método.

No Apêndice B, reunimos uma série de resultados de análise funcional, como a imersão de Sobolev, a desigualdade de Poincaré e certos teoremas envolvendo minimização de funcionais, além de um resumo sobre derivadas de Gâteaux e Fréchet. Esperamos, com isso, deixar a leitura do texto mais prática, buscando fornecer a maior parte dos recursos necessários para a leitura das demonstrações apresentadas.

Capítulo 1

Teorema de Ricceri - Versão Original

Neste capítulo, vamos apresentar o resultado inicial de B. Ricceri em [20] para mostrar que, sob determinadas condições, o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_0(f(u)+\mu g(u)), & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

tem pelo menos três soluções fracas distintas em $W_0^{1,2}(\Omega)$, onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, com $n \geqslant 1$. Para isso, vamos uitilizar alguns resultados sobre multifunções, de [20], para provar o Teorema 1.1 abaixo, que dá uma condição suficiente para que uma certa classe de funcionais definidos em $X \times I$ tenha um mínimo local, onde X é um espaço topológico genérico e I um intervalo. A seguir, utilizamos este resultado para provar o Teorema 1.3, que garante a existência de um mínimo local não absoluto para uma classe de funcionais. Em seguida, restringimos este Teorema para uma classe menor de funcionais, exigindo, por exemplo, que eles sejam continuamente Gâteux diferenciáveis, o que é feito no Teorema 1.4. Essa restrição permite demonstrar a existência de mais dois pontos críticos para o funcional, sendo o primeiro garantido por um resultado clássico de Análise Funcional e o segundo garantido pela aplicação de uma versão do Teorema do Passo da Montanha, utilizando para isso um resultado de [17]. Com isso, podemos aplicar o Teorema 1.4 para o funcional associado ao problema acima, sob as devidas condições. Finalmente, a demonstração deste fato é feita no Teorema 1.6, provando, portanto, o que enunciamos acima.

1.1 Obtenção dos três pontos críticos

O teorema a seguir apresenta condições para uma determinada aplicação ter um mínimo local. A sua demonstração é baseada em certas propriedades topológicas de multifunções, que estão na Seção A.4 do Apêndice A.

Teorema 1.1 ([20], Teorema 2.1). Seja X um espaço topológico, I um intervalo e $f : X \times I \to \mathbb{R}$ uma função dada. Suponhamos que

(a) Para cada $x \in X$, o conjunto

$$\{\lambda \in I;\ f(x,\lambda) \geqslant 0\}$$

é fechado em I e o conjunto

$$\{\lambda \in I;\ f(x,\lambda) > 0\}$$

é não-vazio, conexo e aberto em I.

(b) Para cada $\lambda \in I$, o conjunto

$$\{x \in X;\ f(x,\lambda) \leqslant 0\}$$

é não-vazio, fechado e sequencialmente compacto.

(c) Existe $\lambda_0 \in I$ tal que o conjunto

$$\{x \in X;\ f(x,\lambda_0) \leqslant 0\}$$

é conexo.

Nestas condições, existem $x^* \in X$, $\lambda^* \in I$, uma sequência $\{\lambda_n\}$ em I convergindo para λ^* e uma vizinhança U de x^* tal que $f(x^*,\lambda^*) = 0$ e $f(x,\lambda_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in U$. Em particular, x^* é um mínimo local de $f(\cdot,\lambda^*)$.

Demonstração. Considere as multifunções $F : I \to 2^X$ e $G : X \to 2^I$ definidas por

$$F(\lambda) = \{x \in X; f(x,\lambda) \leqslant 0\}$$

e

$$G(x) = \{\lambda \in I;\ f(x,\lambda) > 0\}.$$

De (b), $F(\lambda)$ é um conjunto não-vazio, fechado e sequencialmente compacto em X, para todo $\lambda \in I$ e, de (a), $G(x)$ é não-vazio, conexo e aberto em I. Vamos aplicar a Proposição A.11 a G. Para isso, vamos mostrar que $G^{-}(\lambda)$ é um conjunto aberto, para todo $\lambda \in I$. Observe que

$$\begin{aligned} G^{-}(\lambda) &= \{x \in X; G(x) \cap \{\lambda\} \neq \varnothing\} \\ &= \{x \in X; \lambda \in G(x)\} \\ &= \{x \in X; f(x,\lambda) > 0\}. \end{aligned}$$

De (b), o complementar de $G^{-}(\lambda)$, que é igual a $\{x \in X; f(x,\lambda) \leqslant 0\}$, é fechado. Logo, $G^{-}(\lambda)$ é aberto para todo $\lambda \in I$. Para aplicar a Proposição A.11, precisamos mostrar também que existe $\lambda_0 \in I$ tal que $X \backslash G^{-}(\lambda_0)$ é sequencialmente compacto. De fato, de (c), vemos que existe $\lambda_0 \in I$ tal que o conjunto $\{x \in X;\ f(x,\lambda_0) \leqslant 0\}$, que é igual a $X \backslash G^{-}(\lambda_0)$, é conexo e, por (b), ele é não vazio, fechado e sequencialmente compacto. Então, aplicando a Proposição A.11 a G, vemos que, dada uma sequência não decrescente $\{I_k\}$ de subintervalos compactos de I, com $\lambda_0 \in I_1$, tais que $\cup_{k \in \mathbb{N}} I_k = I$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $G^{-}(I_k) = X$. Definimos, então, o conjunto

$$S = \{(x,\lambda) \in X \times I_k; f(x,\lambda) \leqslant 0\}$$

e, para cada $x \in X$, a multifunção $\Phi : X \to 2^{I}$, onde

$$\Phi(x) = G(x) \cap I_k,$$

cujo gráfico é

$$\begin{aligned} gr(\Phi) &= \{(x,\lambda) \in X \times I; \lambda \in \Phi(x)\} \\ &= \{(x,\lambda) \in X \times I; \lambda \in G(x) \cap I_k\} \\ &= \{(x,\lambda) \in X \times I_k; \lambda \in G(x)\} \\ &= \{(x,\lambda) \in X \times I_k; f(x,\lambda) > 0\}. \end{aligned}$$

A seguir, vamos aplicar a proposição A.9 para provar que S não é conexo. Das definições anteriores, vemos que $gr(\Phi) \cap S = \varnothing$, ou seja, o gráfico de Φ não intersecta S. Afirmamos que Φ é semicontínua inferiormente (s.c.i.). De fato, dado um um aberto $\Omega \subset I$, temos

$$\Phi^{-}(\Omega) = \{x \in X; \Phi(x) \cap \Omega \neq \varnothing\}.$$

Daí, pela definição de Φ, $\Phi(x) \cap \Omega = G(x) \cap I_k \cap \Omega$. E, como $\Omega \subset I$, temos

$$I_k \cap \Omega \subset I_k \cap I = I_k,$$

ou seja, $I_k \cap \Omega = I_k$. Daí, segue que $\Phi(x) \cap \Omega = G(x) \cap I_k$. Por outro lado, $G^{-}(I_k) = X$, isto é,

$$X = \{x \in X; G(x) \cap I_k \neq \varnothing\}. \tag{1.1}$$

Concluímos então que $\Phi^{-}(\Omega) = G^{-}(I_k) = X$, que é aberto, ou seja, Φ é s.c.i. Além disso, $\Phi(x)$ é não-vazio e conexo para todo $x \in X$. De fato, de (1.1), vemos que $\Phi(x) = G(x) \cap I_k \neq \varnothing$ para todo $x \in X$. E, por (a), $G(x)$ é conexo. Como I_k é um intervalo, é também conexo. Logo, a sua interseção, que é igual a $\Phi(x)$, é um conjunto conexo, já que é não-vazia. Note que a projeção de S sobre I_k é igual a I_k. Vejamos por quê. Seja

$$P = \{\lambda \in I_k; (x,\lambda) \in S\}$$

essa projeção. Claramente, $P \subset I_k$. E, por (b), o conjunto $\{x \in X; f(x,\lambda) \leqslant 0\}$ é não-vazio, para todo $\lambda \in I_k$. Em particular, dado $\lambda \in I_k$, existe $x \in X$ tal que $f(x,\lambda) \leqslant 0$; daí, $(x,\lambda) \in S$, donde $I_k \subset P$. Dessa forma, $P = I_k$, isto é, a projeção de S sobre I_k é igual a I_k. Resumindo: $\Phi : X \to 2^{I_k}$ é uma multifunção semicontínua inferiormente com valores não-vazios e conexos, sendo X um espaço topológico e I_k um intervalo compacto e, além disso, S é um subconjunto de $X \times I_k$ cuja projeção sobre I_k é I_k. Podemos, então, aplicar a contrapositiva da Proposição A.9 para concluir que S é desconexo. Sendo $F|I_k$ a restrição de F ao intervalo I_k, cujo gráfico é

$$\begin{aligned} gr(F|I_k) &= \{(\lambda,x) \in I_k \times X; x \in F(\lambda)\} \\ &= \{(\lambda,x) \in I_k \times X; f(x,\lambda) \leqslant 0\}, \end{aligned}$$

temos que a aplicação $h : gr(F|I_k) \to S$ definida por $h(\lambda,x) = (x,\lambda)$ é um homeomorfismo, ou seja, S é homeomorfo a $gr(F|I_k)$ (ver Observação 1.2). Mas, sendo S desconexo, $gr(F|I_k)$ é também desconexo

[24]. Além disso, por (b), $F(\lambda)$ é não-vazio, fechado e sequencialmente compacto. Daí, pela Proposição A.5, ele é também sequencialmente fechado. Além disso, como

$$\begin{aligned} F^-(x) &= \{\lambda \in I; F(\lambda) \cap \{x\} \neq \varnothing\} \\ &= \{\lambda \in I; x \in F(\lambda)\} \\ &= \{\lambda \in I; f(x,\lambda) \leqslant 0\}, \end{aligned}$$

temos $I \backslash F^-(x) = \{\lambda \in I; f(x,\lambda) > 0\}$, donde, por (a), $I \backslash F^-(x)$ é não-vazio, conexo e aberto em I. Aplicando a Proposição A.12 a F, concluímos que ela é uma multifunção sequencialmente semicontínua superiormente. De (b) e (c), $F(\lambda_0)$ é não-vazio e conexo. Note que, sendo o domínio de F um intervalo, ele é conexo e primeiro contável. Então, aplicando a contrapositiva da Proposição A.10 à restrição $F|I_k$, vemos que $F|I_k$ não é semicontínua inferiormente, apesar de ser sequencialmente semicontínua superiormente, pois $\mathrm{gr}(F|I_k)$ é desconexo. Sendo $F|I_k$ uma multifunção que não é semicontínua inferiormente, existe um aberto $U \subseteq X$ tal que $F^-(U)$ não é aberto de I_k, donde

$$I_k \backslash F^-(U) = \{\lambda \in I_k; F(\lambda) \cap U = \varnothing\}$$

não é fechado em I_k. Sendo este um subconjunto da reta, também não é sequencialmente fechado em I_k. Isso significa que existem $\lambda^* \in F^-(U) \subset I_k$ e uma sequência $\{\lambda_n\}$ em $I_k \backslash F^-(U)$ convergindo para λ^*. Da definição de $F^-(U)$, que é

$$F^-(U) = \{\lambda \in I_k; F(\lambda) \cap U \neq \varnothing\},$$

concluímos que $F(\lambda^*) \cap U \neq \varnothing$. Então existe $x^* \in F(\lambda^*) \cap U$, ou seja, existe $x^* \in U$ tal que $f(x^*,\lambda^*) \leqslant 0$. Concluímos também que $F(\lambda_n) \cap U = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\lambda_n \in I_k \backslash F^-(U)$. Afirmamos então que $f(x,\lambda_n) > 0$ para todo $x \in U$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, se assim não fosse, existiriam $x \in U$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $f(x,\lambda_n) \leqslant 0$. Da definição de $F(\lambda_n)$, teríamos então $x \in F(\lambda_n) \cap U$, um paradoxo, pois, da definição desta sequência, esta interseção é vazia. Além disso, $f(x,\lambda^*) \geqslant 0$ para todo $x \in U$. Com efeito, de (a), o conjuno

$$I_x = \{\lambda \in I; f(x,\lambda) \geqslant 0\}$$

é fechado em I, para todo $x \in X$. Da afirmação anterior, $f(x,\lambda_n) > 0 \Rightarrow \lambda_n \in I_x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in U$. Logo, como I_x é fechado em I, temos $\lambda^* = \lim \lambda_n \in I_x$, ou seja, $f(x,\lambda^*) \geqslant 0$ para todo $x \in U$. Em particular, como $x^* \in U$, temos $f(x^*,\lambda^*) \geqslant 0$. Portanto, $f(x^*,\lambda^*) = 0$ e $f(x,\lambda^*) \geqslant 0$ para todo $x \in U$, isto é, x^* é um mínimo local de $f(\cdot,\lambda^*)$. □

Observação 1.2. Pode-se mostrar que h é, de fato, um homeomorfismo. Intuitivamente, isto é fácil de imaginar, uma vez que S e $gr(F|I_k)$ são definidos pela mesma propriedade, em espaços ligeiramente diferentes. Rigorosamente, temos as topologias produto nos espaços $X \times I_k$ e $I_k \times X$. Sendo então S e $gr(F|I_k)$ subconjuntos desses espaços, respectivamente, podemos considerá-los como espaços topológicos usando a topologia induzida por eles. Então, podemos mostrar que a imagem inversa de um aberto por h é um aberto, ou seja, que h é contínua. Para isso, basta lembrar que um aberto U de S é uma interseção

$$U = S \cap (U_X \times U_k),$$

onde U_X é um aberto de X e U_k um aberto de I_k. Podemos então escrever a expressão de $h^{-1}(U)$ e notar que este conjunto é igual a $gr(F|I_k) \cap (U_k \times U_X)$, que é um aberto de $gr(F|I_k)$. Além disso, h é uma bijeção. Para mostrar que h^{-1} é contínua, temos um raciocínio inteiramente análogo ao anterior.

A seguir, vamos aplicar o resultado anterior para costrar que determinada classe de funcionais possui um mínimo local

Teorema 1.3 ([20]). Sejam E um espaço de Banach real, separável e reflexivo, $X \subset E$ ilimitado, fechado e convexo, $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional convexo semicontínuo inferiormente, $\Psi : X \to \mathbb{R}$ um funcional fracamente sequencialmente contínuo, $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo, $\mu_0 \in I$ e $h : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e côncava. Defina então

$$a = \sup_{\lambda \in I} \inf_{x \in X} (\Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) + h(\lambda)),$$
$$b = \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in I} (\Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) + h(\lambda))$$

e suponha que $a < b$. Além disso, assuma que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} (\Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) + h(\lambda)) = +\infty,$$

para todo $\lambda \in I$. Então, para cada $r \in]a,b[$, existem $\lambda^* \in I \setminus \{\mu_0\}$ e $x^* \in X$ tais que

$$\Phi(x^*) + (\lambda^* - \mu_0)\Psi(x^*) + h(\lambda^*) = r$$

e x^* é um mínimo local, não-absoluto, de $\Phi + (\lambda^* - \mu_0)\Psi$ na topologia fraca de X.

Demonstração. Fixado $r \in]a,b[$, defina a função $f : X \times I \to \mathbb{R}$ por

$$f(x,\lambda) = \Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) + h(\lambda) - r.$$

Vamos aplicar o Teorema 1.1 à aplicação f. Vejamos primeiro a condição (a). Consideremos então o seguinte subconjunto de I:

$$I_r = \{\lambda \in \mathbb{R}; f(x,\lambda) \geqslant 0\}.$$

Da expressão de f, concluímos que a desigualdade que define I_r é equivalente a

$$\psi(x) + \Psi(x)\lambda + h(\lambda) \geqslant 0,$$

onde definimos, para simplificar a notação, $\psi(x) = \Phi(x) - \mu_0\Psi(x) - r$, que reúne os termos que não dependem de λ. A função definida por $\psi(x) + \Psi(x)\lambda + h(\lambda)$ é, então, contínua em relação a λ, uma vez que $\psi(x)$ e $\Psi(x)$ não dependem de λ e h é contínua. Daí, pela Proposição A.1, segue que I_r é fechado em I, para todo $x \in X$. Consideremos agora o conjunto

$$J_r = \{\lambda \in \mathbb{R}; f(x,\lambda) > 0\}.$$

Vamos mostrar que, para cada $x \in X$, (i) J_r é não-vazio, (ii) conexo e (iii) aberto em I. (i) Se J_r fosse vazio, teríamos $f(x,\lambda) \leqslant 0$ para todo λ em I, ou seja,

$$\Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) + h(\lambda) \leqslant r.$$

Então, aplicando primeiro o $\sup_{\lambda \in I}$ em ambos os membros e depois o $\inf_{x \in X}$, obtemos:

$$b = \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in I} (\Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) + h(\lambda)) \leqslant r,$$

uma contradição. Logo, J_r é não-vazio. (ii) Se J_r não fosse conexo, existiriam dois abertos disjuntos A e B não-vazios tais que $J_r = A \cup B$ [16]. Então existem $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, que podemos supor serem tais que $\alpha < \beta$. Como um subconjunto da reta é conexo se, e somente se, é um um intervalo ([16], Proposição 6 do Capítulo 4), segue que J_r não pode ser um intervalo. Desse fato, concluímos que existe $\lambda \in I$ tal que $\alpha < \lambda < \beta$ mas $\lambda \notin J_r$. Segue então da definição de J_r que, como $\lambda \in I \setminus J_r$, temos $f(x,\lambda) \leqslant 0$; porém, como $\alpha,\beta \in J_r$, temos $f(x,\alpha) > 0$ e $f(x,\beta) > 0$. Mais claramente, da expressão de f, podemos escrever as desigualdades:

$$\begin{aligned}
\Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) + h(\lambda) - r &\leqslant 0\\
\Phi(x) + (\alpha - \mu_0)\Psi(x) + h(\alpha) - r &> 0\\
\Phi(x) + (\beta - \mu_0)\Psi(x) + h(\beta) - r &> 0.
\end{aligned}$$

Então, comparando a primeira com a segunda, obtemos

$$\Phi(x) + (\alpha - \mu_0)\Psi(x) + h(\alpha) - r > 0 \geqslant \Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) + h(\lambda) - r,$$

isto é,

$$\alpha\Psi(x) + h(\alpha) > \lambda\Psi(x) + h(\lambda).$$

Analogamente, comparando a primeira desigualdade com a terceira, obtemos

$$\beta\Psi(x) + h(\beta) > \lambda\Psi(x) + h(\lambda).$$

Estas duas últimas desigualdades podem ser reescritas, isolando o termo $\Psi(x)$, como

$$\frac{h(\alpha) - h(\lambda)}{\lambda - \alpha} > \Psi(x) > \frac{h(\lambda) - h(\beta)}{\beta - \lambda},$$

uma vez que $\lambda - \alpha > 0$ e $\beta - \lambda > 0$. Daí, seque que

$$\frac{h(\lambda) - h(\alpha)}{\lambda - \alpha} < \frac{h(\beta) - h(\lambda)}{\beta - \lambda},$$

que é uma contradição com o fato de que h é côncava [14]. Isso prova que J_r é conexo. (iii) Para ver que J_r é aberto em I, basta usar a Proposição A.1. Para mostrar (c), escolhemos $\lambda_0 = \mu_0$ e consideramos o conjunto

$$\begin{aligned} Y &= \{x \in X; f(x,\mu_0) \leqslant 0\} \\ &= \{x \in X; \Phi(x) + h(\mu_0) - r \leqslant 0\} \\ &= \{x \in X; \Phi(x) \leqslant r - h(\mu_0)\}. \end{aligned}$$

Suponhamos, por contradição, que Y não seja conexo. Então [16] existem $W,Z \subset Y$ disjuntos, abertos em Y e não-vazios, tais que $W \cup Z = Y$. Como X é convexo, dados $w \in W$, $z \in Z$ e $t \in (0,1)$, $T = tw + (1-t)z$ pertence a X. Logo, existe $t \in (0,1)$ tal que $T \in X \setminus Y$, pois Y não é conexo. Então, como $T \notin Y$, temos $f(T,\mu_0) > 0$, ou seja,

$$r - h(\mu_0) \leqslant \Phi(tw + (1-t)z). \tag{1.2}$$

Mas, como $w,z \in Y$, temos

$$\Phi(w) \leqslant r - h(\mu_0) \qquad \text{e} \qquad \Phi(z) \leqslant r - h(\mu_0).$$

Multiplicando a primeira destas desigualdades por t e a segunda por $(1-t)$ e somando os resultados, obtemos

$$t\Phi(w) + (1-t)\Phi(z) \leqslant r - h(\mu_0). \tag{1.3}$$

Comparando as equações (1.2) e (1.3), obtemos

$$t\Phi(w) + (1-t)\Phi(z) < \Phi(tw + (1-t)z),$$

que é uma contradição com a convexidade do funcional Φ. Portanto, tomando $\lambda_0 = \mu_0$, $Y = \{x \in$

$X;\, f(x,\lambda_0) \leqslant 0\}$ é conexo. Para mostrar (b), fixemos $\lambda \in I$ e consideremos o conjunto

$$\begin{aligned} L &= \{x \in X; f(x,\lambda) \leqslant 0\} \\ &= \{x \in X; \Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) + h(\lambda) - r \leqslant 0\} \\ &= \{x \in X; \Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) \leqslant r - h(\lambda)\}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que (i) L é não-vazio, (ii) fechado e (iii) sequencialmente compacto. (i) Se L fosse vazio, teríamos

$$\Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) + h(\lambda) > r$$

para todo $x \in X$. Daí, aplicando o $\inf_{x \in X}$ em ambos os membros e, em seguida, o $\sup_{\lambda \in I}$, obtemos

$$a = \sup_{\lambda \in I} \inf_{x \in X} (\Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) + h(\lambda)) \geqslant r,$$

que é uma contradição com a definição de a. Logo, L é não-vazio. (ii) Seja $x_0 \in X$ tal que

$$\Phi(x_0) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x_0) > r - h(\lambda).$$

Assim, tome $\rho > 0$ tal que

$$\Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) > r - h(\lambda)$$

para todo $x \in X$ com $\|x - x_0\| < \rho$. Como E é separável e reflexivo, pela Proposição B.1, o seu dual também é separável e reflexivo. Então, pela Proposição B.2, concluímos que a bola unitária de E é metrizável na topologia fraca e, portanto, a bola

$$\overline{B}_\rho(x_0) = \{x \in X; \|x - x_0\| \leqslant \rho\}$$

também é. Pela Proposição B.3, como Φ é um funcional convexo e semicontínuo inferiormente (ver Definição A.6) num espaço de Banach, segue que Φ é contínua. Em particular, é fracamente contínua. Além disso, da Proposição A.3, segue que, como Ψ é fracamente sequencialmente contínua, restrita à bola $\overline{B}_\rho(x_0)$ (que é um espaço métrico), será fracamente contínua. Consequentemente, o funcional $\Phi + (\lambda - \mu_0)\Psi$, restrito ao conjunto $\overline{B}_\rho(x_0)$, é fracamente contínuo. Dessa forma, existe uma vizinhança

$V \ni x_0$ na topologia fraca de E de modo que

$$\Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) > r - h(\lambda)$$

para todo $x \in V \cap X$ com $\|x - x_0\| \leqslant \rho$. Pela Proposição A.1, segue que $X \setminus L$ é fracamente aberto em X. Daí, L é fracamente fechado em X e, portanto, é fechado em X (ver Proposição B.10). Finalmente, como X é fechado, por hipótese, segue que L é um conjunto fechado. (iii) Em primeiro lugar, afirmamos que L é limitado. Com efeito, se L fosse um conjunto ilimitado, seria possível construir uma sequência $\{x_n\} \subset L$ tal que $\lim \|x_n\| = +\infty$. Dessa forma, teríamos, por um lado,

$$\Phi(x_n) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x_n) + h(\lambda) \leqslant r$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, pela definição de L e, por outro lado, teríamos

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} (\Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) + h(\lambda)) = +\infty,$$

da hipótese do Teorema. Teríamos então uma contradição; logo $L \subset X$ é limitado. Dessa forma, toda sequência $\{x_n\}$ em L é limitada. Daí, pelo Teorema de Eberlein-Smulyan (Proposição B.7), seque que $\{x_n\}$ possui uma subsequência fracamente convergente. Como L é fracamente fechado, este limite pertence a L. Da arbitrariedade da sequência, segue que L é sequencialmente compacto. Isto prova então (b). Portanto, como todas as hipóteses do Teorema 1.1 se verificam para o funcional f, existem $x^* \in X$, $\lambda^* \in I$, uma sequência $\{\lambda_n\}$ em I convergindo para λ^* e uma vizinhança $U \ni x^*$ tais que $f(x,\lambda_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in U$ e $f(x^*,\lambda^*) = 0$, isto é,

$$\Phi(x^*) + (\lambda^* - \mu_0)\Psi(x^*) + h(\lambda^*) = r.$$

Logo, x^* é um mínimo local de $f(\cdot,\lambda^*)$. O fato de que x^* não é um mínimo absoluto de $\Phi + (\lambda^* - \mu_0)\Phi$ segue da definição de a. De fato, se x^* fosse um mínimo global, teríamos

$$r = \Phi(x^*) + (\lambda^* - \mu_0)\Psi(x^*) + h(\lambda^*) \leqslant \Phi(x) + (\lambda^* - \mu_0)\Psi(x) + h(\lambda^*),$$

para todo $x \in X$. Daí, aplicando a definição de a, isto é, aplicando o $\inf_{x \in X}$ e depois o $\sup_{\lambda \in I}$ em ambos os membros, obteríamos $r \leqslant a$, uma contradição com $r \in (a,b)$. Portanto, x^* é um mínimo local não-absoluto do funcional. Finalmente, a convexidade de Φ implica $\lambda^* \neq \mu_0$, o que conclui a demonstração. $\square$

O resutado a seguir é a versão original to Teorema de Ricceri, que dá condições para um funcional possuir pelo menos três pontos críticos distintos.

Teorema 1.4 (Ricceri, [20])**.** Sejam X um espaço de Banach real, separável e reflexivo; $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional convexo e continuamente Gâteux diferenciável, cuja derivada de Gâteux admite uma inversa contínua em X^*; $\Psi : X \to \mathbb{R}$ um funcional continuamente Gâteux diferenciável, cuja derivada de Gâteux é compacta; $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo; e $\mu_0 \in I$. Assuma que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} (\Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x)) = +\infty, \tag{1.4}$$

para todo $\lambda \in I$, e que existe uma função contínua e côncava $h : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{\lambda \in I} \inf_{x \in X} (\Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) + h(\lambda)) < \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in I} (\Phi(x) + (\lambda - \mu_0)\Psi(x) + h(\lambda)).$$

Então existe $\lambda^* \in I \backslash \{\mu_0\}$ tal que a equação

$$\Phi'(x) + (\lambda^* - \mu_0)\Psi'(x) = 0$$

tem pelo menos três soluções em X.

Demonstração. Em primeiro lugar, como X é um espaço de Banach, é ilimitado e fechado. Por hipótese, é também separável e reflexivo. Afirmamos que Φ e Ψ satisfazem as hipóteses do Teorema 1.3 demonstrado anteriormente. De fato, como os funcionais Φ e Ψ são continuamente Gâteux diferenciáveis, da Proposição B.14, segue que eles são Fréchet diferenciáveis e, da Proposição B.12, são também, contínuos. Em particular, Φ é semicontínuo inferiormente e, por hipótese, convexo. Além disso, da Proposição B.15, como a derivada de Gâteux Ψ' é compacta e X é um espaço de Banach real e reflexivo, segue que Ψ é sequencialmente fracamente contínuo. Como as outras hipóteses do Teorema 1.3 são claramente satisfeitas, por serem também hipóteses aqui, podemos aplicar o Teorema anterior.

Desta forma, existe $\lambda^* \in I \backslash \{\mu_0\}$ tal que o funcional

$$\phi := \Phi + (\lambda^* - \mu_0)\Psi$$

possui um mínimo local não-absoluto x^* na topologia fraca de X (e, portanto, na forte). Além disso, pela coercividade, segue que este funcional possui um mínimo absoluto também. Com efeito, pela Proposição B.4, como Φ é convexo e s.c.i. (por ser contínuo) e X é reflexivo, segue que este funcional é fracamente s.c.i. Então, aplicando a ϕ a Proposição B.5, que requer a coercividade (eq. 1.4), vemos que este funcional possui um mínimo global u. Como x^* não é mínimo global do funcional, temos dois pontos de mínimo distintos. Pela Proposição B.18, tomando $A = \Phi'$ e $C = (\lambda^* - \mu_0)\Psi'$ (Ψ' compacta implica $C = (\lambda^* - \mu_0)\Psi'$ compacta), vemos que ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale (ver Definição B.16). Então, pela Proposição B.17, este mínimo global u satisfaz a equação

$$\Phi'(u) + (\lambda^* - \mu_0)\Psi'(u) = 0.$$

Pela hipótese (I_3) de [4], segue que a condição de compacidade (C_3) da Proposição B.20 é equivalente à condição de Palais-Smale (ver observação após o Teorema 1 de [17]). Portanto, o funcional ϕ satisfaz a condição (C_3). Então, pelo Corolário B.21, como ϕ possui dois pontos críticos distintos, segue que ele possui um terceiro ponto crítico. □

1.2 Aplicação em uma Classe de Problemas Elípticos Locais

Antes da demonstração do resultado principal, Teorema 1.6, vamos precisar da seguinte Proposição.

Proposição 1.5 ([20]). Seja X um conjunto não-vazio e sejam Φ e J duas funções reais em X. Suponha que existem $r > 0$, $x_0, x_1 \in X$ tais que

$$\Phi(x_0) = J(x_0) = 0, \quad \Phi(x_1) > r, \tag{1.5}$$

$$\sup_{\Phi^{-1}(]-\infty,r])} J(x) < r\frac{J(x_1)}{\Phi(x_1)}. \tag{1.6}$$

Então, para cada ρ satisfazendo

$$\sup_{\Phi^{-1}(]-\infty,r])} J(x) < \rho < r\frac{J(x_1)}{\Phi(x_1)}, \tag{1.7}$$

tem-se

$$\sup_{\lambda\geqslant 0}\inf_{x\in X}(\Phi(x)+\lambda(\rho-J(x)))<\inf_{x\in X}\sup_{\lambda\geqslant 0}(\Phi(x)+\lambda(\rho-J(x))).$$

Demonstração. Em primeiro lugar, afirmamos que Φ é limitada inferiormente em $J^{-1}([\rho,+\infty[)$ e que

$$\inf_{x\in X}\sup_{\lambda\geqslant 0}(\Phi(x)+\lambda(\rho-J(x)))=\inf_{x\in J^{-1}([\rho,+\infty[)}\Phi(x). \tag{1.8}$$

De fato, dado ρ satisfazendo (1.7), temos

$$\sup\{J(x);x\in\Phi^{-1}(]-\infty,r])\}<\rho,$$

ou seja,

$$\sup\{J(x);\Phi(x)\leqslant r\}<\rho.$$

Em particular, $\Phi(x)\leqslant r\Rightarrow J(x)<\rho$, cuja contrapositiva é $J(x)\geqslant\rho\Rightarrow\Phi(x)>r$, que pode ser reescrita como

$$x\in J^{-1}([\rho,+\infty[)\Rightarrow r<\Phi(x).$$

Logo, Φ é limitada inferiormente em $J^{-1}([\rho,+\infty[)$. Segue, então, que

$$r\leqslant\inf_{x\in J^{-1}([\rho,+\infty[)}\Phi(x) \tag{1.9}$$

e este ínfimo está bem definido, para todo ρ satisfazendo (1.7). Vamos agora mostrar (1.8). Pelas propriedades bem conhecidas do supremo, como em [14], Capítulo 10, temos

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda\geqslant 0}(\Phi(x)+\lambda(\rho-J(x))) &= \sup_{\lambda\geqslant 0}\Phi(x)+\sup_{\lambda\geqslant 0}\lambda(\rho-J(x))\\ &= \Phi(x)+\sup_{\lambda\geqslant 0}\lambda(\rho-J(x))\end{aligned}$$

Como $\lambda\geqslant 0$, o valor deste último supremo depende apenas do sinal de $\rho-J(x)$, que independe de λ. Se $\rho-J(x)>0$, temos

$$\sup_{\lambda\geqslant 0}\lambda(\rho-J(x))=+\infty.$$

E se $\rho - J(x) \leqslant 0$, temos $\lambda(\rho - J(x)) \leqslant 0$, donde

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} \lambda(\rho - J(x)) = 0.$$

Então, como $\rho - J(x) > 0 \Leftrightarrow J(x) < \rho \Leftrightarrow x \in J^{-1}(]-\infty, \rho[)$ e $\rho - J(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \rho \leqslant J(x) \Leftrightarrow x \in J^{-1}([\rho, +\infty[)$, temos

$$\sup_{\lambda \geqslant 0}(\Phi(x) + \lambda(\rho - J(x))) = \begin{cases} +\infty, & x \in J^{-1}(]-\infty, \rho[) \\ \Phi(x), & x \in J^{-1}([\rho, +\infty[) \end{cases}$$

Daí, como $\Phi(x) < \infty$, ao calcularmos o $\inf_{x \in X}$ desta expressão é suficiente considerar apenas os pontos x que pertencem a $J^{-1}([\rho, +\infty[) \subset X$, pontos nos quais o supremo vale $\Phi(x)$. Dessa forma, podemos escrever

$$\inf_{x \in X} \sup_{\lambda \geqslant 0}(\Phi(x) + \lambda(\rho - J(x))) = \inf_{x \in J^{-1}([\rho, +\infty[)} \Phi(x),$$

que é a expressão (1.8). Observamos agora que, para cada ρ satisfazendo (1.7), tem-se $J(x_1) > \rho > 0$. Com efeito, como $\Phi(x_1) > r > 0$, temos $1/\Phi(x_1) < 1/r$, donde

$$\rho < r\frac{J(x_1)}{\Phi(x_1)} < r\frac{J(x_1)}{r} = J(x_1).$$

Além disso, $\rho > 0$. De fato, como $\Phi(x_0) = 0 < r$, temos $x_0 \in \Phi^{-1}(]-\infty, r])$. Então, de (1.5) e (1.7) segue que

$$0 = J(x_0) < \rho.$$

Portanto, $J(x_1) > \rho > 0$. Vamos agora definir a função $\phi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ por

$$\phi(\lambda) = \inf_{x \in X}(\Phi(x) + \lambda(\rho - J(x))).$$

Afirmamos que (i) ϕ tende a $-\infty$ quando $\lambda \to +\infty$ e (ii) ϕ é semicontínua superiormente. Suponhamos, por contradição, que (i) seja falsa. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ temos $\lambda > \delta$ e $\phi(\lambda) \geqslant -\varepsilon$, i.e.,

$$\inf_{x \in X}(\Phi(x) + \lambda(\rho - J(x))) \geqslant -\varepsilon. \tag{1.10}$$

Em particular, para

$$\delta = -\frac{\varepsilon + \Phi(x_1)}{\rho - J(x_1)} > 0,$$

vemos que $\lambda > \delta$ implica

$$\Phi(x_1) + \lambda(\rho - J(x_1)) < -\varepsilon,$$

que é uma contradição com a desigualdade (1.10). Desse modo,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \phi(\lambda) = -\infty.$$

(ii) Observe que, dado $b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(-\infty, b) &= \{\lambda \in [0, +\infty[\,; \phi(\lambda) < b\} \\ &= \{\lambda \geqslant 0; \inf_{x \in X} (\Phi(x) + \lambda(\rho - J(x))) < b\}. \end{aligned}$$

Devemos então mostrar que $\phi^{-1}(-\infty, b)$ é aberto em $[0, +\infty[$ para todo $b \in \mathbb{R}$. Se $\phi^{-1}(-\infty, b)$ é vazio, então o problema está resolvido, pois o conjunto vazio é aberto. Porém, se este não é o caso, seja $\lambda_0 \in \phi^{-1}(-\infty, b)$ e definamos

$$\varepsilon \equiv b - \phi(\lambda_0) > 0.$$

Como $\rho - J(x_1) < 0$, temos, simplificando a notação,

$$\inf_{x \in X} (\rho - J(x)) \equiv \inf(\rho - J) \leqslant \rho - J(x_1) < 0,$$

de onde vemos que fica bem definido o número real

$$\delta \equiv \frac{-\varepsilon}{\inf(\rho - J)} > 0.$$

Seja então $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \cap [0, +\infty[$. Multiplicando a desigualdade $\lambda_0 - \delta < \lambda$ por $\inf(\rho - J) < 0$, chegamos a

$$(\lambda_0 - \delta) \inf(\rho - J) > \lambda \inf(\rho - J).$$

Somando então com $\inf\Phi$, obtemos

$$\inf\Phi+\lambda_0\inf(\rho-J)-\delta\inf(\rho-J)>\inf\Phi+\lambda\inf(\rho-J),$$

ou seja,

$$\phi(\lambda_0)-\delta\inf(\rho-J)>\phi(\lambda).$$

Note que, como $\lambda\geqslant 0$, $\phi(\lambda)$ está bem definido. Das definições de δ e ε,

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) &< \phi(\lambda_0)+\frac{\varepsilon}{\inf(\rho-J)}\inf(\rho-J)\\ &< \phi(\lambda_0)+b-\phi(\lambda_0)\\ &< b\end{aligned}$$

Logo, $\lambda\in\phi^{-1}(-\infty,b)$. Como estes argumentos valem para todo $\lambda\geqslant 0$, concluímos que

$$(\lambda-\delta,\lambda+\delta)\cap[0,+\infty[\subset\phi^{-1}(-\infty,b).$$

Como a inclusão inversa é imediata, segue que, dado $b\in\mathbb{R}$, $\phi^{-1}(-\infty,b)$ é aberto em $[0,+\infty[$, ou seja, ϕ é semicontínua superiormente. Então, graças às propriedades (i) e (ii) acima, podemos aplicar o Corolário B.6 para concluir que existe $\bar\lambda\geqslant 0$ no qual ϕ atinge seu valor máximo global. Dessa forma,

$$\sup_{\lambda\geqslant 0}\inf_{x\in X}(\Phi(x)+\lambda(\rho-J(x)))=\inf_{x\in X}(\Phi(x)+\bar\lambda(\rho-J(x))).\tag{1.11}$$

Por conveniência, vamos classificar os possíveis valores de $\bar\lambda$ em dois casos. Se $0\leqslant\bar\lambda<r/\rho$, temos

$$\inf_{x\in X}(\Phi(x)+\bar\lambda(\rho-J(x)))\leqslant\Phi(x_0)+\bar\lambda(\rho-J(x_0))=\bar\lambda\rho<r,\tag{1.12}$$

pois $\Phi(x_0)=J(x_0)=0$, $\bar\lambda<r/\rho$ e $\rho>0$. Por outro lado, se $r/\rho\leqslant\bar\lambda$, temos, de (1.7),

$$\rho<r\frac{J(x_1)}{\Phi(x_1)}\Leftrightarrow\frac{\Phi(x_1)}{J(x_1)}<\frac{r}{\rho}\Leftrightarrow\rho\Phi(x_1)<rJ(x_1).$$

Somando $-r\rho$, obtemos

$$\rho\Phi(x_1) - r\rho < rJ(x_1) - r\rho \Leftrightarrow \rho(\Phi(x_1) - r) < r(J(x_1) - \rho)$$

Daí,

$$\frac{\Phi(x_1) - r}{J(x_1) - \rho} < \frac{r}{\rho} \leqslant \bar{\lambda} \Rightarrow \Phi(x_1) - r < \bar{\lambda}(J(x_1) - \rho),$$

de onde se conclui que

$$\inf_{x \in X} (\Phi(x) + \bar{\lambda}(\rho - J(x))) < \Phi(x_1) + \bar{\lambda}(\rho - J(x_1)) < r. \tag{1.13}$$

Logo, das relações (1.11), (1.12) e (1.13), segue que

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} \inf_{x \in X} (\Phi(x) + \lambda(\rho - J(x))) < r.$$

Finalmente, comparando com (1.8) e (1.9), temos

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} \inf_{x \in X} (\Phi(x) + \lambda(\rho - J(x))) < \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \geqslant 0} (\Phi(x) + \lambda(\rho - J(x))).$$

□

Teorema 1.6 ([20])**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, com fronteira suave, e sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas, com

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_0^{\xi} f(t)dt > 0. \tag{1.14}$$

Assuma que existam quatro constantes positivas a, q, s, γ, com $q < (n+2)(n-2)$ (se $n > 2$), $s < 2$ e $2 < \gamma < 2n/(n-2)$, tais que

$$\max\{|f(\xi)|, |g(\xi)|\} \leqslant a(1 + |\xi|^q), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \tag{1.15}$$

$$\max\left\{\int_0^{\xi} f(t)dt, \left|\int_0^{\xi} g(t)dt\right|\right\} \leqslant a(1 + |\xi|^s), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \tag{1.16}$$

e

$$\limsup_{\xi \to 0} \frac{\int_0^{\xi} f(t)dt}{|\xi|^{\gamma}} < +\infty. \tag{1.17}$$

Então existe $\delta > 0$ tal que, para cada $\mu \in [-\delta, \delta]$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_0(f(u) + \mu g(u)), & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

tem pelo menos três soluções fracas distintas em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Demonstração. Vamos aplicar o Teorema 1.4, tomando $I = [0, +\infty[$, $\mu_0 = 0$ e $X = W_0^{1,2}(\Omega)$, com a norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Note que, de [8], X é separável e reflexivo, estando, portanto, de acordo com as hipóteses do Teorema 1.4. Para cada $u \in X$, defina

$$J_1(u) = \int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} f(t)dt \right) dx$$

e

$$J_2(u) = \int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} g(t)dt \right) dx.$$

Da desigualdade (1.17), segue que a função $\xi \longmapsto (\int_0^\xi f(t)dt)/|\xi|^\gamma$ é localmente limitada superiormente numa vizinhança de 0 com $\xi \neq 0$ ([15], Capítulo VI). Dessa forma, existem $\eta \in]0,1]$ e $c > 0$ tais que $(\int_0^\xi f(t)dt)/|\xi|^\gamma \leqslant c$, ou seja,

$$\int_0^\xi f(t)dt \leqslant c|\xi|^\gamma,$$

para todo $\xi \in [-\eta, \eta]$. Note agora que

$$\alpha \equiv \sup_{|\xi| > \eta} \frac{a(1 + |\xi|^s)}{|\xi|^\gamma} = a \sup_{|\xi| > \eta} |\xi|^{-\gamma} + a \sup_{|\xi| > \eta} |\xi|^{-(\gamma - s)} > 0,$$

pois $a > 0$. Como $\gamma > 2$, a função $|\xi| \mapsto |\xi|^{-\gamma}$ é decrescente, donde $|\xi| > \eta \Rightarrow |\xi|^{-\gamma} < \eta^{-\gamma}$. Daí,

$$\sup_{|\xi| > \eta} |\xi|^{-\gamma} \leqslant \eta^{-\gamma} < +\infty.$$

E, como $\gamma - s > 0$, pois $\gamma > 2$ e $s < 2$, podemos aplicar o mesmo argumento para o segundo termo e concluir que $\alpha < +\infty$. Dessa forma, fica bem definido o número real positivo $c_1 = \max\{c, \alpha\}$. Afirmamos agora que

$$\int_0^{\xi} f(t)\,dt \leqslant c_1|\xi|^{\gamma}, \tag{1.18}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. De fato, como vimos, esta desigualdade vale se $|\xi| \leqslant \eta$, pois $c \leqslant c_1$. Por outro lado, se $|\xi| > \eta$, de (1.16), temos $\int_0^{\xi} f(t)\,dt \leqslant a(1+|\xi|^s)$, donde

$$\sup_{|\xi|>\eta} \frac{\int_0^{\xi} f(t)\,dt}{|\xi|^{\gamma}} \leqslant \sup_{|\xi|>\eta} \frac{a(1+|\xi|^s)}{|\xi|^{\gamma}} = \alpha \leqslant c_1.$$

Logo, $\int_0^{\xi} f(t)\,dt \leqslant c_1|\xi|^{\gamma}$ também quando $|\xi| > \eta$, o que prova a afirmação (1.18) (se $\xi = 0$, a desigualdade é imediata). Sejam agora $r > 0$ e $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, com $\|u\|^2 \leqslant 2r$. Então, tomando $\xi = u(x)$ na desigualdade que acabamos de provar, temos

$$J_1(u) = \int_{\Omega} \left(\int_0^{u(x)} f(t)\,dt \right) dx \leqslant \int_{\Omega} c_1|u(x)|^{\gamma}\,dx = c_1 \int_{\Omega} |u(x)|^{\gamma}\,dx.$$

Como $2 < \gamma < 2n/(n-2)$, podemos aplicar o Teorema de Imersão de Sobolev (Proposição B.23) para concluir que existe $k > 0$ tal que $\|u\|_{L^{\gamma}(\Omega)} \leqslant k\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$, ou seja,

$$\left(\int_{\Omega} |u(x)|^{\gamma}\,dx \right)^{1/\gamma} \leqslant k \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx \right)^{1/2}.$$

Então, elevando à potência γ, segue das relações anteriores que

$$\begin{aligned}
J_1(u) &\leqslant c_1 \int_{\Omega} |u(x)|^{\gamma}\,dx \\
&\leqslant c_1 k^{\gamma} \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx \right)^{\gamma/2} \\
&\leqslant c_1 k^{\gamma} \|u\|^{\gamma} \\
&\leqslant c_1 k^{\gamma} (\|u\|^2)^{\gamma/2} \\
&\leqslant c_1 k^{\gamma} (2r)^{\gamma/2} \\
&\leqslant c_1 k^{\gamma} 2^{\gamma/2} r^{\gamma/2},
\end{aligned}$$

pois $\|u\|^2 \leqslant 2r$. Então $J_1(u) \leqslant c_2 r^{\gamma/2}$, onde $c_2 = c_1 k^{\gamma} 2^{\gamma/2}$ é uma constante. Afirmamos que $\sup\{J_1(u); \|u\|^2 \leqslant$

$2r\} > 0$. De fato, é possível construir $u \in X$ tal que $\|u\|^2 \leqslant 2r$ e $J_1(u) > 0$. Em particular,

$$\sup_{\|u\|^2 \leqslant 2r} J_1(u) > 0.$$

Então, desta desigualdade e da anterior segue que

$$0 < \sup_{\|u\|^2 \leqslant 2r} J_1(u) \leqslant c_2 r^{\gamma/2}$$

ou, dividindo por r,

$$0 < \frac{\sup_{\|u\|^2 \leqslant 2r} J_1(u)}{r} \leqslant c_2 r^{\gamma/2-1}.$$

Como $\gamma > 2$, temos $\gamma/2 - 1 > 0$, donde $\lim\limits_{r \to 0^+} r^{\gamma/2-1} = 0$. Então, pelo Teorema do Confronto, concluímos que

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\sup_{\|u\|^2 \leqslant 2r} J_1(u)}{r} = 0. \tag{1.19}$$

De (1.14), existe $\xi \neq 0$ tal que $\int_0^{\xi} f(t)dt > 0$; logo, podemos tomar $\omega \in X \backslash \{0\}$ de modo que $J_1(\omega) > 0$, pois, neste caso, $\int_0^{\omega(x)} f(t)dt > 0$, para todo $x \in \Omega$. Como $\omega \neq 0$, podemos fixar $r > 0$ tal que $r < \|\omega\|^2/2$. Então, aplicando a definição de limite à direita a (1.19), vemos que, em particular, dado $e = 2J_1(\omega)/\|\omega\|^2 > 0$, existe $d > 0$ (que podemos supor ser menor que $\|\omega\|^2/2$, como caso particular) tal que $0 < r < d$ implica $\sup_{\|u\|^2 \leqslant 2r} J_1(u)/r < e$. Ou seja, existe $r > 0$, com $r < \|\omega\|^2/2$, tal que

$$\sup_{\|u\|^2 \leqslant 2r} J_1(u) < 2r \frac{J_1(\omega)}{\|\omega\|^2}.$$

Aplicando então a Observação 1.7 a esta desigualdade, vemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sup_{\|u\|^2 \leqslant 2r} J_1(u) \leqslant 2r \frac{J_1(\omega)}{\|\omega\|^2} - \varepsilon. \tag{1.20}$$

A seguir, vamos mostrar que $\sup_{\|u\|^2\leqslant 2r}|J_2(u)| < +\infty$. Dada $u \in X$, temos, de (1.16),

$$\begin{aligned}
|J_2(u)| &= \left|\int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} g(t)dt\right)dx\right| \\
&\leqslant \int_\Omega \left|\int_0^{u(x)} g(t)dt\right|dx \\
&\leqslant \int_\Omega a(1+|u(x)|^s)dx \\
&= a\int_\Omega dx + a\int_\Omega |u(x)|^s dx \\
&= a|\Omega| + a\|u\|_s^s.
\end{aligned}$$

Então, pela Proposição B.9, existe $\alpha > 0$ tal que $\|u\|_s \leqslant \alpha\|u\|_2$, pois $s < 2$. Além disso, pela desigualdade de Poincaré (Proposição B.22), existe $\beta > 0$ tal que $\|u\|_2 \leqslant \beta\|\nabla u\|_2 = \beta\|u\|$. Dessa forma, podemos escrever

$$|J_2(u)| \leqslant a|\Omega| + a\alpha^s\beta^s\|u\|^s,$$

donde

$$\sup_{\|u\|^2\leqslant 2r}|J_2(u)| \leqslant a|\Omega| + a\alpha^s\beta^s \sup_{\|u\|^2\leqslant 2r}\|u\|^s < +\infty,$$

pois Ω é limitado e $\|u\|^s = (\|u\|^2)^{s/2} \leqslant (2r)^{s/2}$. Isso prova a afirmação. Então, sendo este supremo $\geqslant 0$, podemos tomar $\delta > 0$ tal que

$$\delta\left(\sup_{\|u\|^2\leqslant 2r}|J_2(u)| + 2r\frac{|J_2(\omega)|}{\|\omega\|^2}\right) < \varepsilon$$

e definir o número real positivo

$$\sigma \equiv \varepsilon - \delta\left(\sup_{\|u\|^2\leqslant 2r}|J_2(u)| + 2r\frac{|J_2(\omega)|}{\|\omega\|^2}\right).$$

Nestas condições, afirmamos que vale a desigualdade

$$\sup_{\|u\|^2\leqslant 2r}(J_1(u)+\mu J_2(u)) \leqslant 2r\frac{J_1(\omega)+\mu J_2(\omega)}{\|\omega\|^2} - \sigma, \tag{1.21}$$

para todo $\mu \in [-\delta,\delta]$. Suponhamos, por contradição, que exista $\mu \in [-\delta,\delta]$ tal que

$$\sup_{\|u\|^2 \leqslant 2r} (J_1(u) + \mu J_2(u)) > 2r \frac{J_1(\omega) + \mu J_2(\omega)}{\|\omega\|^2} - \sigma. \tag{1.22}$$

Somando $\sup \mu J_2$ (para simplificar a notação) em ambos os membros de (1.20), temos

$$2r \frac{J_1(\omega)}{\|\omega\|^2} + \sup \mu J_2 - \varepsilon \geqslant \sup J_1 + \sup \mu J_2.$$

Então, como $\sup(J_1 + \mu J_2) = \sup J_1 + \sup \mu J_2$, segue de (1.22) que

$$2r \frac{J_1(\omega)}{\|\omega\|^2} + \sup \mu J_2 - \varepsilon > 2r \frac{J_1(\omega) + \mu J_2(\omega)}{\|\omega\|^2} - \sigma$$

ou, simplificando,

$$\sup \mu J_2 - \varepsilon > 2r\mu \frac{J_2(\omega)}{\|\omega\|^2} - \sigma.$$

Então, da definição de σ, temos, após simplificar o ε,

$$\sup \mu J_2 > \sup \delta |J_2| + \frac{2r}{\|\omega\|^2} (\mu J_2(\omega) + \delta |J_2(\omega)|),$$

pois $\delta > 0$. Então, como $\mu J_2(\omega) + \delta |J_2(\omega)| \geqslant 0$ (veja a Observação 1.8), temos

$$\sup \mu J_2 > \sup \delta |J_2|.$$

Por outro lado, como $\delta |J_2| \geqslant \mu J_2$, temos

$$\sup \delta |J_2| \geqslant \sup \mu J_2,$$

uma contradição. Isso prova a afirmação (1.21). Em particular, da Observação 1.7, temos

$$\sup_{\|u\|^2 \leqslant 2r} (J_1(u) + \mu J_2(u)) < 2r \frac{J_1(\omega) + \mu J_2(\omega)}{\|\omega\|^2}, \tag{1.23}$$

uma vez que $\sigma > 0$. Fixemos agora $\mu \in [-\delta,\delta]$ e definamos $\Phi,\Psi : X \to \mathbb{R}$, e $h : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, por

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2,\\ \Psi(u) &= -(J_1(u)+\mu J_2(u)),\\ h(\lambda) &= \rho\lambda,\end{aligned}$$

onde ρ é um número fixado satistazendo

$$\sup_{\|u\|^2\leqslant 2r}(J_1(u)+\mu J_2(u)) < \rho < 2r\frac{J_1(\omega)+\mu J_2(\omega)}{\|\omega\|^2}. \tag{1.24}$$

Vamos agora aplicar a Proposição B.24 aos funcionais J_1 e J_2. De (1.15) e do fato de que f e g são contínuas, segue que ambas satisfazem as condições (p_1) e (p_2) da Proposição B.24. Tomando $a_1 = a_2 = a$, vemos que eles satisfazem as hipóteses da Proposição, com P sendo definida pelas integrais $\int_0^{u(x)} f(t)dt$ e $\int_0^{u(x)} g(t)dt$, em cada caso. Então, segue que os funcionais J_1 e J_2 são fracamente contínuos e têm derivada de Gâteux compacta, logo o mesmo ocorre com Ψ, que é uma combinação linear de J_1 e J_2. Para aplicarmos o Teorema 1.4, precisamos mostrar também a coercividade do funcional associado ao problema, i.e., devemos mostrar que

$$\lim_{\|u\|\to+\infty}(\Phi(u)+\lambda\Psi(u)) = +\infty,$$

para todo $\lambda \geqslant 0$. Em primeiro lugar, observe que, de (1.16), temos

$$J_1(u) = \int_\Omega\left(\int_0^{u(x)} f(t)dt\right)dx \leqslant \int_\Omega a(1+|u(x)|^s)dx = a|\Omega| + a\|u\|_s^s.$$

Então, assim como fizemos para mostrar que $\sup_{\|u\|^2\leqslant 2r}|J_2(u)| < +\infty$, aplicando a Proposição B.9 e a desigualdade de Poincaré (Proposição B.22) com $p = 2$, vemos que existe $b > 0$ tal que $a\|u\|_s^s \leqslant b\|u\|^s$, donde

$$J_1(u) \leqslant a|\Omega| + b\|u\|^s.$$

De maneira inteiramente análoga, chegamos a

$$J_2(u) \leqslant a|\Omega| + b\|u\|^s,$$

usando a desigualdade (1.16). Daí, segue que

$$\begin{aligned} J_1+\mu J_2 &\leqslant (1+|\mu|)(a|\Omega|+b\|u\|^s) \\ &\leqslant a(1+|\mu|)|\Omega|+b(1+|\mu|)\|u\|^s. \end{aligned}$$

Assim, dado $\lambda \geqslant 0$, como

$$\Phi(u)+\lambda\Psi(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\lambda[J_1(u)+\mu J_2(u)],$$

temos, da desigualdade anterior,

$$\begin{aligned} \Phi(u)+\lambda\Psi(u) &\geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2-\lambda a(1+|\mu|)|\Omega|-\lambda b(1+|\mu|)\|u\|^s \\ &\geqslant -\lambda a(1+|\mu|)|\Omega|+\frac{1}{2}\|u\|^2\left(1-\frac{2\lambda b(1+|\mu|)}{\|u\|^{2-s}}\right). \end{aligned}$$

Note que, como queremos considerar $\|u\| \to +\infty$, podemos supor $u \neq 0$; logo, a divisão acima está bem definida. Agora, como $2-s>0$, o limite da função dentro do parêntesis é igual a 1, quando $\|u\| \to +\infty$. Além disso, como $-\lambda a(1+|\mu|)|\Omega|$ é constante, segue que $\Phi+\lambda\Psi$ é limitada inferiormente por uma função que tende para $+\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$. Então, em particular,

$$\lim_{\|u\|\to+\infty}(\Phi(u)+\lambda\Psi(u))=+\infty.$$

Além disso, os funcionais Φ e Ψ satisfazem as hipóteses da Proposição 1.5: basta tomar $x_0=0\in X$ (pois $J_1(0)=J_2(0)=0$), $x_1=\omega$ e $J=-\Psi$, uma vez que, fazendo estas escolhas, temos

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(]-\infty,r]) &= \{x\in X;\Phi(x)\leqslant r\} \\ &= \{x\in X;\|u\|^2/2\leqslant r\} \\ &= \{x\in X;\|u\|^2\leqslant 2r\} \end{aligned}$$

e

$$r\frac{J(x_1)}{\Phi(x_1)}=r\frac{J(\omega)}{\Phi(\omega)}=r\frac{J_1(\omega)+\mu J_2(\omega}{\|\omega\|^2/2}=2r\frac{J_1(\omega)+\mu J_2(\omega)}{\|\omega\|^2},$$

das definições de Φ e de Ψ. Deste modo, a desigualdade requerida na Proposição 1.5 equivale à desigualdade (1.24). Notando que, como $J = -\Psi$,

$$\begin{aligned}
\Phi(x) + \lambda(\rho - J(x)) &= \Phi(x) + \lambda(\rho + \Psi(x)) \\
&= \Phi(x) + \lambda\Psi(x) + \lambda\rho \\
&= \Phi(x) + \lambda\Psi(x) + h(\lambda),
\end{aligned}$$

segue da Proposição 1.5 que

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} \inf_{x \in X} (\Phi(x) + \lambda\Psi(x) + h(\lambda)) < \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \geqslant 0} (\Phi(x) + \lambda\Psi(x) + h(\lambda)).$$

Para estar de acordo com as hipóteses do Teorema 1.4, precisamos mostrar ainda algumas propriedades dos funcionais Φ e Ψ. Afirmamos que (i) Φ é convexo, (ii) continuamente Gâteux-diferenciável e que (iii) Φ' admite uma inversa contínua $T : X^* \to X$. Vamos provar (i). Com efeito, a função real definida por $K(t) = t^2$ é convexa e crescente em $[0, +\infty[$. Logo, dados u e v em X e dado $\theta \in [0,1]$, temos

$$K(\|\theta u + (1-\theta)v\|) \leqslant \theta K(\|u\|) + (1-\theta)K(\|v\|).$$

Então, como $\Phi(\tilde{u}) = K(\|\tilde{u}\|)/2$ para todo $\tilde{u} \in X$, temos

$$\begin{aligned}
\Phi(\theta u + (1-\theta)v) &= \frac{1}{2}K(\|\theta u + (1-\theta)v\|) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\theta K(\|u\|) + \frac{1}{2}(1-\theta)K(\|v\|) \\
&= \theta\Phi(u) + (1-\theta)\Phi(v),
\end{aligned}$$

o que prova que Φ é convexa. (ii) De fato, Φ é de classe $C^1(X,\mathbb{R})$ (ver Aêndice B.4), com derivada $\Phi'(u) = u$, no sentido da Observação B.32. Como Φ' é a identidade, sua inversa é a própria identidade $T : X^* \to X$, definida por $T(v) = v$. Quanto ao funcional Ψ, como ele é uma combinação linear de J_1 e J_2, podemos aplicar a Proposição B.24 a J_1 e J_2, usando as hipóteses sobre f e g, (1.15) e (1.16), para concluir que Ψ é fracamente contínuo, continuamente Gâteux-diferenciável e tem derivada compacta. Observamos também que a função $h(\lambda) = \rho\lambda$ é côncava (e convexa), uma vez que, dado $\theta \in [0,1]$ e dados $\lambda, \lambda' \geqslant 0$, temos

$$h(\theta\lambda + (1-\theta)\lambda') = \theta\rho\lambda + (1-\theta)\rho\lambda' = \theta h(\lambda) + (1-\theta)h(\lambda').$$

Dessa forma, como todas as hipóteses do Teorema 1.4 são satisfeitas, concluímos que o funcional $\Phi + \lambda\Psi$ tem pelo menos três pontos críticos. Como este é o funcional associado a

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_0(f(u) + \mu g(u)), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

concluímos que esse problema tem pelo menos três soluções fracas em $W_0^{1,2}(\Omega)$. □

Observação 1.7. Dados dois números reais y e z, tais que $y < z$, se ε é tal que $0 < \varepsilon \leqslant z - y$, então $y \leqslant z - \varepsilon$. De fato, temos $\varepsilon \leqslant z - y \Rightarrow -(z-y) \leqslant -\varepsilon \Rightarrow y = z - (z-y) \leqslant z - \varepsilon$. Reciprocamente, se existe $\varepsilon > 0$ tal que $y \leqslant z - \varepsilon$, então $y < z$. Com efeito, se fosse $z \leqslant y$, teríamos $\varepsilon \leqslant z - y \leqslant 0$, um absurdo.

Observação 1.8. Para todo $\mu \in [-\delta, \delta]$ e para $\omega \in X$ fixado na demonstração anterior, tem-se

$$\mu J_2(\omega) + \delta |J_2(\omega)| \geqslant 0.$$

Com efeito, suponhamos $J_2(\omega) > 0$. Então, como $-\delta \leqslant \mu$, temos

$$-\delta |J_2(\omega)| = -\delta J_2(\omega) \leqslant \mu J_2(\omega)$$

e, portanto, $\mu J_2(\omega) + \delta |J_2(\omega)| \geqslant 0$. Analogamente, se $J_2(\omega) < 0$, então

$$-\delta |J_2(\omega)| = \delta J_2(\omega) \leqslant \mu J_2(\omega),$$

pois $\mu \leqslant \delta$. Logo $\mu J_2(\omega) + \delta |J_2(\omega)| \geqslant 0$. Finalmente, se $J_2(\omega) = 0$, a desigualdade é imediata.

Capítulo 2

Um problema tipo Kirchhoff

No capítulo anterior, aplicamos o Teorema de Ricceri para mostrar a existência de três soluções fracas para um problema local, resultado publicado em 2000, no artigo [20]. Em 2009, Ricceri apresentou uma versão mais refinada desse resultado, no artigo *A further three critical points theorem* [19], que é o Teorema 2.6. Ele aplicou então essa nova versão do teorema a um problema não-local, uma classe mais geral de problemas que a anterior, no seu artigo *On an elliptic Kirchhoff-type problem depending on two parameters* [21], de 2010. Neste capítulo, vamos analisar detalhadamente esse último artigo, onde se considera o seguinte problema não-local tipo Kirchhoff sobre um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right)\Delta u &= \lambda f(x,u)+\mu g(x,u), \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, \qquad\qquad\qquad\quad\;\; \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_2}$$

onde $M : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função contínua dada, e mostrar que ele possui pelo menos três soluções fracas. Uma solução fraca deste problema é uma função $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$M\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx = \int_\Omega (\lambda f(x,u(x))+\mu g(x,u(x)))v(x)dx,$$

para toda $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Vamos também analisar em detalhe o caso particular do termo original de Kirchhoff, $M(t) = a+bt$, que é o problema (P_3).

2.1 Teorema de Ricceri - Versão Refinada

Para estabelecer o resultado com precisão, vamos introduzir alguns conceitos e notações.

Definição 2.1. Uma função $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *de Carathéodory* quando for mensurável em relação à primeira variável e contínua em relação à segunda, ou seja, quando $\varphi(\cdot,t)$ é mensurável para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi(x,\cdot)$ é contínua para todo $x \in \Omega$. Às vezes, esta definição é generalizada, exigindo-se apenas que a função f tenha essas propriedades a menos de um conjunto de medida nula, como em [3].

Definição 2.2. Assim como em [21], vamos denotar por $\mathcal{A}$ a subclasse das funções $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de Carathéodory tais que, se $n \geqslant 2$, existe q tal que

$$\sup_{(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}} \frac{|\varphi(x,t)|}{1+|t|^q} < +\infty,$$

com $0 < q < (n+2)/(n-2)$ se $n > 2$ e $0 < q < +\infty$ se $n = 2$. E se $n = 1$, denotamos por $\mathcal{A}$ a subclasse das funções $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de Carathéodory tais que, para todo $r > 0$, a função $r \mapsto \sup_{|t|\leqslant r} |\varphi(x,t)|$ pertence a $L^1(\Omega)$.

Definição 2.3. Se X é um espaço de Banach real, denotamos por $\mathcal{W}_X$ a classe de todos os funcionais $\Phi : X \to \mathbb{R}$ que possuem a seguinte propriedade: se $\{u_n\}$ é uma sequência em X que converge fracamente para $u \in X$ e $\liminf\limits_{n\to\infty} \Phi(u_n) \leqslant \Phi(u)$, então $\{u_n\}$ possui uma subsequência que converge forte para u.

Definição 2.4 ([15])**.** Diz-se que um funcional $f : X \to \mathbb{R}$ possui um *mínimo local estrito* num ponto $x_0 \in X$ quando existe uma vizinhança V de x_0 tal que $f(x_0) \leqslant f(x)$ para todo $x \in V$ e $f(x_0) < f(x)$ para todo $x \neq x_0$ em V.

Teorema 2.5 (Ricceri, [19])**.** Sejam X um espaço de Banach real, separável e reflexivo; $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional coercivo, sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente, que pertence a $\mathcal{W}_X$, é limitado em cada subconjunto limitado de X, é C^1 e cuja derivada admite uma inversa contínua $T : X^* \to X$; $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional C^1, com derivada compacta. Assuma também que Φ possui um mínimo local estrito x_0, com $\Phi(x_0) = J(x_0) = 0$. Finalmente, assuma que

$$\max\left\{ \limsup_{\|x\|\to+\infty} \frac{J(x)}{\Phi(x)}, \limsup_{x\to x_0} \frac{J(x)}{\Phi(x)} \right\} \leqslant 0, \tag{2.1}$$

que

$$\sup_{x\in X} \min\{\Phi(x), J(x)\} > 0 \tag{2.2}$$

e defina

$$\sigma := \inf\left\{\frac{J(x)}{\Phi(x)}; x\in X, \min\{\Phi(x), J(x)\} > 0\right\}.$$

Então, para cada intervalo compacto $[a,b] \subset]\sigma, +\infty[$ existe $r > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\lambda \in [a,b]$ e todo funcional C^1 $\Psi : X \to \mathbb{R}$ com derivada compacta, existe $\delta > 0$ tal que, para cada $\mu \in [0,\delta]$, a equação

$$\Phi'(x) = \lambda J'(x) + \mu\Psi'(x) \tag{2.3}$$

tem pelo menos três soluções cujas normas são menores do que r.

2.2 Aplicação em um Problema Não-local

Precisamente, o resultado fundamental deste capítulo é o seguinte.

Teorema 2.6 (Ricceri, [21])**.** Seja $f \in \mathcal{A}$. Defina

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds,$$

para cada $t \geqslant 0$, e

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds,$$

onde $(x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$, e assuma que as seguintes condições são satisfeitas:

(a_1) $\sup_{u\in H_0^1(\Omega)} \int_\Omega F(x,u(x))dx > 0$;

(a_2) $\inf_{t\geqslant 0} M(t) > 0$;

(a_3) existe $\alpha > 0$ tal que

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{\widehat{M}(t)}{t^\alpha} > 0;$$

(a_4) existe uma função contínua $h : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tal que

$$h(tM(t^2)) = t, \qquad \text{para todo } t \geqslant 0;$$

(a_5) $\limsup\limits_{t\to 0} \dfrac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{t^2} \leqslant 0;$

(a_6) $\limsup\limits_{|t|\to +\infty} \dfrac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^{2\alpha}} \leqslant 0;$

Nessas condições, se definirmos

$$\theta^* = \inf\left\{\frac{\widehat{M}(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx)}{2\int_\Omega F(x,u(x))dx}; u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega F(x,u(x))dx > 0\right\},$$

então, para cada intervalo compacto $[a,b] \subset]\theta^*, +\infty[$, existe um número real $r > 0$ com a seguinte propriedade: para cada $\lambda \in [a,b]$ e cada $g \in \mathcal{A}$ existe $\delta > 0$ tal que, para cada $\mu \in [0,\delta]$, o problema

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right)\Delta u &= \lambda f(x,u) + \mu g(x,u), \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_2}$$

tem pelo menos três soluções fracas cujas normas em $W_0^{1,2}(\Omega)$ são menores do que r.

Demonstração. Nosso objetivo é aplicar o Teorema 2.5. Para isso, vamos tomar $X = W_0^{1,2}(\Omega)$, que é um espaço de Banach real separável e reflexivo ([8]), com a norma usual

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

e vamos definir em X os funcionais Φ e J dados por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) \qquad \text{e} \qquad J(u) = \int_\Omega F(x,u(x))dx.$$

Devemos então mostrar que estes funcionais satisfazem todas as hipóteses do Teorema 2.5. Afirmamos que (i) Φ é coercivo, (ii) $C^1(X,\Omega)$, (iii) sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente, (iv) pertence à classe $\mathcal{W}_X$, (v) é limitado em cada subconjunto limitado de X, (vi) possui derivada com inversa contínua em X^* e (vii) tem um mínimo local x_0 tal que $\Phi(x_0) = 0$. Vamos mostrar (i). Defina

$$\gamma := \inf_{t\geqslant 0} M(t).$$

De (a_2), $\gamma > 0$ e, além disso,

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds \geqslant \int_0^t \gamma ds = \gamma t,$$

para todo $t > 0$. Em particular,

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) \geqslant \frac{1}{2}\gamma\|u\|^2,$$

de onde vemos que Φ é limitado inferiormente por uma função que tende a $+\infty$ com $\|u\| \to +\infty$, ou seja, Φ é coercivo. (ii) Das Proposições B.30 e B.31, vemos que o funcional Φ é de classe $C^1(X,\Omega)$; em particular, é contínuo, da Proposição B.12. (iii) Da Proposição B.15, vemos que Φ é fracamente sequencialmente contínuo, em particular, é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente, uma vez que X é um espaço de Banach real e reflexivo e que Φ' é contínua, pelo item anterior. Para mostrar (iv), seja $\{u_n\}$ uma sequência em X que converge fracamente para $u \in X$ e que satisfaz

$$\liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) \leqslant \Phi(u).$$

Da definição de Φ, segue que

$$\liminf_{n\to\infty} \widehat{M}(\|u_n\|^2) \leqslant \widehat{M}(\|u\|^2).$$

Sendo $\widehat{M}$ contínua, essa desigualdade leva a

$$\widehat{M}(\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2) \leqslant \widehat{M}(\|u\|^2).$$

Além disso, como $\widehat{M}$ é crescente, como se vê pela sua definição e por uma integração simples, temos

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2 \leqslant \|u\|^2.$$

Então, como esta sequência é não-negativa, vale a regra do produto $(\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|)^2 \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|u\|^2$. Daí,

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \leqslant \|u\|.$$

Existe, então, uma subsequência $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{u_n\}$ tal que

$$\limsup_{k\to\infty}\|u_{n_k}\| \leqslant \|u\|.$$

Desta desigualdade e do fato de que $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ é uniformemente convexo (ver Proposição B.28), podemos concluir que esta subsequência converge forte para u, ou seja, na topologia da norma de X. Isso mostra que $\Phi \in \mathcal{W}_X$. (v) Seja $Y \subset X$ limitado. Então existe $d > 0$ tal que $\|u\| \leqslant d$ para todo $u \in Y$. Sendo M contínua, restrita ao intervalo compacto $[0,d^2]$ assume um supremo a, que é > 0, por (a_2). Então, dada $u \in Y$,

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) = \frac{1}{2}\int_0^{\|u\|^2} M(s)ds \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{\|u\|^2} a\,ds = \frac{a}{2}\|u\|^2 \leqslant \frac{ad^2}{2},$$

o que mostra que Φ é limitada em Y, pois, como veremos no item (vii), $\Phi(u) \geqslant 0$ para toda $u \in X$. (vi) Vamos mostrar agora que Φ' possui uma inversa contínua, identificando X^* com X. Por (a_4), existe uma função contínua h de modo que podemos definir uma aplicação $T : X \to X$ contínua por

$$T(v) = \begin{cases} \frac{h(\|v\|)}{\|v\|}v & \text{se } v \neq 0, \\ 0 & \text{se } v = 0. \end{cases}$$

Da observação B.32, podemos escrever $\Phi'(u) = M(\|u\|^2)u$. Isso permite mostrar que T é a inversa de Φ'. De fato, por (a_2), $M(\|u\|^2) > 0$ para todo $u \in X\backslash\{0\}$. Então, para cada $u \in X\backslash\{0\}$, temos, da definição de T,

$$\begin{aligned} T(\Phi'(u)) &= T(M(\|u\|^2)u) \\ &= \frac{h[\,\|M(\|u\|^2)u\|\,]}{\|M(\|u\|^2)u\|}\cdot M(\|u\|^2)u \\ &= \frac{h[M(\|u\|^2)\cdot\|u\|]}{M(\|u\|^2)\|u\|}\cdot M(\|u\|^2)u \\ &= h[\,\|u\|\cdot M(\|u\|^2)]\frac{u}{\|u\|}. \end{aligned}$$

Da hipótese (a_4), tomando $t = \|u\|$, temos

$$T(\Phi'(u)) = \|u\|\cdot\frac{u}{\|u\|} = u.$$

Como $T(\Phi'(0)) = T(M(\|0\|^2)\cdot 0) = T(0) = 0$, temos $T(\Phi'(u)) = u$ para todo $u \in X$, o que mostra que T é a inversa de Φ'. Finalmente, (vii) é imediato, uma vez que

$$\Phi(x_0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|0\|^2) = \frac{1}{2}\int_0^0 M(s)ds = 0$$

e que

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) = \frac{1}{2}\int_0^{\|u\|^2} M(s)ds \geqslant \frac{1}{2}\int_0^{\|u\|^2} \gamma ds = \frac{1}{2}\gamma\|u\|^2 > 0, \tag{2.4}$$

para toda $u \neq 0$. Quanto ao funcional J, vemos que ele é de classe C^1 e possui derivada compacta, pela Proposição B.24, devido às hipóteses sobre f, que pertence à classe $\mathcal{A}$ (exatamente como no capítulo anterior). Além disso, claramente temos $J(x_0) = J(0) = \int_\Omega \int_0^0 f(x,s)ds\, dx = 0$. Vamos mostrar agora que os funcionais Φ e J satisfazem a desigualdade (2.1), tomando $x_0 = 0$. Em primeiro lugar, afirmamos que

$$\limsup_{u\to 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leqslant 0. \tag{2.5}$$

Vamos separar essa demonstração em dois casos: $n = 1$ e $n > 1$. Sejam então $n = 1$, $\varepsilon > 0$ fixo e representemos por c_i constantes positivas independentes de ε e $u \in X$. De (a_5), existe $\eta > 0$ tal que

$$\sup_{x\in\Omega} \frac{F(x,t)}{t^2} \leqslant \varepsilon$$

para todo $t \in]-\eta,\eta[\setminus\{0\}$, pois este supremo é limitado superiormente numa vizinhança de 0, da definição de limite superior. Em particular, temos

$$F(x,t) \leqslant \varepsilon t^2, \tag{2.6}$$

para todo $(x,t) \in \Omega\times]-\eta,\eta[$. Como $n = 1$, temos a imersão compacta de $W_0^{1,2}(\Omega)$ sobre $C^0(\overline{\Omega})$, pois Ω é limitado (Proposição B.25). Daí, existe $c_0 > 0$ tal que $\sup_\Omega |u| \equiv \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leqslant c_0\|u\|$. Tomando então $\delta_1 \equiv \eta/c_0 > 0$, temos

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leqslant c_0\|u\| < c_0\delta_1 = \eta.$$

Em outras palavras, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo $u \in X$ satisfazendo $\|u\| < \delta_1$, tem-se $\sup_\Omega |u| < \eta$.

Então, quando $n = 1$, para toda u na bola $B_{\delta_1}(0) \subset X$, temos $|u(x)| \leqslant \eta$, para todo $x \in \Omega$, do argumento anterior. Logo, podemos aplicar a desigualdade (2.6), com $t = u(x)$, pois, neste caso, $(x,u(x)) \in \Omega \times]-\eta,\eta[$. Então, da Desigualdade de Poincaré (Proposição B.22),

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u(x))\,dx \leqslant \varepsilon \int_\Omega |u(x)|^2 dx = \varepsilon \|u\|_2^2 \leqslant c_1 \varepsilon \|u\|^2,$$

para um certo $c_1 > 0$. Além disso, como $\widehat{M}(t) \geqslant \gamma t$ para todo $t > 0$, temos, em particular,

$$\|u\|^2 \leqslant \frac{\widehat{M}(\|u\|^2)}{\gamma}, \tag{2.7}$$

pois $\gamma > 0$, de (a_2). Daí, segue que

$$J(u) \leqslant c_1 \varepsilon \frac{\widehat{M}(\|u\|^2)}{\gamma} = \frac{2\varepsilon c_1}{\gamma} \cdot \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) = \frac{2\varepsilon c_1}{\gamma}\Phi(u).$$

De (2.4), $\Phi(u) > 0$ para toda $u \neq 0$. Então

$$\frac{J(u)}{\Phi(u)} \leqslant \frac{2\varepsilon c_1}{\gamma}$$

na vizinhança $\|u\| < \delta_1$, com $u \neq 0$. Em particular,

$$\limsup_{u \to 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leqslant \frac{2\varepsilon c_1}{\gamma}, \tag{2.8}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Da arbitrariedade de ε, temos a desigualdade desejada. Vejamos agora o caso $n > 1$. Para isso, vamos precisar da seguinte proposição: para todo $n > 1$ existe $p > 2$, com $p < 2n/(n-2)$ se $n > 2$, tal que

$$\sup_{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}} \frac{|F(x,t)|}{1 + |t|^p} < +\infty. \tag{2.9}$$

De fato, da Definição 2.2, sendo $n > 2$, existe $0 < q < (n+2)/(n-2)$ tal que

$$B := \sup_{(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}} \frac{|f(x,s)|}{1 + |s|^q} < +\infty.$$

Em particular, $|f(x,s)| \leqslant B(1+|s|^q)$ para todo $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Daí,

$$|F(x,t)| = \left| \int_0^t f(x,s)ds \right| \leqslant \int_0^{|t|} |f(x,s)|ds \leqslant B \int_0^{|t|} (1+|s|^q)ds.$$

Então, como $\int_0^{|t|} |s|^q ds \leqslant |t|^{q+1}/(q+1)$, temos

$$|F(x,t)| \leqslant B|t| + \frac{B}{q+1}|t|^{q+1}.$$

Tomando então $\xi = \max\{2, q+1\}$, como $\xi < 2n/(n-2)$, podemos tomar p tal que

$$2 \leqslant \xi < p < 2n/(n-2).$$

Dividindo então por $1+|t|^p$, temos

$$\frac{|F(x,t)|}{1+|t|^p} \leqslant \frac{B|t| + \frac{B}{q+1}|t|^{q+1}}{1+|t|^p}.$$

Como $p > q+1$, se $|t| \to +\infty$, $|t|^p$ domina sobre $|t|^{q+1}$. Daí, como o segundo membro da desigualdade acima é contínuo em relação a $|t|$ e tende a zero com $|t| \to +\infty$, possui supremo finito. Em particular,

$$\sup_{(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}} \frac{|F(x,t)|}{1+|t|^p} < +\infty,$$

quando $n > 2$. Pela definição 2.2, para considerarmos o caso $n = 2$, basta tomar $p > \xi$ para obter o mesmo resultado. Ou seja, esta desigualdade vale para todo $n > 1$, provando (2.9). Daí,

$$F(x,t) \leqslant |F(x,t)| \leqslant c(1+|t|^p) = c + c|t|^p \leqslant \tilde{c}|t|^p + c|t|^p \equiv c_2|t|^p, \tag{2.10}$$

para todo $(x,t) \in \Omega \times (\mathbb{R} \backslash]-\eta, \eta[)$, em particular, onde c e $\tilde{c}$ são constantes positivas convenientes. Dessa forma, por (2.6) e (2.10) (note que (2.6) é consequência de (a_5), não dependendo do valor de n), concluímos que

$$F(x,t) \leqslant \varepsilon t^2 + c_2|t|^p, \tag{2.11}$$

para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Em particular, dado $u \in X$, temos

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x,u(x))dx \leqslant \varepsilon \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + c_2 \int_{\Omega} |u(x)|^p dx = \varepsilon \|u\|_2^2 + c_2 \|u\|_p^p.$$

Usando a Desigualdade de Poincaré na primeira parcela e a Imersão de Sobolev na segunda (Proposições B.22 e B.23), uma vez que $2 < p < 2n/(n-2)$, obtemos

$$J(u) \leqslant \varepsilon c' \|u\|^2 + c_2 c'' \|u\|^p \leqslant c_3(\varepsilon \|u\|^2 + \|u\|^p),$$

onde $c_3 = \max\{c', c_2 c''\}$. Usando a desigualdade (2.7), temos

$$\|u\|^p = (\|u\|^2)^{p/2} \leqslant \left(\frac{\widehat{M}(\|u\|^2)}{\gamma} \right)^{p/2}.$$

Daí e de (2.7) segue que

$$J(u) \leqslant c_3 \left\{ \varepsilon \frac{\widehat{M}(\|u\|^2)}{\gamma} + \left(\frac{\widehat{M}(\|u\|^2)}{\gamma} \right)^{p/2} \right\}.$$

Então, como $\widehat{M}(\|u\|^2) = 2\Phi(u)$, temos

$$J(u) \leqslant c_3 \left\{ \frac{2\varepsilon}{\gamma} \Phi(u) + \left(\frac{2}{\gamma} \Phi(u) \right)^{p/2} \right\},$$

Dividindo por $\Phi(u)$, $u \neq 0$ (veja (2.4)), temos

$$\frac{J(u)}{\Phi(u)} \leqslant \frac{2\varepsilon c_3}{\gamma} + c_3 \left(\frac{2}{\gamma} \right)^{p/2} \frac{[\Phi(u)]^{p/2}}{\Phi(u)},$$

de onde

$$\limsup_{u \to 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leqslant \frac{2\varepsilon c_3}{\gamma} + c_3 \left(\frac{2}{\gamma} \right)^{p/2} \limsup_{u \to 0} [\Phi(u)]^{\alpha},$$

onde $\alpha = p/2 - 1 > 0$. Logo, $\limsup_{u \to 0} [\Phi(u)]^{\alpha} = 0$, donde concluímos que

$$\limsup_{u \to 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leqslant \frac{2\varepsilon c_3}{\gamma}. \tag{2.12}$$

Portanto, a desigualdade (2.5) é válida para todo $n \geqslant 1$, da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$. Para concluir a demonstração da desigualdade (2.1), é necessário mostrar também que

$$\limsup_{\|u\|\to+\infty} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leqslant 0. \tag{2.13}$$

Em primeiro lugar, definimos

$$\beta = \begin{cases} 2\alpha & \text{se } n \leqslant 2, \\ 2\min\left\{\alpha, \frac{n}{n-2}\right\} & \text{se } n \geqslant 3, \end{cases}$$

e observamos que $W_0^{1,2}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^{\beta}(\Omega)$. Em seguida, escrevendo

$$\gamma_1 := \liminf_{t\to+\infty} \frac{\widehat{M}(t)}{t^{\alpha}},$$

vemos que $\gamma_1 > 0$, por (a_3). Então, podemos encontrar $c_4 > 0$ tal que

$$\widehat{M}(t) \geqslant \gamma_1 t^{\alpha} - c_4, \tag{2.14}$$

para todo $t \geqslant 0$. Além disso, podemos também garantir a existência de uma função $R \in L^1(\Omega)$ (que é constante se $n > 1$) tal que

$$F(x,t) \leqslant \varepsilon |t|^{\beta} + R(x) \tag{2.15}$$

para todo $(x,t) \in \times\mathbb{R}$ e todo $\varepsilon > 0$. Precisamente, essa desigualdade segue de (a_6) nos casos em que $n \leqslant 2$ ou $n \geqslant 3$ e $\alpha < \frac{n}{n-2}$, e segue de (2.9) no caso em que $n \geqslant 3$ e $\frac{n}{n-2} \leqslant \alpha$. Integrando então (2.15), com $t = u(x)$, obtemos

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x,u(x))dx \leqslant \varepsilon \int_{\Omega} |u(x)|^{\beta} + \int_{\Omega} R(x)dx = \varepsilon \|u\|_{\beta}^{\beta} + \bar{c},$$

onde escrevemos $\bar{c} = \int_{\Omega} R(x)dx$. Usando a imersão de $W_0^{1,2}(\Omega)$ em $L^{\beta}(\Omega)$, temos, para um certo $c > 0$,

$$J(u) \leqslant \varepsilon c \|u\|^{\beta} + \bar{c} \leqslant c_5(\varepsilon \|u\|^{\beta} + 1),$$

onde $c_5 = \max\{c, \bar{c}\}$. Dividindo essa desigualdade por Φ, levando em conta (2.14), segue que

$$\frac{J(u)}{\Phi(u)} \leqslant \frac{2c_5(\varepsilon\|u\|^{\beta}+1)}{\widehat{M}(\|u\|^2)} \leqslant \frac{2c_5(\varepsilon\|u\|^{\beta}+1)}{\gamma_1\|u\|^{2\alpha}-c_4} \leqslant \frac{2c_5(\varepsilon\|u\|^{2\alpha}+1)}{\gamma_1\|u\|^{2\alpha}-c_4},$$

pois $\beta \leqslant 2\alpha$. Como vamos considerar $\|u\| \to +\infty$, supomos acima que $\|u\| > 1$, sem perder generalidade. Daí,

$$\frac{J(u)}{\Phi(u)} \leqslant \frac{2c_5\varepsilon}{\gamma_1} \cdot \frac{1+1/\varepsilon\|u\|^{2\alpha}}{1-c_4/\gamma_1\|u\|^{2\alpha}},$$

de onde segue que

$$\limsup_{\|u\|\to+\infty} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leqslant \frac{2c_5\varepsilon}{\gamma_1}.$$

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, e do resultado análogo para o $\limsup$ quando $u \to 0$, concluimos então que vale a desigualdade (2.1) do Teorema 2.5. Para mostrar a outra desigualdade requerida, veja que, de (a_1), existe $u \in X$ tal que

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u(x))dx > 0.$$

Essa função u deve ser diferente de zero, pois, se fosse $u = 0$, teríamos

$$J(u) = \int_\Omega \left(\int_0^0 f(x,s)ds\right)dx = 0.$$

Sendo $u \neq 0$, temos $\Phi(u) > 0$, por (2.4). Em particular, $\min\{\Phi(u),J(u)\} > 0$, donde

$$\sup_{x\in X} \min\{\Phi(x),J(x)\} > 0.$$

Portanto, todas as hipóteses do Teorema 2.5 são verificadas e podemos, então, aplicá-lo. Dessa forma, a equação

$$\Phi'(x) - \lambda J'(x) - \mu\Psi'(x) = 0$$

tem pelo menos três soluções, cujas normas são menores que um certo $r > 0$, que são justamente as soluções fracas do Problema

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right)\Delta u &= \lambda f(x,u) + \mu g(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_2}$$

uma vez que $\Phi - \lambda J - \mu\Psi$ é o funcional associado a (P_2). $\square$

2.3 Caso $M(t) = a + bt$

Como caso particular, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.7 (Ricceri, [21])**.** Dados $n \geqslant 4$ e $q \in]0, \frac{n+2}{n-2}[$, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\limsup_{|t|\to+\infty} \frac{|f(t)|}{|t|^q} < +\infty, \tag{2.16}$$

$$\limsup_{t\to 0} \frac{F(t)}{t^2} \leqslant 0, \tag{2.17}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} F(t) > 0, \tag{2.18}$$

onde

$$F(t) = \int_0^t f(s)\,ds.$$

Então, se fixarmos $a, b > 0$ e definirmos

$$\theta^* = \inf\left\{ \frac{a\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{b}{2}\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right)^2}{2\int_\Omega F(u(x))\,dx}; u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega F(u(x))\,dx > 0 \right\}, \tag{2.19}$$

para cada intervalo compacto $A \subset]\theta^*, +\infty[$, existe um número $r > 0$ com a seguinte propriedade: para cada $\lambda \in A$ e cada $g \in \mathcal{A}$ existe $\delta > 0$ tal que, para cada $\mu \in [0, \delta]$, o problema

$$\begin{cases} -\left(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right)\Delta u &= \lambda f(u) + \mu g(x,u), \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_3}$$

tem pelo menos três soluções fracas cujas normas em $W_0^{1,2}(\Omega)$ são menores do que r.

Demonstração. Vamos aplicar o teorema anterior. Primeiro, provemos que $f \in \mathcal{A}$. De (2.16), existe $\delta > 0$ tal que $|t| > \delta$ implica

$$\frac{|f(t)|}{|t|^q} \leqslant B,$$

para um certo $B > 0$. Por outro lado, sendo f contínua, restrita ao intervalo compacto $[-\delta,\delta]$, atinge supremo e ínfimo, logo existe $C > 0$ tal que $|f(t)| \leqslant C$ para todo $t \in [-\delta,\delta]$. Então, se $|t| > \delta$, temos

$$\frac{|f(t)|}{1+|t|^q} < \frac{|f(t)|}{|t|^q} \leqslant B$$

e $|t| \leqslant \delta$ implica

$$\frac{|f(t)|}{1+|t|^q} \leqslant \frac{C}{1+|t|^q}.$$

Sendo este último quociente uma função contínua em relação a t, é limitada no intervalo compacto $[-\delta,\delta]$. Portanto,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+|t|^q} < +\infty,$$

ou seja, $f \in \mathcal{A}$, pois $n > 3$. Provemos agora (a_1). De (2.18), podemos encontrar $\widetilde{u} \in X$ tal que $F(\widetilde{u}(x)) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Daí,

$$\sup_{u\in X} \int_\Omega F(u(x))dx \geqslant \int_\Omega F(\widetilde{u}(x))dx > 0.$$

A condição (a_2) é imediata, pois

$$\inf_{t\geqslant 0} M(t) = \inf_{t\geqslant 0}(a+bt) = a + \inf_{t\geqslant 0} bt = a > 0.$$

(a_3) Observe que

$$\frac{\widehat{M}(t)}{t^\alpha} = \frac{\int_0^t M(s)ds}{t^\alpha} = \frac{\int_0^t (a+bs)ds}{t^\alpha} = \frac{at+\frac{1}{2}bt^2}{t^\alpha} = at^{1-\alpha} + \frac{1}{2}bt^{2-\alpha}.$$

Daí, vemos que, tomando $\alpha = 2$, obtemos

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{\widehat{M}(t)}{t^\alpha} = \frac{1}{2}b > 0.$$

(a_4) Sendo $I = [0,+\infty[$, definimos a função $g : I \to I$ dada por

$$g(t) = tM(t^2).$$

Como M é contínua e estritamente crescente, é injetiva, bem como g. Além disso, g é sobrejetiva, pois, dado $\tau > 0$, a equação $tM(t^2) = \tau$ sempre tem solução real em t, pois equivale à equação

$$at + bt^3 = \tau.$$

Então, pela Proposição A.2, g tem uma inversa $h : I \to I$ que é contínua e satisfaz, em particular,

$$h(tM(t^2)) = h(g(t)) = t$$

para todo $t \geqslant 0$. A condição (a_5) é a própria desigualdade (2.17). (a_6) Se $f \in \mathcal{A}$, $n \geqslant 3$, existe $0 < q < \frac{n+2}{n-2}$ tal que

$$B = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+|t|^q} < +\infty.$$

Então, sendo $F(t) = \int_0^t f(s)ds$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{|F(t)|}{|t|^{2\alpha}} &= \frac{|\int_0^t f(s)ds|}{|t|^{2\alpha}} \\
&\leqslant \frac{\int_0^t |f(s)|ds}{|t|^{2\alpha}} \\
&\leqslant \frac{\int_0^t B(1+|s|^q)ds}{|t|^{2\alpha}} \\
&= B\frac{|t| + |t|^{q+1}/(q+1)}{|t|^{2\alpha}} \\
&= B\left(\frac{|t|}{|t|^{2\alpha}} + \frac{1}{q+1} \cdot \frac{|t|^{q+1}}{|t|^{2\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

Como $q + 1 < \frac{2n}{n-2}$, para que o segundo termo tenda a 0 com $|t| \to +\infty$, basta tomar $\alpha > \frac{n}{n-2}$. Fazendo esta escolha, temos

$$\limsup_{|t|\to+\infty} \frac{F(t)}{|t|^{2\alpha}} \leqslant B \limsup_{|t|\to+\infty} \left(\frac{|t|}{|t|^{2\alpha}} + \frac{1}{q+1} \cdot \frac{|t|^{q+1}}{|t|^{2\alpha}}\right) = 0.$$

Finalmente, observando que

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t (a + bs)ds = at + \frac{b}{2}t^2,$$

temos

$$\widehat{M}\left(\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^{2}dx\right)=a\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^{2}dx+\frac{b}{2}\left(\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^{2}dx\right)^{2},$$

ou seja, o θ^* de (2.19) está de acordo com as hipóteses do Teorema 2.6. Portanto, o resultado segue. $\square$

Capítulo 3

Um Teorema de Unicidade

Em [21], Ricceri deixa como problema aberto saber se o Teorema 2.7 é válido para $n = 3$. Como provado em [5] por Giovanni Anello, veremos que a resposta é negativa. Na realidade, quando $n = 3$, é possível construir uma função que satisfaz todas as hipóteses do Teorema, mas que possui uma única solução fraca não-nula. Nesse capítulo, vamos apresentar esse contra-exemplo de Anello ao problema aberto de Ricceri.

Teorema 3.1 ([5]). Seja Ω uma bola aberta em $\mathbb{R}^3$ centrada na origem com raio $R > 0$ e seja $q \in]3,5[$ (pois $n = 3$). Consideremos então a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t^q$ se $t \geqslant 0$ e $f(t) = 0$ se $t < 0$. Então, quaisquer que sejam as constantes positivas a, b e λ, o problema

$$\begin{cases} -\left(a + b\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right)\Delta u &= \lambda f(u), \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, \qquad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_3'}$$

admite uma única solução fraca não-nula em $X = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Demonstração. As soluções fracas do problema acima são exatamenente os pontos críticos do funcional $I : X \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\left(a\|u\|^2 + \frac{b}{2}\|u\|^4\right) - \lambda\int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} f(t)dt\right)dx.$$

Da definição de f,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\left(a\|u\|^2 + \frac{b}{2}\|u\|^4\right) - \lambda \int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} t^q dt\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left(a\|u\|^2 + \frac{b}{2}\|u\|^4\right) - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1} dx. \end{aligned}$$

Observe que $I(0) = 0$. Designando por C a melhor constante da imersão de $W_0^{1,2}(\Omega)$ em $L^{q+1}(\Omega)$, temos

$$I(u) \geqslant \frac{1}{2}\left(a\|u\|^2 + \frac{b}{2}\|u\|^4\right) - \lambda\overline{C}\|u\|^{q+1},$$

onde $\overline{C} = \overline{C}(C,q)$. Como $q+1 > 4$, para $r = \|u\| < 1$ suficientemente pequeno, existe $\tilde{c} > 0$ tal que $I(u) > \tilde{c}$. Note ainda que para $0 < w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $t > 1$

$$I(tw) = \frac{1}{2}\left(at^2\|w\| + \frac{b}{2}t^4\|w\|^4\right) - \lambda\frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega |w|^{q+1} dx.$$

Como $q+1 > 4$, $\lim\limits_{t\to\infty} I(tw) = -\infty$. Portanto, I satisfaz a geometria do Passo da Montanha (ver Proposição B.19), de onde concluímos que I possui um ponto crítico não-nulo $u_1 \in X$ (ver seção 8.3 de [10]). Além disso, pelo Princípio do Máximo Forte, Proposição B.35, vemos que toda solução não-nula deste problema deve ser positiva. Vamos mostrar agora que u_1 é única. Suponhamos então que u_2 seja outro ponto crítico não-nulo. Dividindo a equação do problema por $a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx > 0$, vemos que u_i $(i = 1,2)$ é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\lambda}{a+b\|u_i\|^2} f(u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_{λ_i}}$$

Em [2] se mostra que o problema abaixo

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_4}$$

tem uma única solução $v_1 \in X$, que é positiva, pelo princípio do máximo forte. Isto implica que, para todo $\lambda > 0$, a função $v_\lambda = \lambda^{\frac{1}{1-q}} v_1$ é a única solução do problema a seguir:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u), & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_λ}$$

Para verificar isto, basta substituir v_λ no problema, usar a definição de f e lembrar que $-\Delta v_1 = f(v_1)$, de (P_4). Dessa forma, em particular, dadas $v_{\lambda_1} = \lambda_1^{\frac{1}{1-q}} v_1$ e $v_{\lambda_2} = \lambda_2^{\frac{1}{1-q}} v_1$, dividindo uma pela outra, vemos que elas são relacionadas por

$$v_{\lambda_1} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{1-q}} v_{\lambda_2}. \tag{3.1}$$

Escrevendo então

$$\lambda_i = \frac{\lambda}{a + b\|u_i\|^2}, \tag{3.2}$$

vemos que u_i é a solução do problema (P_{λ_i}), ou seja, temos, de (3.1),

$$u_1 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{1-q}} u_2.$$

Por (3.2),

$$u_1 = \left(\frac{a + b\|u_2\|^2}{a + b\|u_1\|^2}\right)^{\frac{1}{1-q}} u_2. \tag{3.3}$$

Tomando a norma em ambos os membros e elevando à potência $1-q$, obtemos

$$\|u_1\|^{1-q} = \frac{a + b\|u_2\|^2}{a + b\|u_1\|^2} \|u_2\|^{1-q},$$

ou seja,

$$a\|u_1\|^{1-q} + b\|u_1\|^{3-q} = a\|u_2\|^{1-q} + b\|u_2\|^{3-q}. \tag{3.4}$$

Mas, dado $t > 0$, a função $t \mapsto at^{1-q} + bt^{3-q}$ é estritamente decrescente, pois $q > 3$. Consequentemente, de (3.4),

$$\|u_1\| = \|u_2\|.$$

Substituindo em (3.3), vemos que $u_1 = u_2$, o que conclui a demonstração. $\square$

Apêndice A

Topologia Básica

Neste apêndice, apresentamos algumas definições e resultados clássicos de análise na reta, espaços métricos e espaços topológicos. Além disso, incluímos uma seção sobre multifunções, que usamos no início do Capítulo 1.

A.1 Análise na Reta

Proposição A.1. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $g : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então, dado $r \in \mathbb{R}$, os conjuntos

$$A_r = \{\lambda \in I; g(\lambda) > r\} \quad \text{e} \quad B_r = \{\lambda \in I; g(\lambda) < r\}$$

são abertos em I e os conjuntos

$$C_r = \{\lambda \in I; g(\lambda) \leqslant r\} \quad \text{e} \quad D_r = \{\lambda \in I; g(\lambda) \geqslant r\}$$

são fechados em I.

Demonstração. Para demonstrar esse fato, aplicamos a definição de função contínua para construir um conjunto aberto $\mathcal{U}$ tal que A_r seja igual a $\mathcal{U} \cap I$. O resultado para B_r é análogo e, como C_r e D_r são os complementares de A_r e B_r em relação a I, o resultado segue. $\square$

Proposição A.2 ([15]). Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua injetiva, definida num intervalo I. Então f é monótona, sua imagem é um intervalo e sua inversa é contínua.

A.2 Espaços Métricos

A proposição a seguir é demonstrada em [16].

Proposição A.3. Sejam M e N espaços métricos, $x \in M$ e seja $f : M \to N$. Então f é contínua se, e somente se, $x_n \longrightarrow x$ em M implica $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ em N. Em outras palavras, uma aplicação entre espaços métricos é contínua se, e somente se, é sequencialmente contínua.

A.3 Espaços Topológicos

Definição A.4 ([24])**.** Um *espaço topológico* é um par ordenado (X,τ), onde X é um conjunto e τ é uma coleção de subconjuntos de X, chamados *conjuntos abertos*, que satisfazem

(i) $\varnothing, X \in \tau$;

(ii) Se $U_1,\ldots,U_n \in \tau$, então $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \tau$;

(iii) Se $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma coleção arbitrária em τ, então

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau.$$

Em geral, nos referimos ao conjunto X como sendo o espaço topológico e à coleção τ como sendo a *topologia* de X. Naturalmente, X pode ter mais de uma topologia.

Proposição A.5. Todo subconjunto fechado de um espaço topológico é sequencialmente fechado.

Demonstração. Seja X um espaço topológico e seja F um fechado de X. Se F não é sequencialmente fechado, existe $x \in X$ que não pertence a F mas que é o limite de uma sequência de pontos $\{x_n\}$ de F. Da definição de convergência em um espaço topológico, como $X \backslash F$ é aberto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in X \backslash F$, que é uma contradição. □

Definição A.6 ([9])**.** Sendo X um espaço topológico e ϕ um funcional definido em X, dizemos que ϕ é *semicontínuo inferiormente* (s.c.i.) se $\phi^{-1}(a,+\infty)$ é um subconjunto aberto de X, para todo $a \in \mathbb{R}$. Analogamente, ϕ é *semicontínuo superiormente* (s.c.s.) se $\phi^{-1}(-\infty,b)$ é aberto, para todo $b \in \mathbb{R}$.

A.4 Multifunções

Definição A.7. Uma multifunção F entre dois conjuntos não vazios X e Y é uma aplicação $F : X \to 2^Y$, onde 2^Y representa o conjunto das partes de Y.

O conceito de multifunção serve para tornar precisa a ideia de "função multivaluada", pois a cada elemento $x \in X$ a multifunção F associa um subconjunto $F(x) \subset Y$, que é a imagem de x por F. O que vamos apresentar a seguir é apenas o estritamente necessário para a leitura da primeira seção do Capítulo 1. Pode-se encontrar mais sobre propriedades de multifunções, por exemplo, em [11].

Dados dois espaços topológicos X e Y e uma multifunção $F : X \to 2^Y$, escrevemos, para cada $\Omega \subset Y$,

$$F^-(\Omega) = \{x \in X; F(x) \cap \Omega \neq \varnothing\}.$$

Este conjunto é o análogo da imagem inversa para funções. Na realidade, se cada conjunto $F(x)$ for unitário, $F^-(\Omega)$ será a própria imagem inversa de Ω por F. O *gráfico* de F, denotado por $\mathrm{gr}(F)$, é o conjunto

$$\mathrm{gr}(F) = \{(x,y) \in X \times Y; y \in F(x)\}.$$

Definição A.8. Sejam X e Y dois espaços topológicos e seja $F : X \to 2^Y$ uma multifunção. Dizemos que F é *semicontínua inferiormente* se para cada conjunto aberto $\Omega \subset Y$, o conjunto $F^-(\Omega)$ é aberto. De forma análoga, F é *semicontínua superiormente* se para cada conjunto aberto $\Omega \subset Y$, o conjunto $F^-(\Omega)$ é fechado. Dizemos também que F é *sequencialmente semicontínua superiormente* se para cada sequência $\{(x_n,y_n)\}$ em $\mathrm{gr}(F)$, com $\{x_n\}$ convergindo para algum $x_0 \in X$, existe uma subsequência de $\{y_n\}$ que converge para um certo $y_0 \in F(x_0)$.

A seguir, veremos algumas propriedades topológicas das multifunções, apresentadas e demonstradas em [20].

Proposição A.9. Sejam X um espaço topológico, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto, S um subconjunto conexo de $X \times I$ cuja projeção sobre I é igual a I e seja $F : X \to 2^I$ uma multifunção semicontínua inferiormente, cujos valores são conjuntos não-vazios e conexos. Então o gráfico de F intersecta S.

Proposição A.10. Sejam X e Y dois espaços topológicos, com X conexo e primeiro contável, e seja $F : X \to 2^Y$ uma multifunção semicontínua inferiormente e sequencialmente semicontínua superiormente.

Se existe $x_0 \in X$ tal que $F(x_0)$ é não-vazio e conexo, então o gráfico de F é conexo.

Proposição A.11. Sejam X e Y dois espaços topológicos e seja $F : X \to 2^Y$ uma multifunção, com valores não-vazios, tal que $F^-(y)$ é aberto para todo $y \in Y$ e $X \backslash F^-(y_0)$ é sequencialmente compacto para algum $y_0 \in Y$. Então, dada uma sequência não-decrescente $\{Y_k\}$ de subconjuntos de Y cuja união é igual a Y, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F^-(Y_k) = X$.

Proposição A.12. Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo, X um espaço topológico e $F : I \to 2^X$ uma multifunção, com valores sequencialmente fechados e sequencialmente compactos, tal que, para cada $x \in X$, o conjunto $I \backslash F^-(x)$ é conexo e aberto em I. Então F é sequencialmente semicontínua superiormente.

Apêndice B

Análise Funcional e Aplicações

Neste apêndice, com o objetivo de tornar a leitura mais confortável, apresentamos alguns resultados clássicos de Análise Funcional e aplicações que são usados com frequência no texto.

B.1 Análise Funcional

As proposições a seguir encontram-se demonstradas em [7], nos capítulos 4 e 5, respectivamente.

Proposição B.1. Se E é um espaço de Banach reflexivo e separável, então seu dual topológico E^* também é reflexivo e separável.

Proposição B.2. Sejam E um espaço de Banach e E^* seu dual topológico. Então E^* é separável se, e somente se, a bola unitária de E é metrizável na topologia fraca.

O resultado a seguir é a proposição 3.15 de [1].

Proposição B.3 ([1])**.** Se E é um espaço de Banach e $\phi : E \to \mathbb{R}$ é um funcional convexo e semicontínuo inferiormente, então ϕ é contínua.

A proposição a seguir é o exemplo B da seção 2 do capítulo 1 de [9].

Proposição B.4. Se $\phi : E \to \mathbb{R}$ é um funcional convexo e semicontínuo inferiormente num espaço de Banach reflexivo E, então ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente.

Proposição B.5 ([9])**.** Seja X um espaço de Hilbert ou um espaço de Banach reflexivo e suponha que um funcional $\phi : X \to \mathbb{R}$ seja

(i) fracamente semicontínuo inferiormente;

(ii) *coercivo*, ou seja, $\phi(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to \infty$.

Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que

$$\phi(u_0) = \inf_{x \in X} \phi(x).$$

Corolário B.6. Seja X um espaço de Hilbert ou um espaço de Banach reflexivo e suponha que um funcional $\psi : X \to \mathbb{R}$ seja semicontínuo superiormente e que

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \psi(u) = -\infty.$$

Então ψ é limitado superiormente e existe $u_0 \in X$ tal que

$$\psi(u_0) = \sup_{x \in X} \psi(x).$$

Demonstração. Basta tomar o funcional $\phi = -\psi$, observar que, dado $a \in \mathbb{R}$,

$$\phi^{-1}(a, +\infty) = \psi^{-1}(-\infty, -a)$$

e aplicar a proposição anterior a ϕ. $\square$

Proposição B.7 (Eberlein-Smulyan, [26])**.** Um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, é fracamente localmente sequencialmente compacto. Ou seja, E é reflexivo se, e somente se, toda sequência limitada de E possui uma subsequência que converge fraco para um elemento de E.

Definição B.8 ([13])**.** Sendo X e Y dois espaços vetoriais normados, um operador linear $T : X \to Y$ é chamado *compacto* quando, dado um subconjunto limitado $B \subset X$, sua imagem $T(B)$ é um conjunto pré-compacto, ou seja, quando o fecho de $T(B)$ for compacto, para todo conjunto limitado $B \subset X$.

Proposição B.9. Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ pertence a $L^t(\Omega)$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e $t > 1$, então, dado $1 \leqslant s < t$, tem-se $L^t(\Omega) \subset L^s(\Omega)$ e, além disso, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|u\|_s \leqslant \alpha \|u\|_t.$$

Demonstração. Temos $\|u\|_s^s = \int_\Omega |u|^s\,dx$. Então, usando a desigualdade de Hölder $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$, tomando $p = t/s > 1$, q o conjugado de p, $f = |u|^s$ e $g = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|_s^s &= \int_\Omega |u|^s\,dx = \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q \\ &= \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |g|^q\,dx\right)^{1/q} \\ &= \left(\int_\Omega |u|^{s\cdot t/s}\,dx\right)^{s/t}\left(\int_\Omega dx\right)^{1/q} \\ &= \|u\|_t^s \cdot |\Omega|^{1/q} \end{aligned}$$

Elevando à potência $1/s$, encontramos

$$\|u\|_s \leqslant |\Omega|^{1/qs} \cdot \|u\|_t.$$

Em particular, como $u \in L^t(\Omega)$ e Ω é limitado, temos $\|u\|_t < +\infty \Rightarrow \|u\|_s < +\infty$, ou seja, $L^t(\Omega) \subset L^s(\Omega)$. □

Proposição B.10 ([8]). Seja E um espaço de Banach e seja C um subconjunto convexo de E. Então C é fechado na topologia fraca se, e somente se, é fechado na topologia da norma de E.

B.2 Derivadas de Fréchet e Gâteaux

A definição de diferenciabilidade que aprentamos a seguir é uma generalização natural da definição usual de diferenciabilidade das aplicações $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que se encontra em [3]. No que segue, vamos considerar que X e Y são espaços de Banach e que $U \subset X$ é aberto.

Definição B.11. Seja $u \in U$. Dizemos que $F : U \to Y$ é *Fréchet diferenciável* ou, simplesmente, *diferenciável* em u se existe uma aplicação linear contínua $A : X \to Y$ tal que, definindo

$$R(h) = F(u+h) - F(u) - A(h),$$

tem-se

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Pode-se mostrar que [3]:

Proposição B.12. (a) A aplicação A definida acima é única. É representada por $dF(u)$, para cada $u \in U$ em que F for diferenciável.

(b) A diferenciabilidade de $F : U \to Y$ em $u \in U$ implica a continuidade de F em u.

Em vista desta proposição, se F for diferenciável em todos os pontos de U, está bem definida a aplicação $F' : U \to L(X,Y)$, que associa a cada $u \in U$ a aplicação linear contínua $dF(u)$. Neste caso, F' é chamada a *derivada de Fréchet* de F. Assim como este conceito generaliza a diferenciabilidade, a chamada *derivada de Gâteaux*, definida a seguir, generaliza a dervada direcional.

Definição B.13 ([3])**.** Seja $F : U \to Y$ e seja $x \in U$. Dizemos que F é *Gâteaux diferenciável* em u se existe $A : X \to Y$ linear e contínua tal que, para todo $h \in X$, tem-se

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u+\varepsilon h) - F(u)}{\varepsilon} = Ah.$$

Da unicidade do limite, segue que A, quando existe, é única. Neste caso, dizemos que a aplicação A é a *derivada de Gâteaux de* F *em* u e a denotamos por $d_G F(u)$. Se F for Gâteaux diferenciável em todo ponto $u \in U$, a aplicação $F'_G : U \to L(X,Y)$, dada por $F'_G(u) = d_G F(u)$, fica, então, bem definida.

Proposição B.14 ([3])**.** Suponha que $F : U \to Y$ seja Gâteaux diferenciável em U e que a aplicação $F'_G(u)$, definida anteriormente, seja contínua em $u^* \in U$. Então F é Fréchet diferenciável em u^* e $F'(u^*) = d_G F(u^*)$. Em outras palavras, se uma aplicação F é continuamente Gâteaux diferenciável num ponto, então é Fréchet diferenciável neste ponto. Em partícular, F é contínua neste mesmo ponto, da Proposição B.12.

Proposição B.15 ([27])**.** Seja X um espaço de Banach real e reflexivo e seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional. Se a aplicação $\phi'_G(u)$ existe e é contínua, ou, mais geralmente, compacta, então ϕ é sequencialmente fracamente contínuo em X.

Os resultados a seguir encontram-se na seção 38.10 de [27].

Definição B.16 (Condição de Palais-Smale, [27])**.** Seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional Gâteaux diferenciável no espaço de Banach X, com derivada de Gâteaux ϕ'. Então ϕ satisfaz a *Condição de Palais-Smale* (PS) caso aconteça o seguinte: Se (u_n) é uma sequência em X que satisfaz

(i) $(\phi(u_n))$ é limitada,

(ii) $\|(\phi'(u_n))\| \to 0$ quando $n \to \infty$,

então (u_n) possui uma subsequência convergente.

Proposição B.17 ([27]). Seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional Fréchet diferenciável no espaço de Banach X que é limitado inferiormente e satisfaz (PS). Então existe $u \in X$ tal que $\phi(u)$ é um valor mínimo global de ϕ e, além disso, satisfaz $\phi'(u) = 0$.

Proposição B.18 ([27]). Seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional Gâteaux diferenciável no espaço de Banach X, cuja derivada de Gâteaux ϕ' pode ser escrita como uma soma $\phi' = A + C$. Se

(i) $\phi(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty$,

(ii) $A : X \to X^*$ possui um operador inverso contínuo $A^{-1} : X^* \to X$ e $C : X \to X^*$ é compacto,

então ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale.

Teorema B.19 (Passo da Montanha, [10]). Seja H um espaço de Hilbert real e $\mathcal{C}$ a classe de todas os funcionais $I \in C^1(H,\mathbb{R})$ cuja derivada $I' : H \to H$ é lipschitziana em todo subconjunto limitado de H. Assuma que I pertence à classe $\mathcal{C}$ e satisfaz a condição de Palais-Smale (Definição B.16). Assuma também que

(i) $I(0) = 0$;

(ii) existem constantes $r, a > 0$ tais que

$$I(u) \geqslant a \quad \text{se} \quad \|u\| = r,$$

e

(iii) existe $v \in H$ tal que

$$\|v\| > r \quad \text{e} \quad I(v) \leqslant 0.$$

Definindo, então,

$$\Gamma := \{g \in C([0,1],H);\ g(0) = 0, g(1) = v\},$$

o número real c definido por

$$c := \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} I(g(t))$$

é um valor crítico de I.

A proposição a seguir é o Teorema 1 do artigo [17], que fornece uma versão enfraquecida do teorema do Passo da Montanha.

Proposição B.20 ([17])**.** Sejam X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ um funcional que satisfaz as seguintes condições:

(C_1) existem números reis a, r e R tais que $0 < r < R$ e $\phi(x) \geqslant a$ para todo $x \in A$, onde

$$A := \{x \in X; r < \|x\| < R\};$$

(C_2) $\phi(0) \leqslant a$ e $\phi(u) \leqslant a$, para algum $u \in X$ com $\|u\| \geqslant R$;

(C_3) toda sequência $\{x_n\}$ em X tal que $\lim \phi(x_n) \geqslant a$ e $\phi'(x_n) \to 0$ possui uma subsequência convergente.

Nessas condições, existe um ponto crítico $x_0 \in X$, diferente de 0 e de u, com valor crítico $\phi(x_0) \geqslant a$. Além disso, $x_0 \in A$ quando $c = a$.

Esse resultado possui o seguinte corolário, que foi utilizado por Ricceri em [20] na construção do Teorema 1.4.

Corolário B.21. Se a condição (C_3) da Proposição B.20 é satisfeita e, além disso, o funcional ϕ possui dois mínimos locais distintos, então ϕ possui um terceiro ponto crítico.

B.3 Espaços de Sobolev

Proposição B.22 (Desigualdade de Poincaré, [8])**.** Suponha que $1 \leqslant p < \infty$ e que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e limitado. Então existe uma constante $\beta > 0$, que depende de Ω e p, tal que

$$\|u\|_p \leqslant \beta \|\nabla u\|_p,$$

para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_p$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e é equivalente à norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$; além disso, no caso particular $p = 2$, a expressão

$$\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx$$

é um produto escalar em $W_0^{1,2}(\Omega)$ que induz a norma $\|\nabla u\|_2$ e é equivalente à norma $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$.

As proposições a seguir encontram-se no Apêndice B de [18].

Proposição B.23 (Imersão de Sobolev)**.** Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ cuja fronteira é suave. Se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, então $u \in L^{2n/(n-2)}(\Omega)$ (onde $n \geqslant 3$) e existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^\gamma(\Omega)} \leqslant k\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \tag{B.1}$$

para todo $\gamma \in [1,2n/(n-2)]$ e para todo $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Além disso, a imersão

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega)$$

é compacta, para todo $\gamma \in [1,2n/(n-2)]$.

Proposição B.24. Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ cuja fronteira é suave. Tomemos uma função p satisfazendo

(p_1) $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R},\mathbb{R})$, e

(p_2) existem constantes $a_1,a_2 > 0$ tais que

$$|p(x,\xi)| \leqslant a_1 + a_2|\xi|^q,$$

onde $0 \leqslant q < (n+2)/(n-2)$ e $n \geqslant 3$.

Se

$$P(x,\xi) \equiv \int_0^\xi p(x,t)\,dt$$

e

$$I(u) \equiv \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u)\Big)dx,$$

então $I \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega),\mathbb{R})$ e

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi - p(x,u)\varphi)dx$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Além disso, o funcional

$$J(u) = \int_\Omega P(x,u(x))dx$$

é fracamente contínuo e a sua derivada $J'(u)$ é compacta.

Proposição B.25 ([12]). Se $p > n$, $W_0^{1,2}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ e existe $c > 0$ tal que

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leqslant c|\Omega|^{1/n-1/p}\|\nabla u\|_p.$$

Definição B.26 ([8]). Um espaço de Banach E é *uniformemente convexo* se para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: dados $x,y \in E$ tais que $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ e $\|x+y\| \geqslant \varepsilon$, tem-se

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1-\delta.$$

Proposição B.27 ([8]). Todo espaço de Hilbert é uniformemente convexo. Em particular, $W_0^{1,2}(\Omega)$ é uniformemente convexo, pela Proposição B.22.

Proposição B.28 ([8]). Seja E um espaço de Banach uniformemente convexo. Se $\{x_n\}$ é uma sequência em E tal que $x_n \rightharpoonup x$ na topologia fraca de E e

$$\limsup \|x_n\| \leqslant \|x\|,$$

então $x_n \to x$ na toplogia da norma de E.

B.4 Diferenciabilidade do Funcional $\Phi(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p)$

Nesta seção, vamos mostrar que o funcional Φ associado ao primeiro membro dos problemas aqui tratados, onde aparece o laplaciano, é de classe $C^1(X,\mathbb{R})$, onde $X = W_0^{1,p}(\Omega)$. Para isso, vamos mostrar que o funcional é Gâteaux diferenciável e que sua derivada é contínua no dual de X, considerando $p > 1$ qualquer (ver [23]).

Para essa demonstração, vamos precisar de um importantíssimo resultado da teoria da medida, conhecido como Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, a seguir.

Teorema B.29 (da Convergência Dominada, [6])**.** Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções integráveis, com uma medida μ, que converge q.t.p. para uma função real mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leqslant g$ para todo n, então f é integrável e

$$\int f\,d\mu = \lim \int f_n\,d\mu.$$

Proposição B.30. Sejam $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ com a norma usual

$$\|u\| = \left\{ \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx \right\}^{1/p},$$

$M : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua,

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t [M(s)]^{p-1} ds$$

e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ o funcional definido por

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p).$$

Então Φ é Gâteaux diferenciável.

Demonstração. Sejam $u, v \in X$ e seja $\varepsilon > 0$. Defina $G : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ por

$$G(s) = |\nabla u + s\varepsilon\nabla v|^p.$$

Note que $G(0) = |\nabla u|^p$ e $G(1) = |\nabla u + \varepsilon\nabla v|^p$. Então, sendo G diferenciável, pelo Teorema do Valor Médio, existe $0 < \lambda < 1$ tal que

$$\frac{G(1) - G(0)}{1 - 0} = G'(\lambda),$$

ou seja,

$$|\nabla u + \varepsilon \nabla v|^p - |\nabla u|^p = G'(\lambda). \tag{B.2}$$

Para calcular esta derivada, observamos primeiro que

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= |\nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v|^p \\ &= |\nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v|^{2\cdot p/2} \\ &= \langle \nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v, \nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v\rangle^{p/2}, \end{aligned}$$

onde este é o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$, no qual vale $\langle x,x\rangle = |x|^2$. Como G é uma função real de variável real, temos

$$\begin{aligned} G'(\lambda) &= \frac{p}{2}\langle \nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v, \nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v\rangle^{\frac{p}{2}-1}\cdot 2\varepsilon\langle \nabla v, \nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v\rangle \\ &= \varepsilon p\langle \nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v, \nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v\rangle^{\frac{1}{2}(p-2)}\langle \nabla v, \nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v\rangle \\ &= \varepsilon p|\nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v|^{p-2}\langle \nabla v, \nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v\rangle \end{aligned}$$

Dessa forma, dividindo (B.2) por ε, obtemos

$$\frac{|\nabla u + \varepsilon\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{\varepsilon} = p|\nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v|^{p-2}\langle \nabla v, \nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v\rangle$$

Tomando o limite $\varepsilon \to 0$, chegamos a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|\nabla u + \varepsilon\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{\varepsilon} = p|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v,$$

onde simplificamos a notação, como é usual, escrevendo $\langle \nabla u, \nabla v\rangle = \nabla u\nabla v$. Vamos agora integrar esse limite e aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Para isso, devemos mostrar que a família de funções no integrando é limitada por uma função em $L^1(\Omega)$. Vamos mostrar, então, que

$$\left|\frac{|\nabla u + \varepsilon\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{\varepsilon}\right| \leqslant p|\nabla u + \nabla v|^{p-1}|\nabla v|$$

e que o segundo membro dessa desigualdade pertence a $L^1(\Omega)$. Observe primeiro que $0 < \lambda < 1$ e que podemos supor $\varepsilon \in]-1,1[$, pois estamos considerando $\varepsilon \to 0$. Desse modo, $0 < |\lambda\varepsilon| < 1$, de onde concluimos que

$$|\nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v| \leqslant |\nabla u + \nabla v|.$$

Observando também que

$$|\langle\nabla v, \nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v\rangle| \leqslant |\nabla v| \cdot |\nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v|,$$

pela desigualdade de Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{|\nabla u + \varepsilon\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{\varepsilon}\right| &= p|\nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v|^{p-2}|\langle\nabla v, \nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v\rangle| \\
&\leqslant p|\nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v|^{p-2}|\nabla v| \cdot |\nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v| \\
&= p|\nabla u + \lambda\varepsilon\nabla v|^{p-1}|\nabla v| \\
&\leqslant p|\nabla u + \nabla v|^{p-1}|\nabla v|. \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}$$

Notando agora que $\frac{p}{p-1}$ é o expoente conjugado de p, podemos aplicar a desigualdade de Hölder para escrever

$$p\int_\Omega |\nabla u + \nabla v|^{p-1}|\nabla v| \leqslant p\left(\int_\Omega (|\nabla u + \nabla v|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como

$$\left(\int_\Omega (|\nabla u + \nabla v|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} = \left(\int_\Omega |\nabla u + \nabla v|^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}(p-1)} = \|u+v\|^{p-1} < \infty,$$

e $(\int_\Omega |\nabla v|^p)^{1/p} = \|v\| < \infty$, pois $u, v \in X$, concluímos que

$$p\int_\Omega |\nabla u + \nabla v|^{p-1}|\nabla v| < \infty.$$

Portanto, $p|\nabla u + \nabla v|^{p-1}|\nabla v| \in L^1(\Omega)$, como afirmamos. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \frac{|\nabla u + \varepsilon\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{\varepsilon} = p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v,$$

ou seja,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_\Omega |\nabla u+\varepsilon\nabla v|^p - \int_\Omega |\nabla u|^p}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\|u+\varepsilon v\|^p - \|u\|^p}{\varepsilon} = p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v.$$

Vemos então que o funcional F definido em X por $F(u) = \|u\|^p$ é Gâteaux diferenciável, com

$$F'(u)\cdot v = p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v.$$

Além disso, temos

$$\widehat{M}(t)' = \frac{d}{dt}\int_0^t [M(s)]^{p-1}ds = [M(t)]^{p-1},$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Então, pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned}
\Phi'(u)\cdot v &= \frac{1}{p}\widehat{M}(F(u))' F'(u)\cdot v \\
&= \frac{1}{p}[M(F(u))]^{p-1}\cdot p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v \\
&= [M(\|u\|^p)]^{p-1}\cdot\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v,
\end{aligned}$$

o que mostra que Φ é Gâteaux diferenciável. □

Proposição B.31. A aplicação derivada $\Phi' : X \to X^*$ é contínua.

Demonstração. Observe que Φ' é a aplicação que associa a cada $u \in X$ o funcional $\Phi'(u)$, cuja expressão foi demonstrada anteriormente. Seja então $\{u_n\}$ uma sequência em X tal que $u_n \to u$ em X e seja $\phi \in X$. Da definição de X, temos

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \qquad \text{em } L^p(\Omega).$$

Logo, existe $s \in L^p(\Omega)$ tal que

$$|\nabla u_n(x)| \leqslant s(x) \qquad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Escrevendo então, para cada $x \in \Omega$ e cada $n \in \mathbb{N}$,

$$G_n(x) = |\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x)\nabla\phi(x)$$

e

$$G(x) = |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla\phi(x),$$

temos

$$\begin{aligned} ||\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x)\nabla\phi(x)| &= |\nabla u_n(x)|^{p-2}|\nabla u_n(x)| \cdot |\nabla\phi(x)| \\ &= |\nabla u_n(x)|^{p-1}|\nabla\phi(x)| \\ &\leqslant [s(x)]^{p-1}|\nabla\phi(x)| \end{aligned} \tag{B.4}$$

q.t.p. em Ω. Então $s^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, pois

$$\int_\Omega (s^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} = \left(\int_\Omega s^p\right)^{\frac{p}{p-1}} < \infty,$$

já que $s \in L^p(\Omega)$. Então, assim como na Proposição anterior, podemos aplicar a desigualdade de Hölder, obtendo

$$\int_\Omega s^{p-1}|\nabla\phi| \leqslant \left(\int_\Omega (s^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla\phi|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|s\|_p^{p-1}\|\phi\|.$$

Como $s \in L^p(\Omega)$ e $\phi \in X$, as integrais acima são todas finitas, de onde se conclui que $s^{p-1}|\nabla\phi|$ pertence a $L^1(\Omega)$. Então podemos integrar a desigualdade (B.4) e usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\lim \int_\Omega |G_n(x)| = \int_\Omega |G(x)|, \tag{B.5}$$

pois $G_n(x) \to G(x)$ q.t.p. em Ω. Isso significa que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \int_\Omega G_n(x) - \int_\Omega G(x) \right| < \varepsilon$$

sempre que $n > n_0$. Lembrando da Proposição anterior que

$$F'(u)\cdot\phi = \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla\phi(x),$$

a desigualdade (B.5) pode ser escrita como

$$|F'(u_n)\cdot\phi - F'(u)\cdot\phi| < \varepsilon.$$

Em particular, tomando o supremo sobre todas as funções $\phi \in X$ tais que $\|\phi\| \leqslant 1$, obtemos

$$\|F'(u_n) - F'(u)\|_{X^*} < \varepsilon.$$

Isso mostra que a aplicação $F : X \to X^*$ é contínua, de onde se conclui que $F \in C^1(X, \mathbb{R})$. Finalmente, como a norma e a função M são contínuas, o resultado segue. □

Observação B.32. Como caso particular dos resultados anteriores, se $p = 2$, temos

$$\Phi'(u)\cdot v = M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\nabla v.$$

Escrevendo agora

$$u\cdot v = \int_\Omega \nabla u\nabla v,$$

podemos entender essa operação como um produto interno em $X = W_0^{1,2}(\Omega)$, como na Proposição B.22. Isso permite simplificar a notação e escrever

$$\Phi'(u) = M(\|u\|^2)u.$$

B.5 Princípio do Máximo Forte

Definição B.33. Um operador diferencial parcial de segunda ordem L em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definido por

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + c\cdot u,$$

onde u_{x_i} representa a derivada em relação à i-ésima variável, é chamado *uniformemente elíptico* se existir uma constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \theta|\xi|^2,$$

para quase todo ponto $x \in \Omega$, qualquer que seja $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Proposição B.34 ([25])**.** Suponha que L seja um operador estritamente elíptico e que $c \leqslant 0$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $Lu \geqslant 0$ em Ω, então ou $u \equiv \sup_{\Omega} u$ ou u não atinge um máximo não negativo em Ω.

Um importante Corolário deste Teorema é o seguinte, também provado em [25].

Corolário B.35 ([25])**.** Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ e suponha que L seja um operador estritamente elíptico, com $c \leqslant 0$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz

$$\begin{aligned} -Lu \geqslant 0 \quad & \text{em } \Omega, \\ u \geqslant 0 \quad & \text{em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

então ou $u(x) > 0$ ou $u \equiv 0$.

Referências Bibliográficas

[1] Acker, F. & Dickstein, F. *Uma Introdução à Análise Convexa*. IMPA, Rio de Janeiro, 1983.

[2] Adimurthi, R. & Yadava, S.L. *An elementary proof of the uniqueness of positive radial solutions of a quasilinear Dirichlet problem*. Arch. Ration. Mech. Anal. **127**, 1994, 219-229.

[3] Ambrosetti, A. & Prodi, G. *A Primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge University Press, 1993.

[4] Ambrosetti, A. & Rabinowitz, P.H. *Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications*. J. Func. Anal., **14**, 1973, 349-381.

[5] Anello, G. *A uniqueness result for a nonlocal equation of Kirchhoff type and some related open problem*. J. Math. Anal. Appl. **373**, 2011, 248-251.

[6] Bartle, R.G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley & Sons, New York, 1966.

[7] Biezuner, R.J. *Análise Funcional*. UFMG, Julho de 2009. Notas de Aula.

[8] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 2011.

[9] Costa, D.G. *Tópicos em Análise Não-Linear e Aplicações às Equações Diferenciais*. VIII Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.

[10] Evans, L.C. *Partial Differential Equations.* Am. Math. Soc., 1998.

[11] Galetu, A. *Introduction to Topological Spaces and Set-Valued Maps.* Lecture Notes, Ilmenau University of Technology, 2006.

[12] Gilbarg, D. & Trudinger, N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[13] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, 1978.

[14] Lima, E.L. *Análise Real*, vol. 1. 11.ed. Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[15] Lima, E.L. *Curso de Análise*, vol.1. 12.ed. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.

[16] Lima, E.L. *Espaços Métricos*, 5.ed. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2013.

[17] Pucci, P. & Serrin, J. *A mountain Pass Theorem*. J. Diff. Eq.,**60**, 1985, 142-149.

[18] Rabinowitz, P.H. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, In CBMS Reg. Conf. Ser. in Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, vol. **65**, 1986.

[19] Ricceri, B. *A further three critical points theorem*. Nonl. Anal., **71**, 2009, 4151-4157.

[20] Ricceri, B. *Existence of Three Solutions for a Class of Elliptic Eigenvalue Problems*. Math. Comp. Mod., **32**, 2000, 1485-1494.

[21] Ricceri, B. *On an elliptic Kirchhoff-type problem depending on two parameters*. J. Glob. Optim., textbf46, 2010, 543-549.

[22] Ricceri, B. *Some topological mini-max theorems via an alternative principle for multifunctions*. Arch. Math., **60**, 1993, 367-377.

[23] Santos, D.G. *Multiplicidade de Soluções para Equações via Teoria de Lusternik-Schinirelmann*. Dissertação de Mestrado, UFPA, Belém, 2009.

[24] Simmons, G.F. *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw-Hill, 1963.

[25] Sweers, G. *Maximum Principles, a start*. 2000.

[26] Yosida, K. *Functional Analysis*. 6.ed. Springer-Verlag, New York, 1980.

[27] Zeidler, E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Vol. III*. Springer-Verlag, 1984.