UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Bráulio Brendo Vasconcelos Maia

Existência de soluções multi-bump positivas para um sistema Schrödinger-Poisson no $\mathbb{R}^3$

BELÉM-PA
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Bráulio Brendo Vasconcelos Maia

Existência de soluções multi-bump positivas para um sistema Schrödinger-Poisson no $\mathbb{R}^3$

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

BELÉM-PA

2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Maia, Bráulio, 1991-
Existência de soluções multi-bump positivas para um sistema schrodinger-poisson no r^{3} / Bráulio Maia. - 2016.

Orientador: Giovany de Jesus Malcher Figueiredo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2016.

1. Schrodinger-Equação de. 2. Equações diferenciais não-lineares. 3. Solução multi-bump. 4. Sistema Schrodinger-Poisson. 5. Método variacional. I. Título.

CDD 22. ed. 515.355

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Bráulio Brendo Vasconcelos Maia

Existência de soluções multi-bump positivas para um sistema Schrödinger-Poisson no $\mathbb{R}^3$

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 15 de Março de 2016.

Conceito: APROVADO

Banca Examinadora

Prof. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento
PPGME - UFPA

João Rodrigues dos S. Júnior

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior
PPGME - UFPA

Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
FCT - UNESP

"Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota". (Madre Teresa de Calcutá)

Dedico este trabalho aos meus amados pais, José Maia e Maria da Paz, e ao meu irmão Italo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais Maia e Paz e ao meu irmão Italo por todo incentivo e amor.

A Edla Vidal, pelo carinho, pelos momentos felizes e pelo companheirismo.

A todos os amigos que me apoiaram e acreditaram em mim, ajudando assim de maneira direta ou indireta na realização deste trabalho. Ficando registrado um agradecimeto especial ao amigo Júnior Cardoso, pelos mesmos motivos supracitados e especialmente por toda a ajuda que me deu nos primeiros meses que me mudei para Belém.

A todos os colegas de turma, em especial Márcio Almeida, Elias Macêdo, Maurício Vinhote e Luiz Guttemberg, por todo o companheirismno.

Aos meus amigos Isaac Torres e Wesley Sena, as pessoas mais inteligentes com as quais tive o prazer de tomar um café, lhes agradeço por todas as conversas, conselhos, pela cumplicidade e por toda a inspiração que me causaram.

Ao professor Giovany Malcher Figueiredo, pela orientação deste trabalho, pelas aulas ministradas, pela dedicação, sabedoria e franqueza. Características que o tornam um profissional exemplar, por quem guardo profunda admiração e respeito.

Aos professores João Rodrigues, Augusto César, Joelma Morbach e aos demais professores do PPGME, pelas boas aulas ministradas e pelo incentivo dado aos alunos.

Aos professores Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta, João Rodrigues Santos Júnior e a professora Rúbia Gonçalves Nascimento, por participarem como membros da banca, validando este trabalho perante a comunidade científica.

A CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação estudaremos a existência soluções multi-bump positivas para o sistema Schrödinger-Poisson no $\mathbb{R}^3$ via métodos variacionais. Inicialmente, encontraremos uma solução fraca associada a um subconjunto da variedade Nehari $\mathcal{N}$. Em seguida, estudaremos um problema auxiliar e a limitação de suas soluções. Por fim, usaremos o lema de deformação para provar o resultado principal.

Palavras-chave: Schrödinger-Poisson, solução multi-bump, problema auxiliar, lema de deformação.

Abstract

In this dissertation we study the existence of positive multi-bump solutions for a Schrödinger-Poisson system in $\mathbb{R}^3$ by variational methods. Initially, we find a weak solution associated with a subset of Nehari manifold $\mathcal{N}$. Then, we study an auxiliary problem and the boundness of their solutions. In the end, we use the deformation lemma to show the main result.

Key-words: Schrödinger-Poisson, multi-bump solution, auxiliary problem, deformation lemma.

Conteúdo

Notações

Notações gerais

- $\blacksquare$: fim de uma demonstração;
- $B_r(x)$: bola aberta de centro x e raio r;
- $\rightarrow$: convergência forte;
- $\rightharpoonup$: convergência fraca;
- $\displaystyle\int_\Omega f$: denota $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx$;
- $\langle .,. \rangle_X$: produto interno em X;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano da função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$;

Espaço de Funções

- $C_0(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas com suporte compacto em Ω;
- $C^k(\Omega)$ denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω, $k \in \mathbb{N}$;
- $C^\infty(\Omega) = \cap_{k\geq 1} C^k(\Omega)$;
- Para $1 \leq p < \infty$ denotemos

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_\Omega |u|^p < \infty\};$$

- $L^p_{loc}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega')$ para todo compacto $\Omega' \subset \Omega\}$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; |u(x)| \leq C$ q.t.p sobre Ω, para algum $C > 0\}$;

- Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, definimos $H^1(\Omega)$ como o espaço o das funções $u \in L^2(\Omega)$ tais que existem $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, com $i =, 1, 2, 3$ satisfazendo

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \varphi g_i dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), i = 1, 2, 3;$$

- Com $g_i, i = 1, 2, 3$ satisfazendo a propriedade acima temos

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^3) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N); \nabla u = (g_1, g_2, g_3) \in L^2(\mathbb{R}^3)\},$$

onde $2^* = 6$ e $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, com $i = 1, 2, 3$;

- $H^{-1}(\Omega)$ denota o dual topológico do espaço $H^1(\Omega)$;

- $D^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$ denota o dual topológico do espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$;

Normas

- $||u||_\infty = \inf\{C > 0; |u(x)| \leq C \text{ q.t.p em } \Omega\}$ denota a norma do espaço $L^\infty(\Omega)$;

- $|u|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, denota a norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^3$;

- $||u||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u . \nabla u\right)^{\frac{1}{2}}$.

Introdução

Esta dissertação tem como principal objetivo expor de maneira detalhada o artigo de C.O Alves e M.Yang [3], trabalho no qual os autores estudam a existência de soluções multi-bumps positivas para o sistema de equações não- lineares do tipo Schrödinger-Poisson

$$(SP) \quad \begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = u^2 \text{ em } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

onde $V(x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não negativa, comumente chamada de potencial e f é uma função contínua e diferenciável que obedecerá algumas condições previamente impostas.

O sistema (SP) é inspirado na equação de Schrödinger em $\mathbb{R}^3$ dada por

$$-i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta \psi + V(x)\psi + \phi(x)\psi - |\psi|^{p-2}\psi$$

com $2 < p < 2^* = 6$ e $\psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ e $\phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ são duas funções desconhecidas.

Tal equação tem grande importância para a física-matemática, como por exemplo, modelar interações entre partículas quânticas. Para uma melhor abordagem física ver [7], [10], [12], [28], [33] e [34].

Em nosso caso, estaremos interessados em situações onde ϕ é determinado pela equação de Poisson $-\Delta \phi = u^2$, ou seja, ϕ depende da função de onda do problema.

Será mostrado no Apêndice A que, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ existe uma única $\phi = \phi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, solução da equação de Poisson

$$-\Delta\phi = u^2 \text{ em } \mathbb{R}^3.$$

Assim, o estudo do sistema (SP) se reduz ao estudo de uma única equação de Schrödinger

$$-\Delta u + V(x)u + \phi_u u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^3. \qquad (P)$$

O termo ϕ_u, também conhecido como termo não-local, possui propriedades que serão amplamentes usadas em nosso texto, tais propriedades serão enunciadas agora e demonstradas no Apêndice A.

[Propriedades da ϕ_u]: Para qualquer $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, valem as seguintes propriedades:

i) $\phi_u(x) = \dfrac{1}{3\omega_3}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(y)}{|x-y|}dy$ para todo $x \neq y \in \mathbb{R}^3$;

ii) Existe $C > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi_u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx \leq C||u||^4_{H^1(\mathbb{R}^3)};$$

iii) $\phi_u \geq 0$ $\forall u \in H^1(\mathbb{R}^3)$;

iv) $\phi_{tu} = t^2\phi_u$, $\forall t > 0$;

v) Se $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ e

$$\lim \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx;$$

vi) Se $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então $\phi_{u_n} \to \phi_u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Além disso,

$$\lim \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx.$$

Recordemos que uma solução fraca para o problema (P) é, por definição, uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u uv dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(u)v dx = 0, \forall v \in H^1(\mathbb{R}^3).$$

Associamos então ao problema (P) o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(u)dx,$$

onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ e E é um subespaço vetorial de $H^1(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$E = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} V(x)|u|^2 dx < \infty\}$$

e munido da norma

$$||u|| = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso,

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u uv dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(u)v dx, \forall u, v \in E.$$

Logo, (P) pode ser estudado por meio de métodos variacionais, visto que, os pontos críticos do funcional I são soluções para o problema (P).

Muitos autores já trabalharam com o sistema (SP) via métodos variacionais, estudando existência e não existência de soluções [25] e [16], multiplicidade de soluções [15], soluções nodais [5] e [6], soluções do tipo ground state [8], soluções radiais e não radiais [24] e [17], concentração de soluções [24], soluções positivas [14], soluções não negativas [32] e soluções positivas com expoente crítico [39]. Para o problema em domínio limitado indicamos [35]. Todavia, pouco se conhece sobre a existência de soluções multi-bump para o sistema Schrödinger-Poisson com pontencial bem definido, por isso a importância do trabalho [3].

Assim como em [3] assumiremos que o potencial $V(x)$ é da forma

$$V(x) = \lambda a(x) + 1,$$

onde λ é um parâmetro real positivo e $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não negativa. Portanto, o sistema (SP) será escrito como

$$(SP_\lambda) \begin{cases} -\Delta u + (\lambda a(x) + 1)u + \phi u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = u^2 \text{ em } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Para $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ escreveremos (P) como

$$-\Delta u + (\lambda a(x) + 1)u + \phi_u u = f(u). \tag{P_λ}$$

Para chegar ao principal resultado da dissertação, trabalharemos sob as seguintes hipóteses para a função a e para a não linearidade f:

(a_1) O conjunto $int(a^{-1}\{0\})$ é não vazio e existem k componentes abertas e disjuntas $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_k$ tal que

$$int(a^{-1}\{0\}) = \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j$$

e

$$dist(\Omega_i, \Omega_j) > 0 \text{ para } i \neq j, i, j = 1, ..., k.$$

De (a_1), vemos que

$$a^{-1}\{0\} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{\Omega_j}.$$

As hipóteses sobre a função f são:

(f_1) $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{f(s)}{s} = 0;$

(f_2) $\lim_{|s| \to \infty} \frac{f(s)}{s^5} = 0;$

(f_3) Existe $\theta > 4$ tal que

$$0 < \theta F(s) \leq s f(s), \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

Observação 0.1 *Da condição* (f_3)

$$\int_1^s \frac{\theta}{\sigma} d\sigma \leq \int_1^s \frac{f(\sigma)}{F(\sigma)} d\sigma, \text{ para todo } s \geq 1.$$

Calculando os valores das integrais, obtemos

$$\ln s^\theta \leq \ln \frac{F(s)}{F(1)}.$$

Como ln *é uma função crescente, temos*

$$s^\theta \leq \frac{F(s)}{F(1)}.$$

Portanto existe uma constante $k > 0$ *tal que*

$$F(s) \geq ks^\theta,$$

e consequentemente

$$f(s)s \geq ks^\theta.$$

(f_4) $\frac{f(s)}{s^3}$ é crescente para $|s| > 0$.

Observação 0.2 *Esta condição nos diz que a derivada da função* $\frac{f(s)}{s^3}$ *é positiva, então*

$$f'(s)s^3 - 3s^2 f(s) > 0.$$

Como exemplo de função que satisfaz $(f_1) - (f_4)$ temos

$$f(s) = |s|^{q-2}s \text{ com } 4 < q < 2^*.$$

Vale ressaltar também que como iremos buscar soluções positivas, assumiremos em todo trabalho que $f(s) = 0$ se $s \leq 0$.

O principal resultado desta dissertação é o seguinte:

Teorema 0.1 *Assuma que* (a_1) *e* $(f_1) - (f_4)$ *valem. Então, existe* $\lambda_0 > 0$ *com a seguinte propriedade: para qualquer subconjunto não vazio* Υ *de* $\{1, ..., k\}$ *e* $\lambda \geq \lambda_0$*, o problema* (P_λ) *tem uma solução positiva* u_λ*. Além disso, se fixarmos o subsconjunto* Υ*, então para qualquer sequência* $\lambda_n \to \infty$ *podemos extrair uma subsequência* (λ_{n_i}) *tal que* $(u_{\lambda_{n_i}})$ *converge fortemente em* $H^1(\mathbb{R}^3)$ *para a função* u*, tal que,* $u = 0$ *no complementar de* $\Omega_\Upsilon = \cup_{j\in\Upsilon}\Omega_j$*, e* $u_{|\Omega_\Upsilon}$ *é solução de energia mínima para o problema não local*

$$(P)_{\infty,\Upsilon} \begin{cases} -\Delta u + u + \phi_u u = f(u) \ \text{em } \Omega_\Upsilon, \\ u(x) > 0, \ \forall x \in \Omega_j \ \text{e } \forall j \in \Upsilon, \\ u \in H_0^1(\Omega_\Upsilon). \end{cases}$$

Nosso trabalho está estruturado da seguinte forma:

No **Capítulo 1** nosso principal resultado será mostrar a existência de solução não trivial para o problema $(P)_{\infty,\Upsilon}$, para isso iremos introduzir a variedade Nehari $\mathcal{N}$ e um subconjunto $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Mostraremos algumas relações entre o funcional associado a $(P)_{\infty,\Upsilon}$ e os conjuntos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$. Por fim, o funcional associado a $(P)_{\infty,\Upsilon}$ será minimizado em $\mathcal{M}$. Usaremos o teorema da função implícita para provar que o ponto crítico de tal funcional restrito a $\mathcal{M}$ é também ponto crítico em todo o conjunto $H_0^1(\Omega_\Upsilon)$.

No **Capítulo 2** faremos um truncamento sobre a não linearidade f e introduziremos assim o problema auxiliar (A_λ). Veremos também que o funcional associado a (A_λ) satisfaz a condição Palais-Smale.

No **Capítulo 3** usaremos o processo de iteração de Moser para mostar a limitação das soluções de (A_λ) em $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon$.

No **Capítulo 4** introduziremos o conceito de sequência $(PS)_\infty$ e condição $(PS)_\infty$ e detalharemos importantes propriedades dessa classe de sequências.

No **Capítulo 5** definiremos um valor minimax para o funcional associado ao problema auxiliar e estudaremos algumas relações desse valor.

No **Capítulo 6** faremos pequenas adaptações no lema de deformação e então demonstraremos o Teorema 0.1.

Capítulo 1

O Problema $(P)_{\infty,\Upsilon}$

Neste capítulo estudaremos o problema $(P)_{\infty,\Upsilon}$ dado por

$$-\Delta u + u + \phi_u u = f(u) \text{ em } \Omega_\Upsilon.$$

Associaremos a tal problema o funcional $I_\Upsilon : H_0^1(\Omega_\Upsilon) \to \mathbb{R}$, onde

$$I_\Upsilon(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\Upsilon}(|\nabla u|^2 + |u|^2)dx + \frac{1}{4}\int_{\Omega_\Upsilon}\phi_u u^2 dx - \int_{\Omega_\Upsilon}F(u)dx$$

e

$$I'_\Upsilon(u)v = \int_{\Omega_\Upsilon}\nabla u\nabla v dx + \int_{\Omega_\Upsilon}uv dx + \int_{\Omega_\Upsilon}\phi_u uv dx - \int_{\Omega_\Upsilon}f(u)v dx, \forall u, v \in H_0^1(\Omega_\Upsilon).$$

Será introduzido também a variedade de Nehari, examinaremos algumas propriedades interessantes do funcional associado ao problema restrito à um subconjunto da variedade de Nehari. Por fim, mostraremos que o problema estudado possui uma solução de energia mínima. Iremos considerar, sem perda de generalidade, $\Upsilon = \{1, 2\}$. Os conjuntos $\Omega, \mathcal{N}, \mathcal{M}$ denotarão os conjuntos Ω_Υ, $\mathcal{N}_\Upsilon$, $\mathcal{M}_\Upsilon$ respectivamente, onde:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset,$$

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}\colon\ I'_\Upsilon(u)u = 0\}$$

e

$$\mathcal{M} = \{u \in \mathcal{N} \colon\ I'_{\Upsilon}(u)u_1 = I'_{\Upsilon}(u)u_2 = 0 \text{ e } u_1, u_2 \neq 0\}$$

com $u_j = u_{|\Omega_j}$, $j = 1, 2$.

Neste capítulo, denotaremos I_{Υ} simplesmente por I.

Primeiramente, nossa meta será provar a existência de um ponto crítico de I restrito a $\mathcal{M}$.

1.1 Lemas técnicos

No que segue, iremos denotar por $||.||, ||.||_1, ||.||_2$ as normas de $H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega_1), H_0^1(\Omega_2)$ respectivamente, dadas por

$$||u|| = \left(\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$||u||_1 = \left(\int_{\Omega_1} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$||u||_2 = \left(\int_{\Omega_2} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

O próximo lema irá nos garantir que o conjunto $\mathcal{M}$ é não vazio.

Lema 1.1 *Seja $v \in H_0^1(\Omega)$ com $v_j = v_{|\Omega_j} \neq 0$ para $j = 1, 2$. Então existem $t, s > 0$ tais que*

$$I'(tv_1 + sv_2)(tv_1) = 0 \text{ e } I'(tv_1 + sv_2)(sv_2) = 0,$$

onde $tv_1 \in \Omega_1$ e $sv_2 \in \Omega_2$.

Demonstração. Consideremos a função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$H(s, t) = (I'(tv_1 + sv_2)(tv_1), I'(tv_1 + sv_2)(sv_2)).$$

Como $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ (ver Apêndice D), temos que H está bem definida e é contínua. Além disso, definindo $H_1(s,t) = I'(tv_1 + sv_2)(tv_1)$ e $H_2(s,t) = I'(tv_1 + sv_2)(sv_2)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
H_1(s,t) &= \int_\Omega \left[\nabla(tv_1 + sv_2)\nabla(tv_1)dx + (tv_1 + sv_2)(tv_1)\right] dx \\
&\quad + \int_\Omega \phi_{tv_1+sv_2}(tv_1 + sv_2)(tv_1)dx - \int_\Omega f(tv_1 + sv_2)(tv_1)dx
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
H_2(s,t) &= \int_\Omega \left[\nabla(tv_1 + sv_2)\nabla(sv_2)dx + (tv_1 + sv_2)(sv_2)\right] dx \\
&\quad + \int_\Omega \phi_{tv_1+sv_2}(tv_1 + sv_2)(sv_2)dx - \int_\Omega f(tv_1 + sv_2)(sv_2)dx.
\end{aligned}
$$

Observe que o suporte de $v_1 = v_{|\Omega_1}$ é disjunto do suporte de $v_2 = v_{|\Omega_2}$ e $\phi_u \geq 0$. Então tem-se que

$$
\begin{aligned}
H_1(s,t) &= \int_{\Omega_1} (|\nabla tv_1|^2 + |tv_1|^2)dx + \int_{\Omega_1} \phi_{tv_1+sv_2}|tv_1|^2dx - \int_{\Omega_1} f(tv_1)(tv_1)dx \\
&\geq \int_{\Omega_1} (|\nabla tv_1|^2 + |tv_1|^2)dx - \int_{\Omega_1} f(tv_1)(tv_1)dx \\
&= t^2 \left(\int_{\Omega_1} (|\nabla v_1|^2 + |v_1|^2)dx - \int_{\Omega_1} \frac{f(tv_1)}{tv_1}|v_1|^2dx \right). \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

Da condição (f_1) existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \leq \delta$ tem que a expressão (1.1) é maior ou igual a zero; ao substituir Ω_1 por Ω_2 e procedendo de maneira análoga, concluímos que

$$
H_2(s,t) \geq s^2 \left(\int_{\Omega_2} (|\nabla v_2|^2 + |v_2|^2)dx - \int_{\Omega_2} \frac{f(sv_2)}{sv_2}|v_2|^2dx \right) \geq 0
$$

para s suficientemente pequeno.

Agora, da observação feita após a condição (f_3),

$$
H_1(s,t) =
$$

$$
\int_{\Omega_1} (|\nabla tv_1|^2 + |tv_1|^2)dx + \int_{\Omega_1} t^4\phi_{v_1}|v_1|^2dx + \int_{\Omega_1} t^2\phi_{sv_2}|v_1|^2 - \int_{\Omega_1} f(tv_1)(tv_1)dx
$$

$$\leq \int_{\Omega_1} (|\nabla tv_1|^2 + |tv_1|^2)dx + \int_{\Omega_1} t^4\phi_{v_1}|v_1|^2dx + \int_{\Omega_1} t^2\phi_{sv_2}|v_1|^2 - K\int_{\Omega_1}(tv_1)^\theta dx =$$

$$t^4\left(\int_{\Omega_1}\frac{|\nabla v_1|^2 + |v_1|^2}{t^2}dx + \int_{\Omega_1}\phi_{v_1}|v_1|^2dx + \frac{1}{t^2}\int_{\Omega_1}\phi_{sv_2}|v_1|^2 - Kt^{\theta-4}\int_{\Omega_1}v_1^\theta dx\right), \tag{1.2}$$

com $\theta > 4$.

Então existe $\delta' > 0$ tal que para todo $t \geq \delta'$ tem-se que a expressão (1.2) é menor ou igual a zero. Novamente, usando raciocínios análogos e fazendo as mudanças necessárias, a mesma estimativa valerá para as integrais sobre Ω_2.

De (1.1) e (1.2) juntamente com as observações feitas acima e com o fato de que $\Omega_\Upsilon = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, tomando $r < \delta$ e $R > \delta'$, concluímos que

$$H_1(r,s) = I'(rv_1 + sv_2)(rv_1),\ H_2(t,r) = I'(tv_1 + rv_2)(rv_2) \geq 0, \forall t,s \in [r,R]$$

$$H_1(R,s) = I'(Rv_1 + sv_2)(Rv_1),\ H_2(t,R) = I'(tv_1 + Rv_2)(Rv_2) \leq 0, \forall t,s \in [r,R]$$

Usando o Teorema de Miranda (Teorema B.1) concluímos que existem $t, s > 0$ tais que $H(s,t) = (0,0)$, chegamos assim ao resultado desejado.

■

O lema a seguir nos garante a coercividade do funcional I restrito a $\mathcal{N}$, isto é, $I(u) \to \infty$ quando $||u|| \to \infty$. E também mostra que as sequências em $\mathcal{M}$ não podem convergir pra zero.

Lema 1.2 *Existe $\rho > 0$ tal que:*

(i) $I(u) \geq \dfrac{||u||^2}{4}$ *e* $||u|| \geq \rho$, $\forall u \in \mathcal{N}$*;*

(ii) $||w_j||_j \geq \rho$, $\forall w \in \mathcal{M}$ *e* $j = 1, 2$, *onde* $w_j = w_{|\Omega_j}$.

Demonstração.

(i) Desde que $u \in \mathcal{N}$ tem-se $I'(u)u = 0$. Então para qualquer $u \in \mathcal{N}$

$$4I(u) = 4I(u) - I'(u)u$$

$$= \left(2\int_\Omega (|\nabla u|^2+|u|^2)dx + \int_\Omega \phi_u u^2 dx - 4\int_\Omega F(u)dx\right)$$
$$-\left(\int_\Omega (|\nabla u|^2+|u|^2)dx + \int_\Omega \phi_u u^2 dx - \int_\Omega f(u)u dx\right)$$
$$= ||u||^2 + \int_\Omega [uf(u) - 4F(u)]dx.$$

A condição (f_3) nos garante que $uf(u) - 4F(u) \geq 0$, logo

$$4I(u) = ||u||^2 + \int_\Omega [uf(u) - 4F(u)]dx \geq ||u||^2,$$

implicando que

$$I(u) \geq \frac{||u||^2}{4}.$$

De (f_1) dado $\varepsilon > 0$, existe δ_1 tal que $|s| < \delta_1$ implica que $\left|\frac{f(s)}{s}\right| < \varepsilon \Rightarrow |f(s)| < \varepsilon|s| \Rightarrow f(s)s < \varepsilon|s|^2$, esta última implicação se justifica pelo fato de f ser uma função não negativa.

De (f_3), dado $\varepsilon_2 > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|s| > \delta_2 \Rightarrow |\frac{f(s)}{s^5}| < \varepsilon_2 \Rightarrow f(s)s < \varepsilon_2 s^6$.

Da continuidade de f, temos que f é limitada em $[\delta_1, \delta_2]$, pois a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é compacta e portanto limitada.

Dessas observações, pode-se afirmar que existe $C > 0$ tal que

$$f(s)s \leq \frac{\lambda_1 s^2}{2} + Cs^6, \text{ para todo } s \in \mathbb{R},$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, isto é, o inverso de λ_1 é a menor constante que verifica a desigualdade de Poincaré (Teorema B.20). Como $u \in \mathcal{N}$, tem-se

$$||u||^2 < ||u||^2 + \int_\Omega \phi_u u^2 dx = \int_\Omega uf(u)dx \leq \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega u^2 dx + C\int_\Omega u^6 dx.$$

A desigualdade de Poincaré nos diz que

$$\int_\Omega |u|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Desta desigualdade e da imersão contínua de Sobolev,

$$||u||^2 \leq \frac{1}{2}||u||^2 + \hat{C}||u||^6,$$

donde segue que,

$$\frac{1}{2}||u||^2 < \hat{C}||u||^6,$$

implicando em

$$||u|| > \left(\frac{1}{2\hat{C}}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Fazendo $\rho = \left(\frac{1}{2\hat{C}}\right)^{\frac{1}{4}}$ chegamos ao resultado desejado em (i).

(ii) Ora, como $I'(w)w_1 = I'(w)w_2 = 0, \forall w \in \mathcal{M}$, então

$$I'(w)w_1 = \int_{\Omega_1} (|\nabla w_1|^2 + |w_1|^2)dx + \int_{\Omega_1} \phi_{w_1+w_2} w_1^2 dx - \int_{\Omega_1} f(w_1)w_1 dx,$$

isto é,

$$I'(w)w_1 = I'(w_1)w_1 + \int_{\Omega_1} w_1^2 \left(\frac{1}{3\omega_3} \int_{\Omega_2} \frac{w_2^2(y)}{|x-y|} dy\right) dx = 0.$$

Donde se conclui que $I'(w_j)w_j < 0$ para $j = 1, 2$. Assim,

$$||w_j||_j^2 < ||w_j||_j^2 + \int_{\Omega_j} \phi_{w_j} w_j^2 dx < \int_{\Omega_j} f(w_j)w_j dx.$$

Usando os mesmo argumentos de (i) concluímos que $||w_j||_j \geq \rho$. ■

Lema 1.3 *Se (w_n) é uma sequência limitada em $\mathcal{M}$ e $p \in (2, 6)$, temos*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega_j} |w_{n,j}|^p dx > 0, \text{ para } j = 1, 2,$$

onde $w_{n,j} = w_{n|\Omega_j}$.

Demonstração. Argumentando como no lema anterior, dado $\varepsilon > 0$ existe $C > 0$ tal que

$$f(s)s \leq \varepsilon\lambda_1 s^2 + C|s|^p + \varepsilon s^6, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Desde que $w_n \in \mathcal{M}$, novamente pelo lema anterior

$$\rho^2 \leq ||w_{n,j}||_j^2 < \int_{\Omega_j} w_{n,j} f(w_{n,j}) dx \leq \varepsilon \lambda_1 \int_{\Omega_j} w_{n,j}^2 dx + C\lambda_1 \int_{\Omega_j} |w_{n,j}|^p dx,$$

isto é,

$$\rho^2 \leq \varepsilon \left(\lambda_1 \int_{\Omega_j} w_{n,j}^2 dx + \int_{\Omega_j} w_{n,j}^6 dx \right) + C \int_{\Omega_j} |w_{n,j}|^p dx.$$

Usando a limitação de (w_n), existe $C_1 > 0$ tal que

$$\rho^2 \leq \varepsilon C_1 + C \int_{\Omega_j} |w_{n,j}|^p dx.$$

Fixando $\varepsilon = \frac{p^2}{2C_1}$, temos

$$\int_{\Omega_j} |w_{n,j}|^p dx \geq \frac{\rho^2}{2C},$$

passando ao limite

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega_j} |w_{n,j}|^p dx \geq \frac{\rho^2}{2C} > 0.$$

■

1.2 Existência de solução de energia mínima para $(P)_{\infty,\Upsilon}$

Agora estamos em condições de demonstrar o principal teorema deste capítulo. Tal teorema garante a existência de solução para o problema $(P)_{\infty,\Upsilon}$. A ideia principal é provar a existência de um ponto crítico para o funcional I restrito à $\mathcal{M}$ e usar o Teorema da função implícita para mostrar que tal ponto é de fato ponto crítico de I em todo conjunto Ω_Υ.

Teorema 1.1 *Se as hipóteses* $(f_1), (f_2), (f_3)$ *e* (f_4) *são satisfeitas, então a equação* $(P)_{\infty,\Upsilon}$ *possui uma solução de energia mínima no conjunto* $\mathcal{M}$.

Demonstração. No que segue, denotaremos por c_0 o ínfimo de I em $\mathcal{M}$, isto é

$$c_0 = \inf_{v \in \mathcal{M}} I(v).$$

Da parte (i) do Lema 1.2 concluímos que $c_0 > 0$ e do Lema 1.1, sabemos que $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Então existe uma sequência (w_n) em $\mathcal{M}$ satisfazendo

$$\lim_{n \to \infty} I(w_n) = c_0.$$

Da coercividade do funcional restrito a $\mathcal{M}$, podemos afirmar que (w_n) é uma sequência limitada. Então dos Teoremas B.16 , B.3 e da imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ com $p \in [1, 2^*)$, a menos de subsequência, existe $w \in H_0^1(\Omega)$, verificando

$$w_n \rightharpoonup w \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

$$w_n \to w \text{ em } L^p(\Omega), \forall p \in [1, 2^*),$$

$$w_n(x) \to w(x) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Consequentemente, usando o fato de que $w_{n,1}$ e $w_{n,2}$ têm suportes disjuntos

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega_j} |w_{n,j}|^p dx = \int_{\Omega_j} |w_j|^p dx, \text{ para } j = 1, 2.$$

Agora, de (f_2)

$$\lim_{s \to \infty} \frac{f(s)}{s^5} = 0 \text{ e } \lim_{s \to \infty} \frac{F(s)}{\varepsilon s^6} = 0, \text{ para } j = 1, 2. \tag{1.3}$$

Desde que $(w_{n,j})_n$ é limitada em $H_0^1(\Omega_j)$, da imersão contínua de Sobolev tem-se que

$$\sup_n \int_{\Omega_j} w_{n,j}^6 < \infty. \tag{1.4}$$

Da continuidade da funções f e F, temos

$$f(w_{n,j}(x)) \to f(w_j(x)) \text{ q.t.p em } \Omega_j \text{ e } F(w_{n,j}(x)) \to F(w_j(x)) \text{ q.t.p em } \Omega_j. \tag{1.5}$$

Dos limites obtidos (1.3),(1.4) e (1.5) temos que as funções f e F estão nas condições do Lema da Compacidade de Strauss (Teorema B.2), portanto

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_j} w_{n,j}f(w_{n,j})dx = \int_{\Omega_j} w_j f(w_j)dx, \text{ para } j = 1,2$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_j} F(w_{n,j}) = \int_{\Omega_j} F(w_j)dx, \text{ para } j = 1,2.$$

Segue do Lema 1.3 que $w_j \neq 0$, $j = 1,2$. Então pelo Lema 1.1, existem $t, s > 0$ verificando

$$I'(tw_1 + sw_2)(tw_1) = 0 \text{ e } I'(tw_1 + sw_2)(sw_2) = 0.$$

Vamos mostrar que $t, s \leq 1$. Desde que $I'(w_n)w_{n,j} = 0$, pois $w_n \in \mathcal{M}$, tem-se

$$||w_{n,1}||_1^2 + \int_{\Omega_1} \phi_{w_{n,1}} w_{n,1}^2 dx + \int_{\Omega_1} \phi_{w_{n,2}} w_{n,1}^2 dx = \int_{\Omega_1} f(w_{n,1})w_{n,1}dx$$

e

$$||w_{n,2}||_2^2 + \int_{\Omega_2} \phi_{w_{n,2}} w_{n,2}^2 dx + \int_{\Omega_2} \phi_{w_{n,1}} w_{n,2}^2 dx = \int_{\Omega_2} f(w_{n,2})w_{n,2}dx.$$

Tomando $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(||w_{n,1}||_1^2 + \int_{\Omega_1} \phi_{w_{n,1}} w_{n,1}^2 dx + \int_{\Omega_1} \phi_{w_{n,2}} w_{n,1}^2 dx\right) = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_1} f(w_{n,1})w_{n,1}dx. \tag{1.6}$$

Usando (v) do lema A.1, obtemos em (1.6) a seguinte estimativa

$$\lim_{n\to\infty} ||w_{n,1}||_1^2 + \int_{\Omega_1} \phi_{w_1} w_1^2 dx + \int_{\Omega_1} \phi_{w_2} w_1^2 dx \leq \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_1} f(w_{n,1})w_{n,1}dx. \tag{1.7}$$

Como a norma é fracamente semicontínua inferiormente, ou seja, $||w_1|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||w_{n,1}||$, segue de (1.7) que

$$||w_1||^2 + \int_{\Omega_1} \phi_{w_1} w_1^2 dx + \int_{\Omega_1} \phi_{w_2} w_1^2 dx \leq \int_{\Omega_1} f(w_1)w_1 dx$$

e com o mesmo raciocínio

$$||w_2||^2 + \int_{\Omega_2} \phi_{w_2} w_2^2 dx + \int_{\Omega_2} \phi_{w_1} w_2^2 dx \leq \int_{\Omega_2} f(w_2)w_2 dx. \tag{1.8}$$

Relembre que

$$I'(tw_1 + sw_2)(tw_1) = I'(tw_1 + sw_2)(sw_2) = 0,$$

ou seja,

$$t^2||w_1||_1^2 + t^4 \int_{\Omega_1} \phi_{w_1} w_1^2 dx + t^2 s^2 \int_{\Omega_1} \phi_{w_2} w_1^2 dx = \int_{\Omega_1} f(tw_1) tw_1 dx$$

e

$$s^2||w_2||_2^2 + s^4 \int_{\Omega_2} \phi_{w_2} w_2^2 dx + t^2 s^2 \int_{\Omega_2} \phi_{w_1} w_2^2 dx = \int_{\Omega_1} f(sw_2) sw_2 dx.$$

Sem perda de generalidade supomos $s \leq t$. Da equação anterior, obtemos a estimativa

$$s^2||w_2||_2^2 + s^4 \int_{\Omega_2} \phi_{w_2} w_2^2 dx + s^4 \int_{\Omega_2} \phi_{w_1} w_2^2 dx \geq \int_{\Omega_1} f(sw_2) sw_2 dx.$$

Multiplicando ambos os membros desta última desigualdade por $\dfrac{1}{s^4}$,

$$\frac{||w_2||_2^2}{s^2} + \int_{\Omega_2} \phi_{w_2} w_2^2 dx + \int_{\Omega_2} \phi_{w_1} w_2^2 dx = \int_{\Omega_1} \frac{f(sw_2)}{s^4} sw_2 dx$$

e subtraindo (1.8) em ambos os lados da desigualdade, tem-se

$$\frac{||w_2||_2^2}{s^2} - ||w_2||_2^2 \leq \int_{\Omega_2} \left(\frac{f(sw_2)sw_2}{(sw_2)^4} - \frac{f(w_2)w_2}{w_2^4} \right) w_2^4 dx.$$

Então se $s > 1$, o lado esquerdo da inequação acima é negativo, mas por (f_4) o lado direito é positivo. Um absurdo, logo temos que ter $s \leq 1$ e então $t \leq s \leq 1$.

Nosso objetivo agora é mostrar que $I(tw_1 + sw_2) = c_0$. Pelo Lema 1.1 $tw_1 + sw_2 \in \mathcal{M}$, portanto

$$c_0 \leq I(tw_1 + sw_2) = I(tw_1 + sw_2) - \frac{1}{4} I'(tw_1 + sw_2)(tw_1 + sw_2). \tag{1.9}$$

Agora, note que

$$I(tw_1 + sw_2) = ||tw_1||_1^2 + \frac{1}{4} \left(\int_{\Omega_1} \phi_{tw_1} (tw_1)^2 dx + \int_{\Omega_1} \phi_{sw_2} (tw_1)^2 dx \right) - \int_{\Omega_1} F(tw_1) dx$$
$$+ ||sw_2||_2^2 + \frac{1}{4} \left(\int_{\Omega_2} \phi_{sw_2} (sw_2)^2 dx + \int_{\Omega_2} \phi_{tw_1} (sw_2)^2 dx \right) - \int_{\Omega_2} F(sw_2) dx,$$

donde segue que

$$I(tw_1 + sw_2) = I(tw_1) + I(sw_2) + \frac{1}{4}\left(\int_{\Omega_1} \phi_{sw_2}(tw_1)^2 dx + \int_{\Omega_2} \phi_{tw_1}(sw_2)^2 dx\right).$$

Do mesmo modo

$$\begin{aligned} I'(tw_1 + sw_2)(tw_1 + sw_2) &= I'(tw_1)(tw_1) + I'(sw_2)(sw_2) \\ &+ \int_{\Omega_1} \phi_{sw_2}(tw_1)^2 dx + \int_{\Omega_2} \phi_{tw_1}(sw_2)^2 dx \end{aligned}$$

Assim, em (1.9) teremos

$$c_0 \leq \left(I(tw_1) - \frac{1}{4}I'(tw_1)(tw_1)\right) + \left(I(sw_2) - \frac{1}{4}I'(sw_2)(sw_2)\right),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} c_0 \leq &\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)(||tw_1||_1^2 + ||sw_2||_2^2) + \int_{\Omega_1} \left(\frac{f(tw_1)(tw_1)}{4} - F(tw_1)\right) dx\right] \\ &+ \left[\int_{\Omega_2} \left(\frac{f(sw_2)(sw_2)}{4} - F(sw_2)\right) dx\right]. \end{aligned}$$

Utilizando a condição (f_4) é fácil ver que a função $\frac{1}{4}f(t)t - F(t)$ tem derivada positiva, ou seja, é crescente. Lembrando que $s, t \leq 1$ obtemos

$$\begin{aligned} c_0 \leq &\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)||w_1||_1^2 + \int_{\Omega_1} \left(\frac{f(w_1)(w_1)}{4} - F(w_1)\right) dx \\ &+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)||w_2||_2^2 + \int_{\Omega_2} \left(\frac{f(w_2)(w_2)}{4} - F(w_2)\right) dx. \end{aligned}$$

Usando novamente as propriedades de convergência fraca da norma e as convergências descritas no início da demonstração, vemos que

$$\begin{aligned} c_0 \leq &\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)(||w_{n,1}||_1^2 + ||w_{n,2}||_2^2) \\ &+ \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \left(\frac{f(w_{n,1} + w_{n,2})(w_1 + w_2)}{4} - F(w_{n,1} + w_{n,2})\right) dx, \end{aligned}$$

isto é,

$$c_0 \leq I(tw_1 + sw_2) \leq \liminf_{n\to\infty}\left(I(w_n) - \frac{1}{4}I'(w_n)w_n\right).$$

Como $w_n \in \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$

$$c_0 \leq I(tw_1 + sw_2) \leq \liminf_{n\to\infty} \left(I(w_n) - \frac{1}{4} I'(w_n)w_n \right) \leq \lim_{n\to\infty} I(w_n) = c_0.$$

Portanto,

$$c_0 = I(tw_1 + sw_2).$$

Até o momento provamos que existe $w_0 = tw_1 + sw_2 \in \mathcal{M}$, tal que $I(w_0) = c_0$. No que segue, denotaremos w_0 simplesmente por w. Para completar a prova do teorema precisamos mostrar que w é um ponto crítico para o funcional I. Para mostrar isso, vamos considerar para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ funções $Q^i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, dadas por

$$Q^1(r,z,l) = \int_{\Omega_1} |\nabla(w_1 + r\varphi_1 + zw_1)|^2 dx + \int_{\Omega_1} \phi_{(w+r\varphi+zw_1+lw_2)}(w_1 + r\varphi_1 + zw_1)^2 dx$$
$$- \int_{\Omega_1} f(w_1 + r\varphi_1 + zw_1)(w_1 + r\varphi_1 + zw_1)^2 dx$$

e

$$Q^2(r,z,l) = \int_{\Omega_2} |\nabla(w_2 + r\varphi_2 + lw_2)|^2 dx + \int_{\Omega_2} \phi_{(w+r\varphi+zw_1+lw_2)}(w_2 + r\varphi_2 + lw_2)^2 dx$$
$$- \int_{\Omega_2} f(w_2 + r\varphi_2 + lw_2)(w_2 + r\varphi_2 + lw_2)^2 dx.$$

Vamos calcular a derivada $\frac{\partial Q^1}{\partial z}(0,0,0)$. Veja que as integrais não dependem da variável z. Então, podemos derivar todas as parcelas sob o sinal da integral e usando a regra da cadeia segue diretamente que

$$\frac{\partial Q^1}{\partial z}(0,0,0) = 2\int_{\Omega_1} |\nabla w_1|^2 dx + 4\int_{\Omega_1} \phi_w w_1^2 dx - \int_{\Omega_1} (f'(w_1)w_1^2 + f(w_1)w_1) dx. \tag{1.10}$$

Como $I'(w)w_1 = 0$, podemos escrever

$$\int_{\Omega_1} f(w_1)w_1 dx = \int_{\Omega_1} |\nabla w_1|^2 dx + \int_{\Omega_1} \phi_w w_1^2 dx. \tag{1.11}$$

Substituindo (1.11) em (1.10), obtemos

$$\frac{\partial Q^1}{\partial z}(0,0,0) = \int_{\Omega_1} (f(w_1)w_1 - f'(w_1)w_1^2)dx + 2\int_{\Omega_1} \phi_w w_1^2 dx.$$

Novamente por (f_4),

$$\frac{\partial Q^1}{\partial z}(0,0,0) = \int_{\Omega_1} (f(w_1)w_1 - f'(w_1)w_1^2)dx + 2\int_{\Omega_1} \phi_w w_1^2 dx$$

$$\leq \int_{\Omega_1} (f(w_1)w_1 - 3f(w_1)w_1)dx + 2\int_{\Omega_1} \phi_w w_1^2 = -2\left(\int_{\Omega_1} f(w_1)w_1 dx - \int_{\Omega_1} \phi_w w_1^2 dx\right)$$

Logo, por (1.11)

$$\frac{\partial Q^1}{\partial z}(0,0,0) \leq -2||w_1||_1^2 < 0.$$

De maneira totalmente análoga, obtemos

$$\frac{\partial Q^2}{\partial l}(0,0,0) \leq -2||w_2||_2^2 < 0.$$

Então, aplicando o Teorema da Função Implícita (Teorema B.10), existem funções $z(r), l(r)$ de classe C^1 definidas em algum intervalo $(-\delta,\delta), \delta > 0$ tal que $z(0) = l(0) = 0$ e

$$Q^i(r, z(r), l(r)) = 0,\ r \in (-\delta,\delta), i = 1,2.$$

Isso mostra que para todo $r \in (-\delta,\delta)$

$$v(r) = w + r\varphi + z(r)w_1 + l(r)w_2 \in \mathcal{M}.$$

Desde que

$$I(w) = c_0 = \inf_{v\in\mathcal{M}} I(v),$$

temos que $I(v(r)) \geq I(w)$, $\forall r \in (-\delta,\delta)$,isto é,

$$I(w + r\varphi + z(r)w_1 + l(r)w_2) \geq I(w),\ \forall r \in (-\delta,\delta),$$

implicando que

$$\frac{I(w + r\varphi + z(r)w_1 + l(r)w_2)}{r} - \frac{I(w)}{r} \geq 0,\ \forall r \in (0,\delta).$$

Fazendo $r \to 0$, temos

$$\lim_{r\to 0} \frac{I\left(w + r\left(\varphi + \frac{z(r)}{r}w_1 + \frac{l(r)}{r}w_2\right)\right) - I(w)}{r} \geq 0.$$

Da definição de derivada e como $z(0) = l(0) = 0$, o limite acima nos dá

$$I'(w)(\varphi + z'(0)w_1 + l'(0)w_2) \geq 0,$$

usando a linearidade da aplicação derivada

$$I'(w)(\varphi) + z'(0)I'(w)(w_1) + l'(0)I'(w)(w_2) \geq 0.$$

Novamente usando o fato de que $I'(w)w_1 = I'(w)w_2 = 0$, a desigualdade acima nos diz que

$$I'(w)\varphi \geq 0, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então se tomarmos φ como uma função negativa, concluiremos que

$$I'(w)\varphi = 0, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Mostrando que w é de fato um ponto crítico para I.

■

Capítulo 2

O Problema Auxiliar

Neste capítulo iremos associar ao problema:

$$-\Delta u + (\lambda a(x) + 1)u + \phi_u u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^3, \qquad (P_\lambda)$$

um problema auxiliar, de modo que, em dadas condições uma solução do problema auxiliar seja também uma solução do problema (P_λ). A origem dessas ideias podem ser encontradas no trabalho [18] de Del Pino e Felmer.

Recordemos, primeiramente, que o funcional $I_\lambda : E_\lambda \to \mathbb{R}$ associado ao problema $(P)_\lambda$ é dado por:

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + 1)u^2)dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(u)dx,$$

onde $E_\lambda = (E, ||.||_\lambda)$ com

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3); \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^2 dx < \infty \right\}$$

e

$$||u||_\lambda = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + 1)u^2)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nossa próxima proposição mostrará algumas propriedades básicas do espaço E_λ que serão amplamente usadas em todo o trabalho.

Proposição 2.1 *Valem as seguintes afirmações:*

(i) E_λ está imerso continuamente no espaço $H^1(\mathbb{R}^3)$;

(ii) E_λ está imerso compactamente em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$, para $p \in [1,6)$;

(iii) E_λ é um espaço de Hilbert.

Demonstração.

(i) Como $\lambda \geq 0$ segue-se diretamente da definição de $||.||_\lambda$ que $||u||_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leq ||u||_\lambda$, então $E_\lambda \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^3)$ está imerso continuamente.

(ii) Para mostrar que o operador $i : (E_\lambda, ||.||_\lambda) \to L^p(\mathbb{R}^3)$ para $p \in [1,6)$ é compacto, é suficiente provar que dado $U \subset E_\lambda$ limitado, o conjunto $i(U)$ é precompacto em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ para $p \in [1,6)$. Ora, mas dado U limitado em $(E_\lambda, ||.||_\lambda)$, pelo item anterior, U será limitado em $H^1(\mathbb{R}^3)$, mas $H^1(\mathbb{R}^3)$ está imerso compactamente em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ para $p \in [1,6)$ e então $i(U)$ é precompacto em $L^p(\mathbb{R}^3)$ para $p \in [1,6)$.

(iii) Seja (u_n) uma sequência convergindo para u em E_λ, então

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u_n - u|^2 dx < \infty,$$

donde segue diretamente da desigualdade triangular que que

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^2 dx < \infty.$$

Assim, $u \in E_\lambda$, logo E_λ é um subespaço fechado de $H^1(\mathbb{R}^3)$ e portanto E_λ é um espaço de Hilbert.

■

Tomando um aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$, da relação:

$$||u||^2_{\lambda,\mathcal{O}} \geq |u|^2_{2,\mathcal{O}},$$

para todo $u \in E_\lambda$ com $\lambda \geq 0$, fixado $\delta \in (0,1)$, existe $\nu > 0$, tal que:

$$||u||^2_{\lambda,\mathcal{O}} \geq \left(\frac{\nu}{1-\delta}\right) |u|^2_{2,\mathcal{O}},$$

ou seja,

$$||u||^2_{\lambda,\mathcal{O}} - \nu|u|^2_{2,\mathcal{O}} \geq \delta||u||^2_{\lambda,\mathcal{O}}, \tag{2.1}$$

onde:

$$||u||_{\lambda,\mathcal{O}} = \left(\int_{\mathcal{O}} (|\nabla u|^2 + (\lambda a(x)+1)|u|^2) dx)\right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$|u|_{2,\mathcal{O}} = \left(\int_{\mathcal{O}} |u|^2 dx)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da hipótese (f_1) dado $\varepsilon_1 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo $|s| < \delta_1$ tem-se $|f(s)| < \varepsilon_1|s|$ e da hipótese (f_2) dado $\varepsilon_2 > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo $|s| > \delta_2$ tem-se $|f(s)| < \varepsilon_2|s|^5$. Então, para $|s| < \delta_1$ e $|s| > \delta_2$:

$$|f(s)| < \varepsilon_1|s| + \varepsilon_2|s|^5.$$

Desde que $f : [\delta_1, \delta_2] \to \mathbb{R}$ é contínua, f possui um máximo, então existe $C_{\varepsilon_2} > \varepsilon_2$, onde $|f(s)| < C_{\varepsilon_2}|s|^5$ para $\delta_1 \leq s \leq \delta_2$. Assim, temos a seguinte condição de crescimento sobre a f, a qual chamamos de quasecrítico.

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s| + C_{\varepsilon_2}|s|^5, \forall s \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Consequentemente:

$$|F(s)| < \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + \frac{C_{\varepsilon_2}}{5}|s|^6. \tag{2.3}$$

A próxima proposição nos garantirá a existência de um número que será importante posteriormente na construção de uma função truncada.

Proposição 2.2 *Para $\nu > 0$ fixado em (2.1), existe um único $h \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$\frac{f(h)}{h} = \nu.$$

Demonstração. Fixado $s_1 \in \mathbb{R}$ temos $\dfrac{f(s_1)}{s_1^3} = k$, tomando $s > s_1$ tal que $s^2 > \dfrac{\nu}{k}$ da propriedade (f_4) temos:

$$\frac{f(s)}{s^3} > \frac{f(s_1)}{s_1^3} = k \Rightarrow \frac{f(s)}{s} > \nu.$$

Da condição (f_1), $\dfrac{f(s)}{s} < \nu$ para um s suficiente pequeno, então pelo Teorema do Valor Intermediário (Teorema B.11), existe pelo menos um $h \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{f(h)}{h} = \nu$. Ainda da condição (f_4), tem-se

$$0 < f'(s)s - 3f(s) < f'(s)s - f(s),$$

o que implica que a derivada de $\dfrac{f(s)}{s}$ é positiva, então $\frac{f(s)}{s}$ é crescente, e portanto existe um único h que satisfaz $\dfrac{f(h)}{h} = \nu$.

■

Agora estamos em condições de definir a seguinte função truncamento $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} f(s), & \text{se } s \leq h, \\ \nu s, & \text{se } s \geq h. \end{cases}$$

Segue da monotonicidade de $\frac{f(s)}{s}$ que:

$$\tilde{f}(s) \leq \nu|s|, \forall s \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{f}(s)s \leq \nu|s|^2, \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

$$\tilde{F}(s) \leq \frac{\nu}{2}|s|^2, \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

onde $\tilde{F}(s) = \int_0^t \tilde{f}(t)dt$.

Agora, desde que $\Omega = int(a^{-1}(\{0\}))$ é formado por k componentes conexas $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_k$ com $\mathrm{dist}(\Omega_i, \Omega_j) > 0, i \neq j$ então para cada $j \in \{1, ..., k\}$, podemos fixar um domínio Ω'_j de fronteira suave, tal que:

$$\overline{\Omega_j} \subset \Omega'_j \text{ e } \overline{\Omega'_i} \cap \overline{\Omega'_j} = \emptyset \text{ para } i \neq j.$$

Fixemos um subconjunto não vazio $\Upsilon \subset \{1, ..., k\}$ e

$$\Omega_\Upsilon = \cup_{j\in\Upsilon}\Omega_j, \Omega'_\Upsilon = \cup_{j\in\Upsilon}\Omega'_j \text{ e } \chi_\Upsilon(x) = \begin{cases} \chi_\Upsilon = \ 1, \text{ se } x \in \Omega'_\Upsilon, \\ 0, \text{ se } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon. \end{cases}$$

Então definimos as funções:

$$g(x,s) = \chi_\Upsilon(x) f(s) + (1 - \chi_\Upsilon(x))\tilde{f}(s), (x,s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$$

e

$$G(x,s) = \int_0^s g(x,t)dt, (x,s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}.$$

Definimos também o problema auxiliar não local:

$$(A_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + (\lambda a(x) + 1)u + \phi_u u = g(x,u), \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ u \in E_\lambda. \end{cases}$$

O problema (A_λ) é relacionado com (P_λ) no sentido que, se u_λ é solução para (A_λ) verificando:

$$u_\lambda(x) \leq h, \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon,$$

então também é solução para o problema (P_λ).

Para entender em que sentido é mais viável trabalhar com o problema (A_λ) ao invés de (P_λ) precisamos da seguinte:

Definição 2.1 *Sejam E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional diferenciável. Se existirem $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n) \subset E$ tais que*

$$I(u_n) \to c \text{ e } I'(u_n) \to 0,$$

dizemos que (u_n) é uma sequência Palais-Smale no nível c para I, resumidamente, (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I. Se tal sequência possui uma subsequência convergente, diz-se que I satisfaz a condição Palais-Smale no nível c para I, ou simplesmente, que I satisfaz a condição $(PS)_c$.

Em comparação com o problema (P_λ) o problema (A_λ) tem a vantagem de que o funcional de energia associado a (A_λ), denominado por $J_\lambda : E_\lambda \to \mathbb{R}$ e dado por:

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + 1)|u|^2)dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(x,u)dx,$$

satisfaz a condição (PS). Por outro lado, o funcional associado a (P_λ) pode não satisfazer.

De maneira análoga à I, a derivada de Gâteaux de J_λ (ver apêndice D) é dada por:

$$J'_\lambda(u)v = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \nabla v + (\lambda a(x) + 1)uv)dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u uv dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)v dx.$$

Proposição 2.3 *Todas as sequências $(PS)_c$ para J_λ são limitadas em E_λ.*

Demonstração. Da continuidade da aplicação derivada, temos

$$|J'_\lambda(u_n)u_n| \leq C||u_n||_\lambda,$$

onde C é uma constante real positiva. Deste fato e da limitação de $J_\lambda(u_n)$, obtemos

$$J_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta}J'_\lambda(u_n)u_n \leq C_1 + C||u_n||_\lambda, \tag{2.6}$$

para n suficientemente grande.

Observe que, da condição (f_3) e da definição de $\tilde{f}$ podemos obter

$$G(s) - \frac{1}{\theta}g(s)s \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\nu|s|^2, \forall s \in \mathbb{R}.$$

A desigualdade acima, junto com (2.1), nos dá:

$$J_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta}J'_\lambda(u_n)u_n =$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)(||u_n||_\lambda^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2dx+\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{g(x,u_n)u_n}{\theta}-G(x,u_n)\right)dx$$
$$\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)||u_n||_\lambda^2+\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{g(x,u_n)u_n}{\theta}-G(x,u_n)\right)dx$$
$$\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)||u_n||_\lambda^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\nu\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^2$$
$$\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\delta||u_n||_\lambda^2. \tag{2.7}$$

Portanto, de (2.6) e (2.7), concluímos que

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\delta||u_n||_\lambda^2\leq C_1+C||u_n||_\lambda.$$

Logo, existem constantes K_1 e K_2 tais que

$$K_1||u_n||_\lambda^2\leq K_2||u_n||_\lambda,$$

que é equivalente a

$$K_1||u_n||_\lambda\leq K_2.$$

Mostrando assim que a sequência (u_n) é limitada em E_λ.

■

Proposição 2.4 *Se (u_n) é uma sequências $(PS)_c$ para J_λ, então dado $\varepsilon>0$, existe $R>0$, tal que*

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(0)}(|\nabla u_n|^2+(\lambda a(x)+1)|u_n|^2)dx<\varepsilon. \tag{2.8}$$

Consequentemente, uma vez que g tem crescimento subcrítico, se $u\in E_\lambda$ é o limite fraco da sequência (u_n), então

$$\int_{\mathbb{R}^3}g(x,u_n)u_ndx\to\int_{\mathbb{R}^3}g(x,u)udx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3}g(x,u_n)vdx\to\int_{\mathbb{R}^3}g(x,u)vdx,\forall v\in E_\lambda.$$

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para J_λ, $R > 0$ suficientemente grande tal que $\Omega'_\Upsilon \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$ e $\eta_R \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ satisfazendo:

$$\eta_R(x) = \begin{cases} 0, x \in B_{\frac{R}{2}}(0), \\ 1, x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0), \end{cases}$$

com $0 \leq \eta_R \leq 1$ e $|\nabla \eta_R| \leq \frac{C}{R}$, onde $C > 0$ não depende de R.

Observe que

$$J'_\lambda(u_n)(\eta_R u_n) = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u_n \nabla \eta_R u_n + (\lambda a(x) + 1) u_n^2 \eta_R) dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 \eta_R dx$$
$$- \int_{\mathbb{R}^3} g(x, u_n) u_n \eta_R dx = \int_{\mathbb{R}^3} (u_n \nabla u_n \nabla \eta_R + \eta_R |\nabla u_n|^2 + (\lambda a(x) + 1) u_n^2 \eta_R) dx$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 \eta_R dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(x, u_n) u_n \eta_R dx.$$

Com isso e com o fato de que $\tilde{f}(u_n) u_n \eta_R = 0$ em Ω'_Υ, podemos escrever,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda a(x) + 1) u_n^2 \eta_R) dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 \eta_R dx = \tag{2.9}$$

$$J'_\lambda(u_n)(\eta_R u_n) - \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \eta_R dx + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon} \tilde{f}(u_n) u_n \eta_R dx.$$

Denotando

$$L = \int_{\mathbb{R}^3} [|\nabla u_n|^2 + (\lambda a(x) + 1)|u_n|^2] \eta_R) dx,$$

da hipótese posta sobre η_R, de (2.9) e de (2.4), obtém-se

$$L \leq J'_\lambda(u_n)(\eta_R) + \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \eta_R dx + \nu \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^2 \eta_R dx$$

$$\leq J'_\lambda(u_n)(\eta_R) + \frac{C}{R} \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n dx + \nu L.$$

Usando a desigualdade de Hölder na integral acima, concluímos que

$$L \leq J'_\lambda(u_n)(\eta_R u_n) + \frac{C}{R} |u_n|_2 |\nabla u_n|_2 + \nu L.$$

Note que (u_n) e (∇u_n) são sequências limitadas em $L^2(\mathbb{R}^3)$, pois ambas são limitadas em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e $H^1(\mathbb{R}^3)$ está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^3)$. Além disso, temos que $J'_\lambda(u_n)(\eta_R u_n) \to 0$, pois (u_n) é $(PS)_c$ para J_λ. Assim, obtemos

$$L \leq o_n(1) + C + \nu L \Rightarrow L(1-\nu) \leq o_n(1) + C \Rightarrow L \leq o'_n(1) + \frac{C}{(1-\nu)R}.$$

Logo,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda a(x) + 1)|u_n|^2) dx \leq \frac{C}{(1-\nu)R} .$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $R > 0$ suficientemente grande e obtemos $\frac{C}{(1-\nu)R} < \varepsilon$. Provando assim (2.8).

Falta mostrar que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} g(x, u_n) u_n dx \to \int_{\mathbb{R}^3} g(x, u) u dx.$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(x, u_n) v dx \to \int_{\mathbb{R}^3} g(x, u) v dx, \forall v \in E_\lambda.$$

Primeiramente, faremos o limite acima no complementar de $B_R(0)$. Usando o fato de que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$, temos que $J'_\lambda(u_n)u_n \to 0$, e então

$$||u_n||^2_{\lambda, \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} g(x, u_n) u_n dx \to 0.$$

Por (2.8)

$$||u_n||^2_{\lambda, \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \to 0$$

e pelo item (ii) do Lema A.1

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \phi_{u_n} u_n^2 dx \leq C ||u_n||^4_{\lambda, \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \to 0.$$

Concluímos então que

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} g(x, u_n) u_n dx \to 0 \tag{2.10}$$

Temos também que

$$\int_{\mathbb{R}^3\backslash B_R(0)} g(x,u)udx = \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)u\chi_{\mathbb{R}^3\backslash B_R(0)}dx.$$

Ora, desde que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)u\chi_{\mathbb{R}^3\backslash B_R(0)}dx \to 0$, para R suficientemente grande, e $g \in L^1(\mathbb{R}^3)$, usando o Teorema da Conergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3\backslash B_R(0)} g(x,u)udx \to 0, \text{ quando } R \to +\infty. \tag{2.11}$$

Além disso, da proposição anterior, (u_n) é limitada em E_λ então existe $u \in E_\lambda$ de modo que $u_n \rightharpoonup u$ em E_λ, pois E_λ é um espaço de Hilbert. Usando novamente o Lema da Compacidade de Strauss (Teorema B.2) , conclui-se que:

$$\int_{B_R(0)} g(x,u_n)u_ndx \to \int_{B_R(0)} g(x,u)udx. \tag{2.12}$$

De (2.10), (2.11) e (2.12) podemos concluir

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3} g(x,u_n)u_ndx - \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)udx\right| \leq$$

$$\left|\int_{B_R(0)} g(x,u_n)u_ndx - \int_{B_R(0)} g(x,u)udx)\right| +$$
$$\left|\int_{\mathbb{R}^3\backslash B_R(0)} g(x,u_n)u_ndx - \int_{\mathbb{R}^3\backslash B_R(0)} g(x,u)udx\right| < \varepsilon.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(x,u_n)u_ndx \to \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)udx.$$

Usando os mesmos argumentos, podemos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(x,u_n)vdx \to \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)vdx, \forall v \in E_\lambda,$$

o que completa a demosntração.

$\blacksquare$

Proposição 2.5 *O funcional J_λ satisfaz a condição $(PS)_c$.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para J_λ, para demonstrar o resultado desejado, teremos que mostrar que (u_n) possui uma subsequência convergente em E_λ. Da Proposição 2.3 sabemos que (u_n) é limitada, então, a menos de subsequência, existe $u \in E_\lambda$, tal que $u_n \rightharpoonup u$ em E_λ. Considerando o funcional linaer $A_1 : E_\lambda \to \mathbb{R}$, dado por

$$A_1(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v dx,$$

segue da desigualdade de Hölder e da imersão contínua $E_\lambda \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$, que

$$|A_1(v)| \leq |\nabla u|_2 |\nabla v|_2 \leq |\nabla u|_2 ||v||_\lambda.$$

Assim, A_1 é um funcional linear limitado. Então, a convergência $u_n \rightharpoonup u$ em E_λ nos dá

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u(\nabla u_n - \nabla u) dx \to 0. \tag{2.13}$$

Usando um argumento totalmente análogo, concluímos também que

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\lambda a(x) + 1) u(u_n - u) dx \to 0. \tag{2.14}$$

Definindo, para cada $j \in \mathbb{N}$, $A_{2_j} : E_\lambda \to \mathbb{R}$, por

$$A_{2_j}(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_j} u_j v dx.$$

Temos, pela desigualdade generalizada de Hölder, pelo item (v) do lema A.1 e pelas imersões contínuas $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ e $E_\lambda \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ para $p \in [2, 6]$, que

$$|A_{2_j}(v)| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_j} u_j v dx \right| \leq |\phi_{u_j}|_6 |u_j|_3 |v|_2 \leq K ||v||_\lambda,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Novamente a convergência fraca nos mostra que

$$A_{2_j}(u_n) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_j} u_j u_n dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_j} u_j u dx = A_{2_j}(u),$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Isto implica que,

$$A_{2_n}(u_n) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx = A_{2_n}(u). \tag{2.15}$$

Como (u_n) é uma sequência Palais-Smale limitada, podemos afirmar que $J'_\lambda(u_n)(u_n - u) \to 0$, isto é,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u_n \nabla(u_n - u) + (\lambda a(x) + 1)u_n(u_n - u))dx + \\ &\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n(u_n - u)dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(x, u_n)(u_n - u)dx \to 0.\end{aligned}$$

Da proposição anterior sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(x, u_n)(u_n - u)dx \to 0.$$

Disto e de (2.15), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u_n \nabla(u_n - u) + (\lambda a(x) + 1)u_n(u_n - u))dx \to 0. \tag{2.16}$$

De (2.13), (2.14) e (2.16) temos que

$$\begin{aligned}||u_n - u||_\lambda^2 = &\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u_n \nabla(u_n - u) + (\lambda a(x) + 1)u_n(u_n - u))dx + \\ &\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u(\nabla u_n - \nabla u) + (\lambda a(x) + 1)u(u_n - u))dx \to 0,\end{aligned}$$

completando assim a demonstração.

■

Capítulo 3

A limitação das soluções de (A_λ)

Neste capítulo analisaremos a limitação das soluções de (A_λ) fora de Ω'_Υ. Para isso usaremos o processo de iteração de Moser, adaptando ideias de [4] e [20]. A constante h que aparece na proposição seguinte é a mesma da Proposição 2.2.

Proposição 3.1 *Seja (u_λ) uma família de soluções para (A_λ) tal que $u_\lambda \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\Upsilon)$, quando $\lambda \to \infty$. Então existe $\lambda^* > 0$ com a seguinte propriedade:*

$$|u_\lambda|_{\infty, \mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon} \leq h, \forall \lambda \geq \lambda^*.$$

Além disso, u_λ é uma solução para (P_λ) para $\lambda \geq \lambda^*$.

Demonstração. No que segue denotaremos u_λ simplesmente por u.

Fixando $\Omega'_j \subset \tilde{\Omega}_j$, considere ζ uma função $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e $\zeta(x) = 0$ se $x \in \Omega'_\Upsilon$, $\zeta(x) = 1$ se $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j \in \Upsilon} \tilde{\Omega}_j$, com $|\nabla \zeta| \leq C$. Assim, definiremos as funções:

$$v = \zeta^2 u u_L^{2(\beta-1)} \text{ e } w_L = \zeta u u_L^{\beta-1},$$

onde $u_L = \min\{u, L\}$ com $L > 0$ e $\beta > 1$ a ser fixado convenientemente.

Temos que:

$$\nabla v = 2\zeta (\nabla \zeta) u u_L^{2(\beta-1)} + \zeta^2 \left((\nabla u) u_L^{2(\beta-1)} + 2(\beta-1) u_L^{2\beta-3} (\nabla u_L) u \right)$$

e

$$\nabla w_L = \nabla\left(\zeta u\right) u_L^{\beta-1} + \zeta\Big(\left(\nabla u\right) u_L^{\beta-1} + (\beta-1) u_L^{\beta-2}\left(\nabla u_L\right) u\Big).$$

Como $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\Upsilon)$, logo $v \in H_0^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon)$. Usando v como função teste no problema (A_λ) e da definição de solução fraca, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}[(\nabla u \nabla v)+(\lambda a(x)+1)uv]dx+\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}\phi_u uv dx-\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon} g(x,u)v dx = 0. \quad (3.1)$$

Observe que $f(s) = 0$ quando $s \leq 0$, podemos então afirmar que u é não negativa em $\mathbb{R} \setminus \Omega'_\Upsilon$, pois

$$J'(u)_\lambda u = ||u||_\lambda + \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}\phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon} g(x,u)u dx = 0,$$

lembrando que pelo lema A.1 $\phi_u \geq 0$, que $g \equiv \tilde{f}$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon$ e que $u_\lambda \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\Upsilon)$ a imersão de Sobolev e o Teorema de Vainberg nos garante que $u_\lambda(x) \to 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\Upsilon$, assim $\tilde{f} = f$, quando $\lambda \to \infty$.

Além disso, independentemente do valor de u_L, temos que

$$uv = \zeta^2 u^2 u_L^{2(\beta-1)} \geq 0.$$

Usando o fato de que $\nabla\zeta\nabla u \geq 0$, pois, u, $\zeta \geq 0$. Lembrando que $\beta > 1$, também obtemos

$$\nabla u \nabla v = 2\zeta \nabla u\left(\nabla\zeta\right) u u_L^{2(\beta-1)} + \zeta^2\Big(|\nabla u|^2 u_L^{2(\beta-1)} + 2(\beta-1) u_L^{2\beta-3} \nabla u\left(\nabla u_L\right) u\Big) \geq 0.$$

De (3.1) concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon} \nabla u \nabla v dx \leq \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon} g(x,u) v dx,$$

então

$$\begin{aligned} &2\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}(\zeta u u_L^{2(\beta-1)}\nabla u \nabla\zeta)dx + \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}(\zeta^2 u_L^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2)dx \\ &+ 2(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}(u u_L^{2\beta-3}\zeta^2 \nabla u \nabla u_L)dx \leq \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon} g(x,u)\zeta^2 u u_L^{2(\beta-1)} dx, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}(\zeta^2 u_L^{2(\beta-1}|\nabla u|^2)dx \leq \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon} g(x,u)\zeta^2 u u_L^{2(\beta-1)}dx.$$

Como neste caso u está definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon$ tem-se $g \equiv \tilde{f}$. Logo, do crescimento de $\tilde{f}$ descrito em (2.4) existe $\nu > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}(\zeta^2 u_L^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2)dx \leq \nu\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}|u|(\zeta^2 u u_L^{2(\beta-1)})dx. \tag{3.2}$$

Agora, da imersão contínua $H(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ com $p \in [2, 2^*]$, obtemos

$$|w_L|_{2*}^2 \leq C\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}|w_L|^2 dx = C\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}|\nabla(\zeta u u_L^{\beta-1})|^2 dx.$$

E então da desigualdade elementar $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, temos que

$$|\nabla w_L|_{2^*}^2 \leq 2C\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}|\nabla\zeta|^2 u^2 u_L^{2\beta-2}dx + 4C\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}|\nabla u|^2\zeta^2 u_L^{2(\beta-1)}dx +$$

$$4C(\beta-1)^2\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}\zeta^2 u_L^{2(\beta-2)}|\nabla u_L|^2|u|^2 dx \leq 2C\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}|\nabla\zeta|^2 u^2 u_L^{2\beta-2}dx$$

$$+ 4C\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}|\nabla u|^2\zeta^2 u_L^{2(\beta-1)}dx + 4C\beta^2\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}\zeta^2 u_L^{2(\beta-2)}|\nabla u_L|^2|u|^2 dx.$$

Donde segue que

$$|\nabla w_L|_{2^*}^2 \leq C_1\beta^2\left(\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}|\nabla\zeta^2|^2 u^2 u_L^{2(\beta-1)}dx + \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}|\nabla u|^2\zeta^2 u_L^{2(\beta-1)}dx\right).$$

Note que acima usamos tacitamente o fato de que $u_L = \min\{u, L\}$. Além disso, de (3.2) e observando que ν pode ser tão pequeno quanto se queira, tem-se

$$|w_L|_{2^*}^2 \leq C_1\beta^2\left(\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}|\nabla\zeta|^2 u^2 u_L^{2(\beta-1)}dx\right).$$

As definições de ζ implicam que

$$|w_L|_{2^*,\mathcal{B}}^2 \leq C_2\beta^2\left(\int_\Gamma u^2 u_L^{2(\beta-1)}dx\right),$$

onde $\mathcal{B} = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon$ e $\Gamma = \bigcup_{j\in\Upsilon} \tilde{\Omega}_j \setminus \Omega'_j$.

Agora fazendo $L \to \infty$ e usando o corolário do Lema de Fatou (Corolário B.1) na variável L, obtemos

$$|u^\beta|^2_{2^*,\mathcal{B}} \leq C_2\beta^2 \left(\int_\Gamma u^{2\beta} dx \right).$$

O qual é equivalente a

$$|u|^{2\beta}_{2^*\beta,\mathcal{B}} \leq C_2\beta^2 |u|^{2\beta}_{2\beta,\Gamma},$$

implicando em

$$|u|_{2^*\beta,\mathcal{B}} \leq C_2^{\frac{1}{2\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} |u|_{2\beta,\Gamma}. \tag{3.3}$$

Considerando $\chi = \frac{2^*}{2}$, temos que $2\chi = 2^*$ e $2\beta\chi = 2^*\beta$, $\forall \beta > 1$.

Agora, vamos iterar β e assim a estimativa desejada.

Passo 1

Considerando $\beta = \frac{2^*}{2}$, da limitação de u em $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\Upsilon)$ e por (3.3), tem-se que

$$u^\beta \in L^2(\Gamma).$$

Então,

$$|u|_{\frac{(2^*)^2}{2},\mathcal{B}} \leq C_2^{\frac{1}{2\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} |u|_{2^*,\Gamma}.$$

Implicando que

$$|u|_{\frac{(2\chi)^2}{2},\mathcal{B}} \leq C_2^{\frac{1}{2\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} |u|_{2^*,\Gamma}.$$

Novamente usando a limitação de u em $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon)$, temos

$$|u|_{2\chi^2,\mathcal{B}} \leq C_2^{\frac{1}{2\chi}} \beta^{\frac{1}{\chi}} |u|_{2^*,\Gamma} \leq C_2^{\frac{1}{2\chi}} \beta^{\frac{1}{\chi}} K$$

Mostrando que,

$$|u^{\chi^2}|_{2,\mathcal{B}} \leq C_2^{\frac{1}{2\chi}} \chi^{\frac{1}{\chi}} K.$$

Isto equivale a dizer que

$$u^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^2} \in L^2(\Gamma). \tag{3.4}$$

Passo 2

Considerando $\beta = \left(\frac{2^*}{2}\right)^2$, por (3.4)

$$u^\beta \in L^2(\Gamma).$$

Logo,

$$|u|_{\frac{(p^*)^3}{2^2},\mathcal{B}} \leq C_2^{\frac{1}{2\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} |u|_{\frac{2^*}{2},\Gamma}.$$

O que implica,

$$|u|_{\frac{(2\chi)^2}{2^2},\mathcal{B}} \leq C_2^{\frac{1}{2\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} |u|_{2\chi^2,\Gamma}, \tag{3.5}$$

isto é,

$$|u|_{2\chi^3,\mathcal{B}} \leq C_2^{\frac{1}{2\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} C_2^{\frac{1}{2\chi}} \chi^{\frac{1}{\chi}} |u|_{2^*,\Gamma}$$

Então,

$$|u|_{2\chi^3,\mathcal{B}} \leq C_2^{\frac{1}{2\chi^2}} (\chi^2)^{\frac{1}{\chi^2}} C_2^{\frac{1}{2\chi}} \chi^{\frac{1}{\chi}} |u|_{2^*,\Gamma}.$$

Segue diretamente que,

$$|u|_{2\chi^3,\mathcal{B}} \leq C_2^{\frac{1}{2\chi^2}+\frac{1}{2\chi}} (\chi^2)^{\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\chi}} |u|_{2^*,\Gamma} \leq C_2^{\frac{1}{2\chi^2}+\frac{1}{2\chi}} (\chi^2)^{\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\chi}} K.$$

Concluímos por (3.5) e (3.4) que

$$u^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^3} \in L^2(\Gamma). \tag{3.6}$$

Repetindo os argumentos do **Passo 1** e do **Passo 2** de modo iterativo, obtemos

$$|u|_{2\chi^{m+1},\mathcal{B}} \leq C_2^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \chi^{-i}} \chi^{\sum_{i=1}^m i\chi^{-i}} |u|_{2^*,\Gamma}. \tag{3.7}$$

Como $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\chi}$ é uma série geométrica de razão menor que 1, ao fazer $m \to \infty$ concluímos que

$$|u|_{\infty,\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon} \leq K|u|_{2^*,\Gamma},$$

para algum $K > 0$.

Desde que, $u = u_\lambda$ e $u_\lambda \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\Upsilon)$, a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ para $p \in [2, 2^*]$, nos granate que existe um $\lambda^* > 0$ tal que

$$|u_\lambda|_{\infty, \mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon} \leq h, \forall \lambda \geq \lambda^*.$$

■

Capítulo 4

A Condição $(PS)_\infty$

Neste capítulo definiremos sequências $(PS)_\infty$ bem como propriedades relativas a tais sequências. Essas propriedades desempenharão um importante papel no decorrer do trabalho.

Definição 4.1 *Uma sequência (u_n) é dita $(PS)_\infty$ para a família $(J_\lambda)_{\lambda\geq 1}$, se existe uma sequência $(\lambda_n) \subset [1,\infty]$ com $\lambda_n \to \infty$ sempre que $n \to \infty$, verificando:*

$$J_{\lambda_n}(u_n) \to c \text{ e } ||J'_{\lambda_n}(u_n)||_{E^*_{\lambda_n}} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

para algum $c \in \mathbb{R}$.

Proposição 4.1 *Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ uma sequência $(PS)_\infty$ para $(J_\lambda)_{\lambda\geq 1}$. Então, a menos de subsequência, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Além disso:*

(i) $u_n \to u$ *em* $H^1(\mathbb{R}^3)$;

(ii) $u = 0$ *em* $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\Upsilon$, $u_{|\Omega_j} \geq 0$, $\forall j \in \Upsilon$, *e* u *é uma solução para o problema:*

$$(P)_{\infty,\Upsilon} \begin{cases} -\Delta u + u + \phi_u u = f(u), \ \ em \ \Omega_\Upsilon \\ u \in H_0^1(\Omega_\Upsilon); \end{cases}$$

(iii) $\lambda_n \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u_n|^2 dx \to 0$;

(iv) $||u_n - u||^2_{\lambda,\Omega'_\Upsilon} \to 0$;

(v) $||u_n||^2_{\lambda,\mathbb{R}^3\setminus\Omega_\Upsilon} \to 0$;

(vi) $J_{\lambda_n}(u_n) \to \frac{1}{2}\int_{\Omega_\Upsilon}(|\nabla u|^2 + |u|^2)dx + \frac{1}{4}\int_{\Omega_\Upsilon}\phi_u u^2 dx - \int_{\Omega_\Upsilon} F(u)dx.$

Demonstração. Usando um argumento totalmente análogo ao usado na Proposição 2.3, concluímos que $||u_n||_{\lambda_n}$ é limitada em $\mathbb{R}$ e (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Então, a menos de subsequência, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^3) \text{ e } u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^3.$$

Agora para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos:

$$C_m = \left\{x \in \mathbb{R}^3; a(x) \geq \frac{1}{m}\right\}.$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\lambda_n < 2(\lambda_n - 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\int_{C_m} |u_n|^2 dx \leq \frac{2m}{\lambda_n}\int_{C_m}(\lambda_n a(x) + 1)|u_n|^2 dx \leq \frac{2m}{\lambda_n}||u_n||^2_{\lambda_n} \leq \frac{C}{\lambda_n}.$$

Usando o lema de Fatou, obtemos,

$$\int_{C_m} \liminf_{n\to\infty} |u_n|^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{C_m}|u_n|^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty}\frac{C}{\lambda_n} = 0,$$

implicando que

$$\int_{C_m} |u|^2 dx = 0.$$

Sendo assim, concluímos que $u = 0$ em C_m e consequentemente $u = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ pois $a(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$.

Agora estamos em condições de provar $(i) - (vi)$

(i) Pelo lema da compacidade de Strauss (Teorema B.2), temos:

$$\int_{\overline{\Omega}} g(x,u_n)u_n dx \to \int_{\overline{\Omega}} g(x,u)u dx. \tag{4.1}$$

Além disso, usando a desigualdade de Hölder, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}} g(x,u_n)u_n dx \leq |g|_2|u_n|_2 \leq |g|_2\frac{C}{\lambda_n} \to 0. \tag{4.2}$$

Como $u = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ e das expressões obtidas em (4.1) e (4.2), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(x,u_n)(u_n - u)dx \to 0.$$

Repetindo os mesmos argumentos utilizados na proposição 2.5, mostra-se que

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u_n - \nabla u| + (\lambda_n a(x) + 1)|u_n - u|^2)dx \to 0, \tag{4.3}$$

que implica a convergência $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$.

(ii) Novamente, usando o fato de que $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ e $u = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, temos que $u \in H_0^1(\Omega)$ ou, equivalentemente, $u_{|\Omega_j} \in H_0^1(\Omega_j)$ para $j = 1, 2, ..., k$. Desde que J_{λ_n} é um funcional de classe C^1, $\forall n \in \mathbb{N}$ e por (i) $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Dado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\Upsilon)$ tem-se $J'_{\lambda_n}(u_n)\varphi \to J'_{\lambda_n}(u)\varphi = 0$. Como $\overline{C_0^\infty(\Omega_\Upsilon)} = H_0^1(\Omega_\Upsilon)$, concluímos que u é solução do problema $(P)_{\infty,\Upsilon}$. Então $u_{|\Omega_j} \neq 0$, para todo $j \in \Upsilon$.

Usando o mesmo argumento, se $j \notin \Upsilon$, temos

$$\int_{\Omega_j} (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx + \int_{\Omega_j} \phi_u u^2 dx - \int_{\Omega_j} \tilde{f}(u)u dx = 0.$$

De (2.4) obtemos

$$0 = \int_{\Omega_j} (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx + \int_{\Omega_j} \phi_u u^2 dx - \int_{\Omega_j} \tilde{f}(u)u dx \geq ||u||_{\Omega_j}^2 - \nu|u|_{2,\Omega_j}^2.$$

Agora, por (2.1), existe $\delta \in (0, 1)$ tal que

$$0 \geq ||u||^2_{\Omega_j} - \nu |u|^2_{2,\Omega_j} \geq \delta ||u||^2_{\lambda,\Omega_j} \geq 0$$

Donde segue que $u_{|\Omega_j} = 0$ para $j \notin \Upsilon$, ou seja, $u = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\Upsilon$. Assim, (ii) fica provado.

(iii) Como $u = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\Upsilon$ e $a = 0$ em Ω_Υ, tem-se

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u_n|^2 dx = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u_n|^2 dx - \left(\lambda_n \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\Upsilon} a(x)|u|^2 dx + \lambda_n \int_{\Omega_\Upsilon} a(x)|u|^2 dx \right).$$

$$\leq \lambda_n \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u_n - u|^2 dx \leq ||u_n - u||^2_{\lambda_n}.$$

Como visto em (4.3), $||u_n - u||^2_{\lambda_n} \to 0$. Completando assim a prova de (iii).

(iv) Seja $j \in \Upsilon$. De (i), usando a imersão contínua de Sobolev

$$|u_n - u|^2_{2,\Omega'_j}, |\nabla u_n - \nabla u|^2_{2,\Omega'_j} \to 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'_\Upsilon} (|\nabla u_n|^2 - |\nabla u|^2) dx &= \int_{\Omega'_\Upsilon} (\nabla u_n + \nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) dx \\ &\leq |\nabla u_n - \nabla u|_{2,\Omega'_\Upsilon} |\nabla u_n + \nabla u|_{2,\Omega'_\Upsilon} \to 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Do mesmo modo,

$$\int_{\Omega'_\Upsilon} (|u_n|^2 - |u|^2) dx \to 0. \tag{4.5}$$

De (iii)

$$\int_{\Omega'_\Upsilon} \lambda_n a(x) |u_n|^2 dx \to 0. \tag{4.6}$$

De (4.4), (4.5) e (4.6) segue que

$$||u_n - u||^2_{\lambda,\Omega'_\Upsilon} = \int_{\Omega'_\Upsilon} (|\nabla u_n - \nabla u|^2 + (\lambda a(x) + 1)|u_n - u|^2) dx \to 0.$$

(v) Novamente por (4.3) tem-se $||u_n - u||^2_{\lambda_n} \to 0$, conclui-se que

$$||u_n||^2_{\lambda_n, \mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon} \to \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon} (|\nabla u|^2 + (\lambda_n a(x) + 1)|u|^2.$$

Por (ii), $u = 0$ sempre que $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\Upsilon$, temos que $||u_n||^2_{\lambda_n, \mathbb{R}^3\setminus\Omega_\Upsilon} \to 0$.

(vi) Vamos escrever o funcional J_{λ_n} da seguinte forma:

$$J_{\lambda_n}(u_n) = \sum_{j\in\Upsilon}\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega'_j}(|\nabla u_n|^2 + (\lambda_n a(x)+1)|u_n|^2)dx + \frac{1}{4}\int_{\Omega'_j}\phi_{u_n}u_n^2 dx\right] +$$

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_j}(|\nabla u_n|^2 + (\lambda_n a(x)+1)|u_n|^2)dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_j}\phi_{u_n}u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(x,u_n)dx.$$

De (iv) e (v) temos

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega'_j}(|\nabla u_n|^2 + (\lambda_n a(x)+1)|u_n|^2)dx \to \int_{\Omega_j}(|\nabla u|^2 + |u|^2)dx$$

e

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega'_\Upsilon}(|\nabla u_n|^2 + (\lambda_n a(x)+1)|u_n|^2)dx \to 0.$$

Do lema A.1,

$$\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2 dx \to \int_{\Omega_\Upsilon}\phi_u u^2 dx.$$

Da continuidade, crescimento de G e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} G(x,u_n)dx \to \int_{\Omega_\Upsilon} F(u)dx.$$

■

Capítulo 5

Um valor minimax especial para J_λ

Neste capítulo estabeleceremos um valor minimax para o funcional J_λ e mostraremos propriedades importantes para esse valor.

Vamos fixar um subconjunto não vazio $\Upsilon \subset \{1, ..., k\}$, considere também

$$I_\Upsilon(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\Upsilon} (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx + \frac{1}{4}\int_{\Omega_\Upsilon} \phi_u u^2 dx - \int_{\Omega_\Upsilon} F(u)dx,\ u \in H_0^1(\Omega_\Upsilon),$$

o funcional energia associado a $(P)_{\infty,\Upsilon}$, e $J_{\lambda,\Upsilon} : H^1(\Omega'_\Upsilon) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$J_{\lambda,\Upsilon}(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega'_\Upsilon} (|\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + 1)|u|^2)dx + \frac{1}{4}\int_{\Omega'_\Upsilon} \phi_{\tilde{u}} u^2 dx - \int_{\Omega'_\Upsilon} F(u)dx,$$

o funcional de energia associado ao problema não local

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda a(x) + 1)u + \left(\displaystyle\int_{\Omega'_\Upsilon} \frac{\tilde{u}^2}{|x-y|}dy\right) u = f(u), u \in \Omega'_\Upsilon, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \text{em } \partial\Omega'_\Upsilon, \end{cases}$$

onde

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), \text{em } \Omega'_\Upsilon, \\ 0, \text{em } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon. \end{cases}$$

No que segue , denotaremos por c_Υ o número dado por

$$c_\Upsilon = \inf_{u \in \mathcal{M}_\Upsilon} I_\Upsilon(u),$$

onde

$$\mathcal{M}_\Upsilon = \{u \in \mathcal{N}_\Upsilon ; I'_\Upsilon(u)u_j = 0 \text{ e } u_j \neq 0, \forall j \in \Upsilon\}$$

com $u_j = u_{|\Omega_j}$ e

$$\mathcal{N}_\Upsilon = \{u \in H^1_0(\Omega_\Upsilon) \setminus \{0\}; I'_\Upsilon(u)u = 0\}.$$

Do mesmo modo, denotamos o número $c_{\lambda,\Upsilon}$ o número dado por

$$c_{\lambda,\Upsilon} = \inf_{u \in \mathcal{M}'_\Upsilon} J_{\lambda,\Upsilon}(u),$$

onde

$$\mathcal{M}'_\Upsilon = \{u \in \mathcal{N}'_\Upsilon ; J'_{\lambda,\Upsilon}(u)u_j = 0 \text{ e } u_j \neq 0, \forall j \in \Upsilon\}$$

com $u_j = u_{|\Omega_j}$ e

$$\mathcal{N}'_\Upsilon = \{u \in H^1(\Omega'_\Upsilon) \setminus \{0\}; J'_{\lambda,\Upsilon}(u)u = 0\}.$$

Repetindo o mesmo processo usado no Capítulo 2, afirmamos que existe $w_\Upsilon \in H^1_0(\Omega_\Upsilon)$ e $w_{\lambda,\Upsilon} \in H^1(\Omega'_\Upsilon)$ tal que

$$I_\Upsilon(w_\Upsilon) = c_\Upsilon \text{ e } I'_\Upsilon(w_\Upsilon) = 0$$

e

$$J_{\lambda,\Upsilon}(w_{\lambda,\Upsilon}) = c_{\lambda,\Upsilon} \text{ e } J'_{\lambda,\Upsilon}(w_{\lambda,\Upsilon}) = 0.$$

Novamente, argumentando como no Capítulo 2, é posível mostrar que existe $\tau > 0$ tal que se $u \in \mathcal{M}_\Upsilon$, então

$$||u_j||_j > \tau, \forall j \in \Upsilon, \tag{5.1}$$

onde $||.||_j$ denota a norma em $H^1_0(\Omega_j)$ dada por

$$||u||_j = \left(\int_{\Omega_j} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Em particular, desde que $w_\Upsilon \in \mathcal{M}_\Upsilon$, também temos que

$$||w_{\Upsilon,j}||_j > \tau, \forall j \in \Upsilon, \tag{5.2}$$

onde $w_{\Upsilon,j}$ é w_Υ restrito a Ω_j.

O próximo lema nos mostra que $c_\Upsilon > 0$ e consequentemente $w_\Upsilon \neq 0$.

Lema 5.1 *Valem as seguintes afirmações:*

(i) $0 < c_{\lambda,\Upsilon} \leq c_\Upsilon$, $\forall \lambda \geq 0$*;*

(ii) $c_{\lambda,\Upsilon} \to c_\Upsilon$*, quando* $\lambda \to \infty$*.*

Demonstração. (i) Note que $I_\Upsilon\left(H_0^1(\Omega'_\Upsilon)\right) \subset J_{\lambda,\Upsilon}\left(H^1(\Omega_\Upsilon)\right)$, em particular $I_\Upsilon\left(\mathcal{M}_\Upsilon\right) \subset J_\Upsilon\left(\mathcal{M}'_\Upsilon\right)$. Portanto $\inf\limits_{u \in \mathcal{M}'_\Upsilon} J_\Upsilon(u) \leq \inf\limits_{u \in \mathcal{M}_\Upsilon} I_\Upsilon(u)$, ou seja, $c_{\Upsilon,\lambda} \leq c_\Upsilon$.

(ii) Basta mostrar que dado $j \in \Upsilon$ tem-se $c_{\lambda_n,j} \to c_j$, quando $n \to \infty$, para todas as sequências (λ_n) em $[1, \infty)$ com $\lambda_n \to \infty$, quando $n \to \infty$.

Dado (λ_n), considere uma subsequência arbitrária de $(c_{\lambda_n,\Upsilon})$. Seja $w_n \in H^1(\Omega'_j)$ com

$$J_{\lambda_n,\Upsilon}(w_n) = c_{\lambda_n,\Upsilon} \text{ e } J'_{\lambda_n,\Upsilon}(w_n) = 0.$$

Pelo item anterior, $(c_{\lambda_n,\Upsilon})$ é uma sequência real limitada, então pelo Teorema de Bolzano-Weistrass tal sequência admite uma subsequência convergente, logo existe também uma subsequência (w_{n_k}) de (w_n) tal que $(J_{\lambda_{n_k},\Upsilon}(w_{n_k}))$ converge e $J'_{\lambda_{n_k},\Upsilon}(w_{n_k}) = 0$.

Assim, temos que (w_{n_k}) é uma sequência $(PS)_\infty$. Então da Proposição 4.1, itens (i), (ii) e (vi) existe $w \in H_0^1(\Omega_\Upsilon) \setminus \{0\} \subset H^1(\Omega'_\Upsilon)$ tal que

$$w_j = w_{|\Omega_j} \neq 0, \forall j \in \Upsilon$$

e

$$w_{n_k} \to w \text{ em } H^1(\Omega'_\Upsilon), \text{ quando } k \to \infty.$$

Além disso, w é solução de $(P)_{\infty,\Upsilon}$,

$$c_{\lambda_{n_k},\Upsilon} = J_{\lambda_{n_k},\Upsilon}(w_{n_k}) \to I_\Upsilon(w)$$

e

$$0 = J'_{\lambda_{n_k},\Upsilon}(w_{n_k}) \to I'_\Upsilon(w).$$

Então $w \in \mathcal{M}_\Upsilon$, e por definição de c_Υ,

$$\lim c_{\lambda_{n_k},\Upsilon} \geq c_\Upsilon.$$

Isto, juntamente com (i) implica que

$$c_{\lambda_{n_k},\Upsilon} \to c_\Upsilon, \text{ quando } k \to \infty.$$

$\blacksquare$

Lema 5.2 *Existe $R > 1$ verificando*

$$0 < I'_j\left(\frac{1}{R}w_j\right)\left(\frac{1}{R}w_j\right) \text{ e } I'_j(Rw_j)(Rw_j) < 0, \text{ para } j \in \Upsilon, \tag{5.3}$$

onde I_j denota o funcional

$$I_j(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_j}(|\nabla u|^2 + |u|^2)dx + \frac{1}{4}\int_{\Omega_j}\phi_u u^2 dx - \int_{\Omega_j} F(u)dx,\ u \in H_0^1(\Omega_j),$$

com ϕ_u sendo solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta\phi = u^2, \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ \phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Demonstração. De fato, dado $R_1 > 1$

$$\begin{aligned} I'_j\left(\frac{1}{R_1}w_j\right)\left(\frac{1}{R_1}w_j\right) &\geq \frac{1}{R_1^2}||w_j||_j^2 - \int_{\Omega_j} f\left(\frac{1}{R_1}w_j\right)\frac{1}{R_1}w_j dx \\ &= \frac{1}{R_1^2}\left(||w_j||_j^2 - \int_{\Omega_j}\frac{f\left(\frac{1}{R_1}w_j\right)}{\frac{1}{R_1}w_j}w_j^2 dx\right). \end{aligned}$$

Então, para R_1 suficientemente grande temos por (f_1) que $I'(\frac{1}{R_1}w_j)\frac{1}{R_1}w_j > 0$.

Com um raciocínio análogo e da observação feita após (f_3) temos que

$$I'(R_2 w_j)R_2 w_j = R_2^4 \left(\frac{||w_j||_j^2}{R_2^2} + \int_{\Omega_j} \phi_{w_j} w_j^2 dx - KR^{\theta-4} \int_{\Omega_j} w_j^\theta dx \right),$$

onde $\theta > 4$. Assim, para R_2 suficientemente grande, temos $I'(R_2 w_j)R_2 w_j < 0$. Tomando $R > R_1, R_2$ o lema fica demonstrado. ■

Agora podemos definir:

$$\gamma_0(\mathbf{t})(x) = \sum_{j=1}^{l} t_j R w_j(x) \in H_0^1(\Omega_\Upsilon), \forall \mathbf{t} = (t_1, ..., t_l) \in [1/R^2, 1]^l \subset \mathbb{R}^l,$$

$$\Gamma_* = \left\{ \gamma : [1/R^2, 1]^l \to E_\lambda \setminus \{0\}; \gamma \text{ é contínua }; \gamma(\mathbf{t})|_{\Omega_j'} \neq 0, \forall j \in \Upsilon; \gamma = \gamma_0 \text{ em } \partial[1/R^2, 1]^l \right\}$$

e

$$b_{\lambda,\Upsilon} = \inf_{\gamma \in \Gamma_*} \max J_\lambda(\gamma(\mathbf{t})), \text{ com } \mathbf{t} \in [1/R^2]^l.$$

Agora, o próximo passo é correlacionar $b_{\lambda,\Upsilon}, c_\Upsilon$ e $c_{\lambda,\Upsilon}$. Para isso precisamos do seguinte:

Lema 5.3 *Para todo $\gamma \in \Gamma_*$, existe $(s_1, ..., s_l) \in [1/R^2, 1]^l$ tal que*

$$J'_{\lambda,j}(\gamma(s_1, ..., s_l))(\gamma(s_1, ..., s_l)) = 0, \forall j \in \Upsilon,$$

onde

$$J_{\lambda,j}(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_j'} (|\nabla u|^2 + (\lambda a(x)+1)|u|^2)dx + \frac{1}{4}\int_{\Omega_j'} \phi_{\tilde{u}} u^2 dx - \int_{\Omega_j'} F(u)dx, u \in H^1(\Omega'_\Upsilon).$$

Demonstração. Dado $\gamma \in \Gamma_*$, considere $\tilde{\gamma} : [1/R^2, 1]^l \to \mathbb{R}^l$ tal que

$$\tilde{\gamma}(\mathbf{t}) = (J'_{\lambda,1}(\gamma(\mathbf{t}))\gamma(\mathbf{t}), ..., J'_{\lambda,l}(\gamma(\mathbf{t}))\gamma(\mathbf{t})), \text{ onde } \mathbf{t} = (t_1, ..., t_l).$$

Desde que $\gamma \in \Gamma_*$ então $\tilde{\gamma}(\mathbf{t}) = \tilde{\gamma}_0(\mathbf{t})$ para $\mathbf{t} \in \partial([1/R^2, 1]^l)$. Temos também que não existe $\mathbf{t} \in \partial([1/R^2]^l)$ tal que $\tilde{\gamma}(\mathbf{t}) = 0$. De fato, por definição,

$\gamma_0(\mathbf{t})(x) = \sum_{j=1}^{l} t_j R w_j(x)$ e como w_j está definido em Ω_j e $a(x) = 0$ para todo $x \in \Omega_j$ para qualquer $j \in \Upsilon$, temos

$$J'_{\lambda,j}(\gamma_0(\mathbf{t}))\gamma_0(\mathbf{t}) = I'_j(\gamma_0(\mathbf{t}))\gamma_0(\mathbf{t}).$$

Desta forma, se $\mathbf{t} \in \partial([1/R^2, 1]^l)$, então $t_j = 1$ ou $t_j = \frac{1}{R^2}$, para algum $j \in \Upsilon$. Logo por (5.3)

$$J'_{\lambda,j}(\gamma_0(\mathbf{t}))\gamma_0(\mathbf{t}) = I'_j(Rw_j)Rw_j < 0$$

ou

$$J'_{\lambda,j}(\gamma_0(\mathbf{t}))\gamma_0(\mathbf{t}) = I'_j\left(\frac{1}{R}w_j\right)\left(\frac{1}{R}w_j\right) > 0.$$

Assim,

$$J'_{\lambda,j}(\gamma_0(\mathbf{t}))\gamma_0(\mathbf{t}) \neq 0.$$

Ficando então bem definido $deg\left(\tilde{\gamma}, (1/R^2, 1)^l, (0, ..., 0)\right)$, perceba que aqui estamos assumindo tacitamente que $(0, ..., 0)$ é valor regular de $\tilde{\gamma}$, pois caso contrário, existe $\mathbf{t} \in [1/R^2, 1]^l$ tal que $J'_{\lambda,j}(\gamma(\mathbf{t}))(\gamma(\mathbf{t})) = 0$ para $j = 1, ..., l$ e assim o resultado estaria demonstrado.

Agora, da Proposição C.2 tem-se que

$$deg\left(\tilde{\gamma}, (1/R^2, 1)^l, (0, ..., 0)\right) = deg\left(\tilde{\gamma}_0, (1/R^2, 1)^l, (0, ..., 0)\right).$$

Observamos que para $\mathbf{t} \in (1/R^2, 1)^l$,

$$\tilde{\gamma}_0(\mathbf{t}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}_R = \left(\frac{1}{R}, ..., \frac{1}{R}\right).$$

De fato,se $\mathbf{t} \neq \left(\frac{1}{R}, ..., \frac{1}{R}\right)$ então temos duas possibilidades

Caso 1: Existe $t_j \in [1/R^2, 1/R)$ para algum $j \in \Upsilon = \{1, ..., l\}$, e consideremos $t_i = \min\{t_j < \frac{1}{R}, j \in \Upsilon\}$. Assim

$$J'_{\lambda,i}(\gamma_0(\mathbf{t}))(\gamma_0(\mathbf{t})) > (Rt_i)^2||w_i||_i^2 + (Rt_i)^4 \int_{\Omega_i} \phi_{w_\Upsilon} w_i^2 dx - \int_{\Omega_i} f(t_i R w_i) t_i R w_i dx$$

$$= (Rt_i)^4 \left(\frac{||w_i||_i^2}{(Rt_i)^2} + \int_{\Omega_i} \phi_{w_\Upsilon} w_i^2 dx - \int_{\Omega_i} \frac{f(t_i R w_i)}{(t_i R w_i)^3} w_i^4 dx \right).$$

Da condição (f_4) tem-se que $\frac{f(t_i R w_i)}{(t_i R w_i)^3} < \frac{f(w_i)}{(w_i)^3}$ e então

$$J'_{\lambda,i}(\gamma_0(\mathbf{t}))(\gamma_0(\mathbf{t})) > (Rt_i)^4 \left(\frac{||w_i||_i^2}{(Rt_i)^2} + \int_{\Omega_i} \phi_{w_\Upsilon} w_i^2 dx - \int_{\Omega_i} \frac{f(w_i)}{(w_i)^3} w_i^4 dx \right) > 0.$$

Caso 2: Existe $t_j \in (1/R, 1]$ para algum $j \in \Upsilon = \{1, ..., l\}$, e consideremos $t_i = \max\{t_j > \frac{1}{R}, j \in \Upsilon\}$. Assim, análogo ao anterior

$$J'_{\lambda,i}(\gamma_0(\mathbf{t}))(\gamma_0(\mathbf{t})) < (Rt_i)^2 ||w_i||_i^2 + (Rt_i)^4 \int_{\Omega_i} \phi_{w_\Upsilon} w_i^2 dx - \int_{\Omega_i} f(t_i R w_i) t_i R w_i dx.$$

Da condição (f_4) tem-se que $\frac{f(t_i R w_i)}{(t_i R w_i)^3} > \frac{f(w_i)}{(w_i)^3}$ e então

$$J'_{\lambda,i}(\gamma_0(\mathbf{t}))(\gamma_0(\mathbf{t})) < (Rt_i)^4 \left(\frac{||w_i||_i^2}{(Rt_i)^2} + \int_{\Omega_i} \phi_{w_\Upsilon} w_i^2 dx - \int_{\Omega_i} \frac{f(w_i)}{(w_i)^3} w_i^4 dx \right) < 0.$$

Os casos acima nos mostram que $J'_{\lambda,i}(\gamma_0(\mathbf{t})(\gamma_0(\mathbf{t}) \neq 0$ se $\mathbf{t} \neq \mathbf{t}_R$

Então $\tilde{\gamma}_0^{-1}(0) = \{\mathbf{t}_R\}$, portanto

$$deg\left(\tilde{\gamma}_0, (1/R^2, 1)^l, (0, ..., 0)\right) = sgn(\det J_{\tilde{\gamma}_0}(\mathbf{t}_R)).$$

Da Proposição C.3

$$deg\left(\tilde{\gamma}_0, (1/R^2, 1)^l, (0, ..., 0)\right) = \prod_{j \in \Upsilon} deg\left(J'_{\lambda,j}(\gamma_0(\mathbf{t}))(\gamma_0(\mathbf{t})), (1/R^2, 1), 0\right).$$

Como a matriz Jacobiana de $J'_{\lambda,j}$ é a matriz Hessiana da aplicação $J_{\lambda,j}$ e desde que $\mathbf{t}_R$ é ponto crítico de $J_{\lambda,j}$, a matriz Hessiana de $J_{\lambda,j}$ é diferente de zero para todo $j \in \Upsilon$. E então

$$deg\left(\tilde{\gamma}, (1/R^2, 1)^l, (0, ..., 0)\right) \neq 0.$$

Evocando a Proposição C.1 chegamos ao resultado desejado. ■

Observação 5.1 *Na demonstração anterior, podemos observar que para todo* $\boldsymbol{t} \in [1/R^2, 1]^l$

$$J_{\lambda,j}(\gamma_0(\boldsymbol{t})) = I_j(\gamma_0(\boldsymbol{t})) \leq \frac{R^2}{2}||w_j||_j^2 + \frac{R^4}{4}\int_{\Omega_j} \phi_w w_j^2 dx - \int_{\Omega_j} F(tRw_j)dx.$$

Mas a função $A_j : [1/R, 1] \to \mathbb{R}$, $j \in \Upsilon$, *definida por*

$$A_j(t) = \frac{(tR)^2}{2}||w_j||_j^2 + \frac{(tR)^4}{4}\int_{\Omega_j} \phi_w w_j^2 dx - \int_{\Omega_j} F(tRw_j)dx$$

é decrescente, pois

$$A_j'(t) = tR||w_j||_j^2 + (tR)^3\int_{\Omega_j} \phi_w w_j^2 dx - \int_{\Omega_j} f(tRw_j)Rw_j dx =$$

$$(tR)^3\left(\frac{||w_j||_j^2}{2} + \int_{\Omega_j} \phi_w w_j^2 dx - \int_{\Omega_j} \frac{f(tRw_j)}{(tRw_j)^3}Rw_j^4 dx\right)$$

$$\leq (tR)^3\left(\frac{||w_j||_j^2}{2} + \int_{\Omega_j} \phi_w w_j^2 dx - R\int_{\Omega_j} \frac{f(w_j)}{(w_j)^3}w_j^4 dx\right) < 0.$$

No cálculo da derivada foi usado o Teorema B.5, para podermos derivar F sob o sinal da integral. Enquanto nas estimativas foi usada a condição (f_4) *como na demonstração do teorema anterior.*

Então, para todo $j \in \Upsilon$, *para todo* $\boldsymbol{t} \in [1/R^2, 1]$ *e* $t \in [1/R, 1]$ *temos*

$$J_{\lambda,j}(\gamma_0(\boldsymbol{t})) = I_j(\gamma_0(\boldsymbol{t})) \leq (tR)^2||w_j||_j^2 + (tR)^4\int_{\Omega_j} \phi_w w_j^2 dx - \int_{\Omega_j} F(tRw_j)dx \leq c_j.$$

Proposição 5.1 *Valem as seguintes afirmações:*

(i) $c_{\lambda,\Upsilon} \leq b_{\lambda,\Upsilon} \leq c_\Upsilon, \forall\lambda \geq 1$;

(ii) $b_{\lambda,\Upsilon} \to c_\Upsilon$, *quando* $\lambda \to \infty$;

(iii) $J_\lambda(\gamma(\boldsymbol{t})) < c_\Upsilon, \forall\lambda \geq 1, \gamma \in \Gamma_*$ *e* $\boldsymbol{t} = (t_1, ..., t_l) \in \partial([\frac{1}{R^2}, 1]^l)$.

Demonstração.

(i) Desde que $\gamma_0 \in \Gamma_*$, segue da Observação 5.1 que

$$b_{\lambda,\Upsilon} = \inf_{\gamma \in \Gamma_*} \left(\max_{t \in [1/R^2,1]^l} J_\lambda(\gamma(\mathbf{t})) \right) \leq \max_{t \in [1/R^2,1]^l} J_\lambda(\gamma_0(\mathbf{t})) \leq \max_{(t_1,...,t_l) \in [1/R^2,1]^l} I_\Upsilon \left(\sum_{j \in \Upsilon} t_j R w_j \right) = c_\Upsilon.$$

Agora, dado $\gamma \in \Gamma_*$ pelo Lema 5.3 existe $\mathbf{s} = (s_1, ..., s_l) \in [1/R^2, 1]^l$ tal que

$$J'_{\lambda,i}(\gamma(\mathbf{t}))(\gamma_{|\Omega_i}(\mathbf{t})) = 0.$$

De onde segue que $\gamma(\mathbf{s}) \in \mathcal{M}'_\Upsilon$, portanto

$$J_{\lambda,\Upsilon}(\gamma(\mathbf{s})) \geq c_{\lambda,\Upsilon} = \inf_{u \in \mathcal{M}'_\Upsilon} J_{\lambda,\Upsilon}(u).$$

Além disso,

$$J_{\lambda,\mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon}(u) \geq 0, \forall u \in (\mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon),$$

pois por (2.5)

$$J_{\lambda,\mathbb{R}^3 \setminus \Omega'_\Upsilon}(u) \geq ||u||_\lambda^2 - \frac{\nu}{2}|u|_2^2 \geq 0.$$

Isto nos leva a concluir que

$$J_\lambda(\gamma(\mathbf{t})) \geq J_{\lambda,\Upsilon}(\gamma(\mathbf{t})), \forall \mathbf{t} \in [1/R^2, 1]^l,$$

então

$$\max_{\mathbf{t} \in [1/R^2,1]^l} J_\lambda(\gamma(\mathbf{t})) \geq c_{\lambda,\Upsilon}.$$

Implicando que

$$b_{\lambda,\Upsilon} \geq c_{\lambda,\Upsilon}.$$

(ii) Do item (ii) do Lema 5.1 sabemos que $c_{\lambda,\Upsilon} \to c_\Upsilon$ então, utilizando o Teorema do Confronto na desigualdade do item anterior chegamos ao resultado desejado.

(iii) Para $\mathbf{t} \in \partial([1/R^2, 1]^l)$, vale $\gamma(\mathbf{t}) = \gamma_0(\mathbf{t})$. Portanto,

$$J_\lambda(\gamma(\mathbf{t})) = I_\Upsilon(\gamma_0(\mathbf{t})).$$

Desde que $\max_{\mathbf{t}\in[1/R^2]^l} I_\Upsilon(\gamma_0(\mathbf{t})) = c_\Upsilon$ e $I'_\Upsilon(\gamma_0(\mathbf{t})) \neq 0$ em $\partial([1/R^2, 1]^l)$, tem-se

$$J_\lambda(\gamma(\mathbf{t})) \leq c_\Upsilon - \epsilon.$$

$\blacksquare$

Capítulo 6

Demonstração do Teorema Principal

Nosso principal objetivo neste capítulo será provar o Teorema 0.1.

No decorrer do capítulo denotaremos por

$$\Theta = \left\{ u \in E_\lambda ; ||u||_{\lambda,\Omega'_j} > \frac{\tau}{8R}, \forall j \in \Upsilon \right\}$$

e

$$J_\lambda^{c_\Upsilon} = \{u \in E_\lambda ; J_\lambda(u) \leq c_\Upsilon\},$$

onde τ é a constante que aparece em (5.1) e R é a constante introduzida em (5.2)

O Lema 1.2 garante que $\Theta \neq \emptyset$.

Além disso, fixamos $\delta = \frac{\tau}{24R}$, e para $\mu > 0$

$$\mathcal{A}_\mu^\lambda = \{u \in \Theta_{2\delta} ; |J_\lambda(u) - c_\Upsilon| \leq \mu\}. \tag{6.1}$$

Observamos também que

$$w_\Upsilon \in \mathcal{A}_\mu^\lambda \cap J_\lambda^{c_\Upsilon},$$

mostrando que $\mathcal{A}_\mu^\lambda \cap J_\lambda^{c_\Upsilon} \neq \emptyset$. Na prroposição seguinte obteremos uma estimativa para $||J'_\lambda(u)||_{E'_\lambda}$ no conjunto $(\mathcal{A}^\lambda_{2\mu} \setminus \mathcal{A}^\lambda_\mu) \cap J^{c_\Upsilon}_\lambda$. Note que

$$\mathcal{A}^\lambda_{2\mu} \setminus \mathcal{A}^\lambda_\mu = \{u \in \Theta_{2\delta}; \mu < |J_\lambda(u) - c_\Upsilon| \leq 2\mu\}.$$

Proposição 6.1 *Para cada $\mu > 0$, existe $\Lambda_* \geq 1$ e $\sigma_0 > 0$ independente de λ tal que*

$$||J'_\lambda(u)||_{E'_\lambda} \geq \sigma_0, \text{ para } \lambda \geq \Lambda_* \text{ e } \forall u \in (\mathcal{A}^\lambda_{2\mu} \setminus \mathcal{A}^\lambda_\mu) \cap J^{c_\Upsilon}_\lambda. \tag{6.2}$$

Demonstração. A prova será feita por contradição, então assumiremos que existe $\lambda_n \to \infty$ e $u_n \in \left(\mathcal{A}^{\lambda_n}_{2\mu} \setminus \mathcal{A}^{\lambda_n}_\mu\right) \cap J^{c_\Upsilon}_{\lambda_n}$ tal que

$$||J'_{\lambda_n}(u_n)||_{E'_{\lambda_n}} \to 0.$$

Ora, mas desde que $u_n \in \left(\mathcal{A}^{\lambda_n}_{2\mu} \setminus \mathcal{A}^{\lambda_n}_\mu\right)$ temos que $(J_{\lambda_n}(u_n))$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. Pelo teorema de Bolzano-Weirstrass podemos afirmar que existe uma subsequência $(J_{\lambda_{n_k}}(u_{n_k}))$ de $(J_{\lambda_n}(u_n))$ tal que $(J_{\lambda_{n_k}}(u_{n_k}))$ converge. Então

$$J_{\lambda_{n_k}}(u_{n_k}) \to c \text{ e } ||J'_{\lambda_{n_k}}(u_{n_k})||_{E'_{\lambda_{n_k}}} \to 0.$$

Pela definição dada no Capítulo 3 a sequência $(J_{\lambda_{n_k}}(u_{n_k}))$ é uma sequência $(PS)_\infty$ e dos itens (i) e (ii) da Proposição 4.1, a menos de subsequência

$$u_{n_k} \to u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^3),\ ||u_{n_k}||_{\lambda_{n_k},\mathbb{R}^3\setminus\Omega_\Upsilon} \to 0 \text{ e } J_{\lambda_{n_k}}(u_{n_k}) \to I_\Upsilon(u).$$

onde $0 \leq u \in H^1_0(\Omega_\Upsilon)$ tal que u é solução para o problema $(P)_{\infty,\Upsilon}$.

Relembrando que $(u_{n_k}) \in \Theta_{2\delta}$, temos que

$$||u_{n_k}||_{\lambda_{n_k},\Omega'_j} > \frac{\tau}{12R} \forall j \in \Upsilon.$$

Então, fazendo $n_k \to +\infty$ e evocando (iv) da Proposição 4.1 afirmamos que

$$||u||_j \geq \frac{\tau}{12R} \forall j \in \Upsilon.$$

logo u é uma solução não nula do problema $(P)_{\infty,\Upsilon}$ ou seja $I'_\Upsilon(u) = 0$, então $u \in \mathcal{M}_\Upsilon$. Desta forma, $I_\Upsilon(u) \geq c_\Upsilon$. Por outro lado, desde que $(u_n) \in J^{c_\Upsilon}_{\lambda_n}$ tem-se que $J_{\lambda_n}(u_n) \leq c_\Upsilon$ e $J_{\lambda_n}(u_n) \to I_\Upsilon(u)$, então $I_\Upsilon(u) \leq c_\Upsilon$.

Assim, para n suficientemente grande, $J_{\lambda_n}(u_n)$ está suficientemente próximo de $I_\Upsilon(u) = c_\Upsilon$ e então

$$u_n \in \Theta_{2\delta} \text{ e } |J_{\lambda_n}(u_n) - c_\Upsilon| \leq \mu.$$

Mostrando assim que $u_n \in \mathcal{A}_\mu^{\lambda_n}$, obtendo assim uma contradição.

$\blacksquare$

Na sequência denotaremos por μ_1 o seguinte número

$$\min_{\mathbf{t} \in \partial([1/R^2,1]^l)} |I_\Upsilon(\gamma_0(\mathbf{t})) - c_\Upsilon| = \mu_1 > 0.$$

Também definiremos

$$\overline{B}_M(0) = \{u \in E_\lambda; ||u||_\lambda \leq M\},$$

onde $M > 0$ é uma constante suficientemente grande que não depende de λ tal que

$$||\gamma_0(\mathbf{t})||_\lambda \leq \frac{M}{2}, \text{ para todo } \mathbf{t} \in [1/R^2, 1]^l.$$

Por fim,

$$\mu^* = \min\left\{\mu_1, \delta, \frac{M}{2}\right\},$$

onde δ foi dado em 6.1.

A próxima proposição nos deixará em condições de demonstrar o teorema principal. Note que o início da demonstração de tal proposição está baseado no Lema de Deformação (ver [38]), todavia, modificamos os conjuntos utilizados no em tal lema. Por isso se faz necessário uma revisão nos argumentos que provam o Lema de Deformação.

Proposição 6.2 *Seja $\mu > 0$ suficientemente pequeno e $\Lambda_* \geq 1$ o mesmo número da proposição anterior. Então, para $\lambda \geq \Lambda_*$, existe uma solução u_λ de (A_λ) tal que $u_\lambda \in \mathcal{A}_\mu^\lambda \cap J_\lambda^{c_\Upsilon} \cap \overline{B}_{M+1}(0)$.*

Demonstração. Novamente vamos provar por contradição, então para $\lambda \geq \Lambda_*$, nossa prova partirá da afirmação de que não existe pontos críticos de J_λ em $\mathcal{A}_\mu^\lambda \cap J_\lambda^{c_\Upsilon} \cap \overline{B}_{M+1}(0)$. Afirmamos que existe uma constante $d_\lambda > 0$ tal que

$$||J'_\lambda(u)||_{E'_\lambda} \geq d_\lambda, \text{ para todo } u \in \mathcal{A}_\mu^\lambda \cap J_\lambda^{c_\Upsilon} \cap \overline{B}_M(0). \tag{6.3}$$

De fato, se não existisse tal constante, existiria uma sequência (u_n) em $\mathcal{A}_\mu^\lambda \cap J_\lambda^{c_\Upsilon} \cap \overline{B}_{M+1}(0)$ tal que $||J'_\lambda(u_n)||_{E_\lambda} \to 0$, e desde que $(J(u_n))$ é limitada em $\mathbb{R}$, passando a uma subsequência se necessário, teríamos

$$J_\lambda(u_n) \to c \text{ e } J'_\lambda(u_n) \to 0.$$

Mas pela Proposição 2.4 o funcional J_λ satisfaz a condição $(PS)_c$, logo existe uma subsequência de (u_n) que converge para u em $\mathcal{A}_\mu^\lambda \cap J_\lambda^{c_\Upsilon} \cap \overline{B}_{M+1}(0)$, assim da continuidade do funcional J'_λ, u seria ponto crítico de J_λ, uma contradição.

Além disso, a proposição anterior nos garante que

$$||J'_\lambda(u)||_{E'_\lambda} \geq \sigma_0, \text{ para todo } u \in \left(\mathcal{A}_{2\mu}^\lambda \setminus \mathcal{A}_\mu^\lambda\right) \cap J_\lambda^{c_\Upsilon}, \tag{6.4}$$

onde $\sigma_0 > 0$ não depende de λ.

No que segue, denotamos

$$A = \mathcal{A}_{2\mu}^\lambda \cap \Theta_{2\delta} \cap \overline{B}_{M+1}(0)$$
$$B = \mathcal{A}_{\frac{3}{2}\mu}^\lambda \cap \Theta_\delta \cap \overline{B}_M(0)$$

Considere $\Psi : E_\lambda \to \mathbb{R}$ é uma aplicação localmente lipschitziana definida por

$$\Psi(u) = \frac{d(u, E_\lambda \setminus A)}{d(u, E_\lambda \setminus A) + d(u, B)}, \qquad \text{(ver [38])}$$

donde segue que

$$\Psi(u) = 1, \text{ para } u \in \mathcal{A}_{\frac{3}{2}\mu}^\lambda \cap \Theta_\delta \cap \overline{B}_M(0),$$

$$\Psi(u) = 0, \text{ para } u \notin \mathcal{A}_{2\mu}^\lambda \cap \Theta_{2\delta} \cap \overline{B}_{M+1}(0)$$

e

$$0 \leq \Psi(u) \leq 1, \forall u \in E_\lambda.$$

Também consideraremos $H : J_\lambda^{c\Upsilon} \to E_\lambda$ dado por

$$H(u) = \begin{cases} -\Psi(u)\frac{Y(u)}{||Y(u)||}, \text{ para } u \in \mathcal{A}_{2\mu}^\lambda \cap \overline{B}_{M+1}(0), \\ 0, \text{ para } u \notin \mathcal{A}_{2\mu}^\lambda \cap \overline{B}_{M+1}(0), \end{cases}$$

onde Y é um campo vetorial pseudo-gradiente para J_λ em $\mathcal{K} = \{u \in E_\lambda; J_\lambda'(u) \neq 0\}$ (Definição B.4). Observe que de (6.3) e (6.4) que $J_\lambda'(u) \neq 0$, para $u \in \mathcal{A}_{2\mu}^\lambda \cap J_\lambda^{c\Upsilon} \cap \overline{B}_{M+1}(0)$, então pelo Lema B.1, H está bem definida.

Agora, desde que H é localmente Lipschitz (ver [38]) e

$$||H(u)|| \leq 1, \forall \lambda \geq \Lambda_* \text{ e } u \in J_\lambda^{c\Upsilon}.$$

O Teorema de Picard (Teorema B.21), juntamente com o Teorema B.22 garantem a existência de uma função contínua $\eta : [0, \infty) \times J_\lambda^{c\Upsilon} \to J_\lambda^{c\Upsilon}$ que é solução do seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\eta(t, u) = H(\eta) \\ \eta(0, u) = u \end{cases}$$

e então, da Definição B.4 e da regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dt}J_\lambda(\eta(t, u)) \leq \frac{1}{2}\Psi(\eta(t, u))||J_\lambda'(\eta(t, u))|| \leq 0 \tag{6.5}$$

$$\left\| \frac{d\eta}{dt} \right\|_\lambda = ||H(\eta)||_\lambda \leq 1. \tag{6.6}$$

Logo,

$$\eta(t, u) = u \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e } u \in J_\lambda^{c\Upsilon} \setminus \mathcal{A}_{2\mu}^\lambda \cap \overline{B}_{M+1}(0). \tag{6.7}$$

Iremos estudar separadamente duas aplicações que serão importantes no restante da demonstração

- A aplicação $\mathbf{t} \mapsto \eta(t, \gamma_0(\mathbf{t}))$, onde $\mathbf{t} = \{t_1, ..., t_l\} \in [1/R^2, 1]^l$.

Relembre que

$$\min_{\mathbf{t} \in \partial([1/R^2,1]^l)} |I_\Upsilon(\gamma_0(\mathbf{t})) - c_\Upsilon| = \mu_1 > 0$$

e que

$$\mu^* = \min\left\{\mu_1, \delta, \frac{M}{2}\right\}.$$

Então, para todo $\mathbf{t} \in \partial([1/R^2, 1]^l)$, se $\mu \in (0, \frac{\mu_*}{2})$

$$|J_\lambda(\gamma_0(\mathbf{t})) - c_\Upsilon| \geq \mu_1 \geq \frac{\mu_*}{2} \geq 2\mu.$$

Por (iii) da Proposição 5.1

$$J_\lambda(\gamma_0(\mathbf{t})) < c_\Upsilon, \forall \mathbf{t} \in \partial([1/R^2, 1]^l).$$

Então $\gamma_0(\mathbf{t}) \in J_\lambda^{c_\Upsilon}$, e portanto de (6.7), tem-se

$$\eta(t, \gamma_0(\mathbf{t})) = \gamma_0(\mathbf{t}), \forall \mathbf{t} \in \partial([1/R^2, 1]^l).$$

Portanto,

$$\eta(t, \gamma_0(\mathbf{t})) \in \Gamma_*, \text{ para cada } t \geq 0. \tag{6.8}$$

- A aplicação $\mathbf{t} \mapsto \gamma_0(\mathbf{t})$, onde $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_l) \in [1/R^2, 1]^l$.

Ressaltamos novamente que

$$\gamma_0(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{l} t_j R w_j \neq 0 \text{ em } \Omega_\Upsilon,$$

pois $w_\Upsilon \in \mathcal{N}_\Upsilon$. Além disso $J_\lambda(\gamma_0(\mathbf{t}))$ não depende de $\lambda \geq 1$, pois w_j está definido em Ω_j, para todo $j \in \Upsilon$.

Relembramos ainda, da demonstração da Proposição 5.1 e da Observação 5.1 que

$$J_\lambda(\gamma_0(\mathbf{t})) \leq c_\Upsilon, \forall \mathbf{t} \in [1/R^2, 1]^l$$

e

$$J_\lambda(\gamma_0(\mathbf{t})) = c_\Upsilon \Leftrightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}_R.$$

Portanto,

$$m_0 = \sup\left\{J_\lambda(u)); u \in \gamma_0([1/R^2, 1]^l \setminus \mathcal{A}_\mu^\lambda\right\},$$

é independente de λ e $m_0 < c_\Upsilon$.

Agora, observe da Definição C.4 e do Teorema B.14 que dados $u, v \in \overline{B}_M(0)$, tem-se

$$\left|\frac{J_\lambda(u) - J_\lambda(v)}{||u - v||}\right| \leq |J'_\lambda(v)w| \leq K_*,$$

onde $u = v + w$ e $K_* > 0$. Então,

$$|J_\lambda(u) - J_\lambda(v)| \leq K_*||u - v||, \text{ para todo } u, v \in \overline{B}_M(0). \tag{6.9}$$

Mostraremos que, para $T > 0$ suficientemente grande, vale

$$\max_{\mathbf{t}\in[1/R^2/1]^l} J_\lambda\left(\eta(T, \gamma_0(\mathbf{t}))\right) \leq \max\left\{m_0, c_\Upsilon - \frac{1}{2K_*}\sigma_0\mu\right\}. \tag{6.10}$$

De fato, escrevendo $u = \gamma_0(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in [1/R^2, 1]^l$, se $u \notin A_\mu^\lambda$ de (6.5), temos que a função $J_\lambda(\eta(t, u))$ é decrescente para $t \in [0, \infty)$, então

$$J_\lambda(\eta(t, u)) \leq J_\lambda(\eta(0, u)) = J_\lambda(u) \leq m_0, \forall t \geq 0,$$

e assim a equação (6.10) seria satisfeita.

Caso contrário, assumimos que $u \in \mathcal{A}_\mu^\lambda$ e definimos

$$\tilde{\eta}(t) = \eta(t, u),\ \tilde{d_\lambda} = \min\{d_\lambda, \sigma_0\} \text{ e } T = \frac{\sigma_0\mu}{K_*\tilde{d_\lambda}}\ .$$

Agora, analizaremos os seguintes casos:

Caso 1: $\tilde{\eta}(t) \in \mathcal{A}_{\frac{3}{2}\mu}^\lambda \cap \Theta_\delta \cap \overline{B}_M(0)$, $\forall t \in [0, T]$.

Caso 2: $\tilde{\eta}(t_0) \notin \mathcal{A}_{\frac{3}{2}\mu}^\lambda \cap \Theta_\delta \cap \overline{B}_M(0)$, para algum $t_0 \in [0, T]$.

Análise do Caso 1:

Neste caso, da definição de Ψ e da hipótese sobre J'_λ, teremos $\Psi(\tilde{\eta}(t)) = 1$ e $||J'_\lambda(\tilde{\eta}(t))|| \geq \tilde{d}_\lambda$ para todo $t \in [0,T]$. Assim,

$$J_\lambda(\tilde{\eta}(T)) = J_\lambda(u) + \int_0^T \frac{d}{ds} J_\lambda(\tilde{\eta}(t)) ds \leq c_\Upsilon - \frac{1}{2}\int_0^T \tilde{d}_\lambda ds,$$

isto é,

$$J_\lambda(\tilde{\eta}(T)) \leq c_\Upsilon - \frac{1}{2}\tilde{d}_\lambda T = c_\Upsilon - \frac{1}{2K_*}\sigma\mu,$$

mostrando assim (6.10).

Análise do Caso 2: Neste caso, obtemos uma estimativa para as seguintes situações:

(a): Existe $t_2 \in [0,T]$ tal que $\tilde{\eta}(t_2) \notin \Theta_\delta$. Fazendo $t_1 = 0$, temos que

$$||\tilde{\eta}(t_1) - \tilde{\eta}(t_2)|| \geq ||\tilde{\eta}(t_1)|| - ||\tilde{\eta}(t_2)|| \geq 2\delta - \delta = \delta > \mu.$$

Pois, por hipótese, $u = \gamma_0(\mathbf{t}) \in \mathcal{A}^\lambda_\mu$ e então $u \in \Theta_{2_\delta}$.

(b): Existe $t_2 \in [0,T]$ tal que $\tilde{\eta}(t_2) \notin \overline{B}_M(0)$. Fazendo $t_1 = 0$, temos que

$$||\tilde{\eta}(t_1) - \tilde{\eta}(t_2)|| \geq |\tilde{\eta}(t_2)|| - ||\tilde{\eta}(t_1)|| \geq M - \frac{M}{2} \geq \mu.$$

Pois, por definição, $u = \gamma_0(\mathbf{t}) \in \overline{B}_{\frac{M}{2}}(0)$.

(c): $\tilde{\eta}(t) \in \Theta_\delta \cap \overline{B}_M(0)$ para todo $t \in [0,T]$, e existem $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ tal que $\tilde{\eta}(t) \in \mathcal{A}^\lambda_{\frac{3\mu}{2}} \setminus \mathcal{A}^\lambda_\mu$ para todo $t \in [t_1, t_2]$ com

$$|J_\lambda(\tilde{\eta}(t_1)) - c_\Upsilon| = \mu \text{ e } |J_\lambda(\tilde{\eta}(t_2)) - c_\Upsilon| = \frac{3\mu}{2}.$$

De (6.9), temos

$$||\tilde{\eta}(t_2) - \tilde{\eta}(t_1)|| \geq \frac{1}{K_*}|J_\lambda(\tilde{\eta}(t_2)) - J_\lambda(\tilde{\eta}(t_1))| \geq \frac{3\mu}{2K_*} - \frac{\mu}{K_*} = \frac{\mu}{2K_*}.$$

As estimativas obtidas em **(a)**,**(b)** e **(c)** mostram que existe $C > 0$ tal que $||\tilde{\eta}(t_2) - \tilde{\eta}(t_1)|| \geq C\mu$. Então, utilizando o teorema do valor médio em $\tilde{\eta} : [t_1, t_2] \to J_\lambda^{c_\Upsilon}$, obtemos

$$\frac{||\tilde{\eta}(t_2) - \tilde{\eta}(t_1)||}{|t_2 - t_1|} = ||\tilde{\eta}'(t_0)||,$$

isto é,

$$|t_2 - t_1| \leq C_*\mu,$$

onde $C_* = \max\{\mu, \frac{\mu}{2K_*}\}$.

Assim, de (6.5), temos

$$J_\lambda(\tilde{\eta}(T)) \leq J_\lambda(u) - \int_0^T \Psi(\tilde{\eta}(s))||J_\lambda'(\tilde{\eta}(s))||ds.$$

O qual por (6.4), implica em

$$J_\lambda(\tilde{\eta}(T)) \leq c_\Upsilon - \int_{t_1}^{t_2} \sigma_0 ds = c_\Upsilon - \sigma_0(t_2 - t_1) \leq c_\Upsilon - C_*\sigma_0 \leq c_\Upsilon - \frac{1}{2K_*}\sigma_0\mu,$$

mostrando assim (6.10).

Fixando $\hat{\eta}(t_1, ..., t_l) = \eta(T, \gamma_0(t_1, ..., t_l))$. Por (6.8), $\hat{\eta} \in \Gamma_*$, levando à

$$b_{\lambda,\Upsilon} \leq \max_{(t_1,...,t_l)\in[1/R^2,1]} J_\lambda(\hat{\eta}(t_1, ..., t_l)) \leq \max\left\{m_0, c_\Upsilon - \frac{1}{2K_*}\sigma_0\mu\right\} < c_\Upsilon,$$

o qual contradiz o fato de que $b_{\lambda,\Upsilon} \to c_\Upsilon$.

■

Para conforto do leitor, enunciaremos novamente o Teorema principal de nosso trabalho. Em seguida, faremos sua demonstração.

[Teorema Principal]: *Assuma que* (a_1) *e* $(f_1) - (f_4)$ *valem. Então, existe* $\lambda_0 > 0$ *com a seguinte propriedade: para qualquer subconjunto não vazio* Υ *de* $\{1, ..., k\}$ *e* $\lambda \geq \lambda_0$*, o problema* (P_λ) *tem uma solução positiva* u_λ*. Além disso, se fixarmos o subsconjunto* Υ*, então para qualquer sequência* $\lambda_n \to \infty$ *podemos extrair uma subsequência* (λ_{n_i}) *tal que* $(u_{\lambda_{n_i}})$ *converge fortemente em* $H^1(\mathbb{R}^3)$ *para a função u, tal que,* $u = 0$ *fora de* $\Omega_\Upsilon = \cup_{j\in\Upsilon}\Omega_j$*, e* $u_{|\Omega_\Upsilon}$ *é solução de energia mínima para o problema não local*

$$(P)_{\infty,\Upsilon}\ \begin{cases} -\Delta u + u + \phi_u u = f(u) \text{ em } \Omega_\Upsilon, \\ u(x) > 0,\ \forall x \in \Omega_j \text{ e } \forall j \in \Upsilon, \\ u \in H_0^1(\Omega_\Upsilon). \end{cases}$$

Demonstração. Segundo a Proposição 6.2, para $\mu \in (0,\mu^*)$ e $\Lambda_* \geq 1$, existe uma solução u_λ para (A_λ) tal que $u_\lambda \in \mathcal{A}_\mu^\lambda \cap J_\lambda^{c_\Upsilon} \cap \overline{B}_M(0)$, para todo $\lambda \geq \Lambda_*$.

Afirmação: Existe $\lambda_0 \geq \Lambda_*$ e $\mu_0 > 0$ suficientemente pequeno, tal que u_λ é solução para (P_λ) para $\lambda \geq \lambda_0$ e $\mu \in (0,\mu_0)$.

De fato, fixado $\mu \in (0,\mu_0)$, assuma por contradição que existe $\lambda_n \to \infty$, tal que (u_{λ_n}) não é solução para (SP_{λ_n}). Da proposição 6.2, a sequência (u_{λ_n}) verifica:

(a) $J'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pois, (u_{λ_n}) é solução de (A_{λ_n});

(b) $J'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \to d \leq c_\Upsilon$. Pois $u_{\lambda_n} \in J_{\lambda_n}^{c_\Upsilon}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(c) $||u_{\lambda_n}||_{\lambda_n,\mathbb{R}^3\setminus\Omega_\Upsilon} \to 0$. Pois de (a) e (b), (u_{λ_n}) é uma sequência $(PS)_\infty$ e se verifica (v) da Proposição 4.1.

O item (b) nos garante que podemos usar a Proposição 3.1 e então concluir que que u_{λ_n} é solução de (SP_{λ_n}), para valores de n suficientemente grandes. Temos assim uma contradição. Então a afirmação feita acima é verdadeira.

Falta provar a segunda parte do teorema. Para isto, tomemos uma sequência (u_{λ_n}) satisfazendo os limites acima, usando novamente a Proposição 4.1, temos que $u_{\lambda_n} \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, onde $u = 0$ fora de Ω_Υ e $u_{|\Omega_j} \neq 0$, para $j \in \Upsilon$. E u é uma solução positiva para

$$(P)_{\infty,\Upsilon}\ \begin{cases} -\Delta u + u + \phi_u u = f(u) \text{ em } \Omega_\Upsilon, \\ u(x) > 0,\ \forall x \in \Omega_j \text{ e } \forall j \in \Upsilon, \\ u \in H_0^1(\Omega_\Upsilon), \end{cases}$$

e então,

$$I_\Upsilon(u) \geq c_\Upsilon.$$

Por outro lado, sabemos que

$$J'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \to I_\Upsilon(u),$$

que pelo item (c) implica em

$$I_\Upsilon(u) = d.$$

Desde que $d \leq c_\Upsilon$, deduzimos que

$$I_\Upsilon(u) = c_\Upsilon.$$

Mostrando assim que u é solução de energia mínima para o problema $(P)_{\infty,\Upsilon}$. Ou seja, (u, ϕ_u) é solução de energia mínima para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \phi u = f(u) \text{ em } \Omega_\Upsilon, \\ -\Delta \phi = u^2 \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ u \in H_0^1(\Omega_\Upsilon). \end{cases}$$

$\blacksquare$

Apêndice A

Resultados sobre ϕ_u

Primeiramente, vamos mostrar que para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ existe uma única $\phi = \phi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, solução da equação de Poisson

$$-\Delta\phi = u^2.$$

Para isso, definimos, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ o funcional $\varphi_u : D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, dado por:

$$\varphi_u(v) = \int_{\mathbb{R}^3} u^2 v dx.$$

Notemos que das imersões contínuas $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ e $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ para $p \in [2,6]$ e da desigualdade de Hölder que o funcional φ_u está bem definido. Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u^2| v dx \leq |u^2|_{\frac{6}{5}} |v|_6 = |u|^2_{\frac{12}{5}} |v|_6 \leq C|u|^2_{\frac{12}{5}} ||v||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}. \tag{A.1}$$

o que mostra que $\varphi_u \in \mathcal{L}(D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$. Então, pelo Teorema da Representação de Riesz (Teorema B.17), existe um único $\phi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\varphi_u(v) = \int_{\mathbb{R}^3} u^2 v dx = \langle \phi_u, v \rangle_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}, \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \tag{A.2}$$

e

$$||\phi_u||_{\mathcal{L}(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3))} = ||\varphi_u||_{\mathcal{L}(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3))}.$$

No próximo lema mostraremos uma caracterização para função ϕ_u, como também algumas propriedades importantes.

Lema A.1 *Para qualquer $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, valem as seguintes propriedades:*

i) $\phi_u(x) = \dfrac{1}{3\omega_3}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(y)}{|x-y|}dy$ *para todo* $x \neq y \in \mathbb{R}^3$;

ii) Existe $C > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi_u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx \leq C||u||^4_{H^1(\mathbb{R}^3)};$$

iii) $\phi_u \geq 0$ $\forall u \in H^1(\mathbb{R}^3)$;

iv) $\phi_{tu} = t^2\phi_u$, $\forall t > 0$;

v) Se $u_n \rightharpoonup u$ *em* $H^1(\mathbb{R}^3)$, *então* $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$ *em* $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ *e*

$$\lim \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx;$$

vi) Se $u_n \to u$ *em* $H^1(\mathbb{R}^3)$, *então* $\phi_{u_n} \to \phi_u$ *em* $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. *Além disso,*

$$\lim \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx.$$

Demonstração.

(i) Ver [23].

(ii) Da definição de produto interno em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ e de (A.2) temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi_u|^2 dx = \langle \phi_u, \phi_u \rangle_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = \varphi_u(\phi_u) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx.$$

De (A.1) $||\phi_u|| = ||\varphi_u|| \leq C|u|^2_{\frac{12}{5}}$.

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx \leq |u|^2_{\frac{12}{5}} |\phi_u|_6 \leq C||u||^4_{H^1(\mathbb{R}^3)}.$$

(iii) Segue diretamente da caracterização dada em (i).

(iv) Veja que

$$-\Delta\phi_{tu} = t^2u^2 = -t^2\Delta\phi_u = -\Delta(t^2\phi_u).$$

Da unicidade da solução, segue o resultado desejado.

(v) Para mostrar que $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$ temos que mostrar que para todo $J \in D^{-1,2^*}$ tem-se $J(\phi_{u_n}) \to J(\phi_u)$, mas pelo Teorema da Representação de Riesz, existe $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ tal que:

$$J(\phi_{u_n}) = \langle v, \phi_{u_n}\rangle_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}.$$

Das observações feitas anteriormente,

$$\langle v, \phi_{u_n}\rangle_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 v dx.$$

Então é suficiente mostrar que

$$\langle v, \phi_{u_n}\rangle_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 v dx \to \int_{\mathbb{R}^3} u^2 v dx = \langle v, \phi_u\rangle_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}, \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3).$$

Seja $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, então existe $R > 0$ de modo que $supp(v) \subset B_R(0)$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 v dx = \int_{B_R(0)} u_n^2 v dx.$$

Da imersão compacta $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ com $p \in (2, 6)$, tem-se

$$\int_{B_R(0)} u_n^2 v dx \to \int_{B_R(0)} u^2 v dx, \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Desde que $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^3)}$, a convergência acima é válida para todo $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ e então $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$. Daí, segue que diretamnete que $\varphi_{u_n}(v) \to \varphi_u(v)$ para cada $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, então

$$|\varphi_u(v)| = lim||\varphi_{u_n}(v)|| \leq lim|\varphi_{u_n}||v|.$$

Assim $\lim ||\varphi_{u_n}||^2 \geq ||\varphi_u||^2$ da isometria $||\varphi_u|| = ||\phi_u||$

$$\lim ||\phi_u||^2 = \lim\langle \phi_u, \phi_u\rangle_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx$$

(vi) Inicialmente, queremos mostrar que

$$||\phi_{u_n} - \phi_u||^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \to 0,$$

equivalentemente

$$\langle \phi_{u_n} - \phi_u, \phi_{u_n} - \phi_u \rangle_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \to 0,$$

ou seja,

$$\langle \phi_{u_n}, \phi_{u_n} - \phi_u \rangle_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} - \langle \phi_u, \phi_{u_n} - \phi_u \rangle_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \to 0.$$

De (A.2), isto é o mesmo que

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_n^2(\phi_{u_n} - \phi_u)dx - \int_{\mathbb{R}^3} u^2(\phi_{u_n} - \phi_u)dx \to 0.$$

Isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^3} [\phi_{u_n}(u_n^2 - u^2) - \phi_u(u_n^2 - u^2)]dx \to 0,$$

que é equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\phi_{u_n} - \phi_u)(u_n^2 - u^2)dx \le |\phi_{u_n} - \phi_u|_6 |u_n^2 - u^2|_{\frac{5}{6}} \le C|\phi_{u_n} - \phi_u|_6 ||u_n^2 - u^2||_{H^1(\mathbb{R}^3)} \to 0. \tag{A.3}$$

Donde segue que $\phi_{u_n} \to \phi_u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$.

Note que em (A.3) foi usado a desigualdade de Hölder e as imersões contínuas $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ e $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$, com $2 \le p \le 6$. E também o fato de que (ϕ_{u_n}) é uma sequência limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$, pois $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e pelo item anterior $\phi_{u_n} \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$.

Usando novamente a desigualdade de Hölder e as imersões contínuas $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ e $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$, com $2 \le p \le 6$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\phi_{u_n} u_n^2 - \phi_u u^2)dx = \int_{\mathbb{R}^3} [(\phi_{u_n} u_n^2 - \phi_u u^2) + (\phi_{u_n} u^2 - \phi_{u_n} u^2)]dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}(u_n^2 - u^2)dx + \int_{\mathbb{R}^3} u^2(\phi_{u_n} - \phi_u)dx \le |\phi_{u_n}|_6 |u_n^2 - u^2|_{\frac{5}{6}} + |u^2|_{\frac{5}{6}} |\phi_{u_n} - \phi_u|_6 \to 0.$$

Concluindo então que

$$\lim \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx.$$

■

Apêndice B

Resultados usados

Neste apêndice iremos apresentar algumas definições e resultados gerais que foram usados na dissertação.

Teorema B.1 ***(Teorema de Miranda):*** *Dado* $G = \{x \in \mathbb{R}^N : r < x_i < R,\ 1 \leq i \leq N\}$ *e suponha que a aplicação* $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, ..., f_N) : \overline{G} \to \mathbb{R}^N$ *é contínua no fecho* $\overline{G}$ *de* G *tal que* $\boldsymbol{F}(x) \neq \boldsymbol{0} = (0, ..., 0)$ *para todo* x *na fronteira de* G*, e*

i) $fi(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, r, x_{i+1}, ..., x_N) \geq 0$ *para* $1 \leq i \leq N$ *e*

ii) $fi(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, R, x_{i+1}, ..., x_N) \leq 0$ *para* $1 \leq i \leq N$

Então $\boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{0}$ *tem uma soluão em* G*.*

Demonstração. Uma prova curta deste teorema pode ser encontrada em [37].

Teorema B.2 ***(Lema da Compacidade de Strauss):*** *Sejam* $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções contínuas satisfazendo*

(P.1) $\frac{P(s)}{Q(s)} \to 0$ *quando* $|s| \to \infty$*.*

Seja $(u_n) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções mensuráveis tal que*

(P.2) $\sup_n \int_{\mathbb{R}^n} |Q(u_n)|dx < \infty$

e

(P.3) $P(u_n(x)) \to v(x)$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$.

Então para qualquer conjunto boreliano B limitado vale

$$\int_B |P(u_n(x)) - v(x)|dx \to 0$$

Demonstração. Ver Teorema A.I em [11].

Teorema B.3 ***(Teorema de Vainberg:)*** *Sejam* (f_j) *uma sequência de funções em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tais que*

$$f_j \to f \ \text{em } L^p(\Omega)$$

Então, existe $(f_{j_k}) \subset (f_j)$ *e uma função* $g \in L^p(\Omega)$ *tal que*

$$|f_{j_k}(x)| \leq g(x) \ q.t.p \ \text{em } \Omega$$

e

$$f_{j_k}(x) \to f(x) \ q.t.p \ \text{em } \Omega$$

Demonstração. Ver [9]

Teorema B.4 ***(Lema de Fatou):*** *Seja* (f_n) *uma sequência de funções mensuráveis, com relação a uma medida* μ *, tal que* $f_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então*

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

Demonstração. Ver [9].

Corolário B.1 *Seja* $f_n : E \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções mensuráveis convergindo pra* f*, tal que*

$$\int_E f_n \leq K.$$

Então

$$\int_E f \leq K.$$

Teorema B.5 *Seja $f : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que $x \mapsto f(t,x)$ é mensurável para cada $t \in [a,b]$ e (X,ϖ) é um espaço mensurável. Suponha que para algum $t_0 \in [a,b]$, a função $x \mapsto f(x,t_0)$, é integrável em X, $\partial f/\partial t$ existe em $X \times [a,b]$, e existe uma função g integrável em X tal que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x).$$

Então a função F definida por

$$F(t) = \int_X f(x,t)d\varpi,$$

é diferenciável em $[a,b]$ e

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\int_X f(x,t)d\varpi = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\varpi.$$

Demonstração. Ver [9].

Teorema B.6 *(Desigualdade de Hölder): Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $p \geq 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Demonstração. Ver [9].

Teorema B.7 *(Desigualdade de Young): Seja $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ (a,b > 0).$$

onde $a, b > 0$. A igualdade só ocorre se, e somente se, $a^p = b^q$.

Demonstração. Ver [19].

Teorema B.8 ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue):*** *Seja* (f_n) *uma sequência de funções integráveis na qual convergem q.t.p para alguma função mensurável* f. *Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* n, *então* f *é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

Demonstração. Ver [9].

Teorema B.9 *(**Teorema da função inversa**:) Sejam* $U \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto e* $f : U \to \mathbb{R}^N$ *de classe* $C^k (1 \leq k \leq \infty)$ *tal que, em um ponto* $x_0 \in U$, $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ *é um isomorfismo. Então* f *é um difeomorfismo de classe* C^k *de uma vizinhança* V *de* x_0 *sobre uma vizinhança* W *de* $f(x_0)$.

Demonstração. Ver [26].

Teorema B.10 *(**Teorema da função implícita**:) Dado* A *um aberto em* $\mathbb{R}^{r+n}$, *seja* $f : A \to \mathbb{R}^n$ *de classe* $C^k (k \geq 1)$, *onde* $f = f(x, y)$ *com* $x \in \mathbb{R}^r$ *e* $y \in \mathbb{R}^n$. *Suponha que **(a,b)** é um ponto de* A *tal que* $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ *e*

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0$$

Então existe uma vizinhança B *de* $\boldsymbol{a}$ *em* $\mathbb{R}^r$ *e uma única função contínua* $g : B \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $g(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$ *e*

$$f(x, g(x)) = 0$$

para todo $x \in B$. *Além disso, a função* g *também é de classe* C^k

Demonstração. Ver [30].

Teorema B.11 ***(Teorema do Valor Intermediário):*** *Se uma função real* f *definida num intervalo* $[a, b]$ *é continua, então qualquer ponto* d *tal que* $f(a) \leq d \leq f(b)$ *ou* $f(a) \geq d \geq f(b)$ *existe algum ponto* c *do intervalo* $[a, b]$, *com* $f(c) = d$

Demonstração. Ver [27]

Teorema B.12 ***(Teorema de Bolzano-Weirstrass):*** *Se (x_n) é uma sequência de números reais limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|x_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então (x_n) admite uma subsequência convergente*

Demonstração. Ver [27]

Teorema B.13 ***(Teorema de Borel Lebesgue):*** *Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um compacto. Então, toda cobertura aberta de $K \subset \cup_{\lambda \in L} A_\lambda$ admite uma subcobertura finita*

$$K \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup ... \cup A_{\lambda_i}.$$

Demonstração. Ver [27]

Teorema B.14 *dados X e Y espaços vetorias normados. Uma aplição linear $T : X \to Y$ é contínua se, e somente se, para todo conjunto limitado $B \subset X$, sua imagem $T(B)$ é limitada em Y.*

Demonstração. Ver [31].

Definição B.1 *(Ver [31])(Convergência fraca): Seja X um espaço vetorial normado e $(x_n) \subset X$. Dizemos que x_n converge fraco em X, se existe $x \in X$ verificando:*

$$f(x_n) \to f(x) \quad em \quad \mathbb{R},\ \forall f \in X'.$$

Neste caso, x é chamado limite fraco de x_n em X, e denotamos $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema B.15 *(Ver [31]): Seja (x_n) uma sequência fracamente convergente num espaço vetorial normado, isto é, existe $x \in X$ tal que*

$$x_n \rightharpoonup x \quad em \quad X.$$

Então,

a) O limite fraco x de (x_n) é único;

b) Toda subsequência $(x_{nj}) \subset (x_n)$ converge para x;

c) A sequência (x_n) é limitada.

Demonstração. Ver [31].

Teorema B.16 *(**Alaoglu**): Se X é um espaço normado, então a bola fechada $\overline{B}_{X^*} = \{f \in X^* : ||f|| \leq 1\}$ é um espaço de Hausdorff compacto na topologia fraca**

Demonstração. Ver [31].

Teorema B.17 *(**Teorema da Representação de Riesz**): Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{H}'$ seu dual. A aplicação $\upsilon : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, $\upsilon(x) = f_x$, para cada $x \in \mathcal{H}$, dada por*

$$\upsilon(x)(y) = f_x(y) = \langle x, y \rangle, \text{ para todo} y \in \mathcal{H},$$

é uma isometria sobrejetora em $\mathcal{H}'$.

Demonstração. Ver [31].

Definição B.2 *(Ver [1])(Imersão contínua): Dizemos que o espaço normado $(X, \| \ \|_x)$ está imerso continuamente no espaço $(Y, \| \ \|_y)$ e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ se:*

i) X for subespaço vetorial de Y;

ii) A aplicação identidade

$$\begin{aligned} i : \ X \ &\to \ Y \\ x \ &\mapsto \ i(x) = x \end{aligned}$$

é contínua, isto é, existe $M > 0$ tal que $\|i(x)\|_Y \leq M\|x\|_X, \ \forall x \in X$.

Definição B.3 *(ver [31]) Um operador linear $T : X_1 \to X_2$ é compacto, se a imagem $T(A)$, de todo subconjunto limitado $A \subset X_1$, é precompacta em X_2, ou seja, seu fecho é compacto em X_2.*

Teorema B.18 *(Imersões de Sobolev): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 2$, então as seguintes imersões são contínuas:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^s(\Omega) \quad ; \quad 2 \leq s \leq 2^* = \frac{2N}{N-2} \quad para \quad N \geq 3 \\ L^s(\Omega) \quad ; \quad 1 \leq s < \infty \quad para \quad N=1 \quad ou\ N = 2 \end{cases}$$

Demonstração. Ver [29].

Teorema B.19 *(Imersão compacta de Rellich-Kondrachov): Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um Domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, as seguintes imersões são compactas:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^s(\Omega) \quad ; \quad 1 \leq s < 2^* = \frac{2N}{N-2} \quad para \quad N \geq 3 \\ L^s(\Omega) \quad ; \quad 1 \leq s < \infty \quad para \quad N=1 \quad ou\ N = 2 \end{cases}$$

Demonstração. Ver [13].

Teorema B.20 ***(Desigualdade de Poincaré):*** *Se Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, então existe $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega |u|^2 \leq c \int_\Omega |\nabla u|^2,$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Ver [13].

Definição B.4 *(Ver [38]) Seja M um espaço métrico, X um espaço normado e $h : M \to X' \setminus \{0\}$ uma função contínua. Um campo vetorial g é um pseudo-gradiente para h em M se $g : M \to X$ é uma função contínua e localmente Lipschitziana tal que para todo $u \in M$,*

$$||g(u)|| \leq 2||h(u)|| \ e \ \langle h(u), g(u)\rangle \geq ||h(u)||^2.$$

Lema B.1 *Seja M um espaço métrico, X um espaço normado e $h : M \to X' \setminus \{0\}$ uma função contínua. Então existe um campo pseudo-gradiente para h em M.*

Demonstração. Ver [38] Lema 2.2.

Teorema B.21 *Seja E um espaço de Banach e $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_E(x_0; b)} \subset \mathbb{R} \times E \to E$ uma aplicação limitada, contínua, lipschitiziana com relação a segunda variável. Então existe uma única solução do problema de valor inicial (PVI)*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$
$$x(t_0) = x_0,$$

definida no intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$ e $M = \sup\{||f(t, x)||_E, (t, x) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_E(x_0; b)}\}$.

Demonstração. Ver [36].

Teorema B.22 *Seja X um espaço de Banach, e f contínua definida em $X \times \mathbb{R}$ e tal que $||f|| < M$. Então toda solução de*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t, u) = f(\sigma(t, u)) \\ \sigma(0, u) = u \end{cases}$$

é contínua e pode ser prolongada por toda a reta.

Demonstração. Ver [36].

Apêndice C

Alguns resultados de Teoria do Grau

Neste apêndice, daremos a definição de grau topógico de Brouwer. E mostraremos as propriedades do grau topológico que foram usadas em nosso trabalho. Para as demonstrações que aqui serão omitidas e para uma abordagem mais completa veja [2].

Definição C.1 *Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, e $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, definimos o grau topológico de Brouwer de f com relação a Ω em um ponto regular $p \notin f(\partial\Omega)$ como:*

$$\deg(f, \Omega, p) = \begin{cases} 0, \;\; se \;\; f^{-1}(p) = \emptyset, \\ \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(p)} sgn(det J_f(x)), \;\; se \;\; f^{-1}(p) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Onde $J_f(x)$ é a matriz jacobiana da função f no ponto x e sgn é a função sinal definida por:

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, \;\; se \;\; t > 0, \\ 0, \;\; se \;\; t < 0. \end{cases}$$

Ainda falta justificar porque o grau topólogico definido acima está de fato bem definido, isto é, que o somatório $\sum_{x\in f^{-1}(p)} sgn(detJ_f(x)) < \infty$, e tal fato só ocorre se o conjunto $f^{-1}(p)$ é finito. Veja que p é um valor regular de f então para todo $x \in f^{-1}(p)$ tem-se $\det J_f(x) \neq 0$ logo a transformação linear $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, assim do Teorema da Aplicação Inversa f é um difeomorfismo de uma vizinhança U de x em uma vizinhança V de b, portanto $f^{-1}(p)$ é discreto, pois dado $x' \neq x$ em U da injetividade de $f_{|U}$, $f(x') \neq p$. Logo, $f^{-1}(p)$ é fechado em $\overline{\Omega}$ que por sua vez é compacto, assim $f^{-1}(p)$ também é compacto. Usando o Teorema de Borel-Lebesgue vemos facilmente que o conjunto $f^{-1}(p)$ é finito, mostrando que (C.1) está bem definida.

Definição C.2 *Dado* $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *e seja* $b \notin f(\partial\Omega)$. *Considere* $(f_n) \subset C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *tal que* $f_n \to f$ *em* $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. *Define-se:*

$$\deg(f, \Omega, b) = \lim_{n\to\infty} \deg(f_n, \Omega, b).$$

Além disso, é possível provar que a definição não depende da escolha particular de (f_n).

Proposição C.1 *Se* $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *e* $p \notin f(\Omega)$ *então* $deg(f, \Omega, p) = 0$. *Equivalentemente, se* $deg(f, \Omega, p) \neq 0$, *então existe* $x \in \Omega$ *tal que* $f(x) = p$.

Proposição C.2 *Seja* $f, g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *tais que* $f = g$ *em* $\partial\Omega$, *seja também* $p \notin f(\partial\Omega)$, *então*

$$deg(f, \Omega, p) = deg(g, \Omega, p).$$

Proposição C.3 *Sejam* $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ *e* $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$, *considere* $f_1 \in (\overline{\Omega_1}, \mathbb{R}^{n_1})$ *e* $f_2 \in (\overline{\Omega_2}, \mathbb{R}^{n_2})$ *onde* $p_1 \notin f_1(\partial\Omega_1)$ *e* $p_2 \notin f_2(\partial\Omega_2)$. *Então,*

$$\deg((f_1, f_2), \Omega_1 \times \Omega_2, (p_1, p_2)) = \deg(f_1, \Omega_1, p_1) \deg(f_2, \Omega_2, p_2).$$

Apêndice D

Funcionais Diferenciáveis

Neste apêndice, detalharemos a diferenciabilidade dos funcionais utilizados em nosso trabalho. As técnicas utilizadas aqui podem ser encontradas em [20].

Definição D.1 *Seja X um espaço de Banach e $U \subset X$ aberto, considere o funcional $I : U \to X$. Este funcional possui derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T_0 \in X'$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u + tv) - I(u) - T_0 v}{t} = 0, \text{ para todo } v \in X.$$

Definição D.2 *Seja X um espaço de Banach e $U \subset X$ aberto, considere o funcional $I : U \to X$. Este funcional possui derivada de Fréchet no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T \in X'$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u + v) - I(u) - Tv}{||v||} = 0, \text{ para todo } v \in X.$$

Lema D.1 *Seja $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional definido em um espaço de Banach X. Se a derivada de Gateaux é contínua em X', então as derivadas de Gateaux e Fréchet coincidem e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Denotamos por $I'(u)$ a derivada de Gateaux no ponto $u \in X$. Agora, consideremos

$$r(v) = I(u + v) - I(u) - I'(u)v.$$

Queremos mostrar que

$$\frac{|r(v)|}{||v||} \to 0 \text{ quando } ||v|| \to 0. \tag{D.1}$$

Defina $\Phi(t) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi(t) = I(u + tv).$$

Como,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(\xi + t) - \Phi(\xi)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{I(u + \xi v + tv) - I(u + \xi v)}{t} = I'(u + \xi v)v,$$

temos que Φ é uma função diferenciável, pois I é Gateaux diferenciável.

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\kappa \in (0, 1)$ tal que

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\kappa).$$

Então,

$$I(u + v) - I(u) = I'(u + \kappa v)v.$$

Por (D.1)

$$r(v) = I'(u + \kappa v)v - I'(u)v = (I'(u + \kappa v) - I'(u))v.$$

Consequentemente,

$$|r(v)| \leq ||I'(u + \kappa v) - I'(u)||||v||.$$

Da continuidade da derivada de Gateaux em X' segue o resultado desejado.

$\blacksquare$

Proposição D.1 *O funcional $I : E \to \mathbb{R}$ dado por*

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(u)dx,$$

é tal que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ com

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)uvdx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u uvdx - \int_{\mathbb{R}^3} f(u)vdx,\ \forall u, v \in E.$$

Lembrando que onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ e E é um subespaço vetorial de $H^1(\mathbb{R}^3)$

$$E = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} V(x)|u|^2 dx < \infty\}$$

munido da norma

$$||u|| = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração.

Vamos considerar $I(u) = I_1(u) + I_2(u) - I_3(u)$ com $I_1(u) = \frac{1}{2}||u||^2$, $I_2(u) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx$ e $I_3(u) = \int_{\mathbb{R}^3} F(u)dx$.

Primeiramente vejamos que o funcional I está de fato bem definido. Ora, $u \in E$, então $I_1(u) = \frac{1}{2}||u||^2_\lambda < \infty$, temos também por (ii) do Lema A.1 que

$$I_2(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx \leq C||u||^4_{H^1(\mathbb{R}^3)} < \infty.$$

Da condição de crescimento descrita em (2.3), temos que o funcional I_3 está bem definido.

Agora vamos calcular a derivada de Gateaux de I_1, representaremos sua derivada por DI_1,

$$\frac{I_1(u+tv) - I_1(u)}{t} = \frac{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u + tv|^2 + V(x)|u+tv|^2)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)dx}{t}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}[\nabla(u+tv)\nabla(u+tv)+V(x)(u+tv)^2]dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)dx}{t}$$

$$= \frac{1}{2t}\left[2t\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\nabla v+V(x)uv)dx + t^2\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v|^2+V(x)|u|^2dx\right].$$

Portanto,

$$DI_1(u)v = \lim_{t\to 0}\frac{I_1(u+tv)-I_1(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\nabla v+V(x)uv)dx.$$

Mostraremos agora que o operador DI_1 é contínuo. Seja (u_n) uma sequência em E tal que $u_n \to u$ em E.

Assim, para cada $v \in E$, com $||v|| \leq 1$ temos

$$|[DI_1(u_n)-DI_1(u)]v| = \left|\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u_n\nabla v - \nabla u\nabla v + V(x)(u_nv-uv)\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n\nabla v-\nabla u\nabla v| + V(x)|u_nv-uv|.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|[DI_1(u_n)-DI_1(u)]v| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n-\nabla u|^2+V(x)|u_n-u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v|^2+V(x)|v|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= ||u_n-u||||v|| \to 0.$$

Logo,

$$||DI_1(u_n)-DI_1(u_n)||_{E'} = \int \sup_{||v||\leq 1}|[DI_1(u_n)-DI_1(u)]v| \leq ||u_n-u|| \to 0.$$

Vamos calcular agora a derivada de Gateaux de I_2, que representada por DI_2

$$DI_2(u)v = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u+tv}(u+tv)^3 - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2}{t}.$$

Como $\Delta\phi_{u+tv} = (u+tv)^2$, por (iv) do Lema (A.1) tem-se que $-\Delta\phi_{u+tv} = -\Delta\phi_u - t^2\phi_v - t\Delta\phi_{\sqrt{2uv}}$. Então

$$DI_2(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(\phi_u + t^2\phi_v + t\phi_{\sqrt{2uv}})(u+tv)^2 - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} 2uv\phi_u + t\phi_u v + t\phi_v u^2 + 2t^2\phi_v uv + \phi_{\sqrt{2uv}}u^2 + 2t\phi_{uv} + t^2\phi_{\sqrt{2uv}}v^2$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} 2uv\phi_u + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{\sqrt{2uv}}u^2.$$

Da caracterização de ϕ_u dada em (i) do Lema A.1, tem-se

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u uv + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} u^2\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{3\omega_3}\frac{2uv}{|x-y|}dx\right)dy.$$

Pelo Teorema de Fubini,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u uv + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} 2uv\phi_u.$$

Assim,

$$DI_2(u)v = \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u uv.$$

Dada uma sequência (u_n) em E tal que $u_n \to u$ em E, afirmamos que $DI_2(u_n) \to DI_2(u)$ em E', de fato, dado $v \in E$, tem-se

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n v - \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u uv\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n v + (\phi_{u_n}uv) - \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u uv - (\phi_{u_n}uv)\right|$$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}v(u_n - u) + \int_{\mathbb{R}^3}(\phi_{u_n} - \phi_u)uv\right|.$$

de Usando a desigualde de Hölder, as imersões de Sobolev e a imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}v(u_n - u) \le |\phi_{u_n}|_6|v|_3|u_n - u|_2$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} uv(\phi_{u_n} - \phi_u) \le |u|_2|v|_3|\phi_{u_n} - \phi_u|_6.$$

Desde que $E \subset H^1(\mathbb{R}^3)$, pelas imersões de Sobolev, a convergência $u_n \to u$ em E implica que $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^3)$ para $p \in [2,6]$. De (vi) do Lema A.1 $\phi_{u_n} \to \phi_u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ e da imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ tem-se $\phi_{u_n} \to \phi_u$ em $L^6(\mathbb{R}^3)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} v(u_n - u) \leq |\phi_{u_n}|_6 |v|_3 |u_n - u|_2 \to 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} uv(\phi_{u_n} - \phi_u) \leq |u|_2 |v|_3 |\phi_{u_n} - \phi_u|_6 \to 0.$$

Donde segue que

$$||DI_2(u_n) - DI_2(u)||_{E'} = \sup_{||v|| \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n v - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u uv \right| \to 0.$$

Mostrando assim a continuidade de DI_2.

Vamos calcular a derivada de Gateaux do funcional I_3, o qual representaremos por DI_3. Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e para cada $u, v \in E$, consideremos a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(s) = F(u + stv)$. Observe que $h'(s) = f(u + stv)tv$, $h(1) = F(u + tv)$ e $h(0) = F(u)$.

Desde que h é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, do Teorema do Valor Médio, existe $\rho \in (0,1)$ tal que

$$h(1) - h(0) = h'(\rho),$$

de onde concluímos

$$\left| \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} \right| = |f(u + \rho tv)||v|.$$

Da condição de crescimento (2.2) sobre a função f, obtem-se

$$|f(u + \rho tv)||v| \leq a|u + \rho tv||v| + b|u + \rho tv|^5 |v|.$$

Portanto, $|f(u + \rho tv)||v| \in L^1(\mathbb{R}^3)$.

Além disso, para uma sequência $|t_n| \to 0$ temos que

$$f(u(x) + \rho t_n v(x))v(x) \to f(u(x))v(x) \text{ pontualmente em } \mathbb{R}^3.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, tem-se

$$\lim_{t\to 0} \frac{I_2(u+tv)-I_2(u)}{t} = \left[\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} F(u+tv) - \int_{\mathbb{R}^3} F(u)}{t} \right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} f(u+\rho t_n v)v = \int_{\mathbb{R}^3} f(u)v.$$

Assim, $DI_3(u)v = \int_{\mathbb{R}^3} f(u)v$. Mostraremos que o operador DI_3 é contínuo. Seja $u_n \to u$ em $E \subset H^1(\mathbb{R}^3)$.

Portanto, das imersões contínuas de Sobolev

$$u_n \to u \text{ em } L^p(\mathbb{R}^3), \text{ com } 2 \leq p \leq 6.$$

Do teorema de Vainberg, existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$u_{n_j}(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^3$$

e

$$|u_{n_j}(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^3.$$

desde que f é uma função contínua,

$$|f(u_{n_j}(x)) - f(u(x))||v| \to 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^3.$$

Da condição de crescimento (2.2), temos

$$|f(u_{n_j}(x)||v| \leq a|g(x)||v| + b|g(x)|^5|v|.$$

Então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(u_{n_j})v \to \int_{\mathbb{R}^3} f(u)v,$$

para todo $v \in E$.

Argumentando como nos casos anteriores concluímos que DI_3 é um operador contínuo.

■

Bibliografia

[1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Almeida, O.B. de, *Teoria do Grau e Aplicações*, Dissertação de mestrado, UFCG, 2006.

[3] Alves, C.O e Yang M., *Existence of positive multi-bump solutions for a Schrödinger-Poisson system in* $\mathbb{R}^3$, arXiv:1501.02930v1.

[4] Alves, C.O., *Esxistence of multi-bump solution for a class of quasilinear problems*, Adv. Nonlinear Stud. 6,491-509 (2006).

[5] Alves, C.O., *Multiplicity of multi-bump type nodal solutions for a class of eliptic problems in* $\mathbb{R}^N$. Top.Meth. Nonlinear Anal. 34 (2009), 231-250.

[6] Alves, C.O. e Souto, M.A *Existence of least energy nodal solution for a Schrödinger-Poisson system in bounded domains.* Z.Angew. Math Phys. (2013).

[7] Ambrosseti, A. e Ruiz, R., *Multiple bound states for the nonlinear Schrödinger-Poisson problem.* Commun. Contemp. Math. 10 (2008) 391-404.

[8] Azzolini, A. e Pomponio, A., *Ground State solutions for the nonlinear Schrödinger-Maxwell equations*, J. Math. Anal. Appl. 345 (2008) 90-108.

[9] Bartle, Robert G., *The Elements of integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1995.

[10] Benci, V. e Fortunato, D., *An eigenvalue problem for the Schrödinger-Maxwell equations*, Top.Meth.Nonlinear Anal. 11 (1998) 283-293.

[11] Berestycki, H. e Lions, P.L., *Nonlinear scalar fields equations I- existence of ground state*, Arch. Rat. Mech. Analysis, 82, (1983), 313-346.

[12] Bokanowski, O. e Mauser, N.J., *Local approximations of the Hartree-Fock exchange potential: a deformation approach*, M^3AS 9 (1999), 941-961.

[13] Brezis, H., *Functional Analysis and Sobolev Spaces*, Springer, 2011.

[14] Cerami, G. e Vaira, G., *Positive Solutions non-autonomous Schrödinger-Poisson systems*, J. Differential Equations 248 (2010) 521-543.

[15] Coclite, G.M, *A multiplicity result for a Schrödinger-Maxwell equations*, Commun. Appl. Anal. 7 (2003) 417-423.

[16] D'Aprile, T. e Mugnai, D., *Non-existence results for the coupled Klein-Gordon-Maxwell equations*, Adv. Nonlinear Stud. 4 (2004) 307-322.

[17] D' Avenia, P. *Non-radially symmetric solutions of nonlinear Schrödinger equation coupled with Maxwell equations*, Adv Nonlinear Stud. (2002) 2 177-192.

[18] del Pino, M. e Felmer, P.L., *Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. PDE **4**, (1996)121-137.

[19] Evans, Laurence C.,*Partial Differential Equations*, Vol. 19, American Mathematical Society, U.S.A., 1949.

[20] Figueiredo, G. M., *Multiplicidade de Solucões Positivas para uma Classe de Problemas Quasilineares*, tese de doutorado, UNICAMP, Campinas, 2004.

[21] Figueiredo, G. M., *Introdução à Teoria dos Pontos Críticos*, Notas de aula, UFPA, Belém, 2015.

[22] , Furtado, M., *Notas de EDP2*, Notas de Aula, UNB, 2012.

[23] Gilbarg, David e Trundiger Neil S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Classics in Mathematics, Springer, 3º edition, New York, 2001.

[24] Ianni, I., *Sign-Changing radial solutions for the Schrödinger-Poisson-Slauter problem*, arXiv: 1108.2803v1.

[25] Kikuchi, H., *On the existence of a solution for a elliptic system telated to the Maxwell-Schrödinger equations*, Nonlinear Anal. 67 (2007) 1445-1456.

[26] Lima, Elon L., *Análise Real*, vol 2 , Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio deJaneiro, 2004.

[27] Lima, Elon L., *Curso de Análise*, Vol 1, (10ª edição), Projeto Euclides, IMPA, Rio deJaneiro, 2002.

[28] Mauser, N.J., *The Schrödinger-Poisson-X_α equation*, Applied Math. Letters 14 (2001), 759-763.

[29] Medeiros, L. A. e Milla Miranda, M., *Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogeneos*, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2000.

[30] Munkres, James R., *Analysis on Manifolds*, Addison-Wesley publishing company, 1991.

[31] Oliveira, César R. de, *Introdução à Análise Funcional*, Projeto Euclides, IMPA, 2012

[32] Pisani, L. e SIciliano, G.,*Note on a Schrödinger-Poisson system in a bounded domain*, Appl. Math. Lett. 21 (2008) 521-528.

[33] Ruiz, D., *The Schrödinger-Poisson equation under the eeffect of a nonlinear local term*, J. Funct. Analysis 237 (2006) 655-674 .

[34] Sánchez, O. e Soler, J., *Long-time dynamics of the Schrödinger-Poisson Slater system*, J.Statistical Physics 114 (2004), 179-204.

[35] Siciliano, G., *Multiple positive solutions fora a Schrödinger-Poisson-Slater system*, J. Math. Analysis and Appl. 365 (2010) 288-299.

[36] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Textos universitários do IME-USP, São Paulo (2012).

[37] Vrahatis, M. N., *A short proof and a generalization of Miranda's existece theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989), 701-703.

[38] Willem, M., *Minimax Theorems*, Progressin Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, 1996.

[39] Zhao, F. e Zhao, L., *Positive solutions for a Schrödinger-Poisson equations with a critical exponent* Nonlinear Anal. 70 (2009) 2150-2164.