UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Existência, não existência e unicidade de solução positiva para problemas elípticos sublineares.

Antonio Márcio Ávila Almeida

Belém
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Antonio Márcio Ávila Almeida

Existência, não existência e unicidade de solução positiva para problemas elípticos sublineares.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior

Belém
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Antonio Márcio Ávila Almeida

Existência, não existência e unicidade de solução positiva para problemas elípticos sublineares.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Data da defesa: 23 de Março de 2016

Conceito: APROVADO

Banca Examinadora

João Rodrigues dos S Júnior

Prof Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior - Orientador
Universidade Federal do Pará

FCorrêa

Prof Dr Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa
Universidade Federal de Campina Grande

Amanda Suellen Sena Corrêa Leão

Prof. Dra. Amanda Suellen Sena Corrêa Leão
Universidade Federal do Pará

Denilson da Silva Pereira Costa.

Prof. Dr Denilson da Silva Pereira Costa
Universidade Federal de Campina Grande

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Almeida, Antonio Márcio, 1986-
Existência, não existência e unicidade de solução positiva para problemas elípticos sublineares / Antonio Márcio Almeida. - 2016.

Orientador: João Rodrigues dos Santos Junior.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2016.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Problemas elípticos-Minimização. 3. Problemas elípticos sublineares. I. Título.

CDD 22. ed. 515.3533

Dedicatória

Aos meus pais, Antonio e Socorro.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo seu plano de salvação, pelo seu amor incondicional e por inúmeras bençãos derramadas em minha vida, a qual me fizeram chegar aonde estou.

Aos meus pais Antonio Ferreira de Almeida e Maria do Socorro Ávila Almeida agradeço pelo amor, apoio e por acreditar na educação como agente de transformação da minha vida.

Ao meu orientador João Rodrigues dos Santos Júnior agradeço por me aceitar como orientando, por seus ensinamentos, paciência, extrema dedicação na condução do trabalho.

Agradeço aos professores Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa, Denilson Da Silva Pereira Costa e Amanda Suellen Sena Corrêa Leão que gentilmente aceitaram participar da banca examinadora deste trabalho e puderam contribuir para o enriquecimento dessa dissertação.

A Universidade Federal do Pará e em particular ao programa de pós-graduação em matemática e estatística, agradeço por me conceder a oportunidade da concretização de um sonho, de ampliar meus objetivos e por todo conhecimento adquirido.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro durante todo curso possibilitando dedicação exclusiva ao curso de mestrado.

Por fim, agradeço aos colegas de estudos pela amizade e ajuda durante o curso.

Resumo

Neste trabalho, baseado nos artigos de Brezis-Kamin [6] e Brezis-Oswald [7], investigaremos a existência e unicidade de solução para problemas elípticos sublineares em domínio limitado, bem como para problemas elípticos em todo o $\mathbb{R}^N$. Para a obtenção de solução nesses respectivos domínios, usaremos o método variacional e o método de sub e supersolução.

Palavras-chave: Equações elípticas sublineares, Minimização, Sub e Supersolução

Abstract

In this paper, based on articles by Brezis-Kamin [6] and Brezis-Oswald [7], we investigate the existence and uniqueness of solution to sublinear elliptic problems in bounded domain as well as for elliptic problems in whole $\mathbb{R}^N$. To get solutions in these domains, we use the variational method and the method of sub and super solution.

Keywords: Sublinear elliptic equation, Minimization, sub and supersolution.

Sumário

Introdução

Nesta dissertação, estudaremos a existência e unicidade de solução positiva para problemas elípticos sublineares tanto em domínio limitado quanto em domínio não limitado. Para isso, temos como referência os artigos de Brezis-Kamin [6] e Brezis-Oswald [7].

Seguindo os argumentos de Brezis-Oswald [7], investigaremos existência e unicidade de solução positiva para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega; \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P1}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suave e $f : \Omega \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$.

Ao menos em nosso conhecimento, diferentemente dos trabalhos anteriores que utilizaram argumentos de sub e supersolução, ver por exemplo [9], [18] e [25], Brezis-Oswald [7] foi o primeiro artigo a atacar o problema (P1) utilizando uma abordagem via método variacional. Nesse sentido, associaremos ao problema (P1) o funcional energia E definido por

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,t)dx \quad \text{onde} \quad F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$$

de forma que pontos críticos de E são soluções fracas de (P1).

Uma outra novidade que surge em [7] está relacionada a prova do resultado de unicidade de solução. De fato, para mostrar que o problema (P1) admite uma única solução, Brezis-Oswald, lançam mão de um inteligente artifício algébrico o qual contrasta com todas as demonstrações dadas anteriormente, as quais estão baseadas em argumentos de comparação e princípio do máximo (ver [3] e [21]).

Para a resolução do problema acima, assumiremos as seguintes condições sobre a função f:

$f1$. Para quase todo ponto $x \in \Omega$ a função $t \longmapsto f(x,t)$ é contínua em $[0,+\infty)$ e a função $t \longmapsto \dfrac{f(x,t)}{t}$ é decrescente em $(0,+\infty)$;

$f2$. Para cada $t \geq 0$ a funçao $x \longmapsto f(x,t)$ pertence a $L^{\infty}(\Omega)$;

$f3$. Existe uma contante $C > 0$ tal que $f(x,t) \leq C(t+1)$ para quase todo ponto $x \in \Omega$, $\forall t \geq 0$.

Importante destacar ainda que Brezis-Oswald [7] foi o primeiro artigo a mostrar que, sob as hipóteses $(f1) - (f3)$, existe uma condição necessária e suficiente para a existência de solução do problema (P1). Estamos aptos a enunciar o resultado principal de Brezis-Oswald [7]:

Teorema 0.1 *Suponha que f satisfaz as hipóteses $(f1)-(f3)$. Então, o problema $(P1)$ possui uma única solução positiva. Além disso, a solução de $(P1)$ existe se, e somente se, $\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0$ e $\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0$.*

Aqui $\lambda_1(-\Delta - a(x))$ denota o primeiro autovalor do operador $-\Delta - a(x)$ com condição de fronteira de Dirichlet e

$$a_0(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} \quad \text{e} \quad a_\infty(x) = \lim_{t\to +\infty} \frac{f(x,t)}{t}.$$

Em Brezis-Kamin [6], os autores estudam existência e unicidade de solução positiva para o problema

$$-\Delta u(x) = \rho(x) u^{\alpha}(x) \qquad \text{em } \ \mathbb{R}^N, \tag{P2}$$

onde $N \geq 3$, $0 < \alpha < 1$ e $\rho(x) \geq 0$ é uma função não identicamente nula.

Para o estudo desse problema, os autores buscam solução via método de sub e supersolução e condições menos restritivas que em [12], [13] e [24] para a função $\rho(x)$. Assumiremos ao longo de todo este trabalho que $\rho \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e usaremos frequentemente a seguinte definição:

Definição 0.1 *Dizemos que a função $\rho \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\rho(x) \geq 0$, tem a propriedade (H) se o problema linear*

$$-\Delta u = \rho(x) \quad em \quad \mathbb{R}^N$$

tem solução positiva limitada.

Dessa forma, o principal teorema de Brezis-Kamin é o que se segue.

Teorema 0.2 *O problema $(P2)$ tem solução limitada positiva se, e somente se, satisfaz (H). Além disso, existe uma solução positiva minimal de $(P2)$.*

Brezis-Kamin ainda mostra que a solução minimal de (P2) tende a zero no infinito no sentido de que

$$\liminf_{|x| \to +\infty} u(x) = 0.$$

Salientamos ainda que o estudo do problema em questão está relacionado ao comportamento assintótico da solução $v = v(x,t)$ da equaçao parabólica

$$\rho(x) \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v^m \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0, +\infty), \tag{1}$$

com $m = \dfrac{1}{\alpha} > 1$. Nesse caso, se $u(x)$ é solução de (P2), então

$$v(x,t) = \frac{C_m u^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+\tau)^{\frac{1}{m-1}}}$$

satisfaz (1), onde $C_m = (m-1)^{\frac{-1}{m-1}}$ e τ uma constante real.

Finalmente, com hipóteses adequadas sobre f, os autores estendem os resultados obtidos a problemas mais gerais que (P2), da forma

$$-\Delta u = \rho(x) f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Este trabalho contém dois capítulos e cinco apêndices, os quais estão estruturado da seguinte maneira:

No Capítulo 1, seguindo Brezis-Oswald [7], estudaremos existência e unicidade de solução para o problema $(P1)$ via método variacional.

No Capítulo 2, baseado em Brezis-Kamin [6], investigaremos solução para o problema $(P2)$ via método de sub e supersolução.

No Apêndice A, faremos uma breve revisão sobre os resultados mais importantes dos espaços de funções utilizados ao longo do texto.

No Apêndice B, apresentaremos alguns resultados básicos que foram utilizados no decorrer desta dissertação e que são importantes para a plena compreensão da mesma.

No Apêndice C, faremos um estudo de alguns resultados relevantes para nossos propósitos, acerca do problema

$$-\Delta u = f \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

no qual u é uma função limitada e $f \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Estas informações são úteis para a demonstração de resultados de existência e unicidade de solução para o problema (P2).

No Apêndice D, apresentaremos algumas demonstrações alternativas para a unicidade de solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \rho(x) f(u) & \text{em} \quad \Omega; \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

quando $\dfrac{f(t)}{t}$ é decrescente e Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$.

No Apêndice E, faremos um breve estudo sobre o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u - c(x)u = \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

que serve de auxílio na resolução do problema (P1). Nosso objetivo nesse Apêndice é mostrar um resultado de existência de autovalores e estudar algumas de suas propriedades.

Notações

- $\square$: fim da demonstração.
- q.t.p: quase todo ponto.
- Δu: operador Laplaciano aplicado a função u.
- ∇u: gradiente de u.
- Ω: subconjunto aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$.
- $|\Omega|$, $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$: medida de Lesbegue, fronteira e fecho do conjunto Ω, respectivamente.
- $B_R(0)$: bola aberta de centro em 0 e raio R.
- w_N: volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$.
- λ_1: primeiro autovalor do operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet.
- $\displaystyle{-\!\!\!\!\!\!\int_{S_R}}$: integral média na esfera de raio R.
- $|\partial B_1(0)|$: área da bola de centro 0 e raio 1.

Capítulo 1

Um Problema Sublinear em Domínio Limitado

1.1 Introdução

Neste Capítulo, seguindo as ideias que aparecem em [7], vamos estudar a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e $f : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo as seguintes hipóteses:

$(f1)$. para quase todo ponto $x \in \Omega$ a função $t \longmapsto f(x,t)$ é contínua em $[0,\infty)$ e a função $t \longmapsto \dfrac{f(x,t)}{t}$ é decrescente em $(0,\infty)$;

$(f2)$. para cada $t \geq 0$ a funçao $x \longmapsto f(x,t)$ pertence a $L^\infty(\Omega)$;

$(f3)$. existe uma contante $C > 0$ tal que $f(x,t) \leq C(t+1)$ para quase todo ponto $x \in \Omega$ e para todo $t \geq 0$.

Usaremos as seguintes notações:

$$a_0(x) := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} \quad \text{e} \quad a_\infty(x) := \lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t}.$$

Lema 1.1 *Valem as seguintes desigualdades*

$$-\infty < a_0(x) \leq +\infty \quad e \quad -\infty \leq a_\infty(x) < +\infty.$$

Demonstração. De fato, seja $0 < t < t_0$. De $(f1)$ segue que

$$\frac{f(x,t_0)}{t_0} < \frac{f(x,t)}{t} \qquad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Daí, passando ao limite em $t \to 0^+$,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x,t_0)}{t_0} \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} = a_0(x).$$

De $(f2)$, concluimos que $-\infty < a_0(x) \leq +\infty$.

De modo análogo, se escolhermos $0 < t_0 < t$ e usarmos $(f1)$, teremos

$$\frac{f(x,t)}{t} < \frac{f(x,t_0)}{t_0} \qquad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Dai, passando ao limite em $t \to \infty$, obtemos

$$a_\infty(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} \leq \frac{f(x,t_0)}{t_0}.$$

Novamente por $(f2)$, resulta que $-\infty \leq a_\infty(x) < +\infty$.

$\square$

Lema 1.2 *Suponha que f satisfaça $(f1) - (f3)$, então para cada $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $u \geq 0$, temos $f(x,u(x)) \in L^\infty(\Omega)$ e*

$$-|f(x,\|u\|_\infty)| \leq f(x,u(x)) \leq C(|u(x)|+1). \tag{1.1}$$

Demonstração. É claro que (1.1) vale no conjunto Ω_0 dos pontos $x \in \Omega$ onde u se anula. Por outro lado, tendo em vista $(f1)$,

$$\frac{f(x, \|u\|_\infty)}{\|u\|_\infty} \leq \frac{f(x, u(x))}{u(x)} \qquad \text{q.t.p. em } \Omega \setminus \Omega_0.$$

Assim,

$$f(x, \|u\|_\infty)\frac{u(x)}{\|u\|_\infty} \leq f(x, u(x)), \tag{1.2}$$

pois $u(x) > 0$ em Ω_0.

Considerando,

$$-|f(x, \|u\|_\infty)| \leq f(x, \|u\|_\infty). \tag{1.3}$$

De (1.2) e (1.3), resulta que

$$-\frac{u(x)}{\|u\|_\infty}|f(x, \|u\|_\infty)| \leq f(x, u(x)). \tag{1.4}$$

Desde que $u(x) \leq \|u(x)\|_\infty$,

$$-1 \leq -\frac{u(x)}{\|u\|_\infty}. \tag{1.5}$$

De (1.4) e (1.5) implica em

$$-|f(x, \|u\|_\infty)| \leq f(x, u(x)). \tag{1.6}$$

Agora, de (f3) temos

$$f(x, u(x)) \leq C(u(x) + 1) \leq C(|u(x)| + 1). \tag{1.7}$$

Portanto de (1.6) e (1.7) segue (1.1).

$\square$

Definição 1.1 *Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é uma solução fraca de $(P1)$ se*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x, u) v dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Note que do Lema 1.2, a segunda integral é sempre finita.

Lema 1.3 *Se u é uma solução fraca de $(P1)$ então $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.*

Verifiquemos que uma solução de $(P1)$ pertence a $W^{2,p}(\Omega)$, para $p < +\infty$.

Primeiramente, notemos que o operador Laplaciano é estritamente elíptico pois se considerarmos

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

e tomando $b_i = c = 0$ bem como

$$a_{i,j}(x) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = j \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j, \end{cases}$$

teremos $Lu(x) = \Delta u(x)$ com

$$\frac{1}{2}|\zeta|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2 = |\zeta|^2 \leq 2|\zeta|^2 \qquad \forall \zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Aplicando o Teorema B.2 com $\varphi = 0$ e observando que $f \in L^p(\Omega)$, obtemos uma solução de (P1) pertence a $W^{2,p}(\Omega)$ para $p < \infty$. Para obtermos a interseção, observemos o Teorema A.12 de imersão contínua.

□

Para a comodidade do leitor, enunciaremos novamente o teorema principal deste capítulo.

Teorema 1.1 *Suponha que f satisfaz as hipóteses $(f1)-(f3)$. Então, o problema $(P1)$ possui no máximo uma solução positiva. Além disso, a solução de $(P1)$ existe se, e somente se*

$$\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0 \tag{1.8}$$

e

$$\lambda_1(-\Delta - a_\infty) > 0 \tag{1.9}$$

onde $\lambda_1(-\Delta - a(x))$ denota o primeiro autovalor de $-\Delta - a(x)$ com condição de Dirichlet zero (ver Apêndice E).

Observação 1.1 *No caso especial onde $f(x,u) = f(u)$ é independente de x, então (1.8) e (1.9) são equivalente a*

$$a_\infty < \lambda_1(-\Delta) < a_0.$$

A demonstração desse resultado está dividida em vários lemas ao longo deste Capítulo. Antes, porém, apresentaremos um lema preliminar necessário a prova de unicidade.

Lema 1.4 *Suponha que f satisfaz $(f1) - (f2)$ e u é uma solução fraca de $(P1)$. Então*

$$u > 0 \quad \text{em } \Omega \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} < 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

onde η denota a direção normal exterior a fronteira $\partial\Omega$.

Demonstração. De $\|u\|_\infty \geq u(x)$ e (f1), temos

$$\frac{f(x,u(x))}{u(x)} \geq \frac{f(x,\|u\|_\infty)}{\|u\|_\infty} \qquad \text{q.t.p. em} \quad \Omega. \tag{1.10}$$

Por $(f2)$, existe uma constante $\overline{M} > 0$ tal que

$$|f(x,\|u\|_\infty)| \leq \overline{M},$$

e consequentemente,

$$-\overline{M} \leq f(x,\|u\|_\infty) \leq \overline{M}. \tag{1.11}$$

Dessa forma, por (1.10) e (1.11) temos

$$\frac{f(x,u(x))}{u(x)} \geq -\frac{\overline{M}}{\|u\|_\infty} =: -M.$$

Assim,

$$f(x,u(x)) \geq -Mu(x) \quad \text{em} \quad \Omega \tag{1.12}$$

para alguma constante $M \geq 0$.

Desde que $-\Delta u(x) = f(x, u(x))$ e (1.12), temos

$$-\Delta u(x) + Mu(x) \geq 0 \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega,$$

e a conclusão segue do Teorema B.3.

□

1.2 Unicidade de Solução

Nesta seção demonstraremos que a solução do problema (P1) é única.

Teorema 1.2 *Se $(f1)-(f3)$ ocorrem então a solução de $(P1)$, se existir, é única.*

Demonstração. Suponha que u_1 e u_2 são soluções do problema (P1).

Logo,

$$\begin{cases} -\Delta u_1(x) &= f(x, u_1(x)) \\ -\Delta u_2(x) &= f(x, u_2(x)) \end{cases} \qquad \text{q.t.p em} \quad \Omega.$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} -\Delta u_1(x) &= f(x, u_1(x)) \\ \Delta u_2(x) &= -f(x, u_2(x)) \end{cases} \qquad \text{q.t.p em} \quad \Omega.$$

Pelo Lema 1.4, $u_1 > 0$ e $u_2 > 0$ em Ω.

Então,

$$-\frac{\Delta u_1(x)}{u_1(x)} = \frac{f(x, u_1(x))}{u_1(x)} \qquad \text{e} \qquad \frac{\Delta u_2(x)}{u_2(x)} = -\frac{f(x, u_2(x))}{u_2(x)} \qquad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

Somando as igualdades membro a membro, vem que

$$-\frac{\Delta u_1(x)}{u_1(x)} + \frac{\Delta u_2(x)}{u_2(x)} = \frac{f(x, u_1(x))}{u_1(x)} - \frac{f(x, u_2(x))}{u_2(x)} \qquad \text{q.t.p. em} \quad \Omega. \qquad (1.13)$$

Agora multiplicando essa igualdade por $u_1^2(x) - u_2^2(x)$ e integrando sobre Ω, temos

$$\int_\Omega \left(u_1^2(x) - u_2^2(x)\right)\left(-\frac{\Delta u_1(x)}{u_1(x)} + \frac{\Delta u_2(x)}{u_2(x)}\right)dx =$$
$$-\int_\Omega \left(u_1^2(x) - u_2^2(x)\right)\frac{\Delta u_1(x)}{u_1(x)}dx + \int_\Omega \left(u_1^2(x) - u_2^2(x)\right)\frac{\Delta u_2(x)}{u_2(x)}dx.$$

Daí,

$$\int_\Omega \left(u_1^2(x) - u_2^2(x)\right)\left(-\frac{\Delta u_1(x)}{u_1(x)} + \frac{\Delta u_2(x)}{u_2(x)}\right)dx =$$
$$-\int_\Omega \left(u_1(x) - \frac{u_2^2(x)}{u_1(x)}\right)\Delta u_1(x)dx + \int_\Omega \left(\frac{u_1^2(x)}{u_2(x)} - u_2(x)\right)\Delta u_2(x)dx.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\int_\Omega \left(u_1^2(x) - u_2^2(x)\right)\left(-\frac{\Delta u_1(x)}{u_1(x)} + \frac{\Delta u_2(x)}{u_2(x)}\right)dx =$$
$$\int_\Omega \nabla\left(u_1(x) - \frac{u_2^2(x)}{u_1(x)}\right)\nabla u_1(x)dx - \int_\Omega \nabla\left(\frac{u_1^2(x)}{u_2(x)} - u_2(x)\right)\nabla u_2(x)dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(u_1^2(x) - u_2^2(x)\right)\left(-\frac{\Delta u_1(x)}{u_1(x)} + \frac{\Delta u_2(x)}{u_2(x)}\right)dx = \\
&\int_\Omega \left[\nabla u_1(x)\nabla u_1(x) - \nabla\left(\frac{u_2^2(x)}{u_1(x)}\right)\nabla u_1(x)\right]dx \\
-\ &\int_\Omega \left[\nabla\left(\frac{u_1^2(x)}{u_2(x)}\right)\nabla u_2(x) - \nabla u_2(x)\nabla u_2(x)\right]dx.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Usando a regra do quociente, tem-se

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{u_1^2}{u_2}\right) &= \frac{2u_1\nabla u_1 u_2 - u_1^2\nabla u_2}{u_2^2} \\
&= \frac{2u_1}{u_2}\nabla u_1 - \frac{u_1^2}{u_2^2}\nabla u_2.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Analogamente,

$$\nabla\left(\frac{u_2^2}{u_1}\right)=\frac{2u_2}{u_1}\nabla u_2-\frac{u_2^2}{u_1^2}\nabla u_1. \tag{1.16}$$

Substituindo (1.15) e (1.16) em (1.14), resulta em

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(u_1^2(x)-u_2^2(x)\right)\left(-\frac{\Delta u_1(x)}{u_1(x)}+\frac{\Delta u_2(x)}{u_2(x)}\right)dx=\\
&\int_\Omega \left[|\nabla u_1(x)|^2-\left(\frac{2u_2(x)}{u_1(x)}\nabla u_2(x)-\frac{u_2^2(x)}{u_1^2(x)}\nabla u_1(x)\right)\nabla u_1(x)\right]dx\\
&-\int_\Omega \left[\left(\frac{2u_1(x)}{u_2(x)}\nabla u_1(x)-\frac{u_1^2(x)}{u_2^2(x)}\nabla u_2(x)\right)\nabla u_2(x)-|\nabla u_2(x)|^2\right]dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(u_1^2(x)-u_2^2(x)\right)\left(-\frac{\Delta u_1(x)}{u_1(x)}+\frac{\Delta u_2(x)}{u_2(x)}\right)dx=\\
&\int_\Omega \left[|\nabla u_1(x)|^2-2\frac{u_2(x)}{u_1(x)}\nabla u_1(x)\nabla u_2(x)+\left|\frac{u_2(x)}{u_1(x)}\nabla u_1(x)\right|^2\right]dx\\
&-\int_\Omega \left[2\frac{u_1(x)}{u_2(x)}\nabla u_1(x)\nabla u_2(x)-\left|\frac{u_1(x)}{u_2(x)}\nabla u_2(x)\right|^2-|\nabla u_2(x)|^2\right]dx.
\end{aligned}$$

Organizando os fatores de forma conveniente, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(u_1^2(x)-u_2^2(x)\right)\left(-\frac{\Delta u_1(x)}{u_1(x)}+\frac{\Delta u_2(x)}{u_2(x)}\right)dx=\\
&\int_\Omega \left[|\nabla u_1(x)|^2-2\frac{u_1(x)}{u_2(x)}\nabla u_1(x)\nabla u_2(x)+\left|\frac{u_1(x)}{u_2(x)}\nabla u_2(x)\right|^2\right]dx\\
&+\int_\Omega \left[|\nabla u_2(x)|^2-2\frac{u_2(x)}{u_1(x)}\nabla u_1(x)\nabla u_2(x)+\left|\frac{u_2(x)}{u_1(x)}\nabla u_1(x)\right|^2\right]dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(u_1^2(x)-u_2^2(x)\right)\left(-\frac{\Delta u_1(x)}{u_1(x)}+\frac{\Delta u_2(x)}{u_2(x)}\right)dx= \qquad (1.17)\\
&\int_\Omega \left|\nabla u_1(x)-\frac{u_1(x)}{u_2(x)}\nabla u_2(x)\right|^2dx+\int_\Omega \left|\nabla u_2(x)-\frac{u_2(x)}{u_1(x)}\nabla u_1(x)\right|^2dx.
\end{aligned}$$

Das igualdades (1.13) e (1.17),

$$\int_{\Omega} \left(\frac{f(x, u_1(x))}{u_1(x)} - \frac{f(x, u_2(x))}{u_2(x)} \right) \left(u_1^2(x) - u_2^2(x) \right) dx \geq 0. \tag{1.18}$$

Consideremos os conjuntos,

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : u_1(x) > u_2(x)\};$$

$$\Omega_- = \{x \in \Omega : u_1(x) < u_2(x)\};$$

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega : u_1(x) = u_2(x)\}.$$

Veja que os conjuntos são disjuntos dois a dois, e

$$\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup \Omega_0.$$

Além disso,

$$|\Omega| = |\Omega_+| + |\Omega_-| + |\Omega_0|.$$

Mostraremos que Ω_+ e Ω_- tem medida nula em Ω. Suponha que $|\Omega_+|$ e $|\Omega_-|$ têm medida positiva.

Logo, segue do Lema 1.4 que $u_1(x) > u_2(x) > 0$ em Ω_+, consequentemente $u_1^2(x) - u_2^2(x) > 0$.

Por $(f1)$,

$$\frac{f(x, u_1(x))}{u_1(x)} < \frac{f(x, u_2(x))}{u_2(x)} \qquad \text{em } \Omega_+.$$

Assim,

$$\frac{f(x, u_1(x))}{u_1(x)} - \frac{f(x, u_2(x))}{u_2(x)} < 0 \qquad \text{em } \Omega_+.$$

Logo,

$$\int_{\Omega_+} \left(\frac{f(x,u_1(x))}{u_1(x)} - \frac{f(x,u_2(x))}{u_2(x)} \right) \left(u_1^2(x) - u_2^2(x) \right) dx < 0.$$

De modo análogo, temos que

$$\int_{\Omega_-} \left(\frac{f(x,u_1(x))}{u_1(x)} - \frac{f(x,u_2(x))}{u_2(x)} \right) \left(u_1^2(x) - u_2^2(x) \right) dx < 0.$$

Por conseguinte

$$|\Omega_+| = |\Omega_-| = 0 \qquad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{1.19}$$

De (1.18)

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left(\frac{f(x,u_1(x))}{u_1(x)} - \frac{f(x,u_2(x))}{u_2(x)} \right) \left(u_1^2(x) - u_2^2(x) \right) dx = \\ &\int_{\Omega_+} \left(\frac{f(x,u_1(x))}{u_1(x)} - \frac{f(x,u_2(x))}{u_2(x)} \right) \left(u_1^2(x) - u_2^2(x) \right) dx \\ &+ \int_{\Omega_-} \left(\frac{f(x,u_1(x))}{u_1(x)} - \frac{f(x,u_2(x))}{u_2(x)} \right) \left(u_1^2(x) - u_2^2(x) \right) dx \\ &+ \int_{\Omega_0} \left(\frac{f(x,u_1(x))}{u_1(x)} - \frac{f(x,u_2(x))}{u_2(x)} \right) \left(u_1^2(x) - u_2^2(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Portanto, concluimos que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left(\frac{f(x,u_1(x))}{u_1(x)} - \frac{f(x,u_2(x))}{u_2(x)} \right) \left(u_1^2(x) - u_2^2(x) \right) = \\ &\int_{\Omega_0} \left(\frac{f(x,u_1(x))}{u_1(x)} - \frac{f(x,u_2(x))}{u_2(x)} \right) \left(u_1^2(x) - u_2^2(x) \right) = 0. \end{aligned}$$

e $u_1 = u_2$ em Ω

□

Em [6] os autores apresentam demonstrações alternativas para o resultado de unicidade quando $f(x,t) = \rho(x)f(t)$. Tais demonstrações são apresentadas em detalhes no Apêndice D.

1.3 As condições (1.8) e (1.9) são necessárias

Nesta seção, mostraremos que se o problema $(P1)$ admite solução então $\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0 < \lambda_1(-\Delta - a_\infty(x))$. Nossa demonstração será dividida em alguns resultados.

Lema 1.5 *$a_\infty(x) \leq f(x,1)$ e $a_0(x) \geq f(x,1)$ q.t.p em Ω.*

Demonstração. De fato, se tomarmos $t < 1$ e considerarmos (f1), temos

$$\frac{f(x,t)}{t} > f(x,1) \qquad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Passando ao limite de $t \to 0^+$, temos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} \geq f(x,1),$$

mostrando que $a_0(x) \geq f(x,1)$.

Da mesma maneira, se escolhermos $t > 1$, segue de (f1) que

$$\frac{f(x,t)}{t} < f(x,1) \qquad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Passando ao limite de $t \to +\infty$ obtemos

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{f(x,t)}{t} \leq \lim_{t\to +\infty} f(x,1).$$

O que implica em $a_\infty(x) \leq f(x,1)$.

□

Em ambos os casos do Lema anterior, por (f3), existe uma constante $C \geq 0$ tal que $|f(x,1)| \leq C$ e consequentemente

$$a_\infty(x) \leq C \qquad \text{e} \qquad a_0(x) \geq -C \qquad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Segue da Proposição E.4 que

$$\lambda_1(-\Delta - a(x)) = \inf_{\substack{\phi\in H_0^1 \\ \|\phi\|_2=1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx - \int_\Omega a\phi^2 dx \right\}.$$

Note que se $a(x)$ é mensurável e $a(x) \leq C$ q.t.p em Ω então

$$\int_\Omega a\phi^2 \in [-\infty, +\infty).$$

Por outro lado, se $a(x) \geq -C$ *q.t.p* em Ω então

$$\int_\Omega a\phi^2 \in (-\infty, +\infty].$$

Logo, segue da caracterização variacional do primeiro autovalor que $\lambda_1(-\Delta - a(x)) \in (-\infty, +\infty]$, no primeiro caso e $\lambda_1(-\Delta - a(x)) \in [-\infty, +\infty)$ no segundo caso.

Proposição 1.1 *Suponha que f satisfaça $(f1)-(f3)$, então $\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0$ e $\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0$.*

Demonstração. Pela caracterização de $\lambda_1(-\Delta - a_0(x))$,

$$\begin{aligned}
\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) &= \inf_{\substack{\phi\in H_0^1(\Omega) \\ \|\phi\|_2=1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx - \int_\Omega a(x)\phi^2 dx \right\} \\
&\leq \int_\Omega \left| \nabla \left(\frac{u}{|u|_2} \right) \right|^2 dx - \int_{u\neq 0} a(x) \left(\frac{u}{|u|_2} \right)^2 dx.
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_{u\neq 0} a(x)u^2(x)dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2(x)dx}.$$

Por outro lado, integrando por partes, temos

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla u(x)dx = -\int_\Omega u(x)\Delta u(x)dx.$$

Como $-\Delta u(x) = f(x, u(x))$,

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla u(x) dx = \int_\Omega u(x) f(x, u(x)) dx.$$

Sendo $u > 0$ podemos escrever

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx = \int_\Omega u^2(x) \frac{f(x, u(x))}{u(x)} dx. \tag{1.20}$$

Por (f1), temos

$$a_0(x) = \lim_{s \to 0^+} \frac{f(x, s)}{s} > \frac{f(x, u(x))}{u(x)}. \tag{1.21}$$

De (1.20) e (1.21),

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx = \int_\Omega u^2(x) \frac{f(x, u(x))}{u(x)} dx < \int_\Omega u^2(x) a_0(x) dx.$$

Logo,

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx - \int_\Omega u^2(x) a_0(x) dx < 0.$$

Portanto, do modo como o primeiro autovalor associado ao operador $-\Delta - a_0(x)$ foi caracterizado, obtemos

$$\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0.$$

Agora mostremos que $\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0$. Para isso, façamos as seguinte considerações:

Seja

$$\overline{a}(x) = \frac{f(x, |u|_\infty + 1)}{|u|_\infty + 1} \in L^\infty(\Omega)$$

e

$$\mu = \lambda_1(-\Delta - \overline{a}(x)).$$

Seja ψ denotando a autofunção correspondente, isto é

$$\begin{cases} -\Delta \psi - \overline{a}\psi = \mu \psi & \text{em} \quad \Omega \\ \psi > 0 & \text{em} \quad \Omega \\ \psi = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim,

$$-\Delta\psi = \overline{a}\psi + \mu\psi. \tag{1.22}$$

Multiplicando (P1) por ψ e integrando em Ω, temos

$$\int_\Omega -\Delta u(x)\psi dx = \int_\Omega f(x, u(x))\psi dx. \tag{1.23}$$

Integrando por partes,

$$\int_\Omega -\Delta u(x)\psi dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla\psi dx. \tag{1.24}$$

Ainda integrando por partes,

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\psi dx = \int_\Omega -u(x)\Delta\psi dx. \tag{1.25}$$

De (1.24) e (1.25) resulta em

$$\int_\Omega -\Delta u(x)\psi dx = \int_\Omega -u(x)\Delta\psi dx. \tag{1.26}$$

E observando (1.22) e (1.23),

$$\int_\Omega f(x, u(x))\psi dx = \int_\Omega u(x)\left(\overline{a}(x)\psi + \mu\psi\right) dx.$$

Usando a distributividade em Ω e as propriedades da integral, temos

$$\int_\Omega u(x)\overline{a}(x)\psi dx + \int_\Omega u(x)\mu\psi dx = \int_\Omega f(x, u(x))\psi dx. \tag{1.27}$$

Por outro lado temos que $f(x, u(x)) > \overline{a}(x)u(x)$. De fato, desde que

$$|u|_\infty + 1 > |u|_\infty \geq u(x) \quad \text{q.t.p em } \Omega$$

e observando que $\dfrac{f(x, u(x))}{u(x)}$ é decrescente em $(0, +\infty)$, temos

$$\frac{f(x, |u|_\infty + 1)}{|u|_\infty + 1} < \frac{f(x, u(x))}{u(x)} \qquad \text{q.t.p. em } \Omega. \tag{1.28}$$

Logo,

$$\overline{a}(x) < \frac{f(x, u(x))}{u(x)}.$$

Equivalentemente,

$$u(x)\overline{a}(x) < f(x, u(x)). \tag{1.29}$$

De (1.27) e (1.29) implica em

$$\int_\Omega u(x)\overline{a}(x)\psi dx + \int_\Omega u(x)\mu\psi dx > u(x)\overline{a}(x)\psi \qquad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Cancelando os termos de mesmo valor, temos

$$\int_\Omega u(x)\mu\psi dx > 0 \qquad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Como $u(x)$ e ψ são positivas pois satisfazem (P1), resulta que $\mu > 0$ e portanto

$$\lambda_1(-\Delta - \overline{a}(x)) = \mu > 0.$$

Não nos esqueçamos que devemos mostrar que

$$\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0.$$

Para isso, tomemos $s > |u|_\infty + 1$. E em virtude de (f1),

$$\frac{f(x, s)}{s} < \frac{f(x, |u|_\infty + 1)}{|u|_\infty + 1} \qquad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Passando ao limite quando $s \to +\infty$, temos

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{f(x, s)}{s} \leq \lim_{s\to+\infty} \frac{f(x, |u|_\infty + 1)}{|u|_\infty + 1}$$

isto é,

$$a_\infty(x) \leq \overline{a}(x). \tag{1.30}$$

Aplicando a caracterização em (1.9) e usando (1.30), temos

$$\begin{aligned}
\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) &= \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_2 = 1}} \left\{ \int |\nabla u(x)|^2 dx - \int_{u \neq 0} a_\infty u^2(x) dx \right\} \\
&\geq \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_2 = 1}} \left\{ \int |\nabla u(x)|^2 dx - \int_{u \neq 0} \overline{a} u^2(x) dx \right\} \\
&= \lambda_1(-\Delta - \overline{a}(x)) \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0.$$

□

Portanto se (P1) tem solução então (1.8) e (1.9) ocorrem.

1.4 Existência

Mostraremos que existe uma solução positiva não trivial para o problema $(P1)$. Estabeleceremos um resultado de existência ligeiramente mais forte do que o enunciado no Teorema 1.1, no sentido que exigiremos hipóteses menos restritivas sobre f. Em vez de $(f1)$, assumiremos apenas que

$f4$. para quase todo ponto $x \in \Omega$, a função $t \longmapsto f(x,t)$ é contínua em $[0, +\infty)$.

Assumimos também

$f5$. para cada $\delta > 0$, existe uma constante $C_\delta \geq 0$ tal que $f(x,t) \geq -C_\delta t$ $\forall t \in [0, \delta]$ q.t.p. em Ω.

Lema 1.6 *Se valem as hipóteses* $(f1)$ *e* $(f2)$ *então* $(f5)$ *ocorre.*

De fato, dado $\delta > 0$, por $(f2)$ existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$|f(x,\delta)| \leq C \qquad\qquad \text{q.t.p em } \Omega.$$

e pelas propriedades de módulo, segue que $-C \leq f(x,\delta) \leq C$.

Se $t \leq \delta$

$$\frac{f(x,t)}{t} \geq \frac{f(x,\delta)}{\delta} \qquad\qquad \text{q.t.p em } \Omega,$$

ou seja,

$$f(x,t) \geq f(x,\delta)\frac{t}{\delta} \geq -\frac{C}{\delta}t.$$

Como δ é arbitrário, C depende apenas de δ. Assim, vale a afirmação.

$\square$

Agora sejam

$$a_0(x) = \limsup_{u \to 0^+} \frac{f(x,u(x))}{u(x)}$$

e

$$a_\infty(x) = \limsup_{u \to +\infty} \frac{f(x,u(x))}{u(x)}.$$

Lema 1.7 *Sob as hipóteses $(f5)$ e $(f3)$, existe uma constante C tal que $a_0(x) \geq -C$ e $a_\infty(x) \leq C$.*

De fato, por $(f5)$ existe uma constante (que depende de δ) tal que

$$\frac{f(x,u(x))}{u(x)} \geq C_\delta.$$

Passando ao limite quando $u \to 0^+$, temos

$$\limsup_{u \to 0^+} \frac{f(x,u(x))}{u(x)} \geq \limsup -C_\delta.$$

Logo,

$$a_0(x) \geq -C_\delta.$$

Agora por $(f3)$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$f(x, u(x)) \leq C(u(x) + 1).$$

Dividindo esse desigualdade por $u(x)$, tem-se

$$\frac{f(x, u(x))}{u(x)} \leq \frac{C}{u(x)} (u(x) + 1).$$

Assim,

$$\frac{f(x, u(x))}{u(x)} \leq C \left(1 + \frac{1}{u(x)}\right).$$

Passando ao limite quando $u \to +\infty$, resulta em

$$\limsup_{u \to +\infty} \frac{f(x, u(x))}{u(x)} \leq \lim_{u \to \infty} c \left(1 + \frac{1}{u(x)}\right).$$

Daí,

$$a_\infty(x) \leq C.$$

$\square$

Teorema 1.3 *Assumimos que* $(f2)$, $(f3)$, $(f4)$, $(f5)$, (1.8) *e* (1.9) *ocorrem, então existe uma solução de (P1).*

Demonstração. Considere o funcional $E(u) : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega F(x, u(x)) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.31}$$

Definimos também a seguinte aplicação:

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & \text{se} \quad t \geq 0 \\ f(x,0), & \text{se} \quad t < 0, \end{cases}$$

onde $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s) ds$ e E está bem definida, visto que

$$F(x,t) \leq C \left(\frac{1}{2} t^2 + |t|\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De fato, para $t \geq 0$ e por $(f3)$,

$$\begin{aligned} F(x,t) &= \int_0^t f(x,s)ds \\ &\leq C\int_0^t (s+1)ds \\ &= C\left(\frac{t^2}{2}+t\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x,t) \leq C\left(\frac{t^2}{2}+t\right) \qquad \forall t \geq 0.$$

Para $t < 0$, e do modo como $F(x,t)$ foi definida, temos

$$\begin{aligned} F(x,t) &= \int_0^t f(x,s)ds \\ &= \int_0^t f(x,0)ds \\ &= f(x,0)t. \end{aligned}$$

Daí,

$$F(x,t) \leq |f(x,0)||t|.$$

Como $f(x,0) \in L^\infty(\Omega)$,

$$|f(x,0)| \leq C$$

e portanto,

$$F(x,t) \leq C|t| \leq C\left(\frac{t^2}{2}+t\right).$$

Mostraremos a partir de agora que o funcional associado ao problema definido em (1.31) assume mínimo. Para tanto, lançaremos mão de três importantes lemas.

Lema 1.8 *E é coercivo em $H_0^1(\Omega)$, isto é,* $\lim\limits_{||u||\to+\infty} E(u) = +\infty$.

Demonstração. Assumimos por contradição que exista alguma sequência (u_n) em $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$||u_n|| \to +\infty \qquad \text{e} \qquad E(u_n) \leq C.$$

Então,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx \leq C.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq \int_\Omega F(x,u_n)dx + C. \tag{1.32}$$

Mas por $(f3)$,

$$f(x,t) \leq c(t+1) \qquad\qquad t \geq 0.$$

Integrando em $[0,t]$, obtemos

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds \leq \int_0^t c(s+1)ds.$$

Dessa forma,

$$F(x,t) \leq C\left(\frac{t^2}{2} + t\right).$$

Afirmamos que existe uma constante $\overline{C} > C$ tal que

$$F(x,t) \leq \overline{C}\left(t^2+1\right). \tag{1.33}$$

De fato,

$$C\left(\frac{t^2}{2} + t\right) \leq \overline{C}(t^2+1).$$

Logo,

$$Ct - \overline{C} \leq \left(\overline{C} - \frac{C}{2}\right)t^2.$$

Podemos tomar então $\overline{C} > \dfrac{C}{2}$ para que a afirmação se cumpra.

Logo, retomando (1.32), temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq \int_\Omega \overline{C}(u_n^2+1)dx,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{1}{2}||u_n||^2 \leq \overline{C}||u_n||_2^2 + |\Omega|. \tag{1.34}$$

Seja $t_n = ||u_n||_2$ e $v_n = \dfrac{u_n}{t_n}$. Segue de (1.34) que

$$t_n \to \infty, \qquad ||v_n||_2 = 1 \qquad \text{e} \qquad ||v_n|| \leq C.$$

De fato, da hipótese $||u_n|| \to \infty$ e pela desigualdade (1.34),

$$t_n = ||u_n||_2 \to \infty.$$

Ainda, $||v_n||_2 = 1$, pois

$$\begin{aligned} ||v_n||_2 &= \left|\left|\frac{u_n}{t_n}\right|\right|_2 \\ &= \frac{1}{t_n}||u_n||_2 \\ &= \frac{||u_n||_2}{||u_n||_2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por fim, $||v_n|| \leq C$,

$$\begin{aligned} ||v_n||^2 &= \left|\left|\frac{||u_n||}{t_n}\right|\right|^2 \\ &= \frac{1}{t_n^2}||u_n||^2. \end{aligned}$$

Da desigualdade (1.34),

$$\begin{aligned} ||v_n||^2 &= \frac{1}{t_n^2}||u_n||^2 \\ &\leq \frac{C}{||u||_2^2}\left(||u_n||_2^2 + |\Omega|\right) \\ &= C\left(1 + \frac{|\Omega|}{||u_n||_2^2}\right). \end{aligned}$$

Como $||u_n||_2^2 \to \infty$, segue a afirmação.

Segue dessa última afirmação que (v_n) é uma sequência limitada no espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. Logo, (v_n) possui uma subsequência (v_{n_k}) fracamente convergente em $H_0^1(\Omega)$, isto é, existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$v_{n_k} \rightharpoonup v \qquad \text{em } H_0^1(\Omega).$$

Em virtude da imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, existe $v \in L^2(\Omega)$ onde

$$v_{n_k} \to v \qquad \text{em } L^2(\Omega).$$

Afirmamos que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x,t_n v_n)}{t_n^2} dx \leq \frac{1}{2} \int_{[v>0]} a_\infty v^2(x) dx. \tag{1.35}$$

De fato, observe que

$$\int_\Omega F(x,t_n v_n) dx = \int_{v_n>0} F(x,t_n v_n) dx + \int_{v_n\leq 0} F(x,t_n v_n) dx. \tag{1.36}$$

Mas

$$\int_{v_n>0} F(x,t_n v_n) dx = \int_\Omega F(x,t_n v_n^+) dx. \tag{1.37}$$

Ainda, usando $\Omega = \{v > 0\} \cup \{v \leq 0\}$ temos

$$\int_\Omega F(x,t_n v_n^+) dx = \int_{[v>0]} F(x,t_n v_n^+) dx + \int_{[v\leq 0]} F(x,t_n v_n^+) dx.$$

E por (1.37),

$$\int_{v_n>0} F(x,t_n v_n) dx = \int_{[v>0]} F(x,t_n v_n^+) dx + \int_{[v\leq 0]} F(x,t_n v_n^+) dx.$$

Daí, substituindo essa última igualdade em (1.36), resulta em

$$\int_\Omega F(x,t_n v_n) dx = \int_{[v>0]} F(x,t_n v_n^+) dx + \int_{[v\leq 0]} F(x,t_n v_n^+) dx + \int_{v_n\leq 0} F(x,t_n v_n) dx. \tag{1.38}$$

Faremos agora uma estimativa para cada integral. Estimando a segunda integral e tendo em vista a desigualdade (1.33), encontramos

$$\int_{[v\leq 0]} F(x,t_n v_n^+) dx \leq C \int_{[v\leq 0]} \left(\frac{1}{2} t_n^2 (v_n^+)^2 + 1 \right) dx.$$

Dividindo-a por t_n^2, obtemos

$$\int_{[v\leq 0]} \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx \leq \frac{C}{2} \int_{[v\leq 0]} \left((v_n^+)^2 + \frac{1}{t_n^2} \right) dx. \tag{1.39}$$

Em virtude de $t_n \to \infty$,

$$\int_{[v\leq 0]} \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx \leq \frac{C}{2}\int_{[v\leq 0]} (v_n^+)^2 dx.$$

Como $v_n \to v$ em $L^2(\Omega)$ e pelo teorema A.3,

$$\int_{[v\leq 0]} \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx \to 0 \tag{1.40}$$

quando $n \to \infty$.

Para fazer uma estimativa da terceira integral, usemos a definição da f quando $t < 0$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} F(x,t) &= \int_0^t f(x,0)ds \\ &= tf(x,0) \\ &\leq |f(x,0)|_\infty |t|. \end{aligned}$$

Tomando $C = |f(x,0)|$, temos

$$F(x,t) \leq C|t|.$$

Assim, integrando em $v_n \leq 0$,

$$\begin{aligned} \int_{v_n\leq 0} F(x,t_nv_n)dx &\leq C\int_{v_n\leq 0} |t_nv_n|dx \\ &\leq C\int_\Omega t_n|v_n|dx. \end{aligned}$$

Dividindo a desigualdade por t_n^2, obtemos

$$\int_{v_n\leq 0} \frac{F(x,t_nv_n)}{t_n^2}dx \leq C\int_\Omega \frac{1}{t_n}|v_n|dx.$$

E pelo Teorema A.8,

$$\int_{v_n\leq 0} \frac{F(x,t_nv_n)}{t_n^2}dx \leq \frac{1}{t}||v_n||_2 C|\Omega|^{\frac{1}{2}},$$

pois Ω é limitado.

Como $t_n = ||u_n|| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, temos

$$\int_{v_n \leq 0} \frac{F(x, t_n v_n)}{t_n^2} dx \longrightarrow 0. \tag{1.41}$$

Fazendo estimativas para a primeira integral, notemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{F(x,u)}{u^2} \leq \frac{1}{2} a_\infty(x) \qquad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Pois, da definição de limite superior,

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{f(x,t)}{t} = a_\infty(x) = \inf_{\epsilon>0} \sup_{t>\epsilon} \frac{f(x,t)}{t}.$$

Assim, dado $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{f(x,t)}{t} < a_\infty(x) + \delta \qquad \forall t > \epsilon.$$

Logo

$$f(x,t) < (a_\infty + \delta)t \qquad \forall t > \epsilon.$$

Daí, fazendo uso dessa desigualdade

$$\begin{aligned} F(x,t) &= F(x,\epsilon) + \int_\epsilon^t f(x,r)dr \\ &< F(x,\epsilon) + \frac{(a_\infty + \delta)t^2}{2}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{F(x,t)}{t^2} < \frac{F(x,\epsilon)}{t^2} + \frac{a_\infty(x) + \delta}{2} \qquad \forall t > \epsilon.$$

Logo

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} \leq \frac{a_\infty(x) + \delta}{2}.$$

Sendo $\delta > 0$ arbitrário, obtemos

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} \leq \frac{1}{2} a_\infty(x),$$

e portanto

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{F(x,t_n v_n^+(x)}{t_n^2} \leq a_\infty(x)v^2(x) \qquad \text{q.t.p em } [v>0]. \tag{1.42}$$

Já que podemos multiplicar ambos os lados por $(v^+)^2$, para obtermos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{F(x,t_n v_n^+(x))}{t_n^2 (v_n^+)^2}(v^+(x))^2 \leq \frac{1}{2}a_\infty(x)(v^+(x))^2.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n^+)^2 = (v^+(x))^2$ e $v^+ = v$ em $v>0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{F(x,t_n v_n^+(x))}{t_n^2 (v_n^+)^2} \lim_{n\to\infty}(v_n^+)^2 \leq \frac{1}{2}a_\infty(x)(v^+(x))^2.$$

Daí,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{F(x,t_n v_n^+(x))}{t_n^2 (v_n^+)^2}(v_n^+)^2 \leq \frac{1}{2}a_\infty(x)(v^+(x))^2.$$

Desse modo,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{F(x,t_n v_n^+(x))}{t_n^2} \leq \frac{1}{2}a_\infty(x)(v^+(x))^2 \qquad \text{q.t.p em } [v>0].$$

Por outro lado,

$$\frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} \leq C\left[(v_n^+)^2 + \frac{1}{t_n^2}\right]$$

conforme a desigualdade (1.33).

Como $v_n \to v$ em $L^2(\Omega)$, pelo Teorema A.4 existe uma função $\overline{h} \in L^2(\Omega)$, a menos de subsequência tal que

$$v_n \to v \qquad \text{q.t.p em } \Omega$$

e

$$|v_n| \leq \overline{h} \qquad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Desse modo, com $\overline{h} \in L^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} &\leq C\left[(v_n^+)^2 + \frac{1}{t_n^2}\right] \\ &\leq C\left[(\overline{h})^2 + \overline{c}\right]. \end{aligned}$$

Tomando $h = \overline{h}^2 + \overline{c}$, resulta em

$$h - \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} \geq 0.$$

Aplicando o Teorema A.5 na expressão acima, encontramos

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} \left(h - \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} \right) dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \left(h - \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} \right) dx \tag{1.43}$$

Assim observando o primeiro membro,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} \left(h - \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} \right) dx &= \int_\Omega \left[\liminf_{n\to+\infty} h + \liminf_{n\to+\infty} \left(-\frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} \right) \right] dx \\ &= \int_\Omega h - \int_\Omega \limsup_{n\to+\infty} \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx. \end{aligned} \tag{1.44}$$

E no segundo membro,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \left(h - \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} \right) dx &= \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega h dx + \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \left(-\frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} \right) dx \\ &= \int_\Omega h dx - \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Logo, de (1.44) e (1.45),

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx \leq \int_\Omega \limsup_{n\to+\infty} \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx. \tag{1.46}$$

Integrando (1.42) em $[v > 0]$,

$$\int_{v>0} \limsup \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^+} dx \leq \frac{1}{2} \int_{v>0} a_\infty(x) v^2(x) dx \qquad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Mas pela desigualdade (1.46) e usando o fato de que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx = \limsup_{n\to+\infty} \int_{v>0} \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx$$

temos

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{v>0} \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx \leq \frac{1}{2} \int_{v>0} a_\infty(x) v^2(x) dx.$$

Pela igualdade (1.38), dividimos ambos os membros por t_n^2 e passamos o limite superior para obter

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx &\leq \limsup_{n\to+\infty}\int_{v>0}\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx+\limsup_{n\to+\infty}\int_{v<0}\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx\\
&+ \limsup_{n\to+\infty}\int_{v_n>0}\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx.
\end{aligned}$$

Então podemos substituir nessa desigualdade as estimativas para cada integral. Dessa forma,

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx \leq \frac{1}{2}\int_{v>0}a_\infty(x)v^2(x)dx.$$

Verificando assim que a afirmação (1.35) é válida.

Agora, observando a desigualdade (1.32) e dividindo-a por t_n^2, segue-se

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{t_n^2}dx \leq \int_\Omega\left(\frac{F(x,u_n)}{t_n^2}+\frac{c}{t_n^2}\right)dx.$$

Passando ao limite superior, temos

$$\frac{1}{2}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{t_n^2}dx \leq \limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega \frac{F(x,u_n)}{t_n^2}dx.$$

Daí, pela afirmação (1.35),

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega a_\infty(x)v^2(x)dx. \tag{1.47}$$

Como

$$\alpha = \inf_{\substack{\phi\in H_0^1(\Omega)\\ \|\phi\|_2=1}}\left\{\int_\Omega |\nabla\phi|^2dx - \int_{v>0}a_\infty(x)\phi^2dx\right\}.$$

Tomando $\phi = \dfrac{v^+}{||v^+||}$ e considerando que $v^+=v$ em $v>0$, encontramos

$$\begin{aligned}
\alpha &\leq \int_\Omega\left|\nabla\left(\frac{v^+}{||v^+||}\right)\right|dx - \int_{v>0}a_\infty\left(\frac{v^+}{||v^+||}\right)^2dx\\
&= \frac{1}{||v||_2^2}\int_\Omega|\nabla v^+|^2dx - \int_{v>0}a_\infty(x)v^2dx.
\end{aligned}$$

Ainda, tendo em vista a desigualdade (1.47),

$$\alpha||v^+||_2^2 \leq \int_\Omega |\nabla v^+|^2 dx - \int_{v>0} a_\infty(x) v^2 dx \leq 0.$$

Mas, $\alpha > 0$ então $||v^+||_2^2 = 0$. Mais precisamente, $v^+ = 0$.

Logo

$$\int_{v>0} a_\infty(x) v^2 dx = 0.$$

Com isso, pela desigualdade (1.47) teremos que $v = 0$. Um absurdo, já que $||v||_2 = 1$. Portanto, o funcional $E(u)$ é coercivo.

$\square$

Mostraremos agora que o funcional associado ao problema é fracamente semicontínuo inferiormente.

Lema 1.9 *E é Fracamente semicontínuo inferiormente.*

Demonstração. Para demonstrar essa afirmação, devemos concluir que se (u_n) converge fraco para u em $H_0^1(\Omega)$ então

$$E(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} E(u_n).$$

Para isso, suponha que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e do Teorema A.10, resulta que $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$. Podemos então aplicar o Teorema A.4 para afirmar que existe uma função $\overline{\overline{h}} \in L^2(\Omega)$ a menos de subsequência tal que

$$u_n \to u \qquad \text{q.t.p em } \Omega,$$

e

$$|u_n| \leq h \qquad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Assim

$$F(x, u_n) \leq C(u_n^2 + 1) \leq C((\overline{\overline{h}})^2 + 1) \qquad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Tomando $h = C((\overline{\overline{h}})^2 + 1)$ e aplicando o Teorema A.5 em

$$h - F(x, u_n) \geq 0,$$

temos

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} [h - F(x, u_n)]\, dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega [h - F(x, u_n)]\, dx.$$

Daí,

$$\int_\Omega h dx + \int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} [-F(x, u_n)] dx \leq \int_\Omega h dx + \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega [-F(x, u_n)] dx.$$

Como $F(x, u_n)$ é contínua e $u_n \to u$ q.t.p em Ω,

$$\int_\Omega (-F(x, u_n)) dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega [-F(x, u_n)] dx.$$

Considerando essa desigualdade e recordando que a norma é fracamente semicontínua inferiormente, decorre em

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x, u) dx \\ &\leq \frac{1}{2}\liminf_{n\to+\infty} ||\nabla u_n||_2^2 + \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega [-F(x, u_n)] dx \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega F(x, u_n) dx\right] \\ &= \liminf_{n\to+\infty} E(u_n). \end{aligned}$$

Mostrando portanto, que o funcional é fracamente semicontínuo inferiormente.

□

Lema 1.10 *Existe alguma função $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $E(\phi) < 0$.*

Demonstração. Fixemos $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \neq 0$ satisfazendo

$$\int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx - \int_\Omega a_0(x)\phi^2(x) dx < 0.$$

Note que essa função existe em virtude a $\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0$. Podemos sempre assumir que $\phi > 0$ e que $\phi \in L^\infty(\Omega)$ (Caso contrário, substituimos ϕ por $|\phi|$ e trucamos ϕ).

Notemos inicialmente que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} \geq \frac{1}{2}a_0(x).$$

Assim, tomando $t = \epsilon\phi$,

$$\liminf_{\epsilon\to 0} \frac{F(x,\epsilon\phi(x))}{\epsilon^2\phi^2(x)} \geq \frac{1}{2}a_0(x).$$

Logo

$$\liminf_{\epsilon\to 0} \frac{F(x,\epsilon\phi(x))}{\epsilon^2} \geq \frac{1}{2}a_0(x)\phi^2(x) \qquad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{1.48}$$

Por outro lado, decorrendo de $(f5)$,

$$\frac{F(x,\epsilon\phi)}{\epsilon^2} \geq -C\phi^2 \geq -C. \tag{1.49}$$

Pois

$$\begin{aligned} \frac{F(x,\epsilon\phi)}{\epsilon^2} \geq \liminf_{\epsilon\to 0} \frac{F(x,\epsilon\phi(x))}{\epsilon^2} &\geq \frac{1}{2}\phi^2(x)\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x,\epsilon\phi)}{\epsilon\phi} \\ &\geq \frac{1}{2}\phi^2(x)(-C_\delta) \\ &\geq -C. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema A.5 em

$$\frac{F(x,\epsilon\phi)}{\epsilon^2} + C \geq 0$$

temos,

$$\int_\Omega \liminf_{\epsilon\to 0}\left(\frac{F(x,\epsilon\phi)}{\epsilon^2} + C\right)dx \leq \liminf_{\epsilon\to 0}\int_\Omega \left(\frac{F(x,\epsilon\phi)}{\epsilon^2} + C\right)dx.$$

Daí

$$\int_\Omega \liminf_{\epsilon\to 0}\frac{F(x,\epsilon\phi)}{\epsilon^2}dx \leq \liminf_{\epsilon\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,\epsilon\phi)}{\epsilon^2}dx.$$

E pela desigualdade (1.48) chegamos em

$$\frac{1}{2}\int_{\phi\neq 0} a_0(x)\phi^2(x)dx \leq \liminf_{\epsilon\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,\epsilon\phi)}{\epsilon^2}dx.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2}\int_{\phi\neq 0} a_0(x)\phi^2(x)dx \leq \int_\Omega \frac{F(x,\epsilon\phi)}{\epsilon^2}dx.$$

Equivalentemente,

$$-\int_\Omega \frac{F(x,\epsilon\phi)}{\epsilon^2}dx \leq -\frac{1}{2}\int_\Omega a_0(x)\phi^2(x)dx.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\phi|^2dx - \int_\Omega \frac{F(x,\epsilon\phi)}{\epsilon^2}dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\phi|^2dx - -\frac{1}{2}\int_{\phi\neq 0} a_0(x)\phi^2(x)dx < 0.$$

E assim,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\epsilon\phi|^2dx - \int_\Omega F(x,\epsilon\phi)dx < 0.$$

Obtendo

$$E(\varphi) < 0, \qquad \text{com } \varphi := \epsilon\phi.$$

Portanto, existe $\varphi = \epsilon\phi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $E(\varphi) = E(\epsilon\phi) < 0$.

$\square$

Assim podemos concluir que o infímo é atingido por uma função $u \neq 0$ em $H_0^1(\Omega)$, pois como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert reflexivo e $E(u)$ é um funcional fracamente semicontínuo inferiormente e coercivo, então existe uma função $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$E(u_0) = \inf E(u),$$

e pelo lema (1.10) verificamos que $\inf E(u) \neq 0$.

Note que podemos sempre assumir que $u \geq 0$, caso contrário substituimos u por u^+ e usamos o fato de que $F(x,u) \leq F(x,u^+)$.

Desse modo,

$$E(u^+) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Logo,

$$E(u^+) = \inf_{v \in H_0^1} E(v).$$

Vejamos agora que $u \in L^\infty(\Omega)$. Para este propósito, introduziremos um problema truncado. Para cada inteiro $k > 0$, temos

$$f^k(x,u) = \begin{cases} \max\{f(x,t), -kt\}, & \text{se} \quad t \geq 0 \\ f^k(x,0) = f(x,0), & \text{se} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Consideremos também

$$a_0^k(x) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{f^k(x,t)}{t} \qquad \text{e} \qquad a_\infty^k(x) = \limsup_{t \to +\infty} \frac{f^k(x,t)}{t}.$$

Observe que as hipóteses $(f2)$, $(f3)$, $(f4)$ e $(f5)$ valem para $f^k(x,t)$. Ainda, (1.8) e (1.9) valem para a^k.

Mostraremos que (1.8) ocorre para a_0^k e (1.9) ocorre para a_∞^k.

i). (1.8) ocorre para a_0^k, ou seja, $\lambda_1(-\Delta - a_0^k(x)) < 0$. Pela definição de $f^k(x,t)$,

$$f(x,t) \leq f^k(x,t).$$

Então, para $t > 0$, resulta em

$$\frac{f(x,t)}{t} \leq \frac{f^k(x,t)}{t}.$$

Logo, para quase todo ponto em Ω,

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} \leq \liminf_{t \to 0^+} \frac{f^k(x,t)}{t}.$$

E assim,

$$a_0(x) \leq a_0^k(x) \qquad \text{q.t.p em } \Omega,$$

ou

$$-a_0^k(x) \leq -a_0(x) \qquad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\Delta - a_0^k(x)) &= \inf_{\substack{\phi \in H_0^1(\Omega) \\ \|\phi\|_2 = 1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx - \int_\Omega a_0^k(x) \phi^2(x) dx \right\} \\
&\leq \inf_{\substack{\phi \in H_0^1(\Omega) \\ \|\phi\|_2 = 1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx - \int_\Omega a_0(x) \phi^2(x) dx \right\} \\
&= \lambda_1(\Delta - a_0(x)) < 0.
\end{aligned}$$

portanto, segue a afirmação.

ii). (1.9) ocorre para a_∞^k para dado k suficientemente grande. Para isso, basta verificar que $a_\infty^k \to a_\infty$ quando $k \to +\infty$. De fato, como $f(x,t) \leq f^k(x,t)$ e $f^k(x,t) \to f(x,t)$ quando $k \to +\infty$, segue que

$$a_\infty^k = \limsup_{t \to +\infty} \frac{f^k(x,t)}{t} \longrightarrow \limsup_{t \to +\infty} \frac{f(x,t)}{t} = a_\infty(x)$$

quando $k \to +\infty$.

Por $(f3)$,

$$f^k(x,t) = \max\{f(x,t), -kt\} \leq C(t+1).$$

Daí,

$$\frac{f^k(x,t)}{t} \leq C\left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

Logo, a partir de $\delta > 0$,

$$\sup_{t \geq \delta} \frac{f^k(x,t)}{t} \leq C\left(1 + \frac{1}{\delta}\right).$$

Portanto,

$$\inf_{\delta \to +\infty} \sup_{t \geq \delta} \frac{f^k(x,t)}{t} \leq C,$$

isto é,

$$a_\infty^k \leq C.$$

Logo, estamos nas hipóteses do teorema da convergência dominada de Lesbegue (Teorema A.3). Assim, para $v \in H_0^1(\Omega)$ e $||v|| = 1$ temos

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{v\neq 0} a_\infty^k(x) v^2(x)dx = \int_\Omega a_\infty(x) v^2(x)dx.$$

Além disso,

$$\lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x)) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega a_\infty^k v^2(x)dx \right\} \leq \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega a_\infty^k v^2(x)dx.$$

Tomando o limite superior,

$$\limsup_{k\to+\infty} \lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x)) \leq \lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)). \tag{1.50}$$

Por outro lado, temos que para $\epsilon > 0$, existe $v \in H_0^1(\Omega)$ com $||v|| = 1$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega a_\infty^k(x) v^2(x)dx \leq \lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x)) + \epsilon.$$

Como

$$\lim_{k\to+\infty} \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega a_\infty^k(x) v^2(x)dx \right\} = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega a_\infty(x) v^2(x)dx,$$

segue que, tomando o ínfimo,

$$\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) \leq \liminf_{k\to+\infty} \lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x)). \tag{1.51}$$

Logo, de (1.50) e (1.51),

$$\lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x)) \longrightarrow \lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0.$$

Portanto,

$$\lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x)) > 0.$$

Segue pelos mesmos argumentos anteriores que existe, para k suficientemente grande, $u_k \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$E(u_k) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} (E_k(u)).$$

Além disso, u_k satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u_k(x) = f^k(x, u(x)) & \text{em} \quad x \in \Omega \\ u_k(x) \geq 0, u_k \neq 0 & \text{em} \quad x \in \Omega \\ u_k(x) = 0 & \text{sobre} \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.52}$$

Note que E_k é de classe C^1, visto que $|f^k(x,t)| \leq C_k(|t| + 1)$, pois

$$f^k(x,t) = \max\{f(x,t), -kt\} = f(x,t) \leq C(t+1) \qquad \forall t \geq 0$$

e

$$f^k(x,t) = f(x,0) \leq C(|t|+1) \qquad \forall t \leq 0.$$

Logo,

$$|f^k(x,t)| \leq C(|t|+1) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como mencionado em [7], segue-se do crescimento da função truncada f^k que a solução $u_k \in L^\infty(\Omega)$. Seja $v = \min\{u, u_k\}$. Afirmamos que

$$E(v) \leq E(u),$$

isso nos diz que podemos considerar u em $L^\infty(\Omega)$, pois do contrário trocamos u por v. De fato, note que $E(u_k)$ é uma solução de (1.52). Assim,

$$E(u_k) \leq E(\phi) \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Dessa forma,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx - \int_\Omega F^k(x, u_k) dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx - \int_\Omega F^k(x,\phi) dx. \tag{1.53}$$

Em particular vale para $\phi = \max\{u, u_k\}$. Observe que sobre o conjunto $\{u_k \geq u\}$ as integrais dos dois lados da desigualdade são iguais, pois neste caso $\phi = u_k$. Consideremos então $\phi = \max\{u, u_k\} = u$.

Observando (1.53) e integrando em $u_k < u$, temos

$$\frac{1}{2}\int_{u_k<u} |\nabla u_k|^2 dx - \int_{u_k<u} F^k(x, u_k)dx \leq \frac{1}{2}\int_{u_k<u} |\nabla u|^2 dx - \int_{u_k<u} F^k(x, u)dx.$$

Equivalentemente,

$$\frac{1}{2}\int_{u_k<u} \left(|\nabla u_k|^2 - |\nabla u|^2\right) dx \leq \int_{u_k<u} \left(F^k(x, u_k) - F^k(x, u)\right) dx. \tag{1.54}$$

Notemos que

$$E(v) - E(u) = \int_{u_k<u} \left[\left(\frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) - F(x, u_k) + f(x, u)\right] dx.$$

E por (1.54), obtemos

$$E(v) - E(u) \leq \int_{u_k<u} \left[F^k(x, u_k) - F^k(x, u) - F(x, u_k) + f(x, u)\right] dx.$$

Daí, aplicando a cada integral a definição da $F(x, u)$, segue-se

$$\begin{aligned} E(v) - E(u) &\leq \int_0^{u_k} f^k(x, t)dt - \int_0^{u} f^k(x, t)dt - \int_0^{u_k} f(x, t)dt + \int_0^{u} f(x, t)dt \\ &= \int_u^{u_k} f^k(x, t)dt - \int_u^{u_k} f(x, t)dt \\ &= \int_u^{u_k} \left(f^k(x, t) - f(x, t)\right) dt. \end{aligned}$$

Como $u \geq u_k$,

$$E(v) - E(u) \leq \int_{u_k}^{u} \left(f(x, t) - f^k(x, t)\right) dt,$$

lembremo-nos que $f^k(x, t) \geq f(x, t)$ q.t.p em Ω. Dessa forma,

$$\int_{u_k}^{u} \left(f(x, t) - f^k(x, t)\right) dt \leq 0 \qquad \text{para } u > u_k.$$

Decorrendo em

$$E(v) \leq E(u).$$

Capítulo 2

Um Problema Sublinear em $\mathbb{R}^N$

Estamos interessados com a questão de existência (ou não-existência) e unicidade de soluções positivas do problema

$$-\Delta u(x) = \rho(x) u^{\alpha}(x) \qquad \text{em } \mathbb{R}^N \tag{P2}$$

onde $N \geq 3$ com $0 < \alpha < 1$ e $\rho(x) \geq 0$ é uma função não nula.

Assumiremos a partir de agora que $\rho \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Dedicaremos atenção para uma solução $u \geq 0$, $u \neq 0$ de modo que pelo princípio do máximo forte, se uma tal solução existe então $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Usaremos frequentemente o seguinte definição:

Definição 2.1 *Dizemos que uma função $\rho(x) \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\rho(x) \geq 0$ tem a propriedade (H) se o problema linear*

$$-\Delta U(x) = \rho(x) \qquad \textit{em } \mathbb{R}^N \tag{2.1}$$

tem uma solução positiva limitada.

Para conforto do leitor, informamos novamente o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2.1 *O problema* $(P2)$ *tem solução positiva limitada se, e somente se,* $\rho(x)$ *satisfaz (H). Além disso, existe uma solução positiva minimal de* $(P2)$.

O problema $(P2)$ para domínios limitados com condição de Dirichlet zero foi extensamente estudada (mesmo para funções sublineares mais gerais). O estudo do problema $(P2)$ está relacionado com o comportamento assintótico (quando $t \to +\infty$) de uma função

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m \quad \text{em} \;\; \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \tag{2.2}$$

com $m = \frac{1}{\alpha} > 1$.

Vamos, a partir de agora demonstrar o Teorema 2.1. Para tanto, necessitamos das seguintes definições:

Definição 2.2 *Uma função* $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *é uma subsolução do problema (P2') se*

$$\begin{cases} -\Delta & \leq & \rho(x)u^{\alpha}(x) & \textit{em} & \Omega, \\ u(x) & \leq & 0 & \textit{sobre} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição 2.3 *Uma função* $\overline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *é uma supersolução do problema (P2') se*

$$\begin{cases} -\Delta & \geq & \rho(x)u^{\alpha}(x) & \textit{em} & \Omega, \\ u(x) & \geq & 0 & \textit{sobre} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Primeiramente, mostremos que se $\rho(x)$ satisfaz a propriedade (H) então o problema (P2) tem solução limitada. Para tanto, seja

$$B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < R\},$$

e seja u_R uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \rho(x)u^{\alpha}(x) & \text{em} & B_R(0) \\ u(x) = 0 & \text{sobre} & \partial B_R(0). \end{cases} \tag{P2'}$$

Note que u_R está bem definida. Para isso, procuraremos deixar u_R nas hipóteses do teorema de existência de Brezis-Oswald. De fato, tomando $f(x,t) = \rho(x)t^\alpha$, verificamos que $f(x,t)$ é contínua para todo $x \in B_R(0)$. Ainda observemos que

$$\frac{f(x,t)}{t} = \rho(x)\frac{1}{t^{1-\alpha}}.$$

Assim, $\dfrac{f(x,t)}{t}$ é decrescente com $t > 0$ e $1-\alpha < 1$. Verificamos ainda que existe uma constante $c > 0$ tal que $f(x,t) \leq c(t+1)$ para quase todo ponto $x \in B_R(0)$ e para todo $t \geq 0$.

Nesse sentido, observando a função que se segue

$$f(t) = \frac{t^\alpha}{1+t}.$$

Daí,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} = 0,$$

e $f(0) = 0$.

Portanto, estamos nas condições de existência do Teorema de Brezis-Oswald [7] estudado no Capitulo anterior. Assim, u_R existe.

Mostraremos ainda que $f(x,t) = \rho t^\alpha$ satisfaz $\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0$ e $\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0$.

Seja

$$a_0(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} \qquad \text{e} \qquad a_\infty(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(x,t)}{t}.$$

Segue que

$$a_0(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\rho(x)t^\alpha}{t} \qquad \text{e} \qquad a_\infty(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\rho(x)t^\alpha}{t},$$

ou seja,

$$a_0(x) = \lim_{t\to 0^+} \rho(x)\frac{1}{t^{1-\alpha}} = +\infty \qquad \text{e} \qquad a_\infty(x) = \lim_{t\to+\infty} \rho(x)\frac{1}{t^{1-\alpha}} = 0.$$

Logo,

$$\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0 \qquad \text{e} \qquad \lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0.$$

Lema 2.1 *$u_{R'}$ é supersolução para o problema $(P2')$.*

Demonstração. Note que para cada $R > 0$, (u_R) é uma sequência não decrescente, no sentido de que se $R' > R$ então $u_{R'} \geq u_R$. De fato, se $R' > R$, temos $B_R(0) \subset B_{R'}(0)$ e assim,

$$\int_{B_R(0)} \nabla u_{R'} \nabla \hat{\varphi} dx = \int_{B_{R'}(0)} \rho(x) u_{R'}^{\alpha} \hat{\varphi} dx \geq \int_{B_R(0)} \rho(x) u_{R'}^{\alpha} \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(B_R(0)), \quad \varphi \geq 0,$$

onde definimos

$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{se} \quad x \in B_R(0) \\ 0, & \text{se} \quad x \in B_{R'}(0) \backslash B_R(0) \end{cases} \qquad \hat{\varphi} \in H_0^1(B_{R'}(0)).$$

Daí,

$$\int_{B_R(0)} \nabla u_{R'} \nabla \varphi dx \geq \int_{B_R(0)} \rho(x) u_{R'}^{\alpha} \varphi dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1(B_R(0)), \quad \varphi \geq 0.$$

Portanto, $u_{R'}$ é supersolução de (P2').

□

Construiremos agora uma subsolução $\underline{u}$ para o problema (P2') tal que $\underline{u} \leq u_{R'}$. Isto implicará (pelo método de sub e supersolução) que existe uma solução u do problema (P2') tal que $\underline{u} \leq u \leq u_{R'}$. Como (P2') tem solução única u_R, segue-se que $u = u_R$.

Lema 2.2 *$\underline{u}$ é uma subsolução para o problema $(P2')$.*

Demonstração. Para a subsolução $\underline{\mathrm{u}}$, tomemos $\underline{u} = \epsilon \varphi_1$ em (P2') onde $\epsilon > 0$ e φ_1 é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \rho(x) \varphi_1 & \text{em} \quad B_R(0) \\ \varphi_1 = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R(0). \end{cases}$$

Assim sendo,

$$\int_{B_R(0)} \nabla\varphi_1 \nabla w dx = \lambda_1 \int_{B_R(0)} \rho(x)\varphi_1 w dx \qquad \forall w \in H_0^1(B_R(0)). \tag{2.3}$$

Devemos mostrar que

$$\begin{cases} -\Delta(\epsilon\varphi_1) \leq \rho(x)(\epsilon\varphi_1)^\alpha & \text{em} \quad B_R(0) \\ \epsilon\varphi_1 \leq 0 & \text{em} \quad \partial B_R(0), \end{cases}$$

ou seja,

$$\int_{B_R(0)} \nabla(\epsilon\varphi_1)\nabla\varphi dx \leq \int_{B_R(0)} \rho(x)(\epsilon\varphi_1)^\alpha\varphi \qquad \forall\varphi \in H_0^1(B_R(0)).$$

Assim,

$$\epsilon^{1-\alpha}\int_{B_R(0)} \nabla\varphi_1\nabla\varphi dx \leq \int_{B_R(0)} \rho(x)\varphi_1^\alpha\varphi dx \qquad \forall\varphi \in H_0^1(B_R(0)).$$

Tendo em vista (2.3),

$$\epsilon^{1-\alpha}\lambda_1\int_{B_R(0)} \rho(x)\varphi_1\varphi dx \leq \int_{B_R(0)} \rho(x)\varphi_1^\alpha\varphi dx \qquad \forall\varphi \in H_0^1(B_R(0)).$$

Note ainda que

$$\begin{aligned} \epsilon^{1-\alpha}\lambda_1\int_{B_R(0)} \rho(x)\varphi_1\varphi dx &= \epsilon^{1-\alpha}\lambda_1\int_{B_R(0)} \rho(x)\varphi_1^\alpha\varphi\varphi_1^{1-\alpha} dx \\ &\leq \lambda_1||\varphi||_\infty^{1-\alpha}\int_{B_R(0)} \rho(x)\varphi_1^\alpha\varphi dx \\ &\leq \int_{B_R(0)} \rho(x)\varphi_1^\alpha\varphi dx. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos escolher $0 < \epsilon \leq \dfrac{1}{||\varphi||_\infty \lambda_1^{\frac{1}{1-\alpha}}}$ $\forall\varphi \in H_0^1(B_R(0))$ $\forall\varphi \geq 0$. Assim, $\underline{u} = \epsilon\varphi_1$ é subsolução de (P2').

$\square$

Mostraremos agora que a sub e a supersolução estão ordenadas, ou seja, $\underline{u} \leq u_{R'}$ q.t.p em $B_R(0)$.

Como $u_{R'} \geq \overline{c}$ q.t.p em $B_R(0)$, com $\overline{c} > 0$, escolhendo

$$\epsilon \leq \min \left\{ \frac{1}{||\varphi||_\infty \lambda_1^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \frac{\alpha}{||\varphi_1||_\infty} \right\},$$

temos $\epsilon\varphi_1 \leq \epsilon||\varphi||_\infty \leq \alpha$. Onde,

$$\epsilon\varphi_1 \leq \alpha \leq u_{R'} \quad \text{em} \quad B_R(0).$$

Assim, tendo em vista essa ordenação da sub e supersolução, existe $u \in H_0^1(B_R(0))$ tal que $\underline{u} \leq u \leq u_{R'}$ onde u é solução fraca de (P2'). Sendo a solução desse problema única, obtemos

$$u = u_R \leq u_{R'}.$$

Vejamos em seguida que a sequência (u_R) é limitada quando $R \to +\infty$. Seja U uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta U = \rho(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ U > 0 & \text{q.t.p em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla U \nabla w dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) w dx \qquad \forall w \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Como ρ satisfaz a propriedade (H), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$U^\alpha \leq C^{1-\alpha}.$$

Daí

$$(CU)^\alpha \leq C.$$

Assim,

$$\int_{B_R(0)} \rho(x)(CU)^\alpha \varphi dx \leq \int_{B_R(0)} \rho(x) C\varphi dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1(B_R(0)),\ \forall \varphi \geq 0.$$

Portanto

$$\int_{B_R(0)} \rho(x)(CU)^\alpha \varphi dx \leq \int_{B_R(0)} \nabla(CU)\nabla\varphi dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1(B_R(0)),\ \varphi \geq 0.$$

O que implica que CU é uma supersolução fraca de (P2').

Como $CU \geq \tilde{\alpha} > 0$ em $B_R(0)$, escolhendo $\epsilon \leq \dfrac{\overline{C}}{||\varphi_1||_\infty}$, obtemos

$$\epsilon\varphi_1 \leq CU.$$

Pelo método de sub e supersolução,

$$\epsilon\varphi_1 \leq u_R \leq CU \leq \overline{C}. \tag{2.4}$$

Mostrando que (u_R) é limitada quando $R \to +\infty$. Observamos ainda, que sendo (u_R) não-crescente e limitada,

$$u(x) = \lim_{R\to+\infty} u_R(x) \qquad \text{q.t.p em} \qquad B_R(0).$$

Claramente, u é solução minimal para o problema (P2). De fato, se $\overline{u}$ é outra solução de (P2'), então $u_R \leq \overline{u}$ em $B_R(0)$, por comparação. Assim, $u \leq \overline{u}$.

Provemos a recíproca do Teorema 2.1, ou seja, devemos mostrar que se u é uma solução limitada de (P2), então $\rho(x)$ satisfaz a propriedade (H). Para isso, suponha u uma solução positiva limitada de (P2). Dessa forma,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) u^\alpha \varphi dx \qquad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Seja também,

$$v = \frac{1}{1-\alpha} u^{1-\alpha}. \tag{2.5}$$

Então

$$-\Delta v = \alpha u^{-\alpha-1}|\nabla u|^2 + \rho \geq \rho.$$

Com efeito, note primeiramente que a partir de (2.5),

$$\nabla v = u^{-\alpha}\nabla u.$$

Tomando $\varphi = \phi u^{-\alpha}$, com $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \phi > 0$ e u uma solução de (P2), tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla(\phi u^{-\alpha}) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\phi dx \qquad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelas propriedades do produto do gradiente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \left(\nabla \phi u^{-\alpha} - \alpha u^{-\alpha-1}\phi \nabla u\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\phi dx \qquad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi u^{-\alpha} dx - \int_{\mathbb{R}^N} \alpha \phi u^{-\alpha-1} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\phi dx \qquad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Como $\nabla v = u^{-\alpha}\nabla u$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} \alpha \phi u^{-\alpha-1} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\phi dx \qquad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Usando o fato de que $\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \phi dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \phi \Delta v dx$,

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \phi \Delta v dx - \int_{\mathbb{R}^N} \alpha \phi u^{-\alpha-1} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\phi dx \qquad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(-\Delta v - \alpha u^{-\alpha-1}|\nabla u|^2\right) \phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\phi dx \qquad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Desse modo

$$-\Delta v - \alpha u^{-\alpha-1}|\nabla u|^2 = \rho(x).$$

O que implica em

$$-\Delta v = \alpha u^{-\alpha-1}|\nabla u|^2 + \rho(x).$$

E, como $u(x), \rho(x) \geq 0$,

$$-\Delta v \geq \rho(x). \tag{2.6}$$

A solução W_R do problema

$$\begin{cases} -\Delta W_R = \rho(x) & \text{em} \quad B_R(0) \\ W_R = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R(0), \end{cases}$$

satisfaz $W_R \leq v$. Assim, W_R é crescente quando $R \to +\infty$ para uma solução limitada de (P2'). Mostremos isso.

Por (2.6)

$$\begin{cases} -\Delta v \geq \rho(x) & \text{em} \quad B_R(0) \\ v \geq 0 & \text{em} \quad \partial B_R(0). \end{cases}$$

E considerando

$$\begin{cases} -\Delta W_R = \rho(x) & \text{em} \quad B_R(0) \\ W_R = 0 & \text{em} \quad \partial B_R(0), \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} -\Delta v \geq -\Delta W_R & \text{em} \quad B_R(0) \\ v \geq W_R & \text{em} \quad \partial B_R(0). \end{cases}$$

Assim pelo Teorema B.7,

$$v \geq W_R \qquad \text{em} \quad B_R(0).$$

Seja $W = \lim\limits_{R \to +\infty} W_R$. Como $W = \lim\limits_{R \to +\infty} W_R < v$, então W é limitado. Além disso, como $W_R \leq v$,

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} W_R dx &\leq \int_{B_R(0)} v dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{B_R(0)} u^{1-\alpha} dx \\ &= C \int_{B_R(0)} u^{1-\alpha} dx < +\infty, \end{aligned}$$

Daí

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{B_R(0)} W_R < +\infty.$$

Assim, W é solução fraca e limitada de $-\Delta u = \rho(x)$ em $\mathbb{R}^N$.

□

O significado do Teorema 2.1 é que se $\rho(x)$ decai suficientemente rápido no infinito, então o problema (P2) tem solução.

Proposição 2.1 *A solução minimal u obtida no Teorema 2.1 satisfaz*

$$u(x) = C \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\rho(x)u^\alpha(y)}{|x-y|^{N-2}} dy \tag{2.7}$$

e

$$\lim_{R\to+\infty} \fint_{S_R} u dx = 0. \tag{2.8}$$

Demonstração. De fato, u satisfaz (2.8) para qualquer solução positiva U da propriedade (H), em particular podemos tomar $U = \dfrac{c}{|x|^{N-2}} * \rho$. Aplicando a Proposição C.7, concluimos (2.8). E, como consequência da propriedade (H),

$$\liminf_{|x|\to+\infty} u(x) = 0, \tag{2.9}$$

pelo Corolário C.2.

Então existe uma única solução u para o problema

$$\begin{cases} -\Delta v = f \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \liminf\limits_{|x|\to+\infty} u(x) = 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

onde $f = \rho(x)u^\alpha(x)$, tal que $\lim\limits_{R\to+\infty} \fint_{S_R} v dx = 0$.
Podemos então tomar

$$v = \frac{c}{|x|^{N-2}} * \rho,$$

visto que u satisfaz tanto (H) quanto (2.10). Dessa forma,

$$u(x) = c \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\rho(y)u^\alpha(y)}{|x-y|^{N-2}} dy.$$

□

Proposição 2.2 *A solução u de $(P2)$ depende monotonicamente em ρ.*

De fato, seja $\rho_1 \leq \rho_2$, u_1 e u_2 as soluções minimais correspondentes de $(P2)$ e consideremos o problema $(P2')$, a saber,

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \rho(x)u^\alpha(x) & \text{em} \quad B_R(0) \\ u(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R(0). \end{cases}$$

Assim,

$$\int_{B_R(0)} \nabla u_1 \nabla \varphi dx = \int_{B_R(0)} \rho_1(x) u_1^\alpha \varphi dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1(B_R(0))$$

e

$$\int_{B_R(0)} \nabla u_2 \nabla \psi dx = \int_{B_R(0)} \rho_2(x) u_2^\alpha \psi dx \qquad \forall \psi \in H_0^1(B_R(0)).$$

Tomando a segunda igualdade acima e tendo em vista $\rho_1 \leq \rho_2$, vem que

$$\int_{B_R(0)} \nabla u_2 \nabla \psi dx \geq \int_{B_R(0)} \rho_1 u_2^\alpha \psi dx \qquad \forall \psi \in H_0^1(B_R(0)), \psi \geq 0.$$

Portanto u_2 é supersolução do problema

$$\begin{cases} -\Delta v(x) = \rho_1(x)v(x) & \text{em} \quad B_R(0) \\ v(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R(0), \end{cases}$$

o que implica em $u_{1R} \leq u_2$. E, como já sabemos, $u_1 = \lim_{R \to +\infty} u_{1R}$. Concluimos dessa forma que $u_1 \leq u_2$.

□

2.1 Unicidade de solução

Como temos notado, a solução minimal u construida acima satisfaz

$$\liminf_{|x| \to +\infty} u(x) = 0. \tag{2.11}$$

Nosso principal resultado de unicidade é o seguinte:

Teorema 2.2 *Assumindo $\rho(x)$ com a propriedade (H), existe exatamente uma solução positiva limitada de $(P2)$ satisfazendo* (2.11).

Antes de efetivamente demonstrarmos o teorema acima, façamos algumas observações úteis à prova.

Lema 2.3 *Existe outra solução positiva limitada de $(P2)$ a qual satisfaz* (2.11).

Demonstração. De fato, dado qualquer constante positiva a, existe uma solução de $(P2)$ satisfazendo

$$\liminf_{|x|\to+\infty} u(x) = a.$$

Com efeito, considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \rho(x)v^{\alpha}(x) \quad \text{em} \quad B_R(0) \\ \qquad\qquad u(x) = a \quad \text{sobre} \quad \partial B_R(0). \end{cases} \tag{2.12}$$

Note que a é uma subsolução de (2.12), pois

$$\begin{cases} 0 = -\Delta a < \rho(x)a^{\alpha}(x) \quad \text{em} \quad B_R(0) \\ \qquad\qquad a = a \quad \text{em} \quad \partial B_R(0). \end{cases}$$

Ainda, $(CU + a)$ é supersolução de (2.12) para C suficientemente grande. Mostremos isso. Note que

$$\begin{aligned} -\Delta(CU + a) &= -\Delta(CU) \\ &= C\rho(x), \end{aligned}$$

pois U é solução do problema (2.1).

Dessa forma, para que $(CU + a)$ seja supersolução devemos ter

$$C\rho(x) \geq \rho(x)(CU + a)^{\alpha},$$

O que implica em

$$C \geq (CU + a)^{\alpha} \qquad \text{sobre} \qquad B_R(0).$$

Como
$$(CU+a)^\alpha \leq (C||u||_{\infty,R}+a)^\alpha \leq C \qquad \forall 0<\alpha<1,$$
temos
$$\frac{(C||u||_{\infty,R}+a)^\alpha}{C} \leq 1.$$
Daí,
$$\frac{C||u||_{\infty,R}+a}{C^{\frac{1}{\alpha}}} \leq 1.$$
Logo,
$$\frac{||u||_{\infty,R}}{C^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} + \frac{a}{C^{\frac{1}{\alpha}}} \leq 1.$$
Assim,
$$\frac{||u||_{\infty,R}}{C^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} + \frac{a}{C^{\frac{1}{\alpha}}} \leq \frac{||u||_{\infty,R}}{C^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} + \frac{a}{C^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \leq 1,$$
o que implica em
$$C \geq (||u||_{\infty,R}+a)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$
Portanto, tomando $C \geq (||u||_{\infty,R}+a)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ temos $CU+a$ supersolução de (2.12)

Podemos então considerar em particular que $U = \dfrac{C}{|x|^{N-2}} * \rho$ e levando em conta que o método de sub e supersolução garante a existência de uma solução $u(x)$ tal que
$$a \leq u(x) \leq \frac{C}{|x|^{n-2}} * \rho + a,$$
segue que
$$\liminf_{|x|\to+\infty} u(x) = a.$$
Ou seja, existe outra solução limitada de $(P2)$ que não satisfaz (2.11).

$\square$

Dividiremos a demonstração de unicidade em três passos.

Passo 1. Assumiremos $\rho_1(x) \leq \rho_2(x)$ os quais satisfazem a propriedade (H).

Dado uma solução positiva limitada $u_1(x)$ qualquer do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_1(x) = \rho_1(x)u_1^\alpha(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{R\to+\infty} \fint_{SR} u_1(x)dS_y = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Então existe uma solução positiva limitada $u_2(x)$ do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_2(x) = \rho_2(x)u_2^\alpha(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{R\to+\infty} \fint_{SR} u_2(x)dS_y = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

tal que $u_1(x) \leq u_2(x)$.

Demonstração. Claramente $u_1(x)$ é uma subsolução do problema (2.14) no sentido de que

$$-\Delta u_1(x) \leq \rho_2(x)u_1^\alpha(x).$$

De fato, desde que $u_1(x)$ seja uma solução limitada de (2.13),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_1(x)\nabla\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_1(x)u_1^\alpha(x)dx \qquad \forall\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N),\ \varphi \geq 0. \tag{2.15}$$

Em virtude de $\rho_1(x) \leq \rho_2(x)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_1(x)u_1^\alpha(x)\varphi(x) \leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_2(x)u_1^\alpha(x)\varphi(x)dx \qquad \forall\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N),\ \varphi \geq 0. \tag{2.16}$$

Então, de (2.15) e (2.16),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_1(x)\nabla\varphi(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_2(x)u_1^\alpha(x)\varphi(x)dx \qquad \forall\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N),\ \varphi \geq 0.$$

O que mostra realmente que $u_1(x)$ é uma subsolução para (2.14).

Agora, visto que $u_1(x)$ é uma solução limitada do problema (2.14), existe uma constante positiva $C > 0$ tal que $u_1^\alpha \leq C$.

Assim,

$$-\Delta u_1 = \rho_2(x)u_1^\alpha(x) \leq \rho_2(x)C.$$

Logo,

$$-\Delta u_1(x) \leq C\rho_2(x).$$

Daí,

$$u_1(x) \leq u_\infty \qquad \text{onde} \quad u_\infty = \lim_{R\to+\infty} u_R.$$

Mas pelo Teorema C.2, $U = u_\infty$. Então tomemos em particular $U = \dfrac{C}{|x|^{N-2}} * \rho_2$, já que esta convolução é uma solução limitada de (H). Perceba que a convolução é uma supersolução para (2.14) para C suficientemente grande. Em outras palavras,

$$-\Delta\left(\frac{C}{|x|^{N-2}} * \rho_2\right) \geq \rho_2\left(\frac{C}{|x|^{N-2}} * \rho_2\right)^\alpha.$$

Mas, para isso

$$C\rho_2 \geq \rho_2\left(\frac{C}{|x|^{N-2}} * \rho_2\right)^\alpha,$$

considerando que a convolução é solução para o problema (2.1).

Daí,

$$C \geq C^\alpha\left(\frac{1}{|x|^{N-2}} * \rho_2\right)^\alpha.$$

Logo,

$$C^{1-\alpha} \geq \left(\frac{1}{|x|^{N-2}} * \rho_2\right)^\alpha.$$

Tomando $U = \dfrac{1}{|x|^{N-2}} * \rho_2$, temos

$$C \geq ||U||_\infty^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Dessa forma, para $C \geq ||U||_\infty^{\frac{1}{1-\alpha}}$, concluimos de fato que a convolução é uma supersolução para o referido problema. Segue que usando a técnica da iteração monótona padrão diretamente em $\mathbb{R}^N$ obtemos uma solução $u_2(x)$ do problema (2.14) tal que

$$u_1(x) \leq u_2(x) \leq C\frac{1}{|x|^{N-2}} * \rho_2.$$

O que conclui a demonstração do passo 1.

$\square$

Mostraremos agora que é suficiente para a prova o teorema 2 no caso $\rho > 0$.

Passo 2. Suponha que tenhamos provado unicidade para qualquer $\rho > 0$, então também temos unicidade para ρ genérico.

Demonstração. Seja $\rho_\epsilon = \rho + \epsilon h$ onde $h \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $h > 0$. Seja u_ϵ a única solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon(x) = \rho_\epsilon(x) u_\epsilon^\alpha(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{R\to+\infty} \displaystyle\fint_{SR} u_\epsilon(x) dS_y = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Seja u uma solução qualquer do problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \rho(x) u^\alpha(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{R\to+\infty} \displaystyle\fint_{SR} u(x) dS_y = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Pelo passo 1 (e pela unicidade de u_ϵ) sabemos que $u \leq u_\epsilon$. Provemos que conforme $\epsilon \to 0$, $u_\epsilon \to \underline{u}$ aonde $\underline{u}$ é a solução minimal construida no Teorema 2.1. De fato, seja $u_{\epsilon R}$, u_R soluções positivas dos respectivos problemas

$$\begin{cases} -\Delta u_{\epsilon R}(x) = \rho_\epsilon(x) u_{\epsilon R}^\alpha(x) \quad \text{em} \quad B_R(0) \\ u_{\epsilon R} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B_R(0) \end{cases} \tag{2.19}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u_R(x) = \rho(x) u_R^\alpha(x) \quad \text{em} \quad B_R(0) \\ u_R = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B_R(0). \end{cases} \tag{2.20}$$

Multiplicando (2.19) por u_R e (2.20) por $u_{\epsilon R}$ e usando o Teorema A.13 sobre a bola de raio R, temos

$$\int_{B_R(0)} \nabla u_R \nabla u_{\epsilon R} dx = \int_{B_R(0)} \rho_\epsilon u_{\epsilon R}^\alpha u_R dx$$

e

$$\int_{B_R(0)} \nabla u_R \nabla u_{\epsilon R} dx = \int_{B_R(0)} \rho u_R^\alpha u_{\epsilon R} dx,$$

com $u_R, u_{\epsilon R} = 0$ sobre $\partial B_R(0)$.

Assim,

$$\int_{B_R(0)} \rho_\epsilon u_{\epsilon R}^\alpha u_R dx = \int_{B_R(0)} \rho u_R^\alpha u_{\epsilon R} dx.$$

Somando $-\displaystyle\int_{B_R(0)} \rho u_{\epsilon R}^\alpha u_R dx$ em ambos os lados da igualdade, encontramos

$$\int_{B_R(0)} \left(\rho_\epsilon u_{\epsilon R}^\alpha u_R - \rho u_{\epsilon R}^\alpha u_R\right) dx = \int_{B_R(0)} \left(\rho u_R^\alpha u_{\epsilon R} - \rho u_{\epsilon R}^\alpha u_R\right) dx.$$

Daí,

$$\int_{B_R(0)} u_{\epsilon R}^\alpha u_R \left(\rho_\epsilon - \rho\right) dx = \int_{B_R(0)} \rho u_{\epsilon R}^\alpha u_R \left(u_{\epsilon R}^{1-\alpha} - u_R^{1-\alpha}\right) dx.$$

Agora note que

$$u_{\epsilon R}^\alpha \leq (CU_\epsilon)^\alpha \qquad \text{e} \qquad u_R \leq U, \tag{2.21}$$

onde u_ϵ e U são, respectivamente, soluções do problema $-\Delta u_\epsilon = \rho_\epsilon$ e $-\Delta u = \rho$. Tais desigualdades decorrem de (2.4). Como $\rho_\epsilon - \rho = \epsilon h$ e de (2.21), temos

$$\int_{B_R(0)} \rho u_{\epsilon R}^\alpha u_R^\alpha \left(u_{\epsilon R}^{1-\alpha} - u_R^{1-\alpha}\right) dx \leq \int_{B_R(0)} C^\alpha \epsilon h U_\epsilon U dx.$$

Percebamos que

$$C^\alpha \epsilon \int_{B_R(0)} h U_\epsilon^\alpha U dx \leq C^\alpha \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} h U_\epsilon^\alpha U dx \leq C^\alpha \epsilon . |U_\epsilon^\alpha|_\infty |U|_\infty |h|_{L^1}$$

Tomando $C_\epsilon = C^\alpha \epsilon |U_\epsilon^\alpha|_\infty |U|_\infty |h|_{L^1}$, obtemos

$$\int_{B_R(0)} \rho u_{\epsilon R}^\alpha u_R^\alpha \left(u_{\epsilon R}^{1-\alpha} - u_R^{1-\alpha}\right) dx \leq C_\epsilon.$$

Sabemos que $0 < u_R \leq u_{\epsilon R}$. Dessa forma,

$$\rho u_{\epsilon R}^\alpha u_R^\alpha \left(u_{\epsilon R}^{1-\alpha} - u_R^{1-\alpha}\right) \geq 0.$$

Assim, usando o Teorema A.5, deduzimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{R\to+\infty} \rho u_{\epsilon R}^\alpha u_R^\alpha \left(u_{\epsilon R}^{1-\alpha} - u_R^{1-\alpha}\right) \chi_{B_R(0)} dx \leq$$
$$\liminf_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \rho u_{\epsilon R}^\alpha u_R^\alpha \left(u_{\epsilon R}^{1-\alpha} - u_R^{1-\alpha}\right) \chi_{B_R(0)} dx \leq C_\epsilon$$

Logo
$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho u_\epsilon^\alpha \underline{u}^\alpha \left(u_\epsilon^{1-\alpha} - \underline{u}^{1-\alpha}\right) dx \leq C_\epsilon,$$
pois $u = \lim\limits_{R\to+\infty} u_R$, solução de $(P2)$, determina uma solução minimal do mesmo problema.

Agora considerando que $u \leq u_\epsilon$, implica em
$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho u^\alpha \underline{u}^\alpha \left(u^{1-\alpha} - \underline{u}^{1-\alpha}\right) dx = 0,$$
e, portanto
$$u = \underline{u}.$$
O que finaliza a demonstração do passo 2.

□

O último passo envolve o uso de equações parabólicas. Como já mencionado, se $u(x)$ é uma solução de $(P2)$, então
$$v(x,t) = \frac{c_m u^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+\tau)^{\frac{1}{m-1}}}$$
satisfaz
$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v^m, \tag{2.22}$$
onde $m = \dfrac{1}{\alpha}$ e $C_m = (m-1)^{\frac{-1}{m-1}}$. De fato, perceba que por um lado usando a regra de derivação do quociente, temos
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{-C_m u^{\frac{1}{m}}(x) \frac{1}{m-1} (t+\tau)^{\frac{1}{m-1}-1}}{(t+\tau)^{\frac{2}{m-1}}}.$$
Daí,
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{-C_m u^{\frac{1}{m}}(x)}{(m-1)(t+\tau)^{\frac{m}{m-1}}}.$$
Logo,
$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{-C_m \rho u^{\frac{1}{m}}(x)}{(m-1)(t+\tau)^{\frac{m}{m-1}}}. \tag{2.23}$$

Por outro lado,

$$v^m(x,t) = \frac{C_m^m u(x)}{(t+\tau)^{\frac{m}{m-1}}}.$$

Assim,

$$\Delta v^m = \frac{C_m^m}{(t+\tau)^{\frac{m}{m-1}}}\Delta u(x).$$

Como $-\Delta u(x) = \rho(x)u^\alpha(x)$ e $\alpha = \dfrac{1}{m}$, segue-se

$$\begin{aligned}\Delta v^m &= \frac{-C_m^m \rho u^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+\tau)^{\frac{m}{m-1}}} \\ &= \frac{-C_m^{m-1} C_m \rho u^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+\tau)^{\frac{m}{m-1}}}.\end{aligned}$$

Visto que $C_m = (m-1)^{\frac{-1}{(m-1)}}$, resulta em

$$\Delta v^m = \frac{-C_m^m \rho u^{\frac{1}{m}}(x)}{(m-1)(t+\tau)^{\frac{m}{m-1}}}. \tag{2.24}$$

Portanto, de (2.23) e (2.24) segue (2.22).

Nossa prova de unicidade para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \rho(x)u^\alpha(x) \\ \displaystyle\liminf_{|x|\to+\infty} u(x) = 0, \end{cases}$$

depende fortemente da existência, unicidade e propriedades de soluçao de (2.22).

Passo 3. Recordemos primeiramente um resultado sobre domínios limitados.

Lema 2.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave limitado, $\rho \in L^\infty(\Omega)$, $\rho \geq \delta > 0$ em Ω. Então dada qualquer $v_0 \geq 0$ em Ω, $v_0 \in L^\infty(\Omega)$, existe uma única solução $v(x,t)$ do problema*

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v^m = 0 & em \quad \Omega \times (0,+\infty) \\ v = 0 & em \quad \partial\Omega \times (0,+\infty) \\ v(x,0) = v_0(x) & em \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.25}$$

Além disso, se existe outra solução $\tilde{v}(x,t)$ *de* (2.25) *com* $\tilde{v}(x,t) \geq 0$ *em* $\partial\Omega \times (0,+\infty)$ *e* $\tilde{v}(x,0) \geq v_0(x)$ *então* $\tilde{v}(x,t) \geq v(x,t)$.

Demonstração. Ver referência [11].

Seja $\underline{u}$ uma solução minimal positiva do problema $(P2)$ no sentido do Teorema 2.1. Seja u qualquer solução positiva limitada de $(P2)$ satisfazendo (2.11). Então, pela Proposição C.7,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} u(x)dS_y = 0.$$

Seja v_R solução do problema

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial v_R}{\partial t} - \Delta v_R^m = 0 & \text{em} \quad B_R(0) \times (0,+\infty) \\ v_R(x,t) = 0 & \text{em} \quad \partial B_R(0) \times (0,+\infty) \\ v_R(x,0) = C_m u^{\frac{1}{m}}(x) & \text{em} \quad B_R(0). \end{cases} \tag{2.26}$$

Por comparação em domínios limitados, obtemos

$$v_R(x,t) \leq \frac{C_m u^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+1)^{\frac{1}{m-1}}}, \tag{2.27}$$

e também

$$v_R(x,t) \leq \frac{c_m \underline{u}^{\frac{1}{m}}(x)}{t^{\frac{1}{m-1}}}. \tag{2.28}$$

Para mostrar que (2.27) ocorre, notemos que $v_R(x,t)$ é uma solução única do problema em $B_R(0)$ e $\dfrac{C_m u^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+1)^{\frac{1}{m-1}}}$ é outra solução do problema (2.26), pois podemos tomar $\Omega = B_R(0)$, então

$$\frac{C_m u^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+1)^{\frac{1}{m-1}}} \qquad \text{satisfaz} \qquad \rho\frac{\partial v_R}{\partial t} - \Delta V_R^m = 0$$

em $B_R(0) \times (0,+\infty)$ do mesmo modo como haviamos mostrado anteriormente.

Ainda, $u(x)$ é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_R = \rho(x) u^{\alpha}(x) & \text{em} \quad B_R(0) \\ u_R = 0 & \text{em} \quad \partial B_R(0). \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\frac{C_m u^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+1)^{\frac{1}{m-1}}} = 0 \qquad \text{em} \qquad \partial B_R(0) \times (0, +\infty),$$

e fixando $t = 0$, temos $C_m u^{\frac{1}{m}}(x)$ em $B_R(0)$. Estamos, portanto, nas condições do lema anterior. Assim, de fato (2.27) ocorre.

Para (2.28), basta recordar que $\underline{u}$ é solução minimal do problema $(P2)$. Assim sendo, $\underline{u}$ satisfaz (2.27).

Nesse sentido,

$$v_R(x,t) \leq \frac{C_m \underline{u}^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+1)^{\frac{1}{m-1}}}.$$

Logo,

$$v_R(x,t) \leq \frac{C_m \underline{u}^{\frac{1}{m}}(x)}{t^{\frac{1}{m-1}}}.$$

Verifiquemos que

$$v_\infty(x,t) = \lim_{R \to +\infty} v_R(x,t) \qquad \text{q.t.p em } B_R(0).$$

Para isso, mostraremos que v_R é não decrescente e limitada, onde

$$v_R(x,t) = \frac{c_m u^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+\tau)^{\frac{1}{m-1}}}.$$

Afirmo que v_R é não decrescente, no sentido de que se $R' \geq R$, então $v_{R'} \geq v_R$. De fato, se $R' \geq R$, então $B_R(0) \subset B_{R'}(0)$. Assim, desde que (u_R) é não decrescente, temos

$$v_{R'}(x,t) = \frac{c_m u_{R'}^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+\tau)^{\frac{1}{m-1}}} \geq \frac{c_m u_R^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+\tau)^{\frac{1}{m-1}}} = v_R(x,t).$$

Logo, $v_R(x,t)$ é não decrescente.

Afirmo também que $v_R(x,t)$ é limitada. Pois, desde que U é uma solução limitada do problema (2.1), $u \leq CU$ para uma constante C apropriada.

Nesse sentido,

$$v_R(x,t) = \frac{c_m u^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+\tau)^{\frac{1}{m-1}}} \leq \frac{c_m U^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+\tau)^{\frac{1}{m-1}}}.$$

Logo, $v_R(x,t)$ é limitada. Portanto

$$v_\infty(x,t) = \lim_{R\to+\infty} v_R(x,t) \qquad \text{q.t.p em } B_R(0).$$

Diante disso, $v_\infty(x,t)$ satisfaz

$$\rho\frac{\partial v_\infty}{\partial t}(x,t) - \Delta v_\infty^m = 0 \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,+\infty),$$

bem como,

$$v_\infty(x,0) = C_m u^{\frac{1}{m}}(x).$$

Além disso,

$$v_\infty(x,t) = \lim_{R\to+\infty} v_R(x,t) \leq \frac{C_m u^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+1)^{\frac{1}{m-1}}}.$$

Já temos então uma solução para o problema

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial v_\infty}{\partial t} - \Delta v_\infty^m = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,+\infty) \\ v_\infty(x,0) = C_m u^{\frac{1}{m}}(x), \end{cases}$$

a saber, $\dfrac{C_m u^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+1)^{\frac{1}{m-1}}}$.

Afirmamos que

$$v_\infty(x,t) = \frac{C_m u^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+1)^{\frac{1}{m-1}}} \equiv \hat{v}(x,t). \tag{2.29}$$

Para isso, multipliquemos a igualdade

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{v}(x,t) - v_\infty(x,t)\right) - \Delta\left(\hat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right) = 0$$

pela função

$$K(x) = C\left[\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right].$$

Assim,

$$K(x)\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{v}(x,t) - v_\infty(x,t)\right) - \Delta\left(\hat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right)K(x) = 0.$$

Desde que $v, \rho \in L^\infty(\Omega)$, usemos o Teorema A.6 e integramos sobre $B_R(0)\times(0,T)$.

Dessa forma,

$$\int_{B_R(0)}\int_0^T K(x)\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{v}(x,t)-v_\infty(x,t)\right)dtdx - \int_{B_R(0)}\int_0^T \Delta\left(\hat{v}^m(x,t)-v_\infty^m(x,t)\right)K(x)dtdx = 0. \tag{2.30}$$

Observando a primeira parcela do primeiro membro, temos

$$\int_{B_R(0)}\int_0^T K(x)\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{v}(x,t)-v_\infty(x,t)\right)dtdx = \int_{B_R(0)} K(x)\rho(x)\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{v}(x,t)-v_\infty(x,t)\right)dtdx.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\int_{B_R(0)}\int_0^T K(x)\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{v}(x,t)-v_\infty(x,t)\right)dtdx = \int_{B_R(0)} K(x)\rho(x)\left(\hat{v}(x,t)-v_\infty(x,t)\right)\Big|_0^T dx,$$

o que resulta em

$$\int_{B_R(0)}\int_0^T K(x)\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{v}(x,t)-v_\infty(x,t)\right)dtdx = \int_{B_R(0)} K(x)\rho(x)\left(\hat{v}(x,T)-v_\infty(x,T)-\hat{v}(x,0)+v_\infty(x,0)\right)dx.$$

Visto que $\hat{v}(x,0) = v_\infty(x,0) = C_m u^{\frac{1}{m}}(x)$,

$$\int_{B_R(0)}\int_0^T K(x)\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{v}(x,t)-v_\infty(x,t)\right)dtdx = \int_{B_R(0)} K(x)\rho(x)\left(\hat{v}(x,T)-v_\infty(x,T)\right)dx. \tag{2.31}$$

Observemos em seguida a segunda parcela de (2.30). Apliquemos sobre esta o Teorema A.13. Dessa forma,

$$\int_0^T\left[-\int_{B_R(0)}\Delta\left(\hat{v}^m(x,t)-v_\infty^m(x,t)\right)K(x)dx\right]dt = \int_0^T\left[\int_{B_R(0)}\nabla\left(\hat{v}^m(x,t)-v_\infty^m(x,t)\right)\nabla K(x)dx - \int_{\partial B_R(0)}K(x)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\hat{v}^m(x,t)-v_\infty^m(x,t)\right)dx\right]dt,$$

onde η é um vetor normal à bola $B_R(0)$.

Como $\lim\limits_{x\to R} K(x) = 0$ sobre $\partial B_R(0)$, obtemos

$$\int_0^T \left[-\int_{B_R(0)} \Delta \left(\hat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t) \right) K(x) dx \right] dt =$$
$$\int_0^T \left[\int_{B_R(0)} \nabla \left(\hat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t) \right) \nabla K(x) dx \right] dt.$$

Podemos fazer uso novamente do Teorema A.13 no segundo membro da igualdade anterior. Assim,

$$\int_0^T \left[-\int_{B_R(0)} \Delta(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t))K(x)dx \right] dt = \int_0^T \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial}{\partial \eta} K(x)(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)) dS dx$$
$$- \int_0^T \int_{B_R(0)} \Delta k(x) \left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t) \right) dx dt. \tag{2.32}$$

Nos preocupemos, por enquanto, apenas com este último termo do segundo membro. Note que

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} \Delta k(x) \left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t) \right) dx &= \int_{B_\epsilon(0)} \Delta k(x) \left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t) \right) dx \\ &+ \int_{B_R(0) \setminus B_\epsilon(0)} \Delta k(x) \left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t) \right) dx. \end{aligned}$$

Como $K(x)$ fora da bola $B_\epsilon(0)$ é nula, deduzimos

$$\int_{B_R(0)} \Delta k(x) \left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t) \right) dx = \int_{B_\epsilon(0)} \Delta k(x) \left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t) \right) dx.$$

Recordemos que $K(x) = \dfrac{c}{|x|^{N-2}} - \dfrac{c}{R^{N-2}}$, onde $\dfrac{c}{|x|^{N-2}} = \Gamma(x)$ é a solução fundamental de $-\Delta$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{B_\epsilon(0)} \Delta \left(\frac{c}{|x|^{N-2}} - \frac{c}{r^{N-2}} \right) \left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t) \right) dx &= \int_{B_\epsilon(0)} \Delta\Gamma(x) \left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t) \right) dx \\ &- \int_{B_\epsilon(0)} \Delta \left(\frac{c}{R^{N-2}} \right) \left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t) \right) dx \\ &= \int_{B_\epsilon(0)} \Delta\Gamma(x) \left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t) \right) dx. \end{aligned}$$

Daí, aplicando o Teorema A.13 nesse último termo, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_\epsilon(0)} \Delta\Gamma(x)\left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right)dx &= \int_{\partial B_\epsilon(0)} \left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(x)dS \\ = \int_{B_\epsilon(0)} \nabla\left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right)\nabla\Gamma(x)dx. \qquad (2.33)\end{aligned}$$

Observando o segundo membro, mostremos que a primeira integral converge para $\widehat{v}^m(0,t) - v_\infty^m(0,t)$ e a segunda integral converge para zero. De fato, notemos que

$$\Gamma(x) = \Gamma(|x|) = \Gamma(r),$$

e

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(x) = \nabla\Gamma(x)\eta. \qquad (2.34)$$

Mas,

$$\frac{\partial\Gamma}{x_i}(x) = \Gamma'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = \Gamma'(r)\frac{x_i}{|x|}.$$

Logo,

$$\nabla\Gamma(x) = \Gamma'(r)\frac{x}{|x|}. \qquad (2.35)$$

Assim, de (2.34) e (2.35) tem-se

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta} = \Gamma'(r)\frac{x}{|x|}\eta.$$

Então,

$$\int_{\partial B_\epsilon(0)} \left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(x)dS = \int_{\partial B_\epsilon(0)} \left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right)\frac{\Gamma'(|x|)}{|x|}x\eta x dS.$$

Perceba que $\langle x, \eta\rangle = |x||\eta|\cos\theta = \epsilon$, pois $|x| = \epsilon$, η é unitário e $\cos\theta = \epsilon$ (para $x \in \partial B_\epsilon(0)$) o vetor normal à bola forma um ângulo de $0°$ com o vetor unitário). Dessa forma,

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\epsilon(0)} \left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right)\frac{\Gamma'(|x|)}{|x|}x\eta x dS &= \frac{\Gamma'(\epsilon)}{\epsilon}\epsilon\int_{\partial B_\epsilon(0)} \left(\widehat{v}^m - v_\infty^m\right)dS \\ &= \frac{1}{|\partial B_\epsilon(0)|}\int_{\partial B_\epsilon(0)} \left(\widehat{v}^m - v_\infty^m\right)dS \\ &= \fint_{\partial B_\epsilon(0)} \left(\widehat{v}^m - v_\infty^m\right)dS.\end{aligned}$$

Pelo Teorema B.4, quando $\epsilon \to 0$

$$\fint_{\partial B_\epsilon(0)} \left(\widehat{v}^m - v_\infty^m\right) dS \to \widehat{v}^m - v_\infty^m. \tag{2.36}$$

Estudando por fim a segunda integral da igualdade (2.33), segue que fazendo uso do Teorema A.13, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_\epsilon(0)} \nabla\left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right) \nabla\Gamma(x)dx &= \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\widehat{v}^m - v_\infty^m\right)\Gamma(x)dx \\ &- \int_{B_\epsilon(0)} \Delta\left(\widehat{v}^m - v_\infty^m\right)\Gamma(x)dx. \end{aligned}$$

Daí, se $C_1 = \sup_{\overline{B_\epsilon(0)}} \left|\nabla\left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right)\right|$, temos

$$\begin{aligned} \left|\int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\widehat{v}^m - v_\infty^m\right)\Gamma(x)dx\right| &\leq C_1 \int_{\partial B_\epsilon(0)} \Gamma(x)dx \\ &= C_1\Gamma(\epsilon)\int_{\partial B_\epsilon(0)} dx \\ &= C_1\Gamma(\epsilon)Nw_N\epsilon^{N-1} \\ &= \frac{C_1}{N-2}\epsilon. \end{aligned}$$

Logo, quando $\epsilon \to 0$,

$$\int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\widehat{v}^m - v_\infty^m\right)\Gamma(x)dx \to 0.$$

Da mesma forma, se $C_2 = \sup_{\overline{B_\epsilon(0)}} |\Delta(\widehat{v}^m - v_\infty^m)|$,

$$\begin{aligned} \left|\int_{B_\epsilon(0)} \Delta(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t))\Gamma(x)dx\right| &\leq C_2 \int_{B_\epsilon(0)} \Gamma(x)dx \\ &= C_2 n w_N \int_0^R \Gamma(R) r^{N-1}dx \\ &= C_2 N w_N \int_0^R \frac{1}{r^{N-2}} r^{N-1}dx \\ &= \frac{C_2}{N-2}\epsilon^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_{B_\epsilon(0)} \Delta(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t))\Gamma(x)dx \to 0$$

quando $\epsilon \to 0$.

Diante disso,

$$\int_{B_\epsilon(0)} \nabla \left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right) \nabla\Gamma(x)dx \to 0. \tag{2.37}$$

Portanto, tendo em vista a igualdade (2.32) e observando os resultados em (2.33), (2.36) e (2.37), obtemos

$$\int_{B_R(0)} K(x)\rho(x)\left(\widehat{v}(x,t) - v_\infty(x,t)\right)dx + \int_0^T \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial K}{\partial \eta}(x)\left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right)dSdx$$

$$+\int_0^T \left(\widehat{v}^m(0,t) - v_\infty^m(0,t)\right) = 0.$$

Equivalentemente,

$$\int_{B_R(0)} K(x)\rho(x)\left(\widehat{v}(x,t) - v_\infty(x,t)\right)dx + \int_0^T \left(\widehat{v}^m(0,t)dx - v_\infty^m(0,t)\right)$$

$$= -\int_0^T \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial K}{\partial \eta}(x)\left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right)dSdx. \tag{2.38}$$

Notemos que a integral do lado direito é limitada por $CT\fint_{S_R} u$. De fato, pois

$$-\int_0^T \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial K}{\partial \eta}(x)\left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right)dSds \leq$$
$$\int_0^T \int_{\partial B_R(0)} \max\left|\frac{\partial K}{\partial \eta}(x)\right|\left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right)dSdt.$$

Assim,

$$-\int_0^T \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial K}{\partial \eta}(x)\left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right)dSds = C_1\int_0^T\int_{\partial B_R(0)}\left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right)dSdt.$$

Como $\widehat{v}_\infty^m(x,t) \geq 0$, segue que

$$-\int_0^T \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial K}{\partial \eta}(x)\left(\widehat{v}^m(x,t) - v_\infty^m(x,t)\right)dSds \leq C_1\int_0^T \int_{\partial B_R(0)} \widehat{v}^m(x,t)dSdt.$$

Daí, usando o fato de que $\widehat{v}^m_\infty(x,t) \leq C^m_m u(x)$,

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial K}{\partial \eta}(x)\left(\widehat{v}^m(x,t) - v^m_\infty(x,t)\right) dS ds &= C_1 C^m_m \int_0^T \int_{\partial B_R(0)} u dS dt \\
&= C_1 C^m_m |\partial B_R(0)| \int_0^T ⨍_{S_R} u dS dt \\
&= C_1 C^m_m |\partial B_R(0)| T ⨍_{S_R} u dS.
\end{aligned}
$$

Tomando $C = C_1 C^m_m |\partial B_R(0)|$, temos

$$
-\int_0^T \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial K}{\partial \eta}(x)\left(\widehat{v}^m(x,t) - v^m_\infty(x,t)\right) dS ds \leq CT ⨍_{S_R} u dS.
$$

Perceba ainda que pelo Teorema $C.7$,

$$
\lim_{R \to +\infty} ⨍_{S_R} u dS = 0.
$$

Dessa forma, o primeiro membro de (2.38) é limitado por zero, ou seja,

$$
\int_{B_R(0)} K(x)\rho(x)\left(\widehat{v}(x,t) - v_\infty(x,t)\right) dx + \int_0^T \left(\widehat{v}^m(0,t) - v^m_\infty(0,t)\right) \leq 0.
$$

Observemos que

$$
\widehat{v}^m \geq v^m_\infty. \tag{2.39}
$$

(tendo em vista a caracterização de v^m e a desigualdade (2.27)). Assim, a segunda integral é necessáriamente não negativa. Logo, devemos ter

$$
\int_{B_R(0)} K(x)\rho(x)\left(\widehat{v}(x,t) - v_\infty(x,t)\right) dx \leq 0.
$$

Mas, como $\rho(x), K(x) \geq 0$,

$$
\widehat{v}(x,t) - v_\infty(x,t) \leq 0. \tag{2.40}
$$

Considerando (2.39) e (2.40), cocluimos

$$
\widehat{v}(x,t) = v_\infty(x,t).
$$

Agora passando o limite em (2.28) e recordando (2.29) e que $v_\infty(x,t) = \lim_{R\to+\infty} v_R(x,t)$, tem-se

$$\frac{C_m u^{\frac{1}{m}}(x)}{(t+1)^{\frac{1}{m-1}}} \leq \frac{C_m \underline{u}^{\frac{1}{m}}(x)}{t^{\frac{1}{m-1}}}.$$

Fazendo $t \to +\infty$ concluimos que $u \leq \underline{u}$.

$\square$

Observação 2.1 *Assumimos que $\rho(x)$ tem a propriedade (H). Como já sabemos do Teorema C.7,*

$$\lim_{R\to+\infty} \fint_{S_R} u dS = 0,$$

onde $U = \dfrac{c}{|x|^{N-2}} * \rho$ e assim, pelo Corolário C.2 concluimos que $\liminf_{|x|\to+\infty} U = 0$.

Enunciemos nesse momento um teorema de unicidade sob hipóteses mais fortes que o resultado anterior.

Teorema 2.3 *Assumimos que existe uma solução de (2.1) tal que $\lim_{|x|\to+\infty} U(x) = 0$. Então existe uma única solução positiva u de $(P2)$ tal que $\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0$.*

Demonstração. Supondo que existe uma solução $U(x)$ para o problema

$$\begin{cases} -\Delta U(x) = \rho(x), \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x|\to+\infty} U(x) = 0. \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.1 (condição suficiente), para uma constante apropriada, temos

$$u \leq CU.$$

Portanto, considerando a hipótese tem-se

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0,$$

a unicidade de solução segue imediatamente do Teorema 2.2. Porém, vamos analisar um outro argumento creditado a Louis Nirenberg. Da demonstração do Teorema 2.1 (condição necessária),

$$-\Delta v = \alpha u^{-\alpha-1}|\nabla u|^2 + \rho(x). \tag{2.41}$$

Como

$$v = \frac{1}{1-\alpha}u^{1-\alpha},$$

decorre em

$$\nabla v = u^{-\alpha}\nabla u.$$

Equivalentemente,

$$\left|\frac{\nabla v}{u^{-\alpha}}\right|^2 = |\nabla u|^2. \tag{2.42}$$

Assim, substituindo (2.42) em (2.41),

$$\begin{aligned} -\Delta v &= \alpha u^{-\alpha-1}\frac{1}{u^{-2\alpha}}|\nabla v|^2 + \rho(x) \\ &= \alpha\frac{1}{u^{1-\alpha}}|\nabla v|^2 + \rho(x) \\ &= \alpha\frac{1}{(1-\alpha)v}|\nabla v|^2 + \rho(x). \end{aligned}$$

Tomando $C = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$, temos

$$-\Delta v = \frac{C}{v}|\nabla v|^2 + \rho(x). \tag{2.43}$$

A unicidade vale para (2.43) visto que a função $\dfrac{1}{v}$ é decrescente em v. Mais precisamente, supomos duas soluções v_1 e v_2 de (2.43) com $\lim\limits_{|x|\to+\infty} v_1 = \lim\limits_{|x|\to\infty} v_2 = 0$. Então, $w = v_1 - v_2$ satisfaz

$$-\Delta w - \frac{C}{v_1}\nabla(v_1+v_2)\nabla w + \frac{C}{v_1 v_2}|\nabla v_2|^2 w = 0.$$

Mostremos isso. Supondo v_1 e v_2 duas soluções de (2.43), temos

$$\begin{cases} -\Delta v_1 - \dfrac{C}{v_1}|\nabla v_1|^2 = \rho(x) \\ -\Delta v_2 - \dfrac{C}{v_2}|\nabla v_2|^2 = \rho(x). \end{cases}$$

Substituindo membro a membro, encontramos

$$-\Delta v_1 + \Delta v_2 - \frac{C}{v_1}|\nabla v_1|^2 + \frac{C}{v_2}|\nabla v_2|^2 = 0.$$

Somando e subtraindo o termo $\dfrac{C}{v_1}|\nabla v_2|^2$ na iguadadde acima, segue-se

$$-\Delta v_1 + \Delta v_2 - \frac{C}{v_1}|\nabla v_1|^2 + \frac{C}{v_1}|\nabla v_2|^2 + \frac{C}{v_2}|\nabla v_2|^2 - \frac{C}{v_1}|\nabla v_2|^2 = 0.$$

Dessa forma,

$$-\Delta v_1 + \Delta v_2 - \frac{C}{v_1}\left(|\nabla v_1|^2 - |\nabla v_2|^2\right) + \frac{C}{v_1 v_2}|\nabla v_2|^2 v_1 - \frac{C}{v_1 v_2}|\nabla v_2|^2 v_2 = 0$$

Equivalentemente,

$$-\Delta(v_1 - v_2) - \frac{C}{v_1}\nabla(v_1 + v_2)\nabla(v_1 - v_2) + \frac{C}{v_1 v_2}|\nabla v_2|^2(v_1 - v_2) = 0,$$

ou seja,

$$-\Delta w - \frac{C}{v_1}\nabla(v_1 + v_2)\nabla w + \frac{C}{v_1 v_2}|\nabla v_2|^2 w = 0.$$

Visto que o coeficiente de w é não negativo, podemos aplicar o princípio do máximo para concluir que $w = 0$.

□

2.2 Algumas Generalizações

Estaremos preocupados a partir de agora, em estender nosso método para problemas mais gerais da forma

$$-\Delta u(x) = \rho(x) f(u) \qquad \text{em } \mathbb{R}^N$$

sob hipóteses adequadas de f, e em particular $f(u)$ comporta-se como u^α próximo de $u = 0$. Por simplicidade, restringimos nossa atenção para o problema $f(u) = u^\alpha(1 - u)$

$$-\Delta u(x) = \rho(x) u^\alpha (1 - u) \qquad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{2.44}$$

Segue então um resultado importante para esse problema.

Teorema 2.4 *Assumimos que $\rho(x)$ satisfaz (H). Então existe uma única solução u, $0 < u < 1$ de (2.44) tal que* $\liminf_{|x|\to+\infty} u(x) = 0.$

Demonstração. Para demonstrar a existência da solução, procedemos como na demonstração do Teorema 2.1 (condição suficiente). Se $\rho(x)$ satisfaz (H), então

$$\underline{u} \leq CU,$$

para C apropriado.

Como $U(x)$ é solução limitada de (2.1), pelo Teorema $C.7$ vem que $\lim_{R\to+\infty} \fint_{S_R} U dS = 0$ e pelo Corolário $C.2$,

$$\liminf_{|x|\to+\infty} U(x) = 0.$$

Consequentemente,

$$\liminf_{|x|\to+\infty} u(x) = 0.$$

Portanto, existe $u(x)$, $0 < u < 1$ (u é solução minimal menor que todas as outras não triviais) tal que

$$\liminf_{|x|\to+\infty} u(x) = 0.$$

Para mostrarmos a unicidade de solução, procedemos em dois passos.

Passo 1. Seja $u(x)$ uma solução qualquer do problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) &= \rho(x) u^{\alpha}(x)(1 - u(x)) \qquad \text{em } \mathbb{R}^N \\ \liminf_{|x|\to+\infty} u(x) &= 0. \end{cases}$$

Então existe algum $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon u \leq \underline{u}.$$

Isto é útil para introduzir a única solução positiva v do problema

$$\begin{cases} -\Delta v(x) &= \rho(x)v^{\alpha}(x) \qquad \text{em } \mathbb{R}^N \\ \liminf\limits_{|x|\to+\infty} v(x) &= 0 \end{cases} \tag{2.45}$$

mostrada na Proposição 2.1.

Note que $u(x)$ é uma subsolução para o problema (2.45), pois

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= \rho(x)u^{\alpha}(x)(1-u(x))) \\ &\leq \rho(x)u^{\alpha}(x), \end{aligned}$$

com $0 < u(x) < 1$. E, portanto, por iteração monótona e a unicidade de v obtemos

$$u \leq v. \tag{2.46}$$

Agora note que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, ϵv é uma subsolução para (2.44), pois

$$\begin{aligned} -\Delta(\epsilon v) &= \epsilon\rho(x)v^{\alpha}(x) \\ &\leq \rho(x)(\epsilon v(x))^{\alpha}(1-\epsilon v(x)). \end{aligned}$$

Podemos realmente garantir ϵ pequeno pois se

$$\epsilon\rho(x)v^{\alpha}(x) \leq \rho(x)(\epsilon v^{\alpha}(x))(1-\epsilon v(x)),$$

então

$$\epsilon \leq \epsilon^{\alpha}(1-\epsilon v(x)).$$

Daí,

$$v \leq \frac{1-\epsilon^{1-\alpha}}{\epsilon}.$$

Logo,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1-\epsilon^{1-\alpha}}{\epsilon} = +\infty.$$

Retomando, por iteração monótona obtemos

$$\epsilon v \leq \underline{u}. \tag{2.47}$$

Assim, de (2.46) e (2.47),

$$\epsilon u \leq \epsilon v \leq \underline{u}.$$

Portanto,

$$\epsilon u \leq \underline{u}.$$

Passo 2. Seguiremos nesse passo a mesma técnica usada no método II do Apêndice D. Seja $u(x)$ uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) &= \rho(x)u(x)(1-u(x)) \qquad \text{em } \mathbb{R}^N \\ \liminf\limits_{|x|\to+\infty} u(x) &= 0 \end{cases} \tag{2.48}$$

satisfazendo $0 < u < 1$. Seja também

$$\Lambda = \{t \in [0,1]\,;\ tu \leq \underline{u}\}\,.$$

Lema 2.5 $1 \in \Lambda$.

Demosntração. Suponha por contradição que $t_0 = \sup \Lambda < 1$. Pelo passo 1, sabemos que $t_0 > 0$. Assim,

$$-\Delta(\underline{u} - t_0 u) = \rho(x) f(\underline{u}) - t_0 \rho(x) f(u).$$

Fixe K uma constante positiva sufucientemente grande tal que a função $f(t) + Kt$ seja crescente em $[0,1]$. Daí,

$$\begin{aligned} -\Delta(\underline{u} - t_0 u) + K\rho(x)(\underline{u} - t_0 u) &= \rho(x) f(\underline{u} - t_0 \rho(x) f(u)) + K\rho(x)\underline{u}(x) - t_0 u(x) K\rho(x) \\ &= \rho(x)\left[f(\underline{u}) + K\underline{u}(x) - t_0(f(u) - Ku(x))\right]. \end{aligned}$$

Como $t_0 u \leq \underline{u}$,

$$\begin{aligned} -\Delta(\underline{u} - t_0 u) + K\rho(x)(\underline{u} - t_0 u) &\geq \rho(x)\left[f(t_0 u) + Kt_0 u(x) - t_0(f(u) + Ku(x))\right] \\ &= \rho(x)\left[f(t_0 u) - t_0 f(u)\right]. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ sufucientemente pequeno tal que

$$t_0^\alpha - t_0 \geq \epsilon(K+1), \tag{2.50}$$

afirmamos que

$$-\Delta(\underline{u} - t_0 u - \epsilon u) + K\rho(x)(\underline{u} - t_0 u - \epsilon u) \geq 0. \tag{2.51}$$

De fato, procedendo da mesma maneira como em (2.49), temos

$$-\Delta(\underline{u} - t_0 u - \epsilon u) + K\rho(x)(\underline{u}(x) - t_0 u(x) - \epsilon u(x)) =$$

$$\rho(x) f(\underline{u}) - t_0 f(u) - \epsilon f(u) + K\rho(x)\underline{u}(x) - K\rho(x) t_0 u(x) - K\rho(x)\epsilon u(x).$$

Como $t_0 u \leq \underline{u}$ e colocando $\rho(x)$ em evidência,

$$-\Delta(\underline{u} - t_0 u - \epsilon u) + K\rho(x)(\underline{u}(x) - t_0 u(x) - \epsilon u(x)) \geq$$

$$\rho(x)\left[f(t_0 u) - t_0 f(u) - \epsilon f(u) + K t_0 u(x) - K t_0 u(x) - K\epsilon u(x)\right].$$

Mas, considerando que $f(u) = u^\alpha(1-u)$, obtemos

$$f(t_0 u) - t_0 f(u) - \epsilon f(u) + K t_0 u(x) - K t_0 u(x) - K\epsilon u(x) =$$

$$(t_0 u)^\alpha (1 - t_0 u) - t_0 u^\alpha (1-u) - \epsilon u^\alpha (1-u) - \epsilon K u.$$

Desenvolvendo o segundo membro resulta em

$$f(t_0 u) - t_0 f(u) - \epsilon f(u) + K t_0 u(x) - K t_0 u(x) - K\epsilon u(x) =$$

$$(t_0 u)^\alpha - (t_0 u)^{\alpha+1} - t_0 u^\alpha + t_0 u^{\alpha+1} - \epsilon u^\alpha + \epsilon u^{\alpha+1} - \epsilon K u.$$

Reorganizando os termos, segue-se

$$f(t_0 u) - t_0 f(u) - \epsilon f(u) + K t_0 u(x) - K t_0 u(x) - K\epsilon u(x) =$$

$$u^\alpha (t_o^\alpha - t_0 - \epsilon) + u^{\alpha+1}(t_0 - t_0^{\alpha+1} + \epsilon) - \epsilon K u.$$

Por fim, utilizando (2.50) temos

$$\begin{aligned} f(t_0u) - t_0f(u) - \epsilon f(u) + Kt_0u(x) - Kt_0u(x) - K\epsilon u(x) &\geq u^\alpha(\epsilon K) + \epsilon K u \\ &= \epsilon K(u^\alpha - u). \end{aligned}$$

Como estamos admitindo $u < 1$, implica que de fato

$$-\Delta(\underline{u} - t_0u - \epsilon u) + K\rho(x)(\underline{u} - t_0u - \epsilon u) \geq 0.$$

Pela desigualdade de Kato (ver [19]) temos

$$\Delta(t_0u + \epsilon u - u)^+ \geq \Delta(t_0u + \epsilon u - u)sign(t_0u + \epsilon u - u)^+.$$

E pela desigualdade (2.51),

$$\Delta(t_0u + \epsilon u - u)^+ \geq K\rho(t_0u + \epsilon u - u)sign(t_0u + \epsilon u - u)^+.$$

Observe que se $t_0u + \epsilon u - u \leq 0$ teremos $\Delta(t_0u + \epsilon u - u)^+ \geq 0$ pois $sign(t_0u + \epsilon u - u)^+ = 0$. Por outro lado, se $t_0u + \epsilon u - u \geq 0$, teremos $\Delta(t_0u + \epsilon u - u)^+ \geq 0$, pois $sign(t_0u + \epsilon u - u)^+ = 1$ e $K, \rho \geq 0$. Em ambos os casos, temos

$$\Delta(t_0u + \epsilon u - u)^+ \geq 0.$$

Segue então que $\varphi = (t_0u + \epsilon u - u)^+$ é uma função sub-harmônica. Daí, para qualquer x_0, pelo Teorema do valor médio para funções sub-harmônica

$$\varphi(x_0) \leq \fint_{S_R(x_0)} \varphi dS,$$

onde $S_R(x_0)$ denota a esfera de raio R centrada em x_0.

Mas,

$$\begin{aligned} \varphi = t_0u + \epsilon u - u &\leq (t_0 + \epsilon)u \qquad \text{pois } \underline{u} > 0. \\ &\leq (t_0 + \epsilon)v \qquad \text{pelo passo 1.} \end{aligned}$$

Assim, concluimos que

$$\fint_{S_R(x_0)} \phi dS \leq (t_0+\epsilon) \fint_{S_R(x_0)} v dS \to 0 \qquad \text{quando } R \to +\infty.$$

Pelo passo 1, tem-se que $(t_0+\epsilon)u \leq \underline{u}$. Consequentemente, $t_0+\epsilon \in \Lambda$, o que contradiz a hipótese de que $t_0 = \sup \Lambda < 1$. Portanto, $1 \in \Lambda$ e consequentemente u é única.

$\square$

Apêndice A

Espaços de Funções

Neste Apêndice faremos um breve estudo sobre os espaços de funções. Enunciaremos aqui, os teoremas mencionados ao longo de todo o trabalho relativos aos espaços de Hölder, espaços de Lesbegue e espaços de Sobolev.

1.1 Espaços de Hölder

Nesta seção, apresentaremos as principais definições e um resultados importante envolvendo os espaços de Hölder. Para mais detalhes, consulte [4].

Definição A.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é contínua à Hölder com expoente α em Ω, se*

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty$$

para algum $0 < \alpha \leq 1$.

Definição A.2 *Dizemos que uma função é localmente contínua à Hölder com expoente α em Ω, se ela for contínua à Hölder com expoente α em todo subconjunto compacto de Ω.*

Definição A.3 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto. Os espaços de Hölder* $C^{k,\alpha}(\Omega)$ *são definidos como subespaços de* $C^k(\Omega)$ *consistindo das funções cujas derivadas parciais até a ordem* k *são todas contínuas à Hölder com expoente* α *em* Ω*:*

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \left\{ f \in C^k(\Omega); D^\gamma f \in C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \forall |\gamma| \leq k \right\}$$

Teorema A.1 *Seja*
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *e* $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ f \in C^k(\Omega); D^\gamma f \in C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \forall |\gamma| \leq k \right\}$ *munido com a norma*

$$||f||_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = ||f||_{C^k(\overline{\Omega})} + \max [D^\gamma f]_{c^\alpha(\Omega)}.$$

Então $C^{k,\alpha}$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [14], página 241, Teorema 1.

Teorema A.2 *Seja* m *um inteiro não negativo e seja* $0 < v < \alpha \leq 1$*, seguem as seguintes imersões:*

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \to C^m(\overline{\Omega}), \tag{A.1}$$

$$C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^m(\overline{\Omega}), \tag{A.2}$$

$$C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{m,v}(\overline{\Omega}). \tag{A.3}$$

Se Ω *é limitado, então as imersões* $(A.2)$ *e* $(A.3)$ *são compactas. Se* Ω *é convexo, temos outras imersões:*

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \to C^{m,1}(\overline{\Omega}), \tag{A.4}$$

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \to C^{m,v}(\overline{\Omega}). \tag{A.5}$$

Se Ω *é convexo e limitado, então* $(A.1)$ *e* $(A.5)$ *é compacta.*

Demonstração. Ver [1], página 11, Teorema 1.31.

1.2 Espaços de Lesbegue

Recordemos alguns resultados fundamentais a respeito dos espaços $L^P(\Omega)$. Para maiores informações, ver [2].

Definição A.4 *Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e} \int_\Omega |u|^p < +\infty \right\}.$$

A norma L^p é definida por

$$||u||_p = \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição A.5 *Definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \exists\ C \in \mathbb{R} \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ q.t.p em } \Omega \}.$$

A norma em L^∞ é definida por

$$||u||_{L^\infty} = \inf \{ c \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq c \text{ q.t.p em } \Omega \}.$$

Definição A.6 *Definamos o espaço das funções localmente somáveis por*

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é mensurável tal que} \int_V |u| dx < +\infty, \forall V \subset\subset \Omega \right\}.$$

Teorema A.3 (Teorema da Convergência Dominada) *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções integráveis que converge q.t.p para uma função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [2], página 44, Teorema 5.6.

Teorema A.4 (Teorema de Vainberg) *Seja (f_n) uma sequência em L^p e $f \in L^p$ tal que $||f_n - f||_p \to 0$. Então existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p$ tal que* *(i)* $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω.

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, *para todo* k, *q.t.p em* Ω.

Demonstração. Ver [5], página 94, Teorema 4.9.

Teorema A.5 (Fatou) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. *Se* f_n *é uma sequência de funções mensuráveis não negativas, então*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [2], página 33, Lema 4.8.

Teorema A.6 (Fubini) *Suponhamos que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. *Então para quase todo* $x \in \Omega_1$,

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \qquad e \qquad \left(\int_{\Omega_2} F(x,y)dy\right) \in L^1_x(\Omega_1).$$

De maneira análoga, para quase todo $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \qquad e \qquad \left(\int_{\Omega_1} F(x,y)dy\right) \in L^1_y(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_2} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int\int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

Demonstração. Ver [5], página 91, Teorema 4.5.

1.3 Espaços de Sobolev

Nessa seção, estudaremos sucitamente alguns resultados sobre espaços de Sobolev relevantes a esta dissertação.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um dominío (aberto, conexo com fronteira suave). Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Definimos espaços de sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega); \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \in L^p(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \leq m \right\}$$

munido com a norma

$$||u||_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_P \quad \text{para} \quad 1 \leq p \leq +\infty.$$

Teorema A.7 *O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, reflexivo e separável para $1 \leq p < +\infty$. Ainda, o espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.*

Demonstração. ver [5], página 203, Proposição 8.1.

Definição A.7 (Convergência fraca) *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma sequência $(u_n) \subset X$ converge fracamente para $u \in X$, e denotamos $u_n \rightharpoonup u$ quando $l(u_n) \to l(u)$ para cada funcional limitado $l \in X'$.*

Definição A.8 *Dizemos que uma função $G(.)$ é fracamente semicontínua inferiormente em $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ se tivermos $G(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} G(u_n)$ sempre que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$.*

Teorema A.8 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ onde $1 \leq p \leq +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e $|fg|_{L^1(\Omega)} \leq ||f||_p ||g||_q$.*

Demonstração. Ver [5], página 92, Teorema 4.6.

Teorema A.9 (Desigualdade de Poincaré) *Seja $1 \leq p < +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Então existe uma constante C (dependente de Ω e e p) tal que*

$$||u||_p \leq C||\nabla u|| \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [5], página 290, Corolário 9.19.

Definição A.9 (Imersão contínua e compacta) *Sejam X_1, X_2 dois espaços normados tais que $X_1 \subset X_2$. Diz que X_1 está imerso em X_2 quando a aplicação $i = X_1 \to X_2$ tal que $i(x) = x$ é uma aplicação contínua. Da mesma forma, diz-se que X_1 está imerso compactamente em X_2 quando a mesma aplicação i é compacta.*

Daí, seguem alguns resultados envolvendo imersões para os espaços de Sobolev.

Teorema A.10 *Suponhamos que Ω tenha fronteira localmente lipschitziana, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Tem-se então as seguintes imersões contínuas*

(i) *Se* $p < \dfrac{N}{m}$,

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) \qquad \text{com} \quad p \leq q \leq p^*, \qquad \text{sendo} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}.$$

(ii) *Se* $p = \dfrac{N}{m}$,

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) \qquad \text{com} \quad p \leq q < +\infty.$$

(iii) *Se* $\dfrac{N}{m} < p$,

$$W^{m,p}(\Omega) \to C^0(\overline{\Omega}).$$

Demonstração. Ver [1], página 97, Teorema 5.4.

Teorema A.11 *Com as mesmas hipóteses do teorema anterior, temos as seguintes imersões compactas*

(i) *Se* $p < \dfrac{N}{m}$,

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega) \quad \text{com } p \leq q < p^*, \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}.$$

(ii) *Se* $p = \dfrac{N}{m}$,

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega) \quad \text{com} \quad p \leq q < +\infty.$$

(iii) *Se* $\dfrac{N}{m} < p$,

$$W^{m,p}(\Omega) \to C^{\gamma}(\overline{\Omega}) \quad com \quad 0 < \gamma < m - \frac{N}{p}.$$

Demonstração. Ver [1], página 144, Teorema 6.2.

Teorema A.12 (Teorema de Morrey) *(a) Se* $\dfrac{N}{m} < P < \dfrac{N}{m-1}$, *então temos a imersão contínua* $W^{m,p} \to C^{\gamma}(\overline{\Omega})$ *para* $0 < \gamma < m - \dfrac{N}{p}$.

(b) Se $p = \dfrac{N}{m-1}$, *então tem-se a imersão contínua* $W^{m,p} \to C^{\gamma}(\overline{\Omega})$ *para* $0 < \gamma < 1$.

(c) Se $\dfrac{N}{m-1} < p$ *então temos a imersão contínua* $W^{m,p} \to C^{1}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver [1], página 97, Teorema 5.4.

Com o objetivo de definirmos solução clássica, solução forte e solução fraca, consideramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & , \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{A.6}$$

onde $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o operador Laplaciano aplicado em $u(x)$.

Definição A.10 *Uma solução clássica de (A.6) é uma função* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *tal que* $-\Delta u(x) = f(x, u(x))$ *para todo* $x \in \Omega$ *e* $u(x) = 0$ *para todo* $x \in \partial\Omega$.

Definição A.11 *Uma solução fraca de (A.6) é uma função* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, u(x)) v(x) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Definição A.12 *Uma solução forte de (A.6) é uma função* $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$-\Delta u(x) = f(x, u(x)) \quad q.t.p \ em \ \Omega$$

Teorema A.13 (Teorema da Divergência) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado, $\partial\Omega \in C^1$ e seja ν a normal unitária exterior a $\partial\Omega$. Para uma função vetorial F em $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ temos*

$$\int_\Omega divF dx = \int_{\partial\Omega} F\nu ds$$

onde $divF = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$.

Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um domínio onde vale o teorema da divergência e sejam $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Então,

(i) Primeira Identidade de Green

$$\int_\Omega \nabla v \nabla u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial v} ds - \int_\Omega v \Delta u dx$$

(ii) Segunda Identidade de Green

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) ds$$

Ver [4], página 100.

Apêndice B

Resultados Importantes

Teorema B.1 *Seja X um espaço de Banach ou Hilbert reflexivo e $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional tal que*

(a) ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente.

(b) ϕ é coercivo, isto é, $\phi(u) \to +\infty$ quando $||u|| \to +\infty$.

Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que $\phi(u_0) = \inf\limits_{X} \phi$.

Demonstração. Ver [10].

Teorema B.2 *Seja Ω em $C^{1,1}$ um domínio em $\mathbb{R}^N$ e seja o operador L estritamente elíptico em Ω com coeficientes $a^{i,j} \in C^0(\overline{\Omega})$, $b^i, c^i \in L^\infty(\Omega)$ com $i, j = 1, \cdots, n$ e $c \leq 0$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ com $1 < p < +\infty$, então o problema de Dirichlet $Lu = f$ em Ω, $u - \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tem uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [17], página 241, Teorema 9.15.

Teorema B.3 (Versão fraca do Lema de Hopf) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, $a_{i,j} \in C^\alpha(\Omega)$ com $a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x)$, $i \geq 1$, $j \leq N$, $x \in \overline{\Omega}$ e*

$\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\zeta_i\zeta_j > 0$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$ *e* $\zeta \in \mathbb{R}^N - \{0\}$. *Assumimos que* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *resolve no sentido fraco,*

$$\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\partial_i u + c(x)u \geq 0$$

em Ω, *aonde* $b_i \in L^\infty(\Omega)$ *para* $1 \leq i \leq N$, $c \in L^\infty(\Omega)$ *e* $c(x) \geq 0$ *q.t.p em* Ω.

Suponha que $x_0 \in \partial\Omega$ *existe uma bola* $B \subset \Omega$ *com* $x_0 \in \partial B$ *a qual* $u = u(x)$ *satisfaz* $u(x) \geq u(x_0)$, $x \in B$.

Se $u(x_0) \leq 0$, *então* $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0$.

Demonstração. ver [23], página 2, Teorema 1.1.

Teorema B.4 (Teorema do Valor Médio) *Seja* $u \in C^2(\Omega)$ *harmônica em* Ω. *Então, para qualquer bola* $B_R(x) \subset \Omega$, *vale*

$$u(x) = \fint_{\partial\Omega} udS \qquad e \qquad u(x) = \fint_{\Omega} udx.$$

Da mesma forma, para u sub-harmônica, temos

$$u(x) \leq \fint_{\partial\Omega} udS \qquad e \qquad u(x) \leq \fint_{\Omega} udx,$$

e u super-harmônica vem que

$$u(x) \geq \fint_{\partial\Omega} udS \qquad e \qquad u(x) \geq \fint_{\Omega} udx.$$

Demonstração. Ver [14], página 25, Teorema 2.

Teorema B.5 (Desigualdade de Kato) *Seja*

$$L = \sum_{j,k}^{1,m} (\partial_j - ib_j(x))a_{jk}(x)(\partial_k - ib_k(x)),$$

aonde a_{jk} *e* b_j *são funções de valores reais em* $C^1(\Omega)$, *sendo* Ω *um conjunto aberto em* $\mathbb{R}^M$. *Assumimos que* $(a_{jk}(x))$ *é uma matriz simétrica positiva definida para* *cada $x \in \Omega$. Se u e Lu estão em $L^1_{loc}(\Omega)$, então*

$$L_0|u| \geq Re[(sign(\overline{u}))Lu],$$

onde L_0 é um operador com $b_k = 0$, $k = 1, \cdots, m$ e observando que

$$sign(\overline{u(x)}) = \begin{cases} \dfrac{\overline{u(x)}}{|u(x)|}, & se \quad u(x) \neq 0 \\ 0, & se \quad u(x) = 0. \end{cases}$$

Demonstração. Ver [19], página 138, Lema A.

Teorema B.6 *Se u é uma função harmônica limitada superiormente em $\mathbb{R}^N$, então u é constante.*

Demonstração. Ver [4] página 132, Exercício 5.5.

Apresentemos a versão fraca para o princípio do máximo. Antes porém enunciemos duas definições importantes.

Definição B.1 *Seja $T_1, T_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dizemos que $T_1 \leq T_2$ se, e somente se $< T_1, \varphi > \quad \leq \quad < T_2, \varphi > \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \varphi \geq 0$.*

Definição B.2 *Seja $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$. Dizemos que $u_1 \leq u_2$ em $\partial\Omega$ se, e somente se $(u_1 - u_2)^+ \in H^1_0(\Omega)$.*

Agora podemos afirmar que

Teorema B.7 *Seja $A = A(x)$ uma matriz satisfazendo*

$$|A(x)\xi| \leq \Lambda|\xi| \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad q.t.p\ x \in \mathbb{R}$$

e

$$\lambda|\xi|^2 \leq A(x)\xi\xi \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad q.t.p\ x \in \mathbb{R},$$

onde λ e Λ são constantes positivas. Seja $a \in Ł^\infty(\Omega)$ uma função não negativa. Para $u \in H^1(\Omega)$ definimos $-L$ como

$$-Lu = -div(A(x)\nabla u) + a(x)u.$$

Então temos: Seja $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -Lu_1 & \leq & -Lu_2 & \text{em } \Omega \\ u_1 & \leq & u_2, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $u_1 \leq u_2$ em Ω.

Demonstração. Ver [8], página 39, Teorema 4.4.

No nosso caso, estamos trabalhando com o operador Laplaciano. Desse modo, dada a definição de $-L$ segue que $A(x) = 1$ e $a(x) = 0$ $\forall x$. Com o auxilio das definições e desse teorema acima, temos o seguinte corolário: Se $u, v \in H^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, temos

$$\int_\Omega (-\Delta u_1)\,\varphi = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla \varphi \;\;\leq\;\; \int_\Omega \nabla u_2 \nabla \varphi = \int_\Omega (-\nabla u_2)\,\varphi \quad \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \varphi \geq 0.$$

Daí,

$$\int_\Omega [(-\Delta u_1) - (-\Delta u_2)]\,\varphi \leq 0.$$

E portanto,

$$-\Delta u_1 \leq -\Delta u_2 \qquad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Teorema B.8 (Versão forte do princípio do máximo) *Sejam $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ satisfazendo $\Delta u \geq \Delta v$ em Ω e $u \geq v$ em $\partial\Omega$. Então $u \geq v$ em Ω.*

Demonstração. Ver [17], página 15, Teorema 2.2.

Teorema B.9 (Teorema da mudança de variável na integral) *Se $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ é de classe C^1 e $f : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ é um caminho, então*

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)dt = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Demontração. . Ver [22], página 38, consequência do Teorema 3.

Teorema B.10 *Seja Ω um aberto limitado. Então toda solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad em \quad \Omega \\ u &= 0 \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{B.1}$$

satisfaz

$$u(y) = \int_\Omega f(x)G(x,y)dx,$$

onde G_R é a função de Green relativa a Ω e nula na fronteira.

Demontração. ver [4], página 111, proposição 5.16.

Teorema B.11 *Seja $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$ com suporte compacto. Defina*

$$u(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x-y)f(x)dx.$$

Então u é de classe C^2 e é uma solução para a equação da poisson

$$-\Delta u = f \quad em\ \mathbb{R}^N.$$

Demontração. ver [4], página 111, Teorema 5.17.

Teorema B.12 (Alternativa de Fredholm) *Seja $T \in \kappa(X)$. Então*

(*a*) *$N(I-T)$ é finito,*

(*b*) *$R(I-T)$ é fechado, mais precisamente $R(I-T) = N(I-T^*)^\perp$,*

(*c*) *$N(I-T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I-T) = X$,*

(*d*) $\dim N(I-T) = \dim N(I-T^*)$.

Demonstração. Ver [5], página 160, Teorema 6.6.

Apêndice C

Um Problema Linear em $\mathbb{R}^N$

Neste Apêndice faremos um estudo do problema

$$-\Delta u = f(x) \qquad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{PL}$$

onde $f \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $f \geq 0$ e não identicamente nula. Mais especificamente, estamos interessados em estudar resultados de existência de solução e investigar algumas propriedades dessas soluções. O estudo feito neste capítulo é crucial para resolver o problema (P2) no Capítulo 2.

3.1 Alguns resultados preliminares

Nesta seção, introduziremos alguns resultados iniciais envolvendo áreas e volumes da bola em $\mathbb{R}^N$.

Definição C.1 *Definimos a função gama* $\Gamma : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ *por*

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Lema C.1 *As seguintes igualdades envolvendo a função* $\Gamma : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ *ocorrem:*

(i) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

(ii) $\Gamma(1) = 1$

(iii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Demonstração.

(i). Por definição,

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s+1-1}dt = \int_0^\infty e^{-t}t^s dt.$$

Integrando por partes, temos

$$u = t^s \qquad dv = e^{-t}dt$$

$$du = st^{s-1} \qquad v = -e^{-t}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= -t^s e^{-t}|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt \\ &= s\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt \\ &= s\Gamma(s).\end{aligned}$$

(ii). Por definição,

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^0 dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}dt \\ &= -e^{-t}|_0^\infty \\ &= 1.\end{aligned}$$

(iii). Por definição,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Fazendo $t = u^2$, temos

$$\Gamma(s) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2s-1} du.$$

Então,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 2.2\int_0^\infty e^{-u^2}\left(\int_0^\infty e^{-v^2} dv\right) du \\
&= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} du dv.
\end{aligned}$$

Transformando para coordenadas polares, temos

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} & \dfrac{\partial v}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r.$$

Do teorema da mudança de variável na integral, implica em

$$\begin{aligned}
\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}\right| dr d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r dr \\
&= 4\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u} du \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Note ainda que combinando (i) com (ii) temos

$$\Gamma(s) = (s-1)!, \qquad \text{para } s \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Em seguida, nas duas próximas proposições, verificaremos o cálculo da área e do volume da esfera com dependência da função gama.

Proposição C.1 *A área de $B_1(0)$ em $\mathbb{R}^N$ é*

$$|\partial B_1(0)| = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}.$$

Demonstração. De [16], Proposição 0.6, Página 7, consideremos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi|x|^2} dx = 1.$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares, temos

$$x = r \qquad \text{e} \qquad \left|\frac{\partial(u_1, \cdots, u_N)}{\partial(r_1, \cdots, r_N)}\right| = r^{N-1}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{B_1(0)} \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{N-1} dr d\theta \\ &= |\partial B_1(0)| \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{N-1} dr. \end{aligned}$$

Aplicando a mudança de variável,

$$\begin{cases} u = \pi r^2 \\ du = 2\pi r dr, \end{cases}$$

temos

$$1 = |\partial B_1(0)| \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(N-1)} \frac{du}{2\pi\left(\frac{u}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

onde $r = \left(\frac{u}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
1 &= |\partial B_1(0)| \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} e^{-u} \left(\frac{u}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}-1} du \\
&= |\partial B_1(0)| \frac{1}{2\pi^{\frac{N}{2}}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{N}{2}-1} du \\
&= |\partial B_1(0)| \frac{1}{2\pi^{\frac{N}{2}}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\partial B_1(0)| = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}.$$

$\square$

Proposição C.2 *O volume de $B_1(0)$ em $\mathbb{R}^N$ é*

$$w_N = \frac{|\partial B_1(0)|}{N}.$$

Demonstração. Seja $w_N = \displaystyle\int_{B_1(0)} dv$. Fazendo a conversão para coordenadas polares, implica que

$$\begin{aligned}
w_N &= \int_{B_1(0)} dx \\
&= \int_0^1 r^{N-1} \int_{B_1(0)} d\theta dr \\
&= |\partial B_1(0)| \int_0^1 r^{N-1} dr.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$w_N = \frac{|\partial B_1(0)|}{N}.$$

$\square$

Da mesma forma, podemos inferir o volume da bola de centro $x \in \mathbb{R}^N$ e raio R.

Proposição C.3 *O volume da bola de centro $x \in \mathbb{R}^N$ e raio R é* $\dfrac{R^N}{N}|B_1(0)|$.

Demonstração. Seja $w_N = \int_{B_R(x)} dx$. Aplicando uma mudança de variável para coordenadas polares, implica que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R r^{N-1} dr \int_{B_1(0)} d\theta \\ &= \int_0^R r^{N-1} dr |B_R(0)| \\ &= |B_R(0)| \frac{r^N}{N}|_0^R \\ &= |B_R(0)| \frac{R^N}{N} \end{aligned}$$

□

3.2 A equação de Laplace

Nesta seção, temos por objetivo definir a solução fundamental para o operador Laplaciano bem como tecer um breve comentário sobre a integrabilidade da mesma.

Definição C.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é dita radialmente simétrica quando $u(r) = u(|x|)$.*

Lema C.2 *Seja $u \in C^2(\Omega)$ uma função radialmente simétrica. Então*

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{du}{dr}.$$

Demonstração.

De fato, considerando $x = (x_1, \cdots, x_n)$, obtemos $|x| = r = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Daí,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{r}.$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r} - \frac{x_i}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_i},$$

e,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}.$$

Como $u(x) = u(r)$, temos que a primeira derivada de u é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{du}{dr}\frac{x_i}{r}.$$

Consequentemente, a segunda derivada é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) &= \frac{d^2 u}{dr^2}\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{x_i}{r} + \frac{du}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} \\
&= \frac{d^2 u}{dr^2}\frac{x_i}{r}\frac{x_i}{r} + \frac{du}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right).
\end{aligned}$$

Logo para o Laplaciano, temos

$$\begin{aligned}
\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d^2 u}{dr^2}\frac{x_i^2}{r^2} + \frac{du}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)\right] \\
&= \frac{d^2 u}{dr^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{r^2} + \frac{du}{dr}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right).
\end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{r^2} &= \frac{x_1^2}{r^2} + \frac{x_2^2}{r^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{r^2} \\
&= \frac{1}{r^2}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) \\
&= \frac{1}{r^2}r^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{x_1^2}{r^3} &= \frac{x_1^2}{r^3} + \cdots + \frac{x_n^2}{r^3} \\
&= \frac{1}{r^3}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) \\
&= \frac{1}{r^3}r^2 \\
&= \frac{1}{r},
\end{aligned}$$

portanto,

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{N-1}{r}\right)\frac{du}{dr}.$$

$\square$

Lema C.3 *Se* u *é uma função radialmente simétrica e harmônica, isto é,* $\Delta u = 0$ *em* $\mathbb{R}^N$ *então a solução fundamental é dada por*

$$u(r) = \begin{cases} \log r, & se \quad N = 2 \\ \dfrac{1}{r^{N-2}}, & se \quad N \geq 3. \end{cases}$$

Demonstração. Pelo lema anterior,

$$u''(r) + \frac{N-1}{r}u'(r) = 0.$$

Considerando $w(r) = u'(r)$ e recordando que $u \in C^2(\Omega)$,

$$w'(r) + \frac{N-1}{r}w(r) = 0,$$

equivalentemente,

$$\frac{w'(r)}{w(r)} = -\frac{N-1}{r}.$$

Integrando a última igualdade, obtemos

$$\log w(r) = -(N-1)\log r = \log r^{-(N-1)}.$$

Assim,

$$w(r) = r^{-(N-1)} = \frac{1}{r^{N-1}}.$$

Como $w(r) = u'(r)$, integrando para obter a solução $u(r)$,

(i) Para $N = 2$,

$$u(r) = \int_\Omega u(r)dr = \int_\Omega \frac{1}{r}dr = \log r.$$

(ii) Para $N \geq 3$,

$$u(r) = \int_\Omega w(r)dr = \int_\Omega \frac{1}{r^{N-1}}dr = \frac{1}{r^{N-2}}.$$

Portanto, temos

$$u(r) = \begin{cases} \log r, & \text{se} \quad N = 2 \\ \dfrac{1}{r^{N-2}}, & \text{se} \quad N \geq 3. \end{cases}$$

Onde $u(r)$ é chamada solução fundamental

□

Escolhendo constantes convenientes, chegamos à seguinte definição:

Definição C.3 *A função $\Phi : \mathbb{R}^N - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log |x|, & se \quad N = 2 \\ \dfrac{1}{N(N-2)w_N} \dfrac{1}{|x|^{N-2}}, & se \quad N \geq 3, \end{cases}$$

é chamada solução fundamental para a equação de Laplace.

Usualmente designada por Γ, denotaremos nesta dissertação a solução fundamental por Φ para não ser confundida com a função gama, estudada na seção 3.1.

Para os resultados subsequentes deste apêndice será utilizado o seguinte fato:

Lema C.4 *Se $f(x)$ é uma função radialmente simétrica, então*

$$\int_{B_R(0)} f dx = N w_N \int_0^R f(r) r^{N-1} dr \tag{C.1}$$

Demonstração. De fato, desde que

$$\int_{B_R(0)} f dx = \int_{B_1(0)} \int_0^R f(r) r^{N-1} d\theta dr,$$

segue que

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} f dx &= |\partial B_R(0)| \int_0^R f(r) r^{N-1} dr \\ &= N \frac{|\partial B_1(0)|}{N} \int_0^R f(r) r^{N-1} dr \\ &= N w_N \int_0^R f(r) r^{N-1} dr. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{B_R(0)} f dx = N w_N \int_0^R f(r) r^{N-1} dr.$$

$\square$

Enunciaremos a próxima proposição que trata sobre integrabilidade da solução fundamental em $\mathbb{R}^N$.

Proposição C.4 *A função Φ é integrável em qualquer vizinhança limitada da singularidade na origem, mas não é integrável em todo $\mathbb{R}^N$, pois*

$$\int_{B_R(0)} \Phi(x) dx = \begin{cases} -\dfrac{R^N}{2} \log R + \dfrac{R}{4}, & se \quad N = 2 \\ \dfrac{1}{(N-2)} \dfrac{R^2}{2}, & se \quad N \geq 3. \end{cases}$$

Demonstração.

Caso $N = 2$. Por $(C.1)$ e pela Definição $C.3$, vem que

$$\int_{B_R(0)} \Phi(x) dx = 2 w_2 \int_0^R -\frac{1}{2\pi} r \log r dr.$$

Desde que $w_N = \dfrac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{N\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$, então $w_2 = \pi$. Assim,

$$\int_{B_R(0)} \Phi(x) dx = 2\pi \int_0^R -\frac{1}{2\pi} r \log r dr = -\int_0^R r \log r dr = -\frac{R^N}{2} \log R + \frac{R}{4}.$$

Caso $N \geq 3$. Por $(C.1)$ e pela Definição $C.3$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} \Phi(x) dx &= N w_N \int_0^R \Phi(x) r^{N-1} dr \\ &= N w_N \int_0^R \frac{1}{N(N-2) w_N} \frac{1}{r^{N-2}} r^{N-1} dr \\ &= \frac{1}{N-2} \int_0^R r dr \\ &= \frac{1}{(N-2)} \frac{R^2}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, segue a proposição.

$\square$

Calculamos em seguida, as derivadas parciais da solução fundamental.

Proposição C.5 *As derivadas parciais de primeira ordem e de segunda ordem de* Φ *são dadas respectivamente por*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) = -\frac{1}{N w_N} \frac{x_i}{|x|^N}$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(x) = -\frac{1}{N w_N} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|^N} - \frac{N x_i x_j}{|x|^{N+2}} \right).$$

Demonstração. Para o caso em que $N = 2$ é óbvio. Verifiquemos o caso em que $N \geq 3$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) = \frac{(2-N)|x|^{-N} x_i}{N(N-2) w_N}.$$

Assim,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) = -\frac{1}{N w_N} \frac{x_i}{|x|^N}. \tag{C.2}$$

Calculemos a derivada parcial de segunda ordem utilizando a regra do produto e a regra da cadeia. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i x_j}(x) &= -\frac{1}{N w_N} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|^N} + (-N) x_i |x|^{-N-2} x_j \right) \\ &= -\frac{1}{N w_N} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|^N} - N \frac{x_i x_j}{|x|^{N+2}} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i x_j}(x) = -\frac{1}{N w_N} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|^N} - \frac{N x_i x_j}{|x|^{N+2}} \right). \tag{C.3}$$

$\square$

3.3 A equação de Poisson

Finalizado o estudo sobre a solução fundamental, nos voltemos propriamente aos resultados relacionados ao problema (PL).

Definição C.4 *Dizemos que uma função $f \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $f \geq 0$, tem a propriedade (H) se o problema (PL) tem uma solução positiva limitada.*

Consideremos agora u_R solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_R &= f \quad \text{em } B_R(0) \\ u_R &= 0 \quad \text{sobre } \partial B_R(0). \end{cases} \tag{PR}$$

Note que este problema tem solução única $u \in C^1(\overline{B_R}) \cap W^{2,p}(B_R)$, $\forall p > 1$ (ver [17], página 241, Teorema 9.15).

Lema C.5 *A aplicação $(0, +\infty) \ni R \mapsto u_R \in C^1(\overline{B}_R) \cap W^{2,P}(B_R)$ é não decrescente.*

Demonstração. De fato, desde que $R' > R$ temos que $B_R(0) \subset B_{R'}(0)$. Assim,

$$-\Delta u_{R'}(x) = f(x) \qquad \forall x \in B_{R'}(0).$$

Logo,

$$\begin{cases} -\Delta u_{R'}(x) &\geq -\Delta u_R(x) \quad \forall x \in B_R(0); \\ u_{R'} &\geq \quad 0 \qquad \text{sobre } \partial B_R(0). \end{cases}$$

Pelo princípio do máximo fraco (ver Teorema B.7),

$$u_{R'} \geq u_R.$$

Mostrando que (u_R) é uma sequência não decrescente de funções positivas em B_R.

$\square$

Pelo Teorema B.10,

$$u_R(x) = \int_{B_R} G_R(x,y) f(y) dy,$$

onde G_R é a função de Green relativa a $B_R(0)$ e nula na fronteira dada por

$$G(x,y) = \begin{cases} \Phi(x-y) - \Phi\left(\dfrac{|y|}{R}\left(x - \dfrac{R^2 y}{|y|^2}\right)\right) & \text{se} \quad y \neq 0, \\ \Phi(x) - \Phi(R) & \text{se} \quad y = 0. \end{cases}$$

Definamos $u_\infty(x) := \lim\limits_{R \to +\infty} u_R(x)$. Pelo Teorema A.3,

$$\begin{aligned} u_\infty(x) &= c \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} f(y) \\ &= \frac{c}{|x|^{N-2}} * f. \end{aligned}$$

Observação C.1 *Segue de uma versão do Teorema B.11 que u_∞ é uma solução do problema (PL).*

Lema C.6 *Existe somente duas possibilidades: Ou $u_\infty(x) = +\infty$ $\forall x$, ou $u_\infty(x) < +\infty$ $\forall x$.*

Demonstração. Suponha, por exemplo que $u_\infty(0) < +\infty$. Escrevemos então

$$u_\infty(x) = c \int_{|y| \leq 2|x|} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2}} dy + c \int_{|y| > 2|x|} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2}} dy.$$

A primeira integral é finita (para cada x fixado). De fato, desde que $f \in L^\infty(\Omega)$ e assim existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para quase todo ponto $x \in \Omega$. Além disso, consideramos a Proposição C.4. Em outras palavras,

$$\int_{|y| \leq 2|x|} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2}} dy \leq c \int_{|y| \leq 2|x|} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} dy < +\infty.$$

Por outro lado,

$$\int_{|y| > 2|x|} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2}} dy \leq 2^{N-2} c \int \frac{f(y)}{|y|^{N-2}} dy.$$

Para justificar isso, recorremos à segunda desigualdade triangular:

$$|x-y| \geq ||x|-|y|| = |y|-|x|.$$

Como $|y| > 2|x|$,

$$|x-y| > |y| - \frac{|y|}{2} = \frac{|y|}{2}.$$

Daí,

$$|x-y|^{N-2} > \frac{|y|^{N-2}}{2^{N-2}}.$$

Consequentemente, multiplicando ambos os lados da desigualdade por $f(y)$ e integrando em $|y| > 2|x|$, obtemos

$$\int_{|y|>2|x|} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2}} dy \leq 2^{N-2} c \int_{|y|>2|x|} \frac{f(y)}{|y|^{N-2}} dy = u_\infty(0) < +\infty.$$

Portanto, a segunda integral é limitada e concluimos que $u_\infty < +\infty$.

$\square$

Enunciaremos em seguida, alguns resultados que são úteis para os resultados que envolvem a existência e unicidade de solução positiva para o problema (P2).

Proposição C.6 *f satisfaz a condição (H) se, e somente se,* $\dfrac{C}{|x|^{N-2}} * f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que (H) ocorra. Assim, existe uma solução positiva limitada U do problema (PL). Consequentemente, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|U(x)| \leq C.$$

Podemos sempre supor que $U \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$ pois, do contrário, tomamos $v(x) = U(x) + C$. Note que

$$-\Delta v = -\Delta(U - C) = -\Delta U + \Delta C = f,$$

com $f \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Como,

$$\begin{cases} -\Delta u_R &= f|_{B_R(0)} \quad \text{em } B_R(0) \\ u_R &= 0 \quad \text{sobre } \partial B_R(0), \end{cases}$$

então

$$\begin{cases} -\Delta u_R &= -\Delta U \quad \text{em } B_R(0) \\ u_R &= 0 \leq U \quad \text{sobre } \partial B_R(0). \end{cases}$$

Logo, pela versão forte do princípio do máximo (Teorema B.8),

$$u_R \leq U \qquad \text{em } B_R(0).$$

Passando ao limite quando $R \to +\infty$, obtemos

$$u_\infty(x) = \frac{C}{|x|^{N-2}} * f \leq U(x) \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Considerando que $U \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\frac{C}{|x|^{N-2}} * f \in L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Reciprocamente, consideremos $\frac{C}{|x|^{N-2}} * f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Desde que essa convolução fornece uma solução para o problema $-\Delta U = f$ em $\mathbb{R}^N$, concluimos que f satisfaz a propriedade (H).

□

Corolário C.1 *Se (H) ocorre, então u_∞ é a única solução minimal positiva do problema (PL).*

Demonstração. Se vale a propriedade (H), então $u_\infty(x) = \frac{C}{|x|^{N-2}} * f$ é uma solução do problema (PL). Mostraremos que u_∞ é a única solução minimal desse problema.

De fato, se $\overline{U}$ é outra solução de (PL), então $-\Delta\overline{U} = f$ em $\mathbb{R}^N$. Assim, como no teorema anterior, $u_R \leq \overline{U}$. Logo, $u_\infty \leq \overline{U}$. Portanto, concluimos que u_∞ é solução minimal de (PL), a qual evidentemente é única.

$\square$

Corolário C.2 *Se* (H) *ocorre, então* $\liminf_{|x|\to+\infty} u_\infty(x) = 0$.

Demonstração. Seja U uma solução limitada de (PL) tal que $\liminf_{|x|\to+\infty} U(x) = 0$, então

$$-\Delta u_\infty = -\Delta U = f \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Dai,

$$-\Delta(U - u_\infty) = 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Desde que $U - u_\infty$ é harmônica e limitada, segue do Teorema B.6 que $U - u_\infty$ é constante. Assim,

$$U - u_\infty = C,$$

com $C \geq 0$, pois $U \geq u_\infty$. Equivalentemente,

$$U = u_\infty + C.$$

Passando ao limite quando $|x| \to +\infty$, temos

$$\liminf_{|x|\to+\infty} U = \liminf_{|x|\to+\infty} u_\infty + C.$$

Desde que $\liminf_{|x|\to+\infty} U = 0$, tem-se obrigatóriamente $C = 0$.

Portanto,

$$\liminf_{|x|\to+\infty} u_\infty(x) = 0.$$

$\square$

O próximo resultado é uma maneira mais forte de expressar que u_∞ tende para zero no infinito. De fato, basta usar o Teorema B.4.

Proposição C.7 *Suponha* $u_\infty(x) < +\infty$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$, *então*

$$\lim_{R\to+\infty} \fint_{S_R} u_\infty(y) dS_y = 0.$$

Demonstração. Seja $u_\infty(x) = \dfrac{C}{|x|^{N-2}} * f$. Assim,

$$\fint_{S_R} u_\infty(y)dS_y = \fint_{S_R} \left(\frac{C}{|x|^{N-2}} * f \right)(y)dS_y.$$

Usando a definição de integral média e definição de convolução, segue que

$$\fint_{S_R} u_\infty(y)dS_y = \frac{1}{Nw_N R^{N-1}} \int_{S_R} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{Cf(x)}{|x-y|^{N-2}} dx \right) dS_y.$$

Denotando $\overline{C} = \dfrac{C}{Nw_N}$ e observando o Teorema A.6,

$$\fint_{S_R} u_\infty dS_y = \overline{C} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x)}{R^{N-1}} \left(\int_{S_R} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} dS_y \right) dx.$$

Definindo $I(x) := \displaystyle\int_{S_R} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} dS_y$, consideremos os seguintes casos:

(i) $|x| > R$.

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{|x|^{N-2}} Nw_N R^{N-1} \\ &= \frac{R^{N-1}}{|x|^{N-2}} C \qquad \text{com } C = Nw_N \\ &= CR\frac{R^{N-2}}{|x|^{N-2}} \end{aligned}$$

(ii) $|x| < R$.

$$\begin{aligned} I(x) = I(0) &= \int_{|y|=R} \frac{1}{|y|^{N-2}} dS \\ &= Nw_N R^{N-1} \frac{1}{R^{N-2}} \\ &= CR. \end{aligned}$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} \fint_{S_R} u_\infty(y)dS_y &= \int_{|x|<R} \overline{C} f(x) \frac{1}{R^{N-1}} CRdx + \int_{|x>R|} \overline{C} f(x) \frac{1}{R^{N-1}} CR \frac{R^{N-2}}{|x|^{N-2}} dx \\ &= \frac{C}{R^{N-2}} \int_{|x|<R} f(x)dx + \int_{|x|>R} C \frac{f(x)}{|x|^{N-2}} dx. \end{aligned}$$

Perceba que a segunda integral tende a zero quando $R \to +\infty$. Estimamos a primeira integral por

$$\frac{C}{R^{N-2}} \int_{|x|<R_0} f(x)dx + C \int_{R_0<|x|<R} \frac{f(x)}{|x|^{N-2}} dx.$$

Primeiro escolhemos R_0 tal que

$$C \int_{R_0<|x|} \frac{f(x)}{|x|^{N-2}} dx < \epsilon,$$

e então R suficientemente grande tal que

$$\frac{C}{R^{N-2}} \int_{|x|<R_0} f(x)dx < \epsilon.$$

Portanto,

$$\fint_{S_R} u_\infty(x) dS_x = 0.$$

$\square$

Teorema C.1 *Qualquer solução limitada do problema* (PL) *tal que*

$$\fint_{S_R} U(y) dS_y \to 0 \qquad \textit{quando } R \to +\infty$$

coincide com u_∞.

Demonstração. Seguiremos, nesta prova, o mesmo raciocínio utilizado na demonstração do Corolário C.2.

Assumimos que U e u_∞ são duas soluções do problema (PL). Dessa forma,

$$-\Delta U = -\Delta u_\infty = f \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

com U e u_∞ funções limitadas.

Daí,

$$-\Delta(U - u_\infty) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Logo, $U - u_\infty$ é uma função harmônica e limitada. Assim, pelo Teorema B.6, $U - u_\infty = C$.

Visto que

$$\fint_{S_R} U(y)dS_y \longrightarrow 0,$$

temos necessariamente que $C = 0$. Logo,

$$\fint_{S_R} U(y)dS_y \longrightarrow \fint_{S_R} u_\infty(y)dS_y.$$

Portanto, U coincide com u_∞ quando $R \to +\infty$.

$\square$

Teorema C.2 *Assumimos* (H)*. Seja* $U \in L^\infty(\Omega)$ *uma função com* $\Delta U \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ *satisfazendo* $\Delta U \leq f$ *em* $\mathbb{R}^N$ *e*

$$\fint_{S_R} U(x)dS_x \to 0 \quad \textit{quando } R \to +\infty.$$

Então $U \leq u_\infty$.

Demonstração. Definamos $g = -\Delta(u_\infty - U)$. Sabemos da Proposição C.6 que $u_\infty \leq U$. Daí, $-\Delta(u_\infty - U) \geq 0$.

Visto que

$$\fint_{S_R} (u_\infty - U)dS_x \to 0 \quad \text{quando } R \to +\infty,$$

podemos aplicar o Teorema C.1 e concluir que

$$u_\infty - U = \frac{C}{|x|^{N-2}} * g \geq 0.$$

$\square$

Apêndice D

Demonstrações Alternativas

Neste apêndice, baseado em [6], apresentaremos demonstrações alternativas para a unicidade de solução do problema (P1) com $f(x,u) = \rho(x)f(u)$, isto é, do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \rho(x)f(u) & \text{em} & \Omega \\ u &> 0 & \text{em} & \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{D.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave. Para provar a unicidade, consideraremos as seguintes hipóteses em f e ρ.

(H1). para quase todo ponto $x \in \Omega$ a função $t \longmapsto f(x,t)$ é contínua em $[0,\infty)$ e a função $t \longmapsto \dfrac{f(x,t)}{t}$ é decrescente em $(0,\infty)$;

(H2). $\rho(x) \geq 0$, não identicamente nula e $\rho(x)$ pertence a $L^{\infty}_{loc}(\Omega)$.

Método I.

Sejam u_1 e u_2 duas soluções para $(D.1)$. Assim,

$$\begin{cases} -\Delta u_1 &= \rho(x)f(u_1) \\ -\Delta u_2 &= \rho(x)f(u_2). \end{cases}$$

Multiplicando a primeira igualdade por u_2 e a segunda por $-u_1$, temos

$$\begin{cases} -(\Delta u_1)u_2 &= \quad \rho(x)f(u_1)u_2 \\ (\Delta u_2)u_1 &= -\rho(x)f(u_2)u_1. \end{cases}$$

Equivamentemente,

$$\begin{cases} -(\Delta u_1)u_2 &= \quad \rho(x)u_1u_2\dfrac{f(u_1)}{u_1} \\ (\Delta u_2)u_1 &= -\rho(x)u_1u_2\dfrac{f(u_2)}{u_2}. \end{cases}$$

Somando membro a membro, obtemos

$$-(\Delta u_1)u_2 + (\Delta u_2)u_1 = \rho(x)u_1u_2\left(\frac{f(u_1)}{u_1} - \frac{f(u_2)}{u_2}\right). \tag{D.2}$$

Seja θ uma função suave não decrescente tal que $\theta(0) = 0$ e

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t \geq 1 \\ -1, & \text{se} \quad t \leq -1. \end{cases}$$

Seja $\theta_\epsilon(t) = \theta\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$. Multiplicando $(D.2)$ por $\theta_\epsilon(u_1 - u_2)$, resulta em

$$\left[-(\Delta u_1)u_2 + (\Delta u_2)u_2\right]\theta_\epsilon(u_1 - u_2) = \rho u_1u_2\left(\frac{f(u_1)}{u_1} - \frac{f(u_2)}{u_2}\right)\theta_\epsilon(u_1 - u_2).$$

Integrando sobre Ω, encontramos

$$\int_\Omega \left[-(\Delta u_1)u_2\theta_\epsilon(u_1 - u_2) + (\Delta u_2)u_1\theta_\epsilon(u_1 - u_2)\right]dx =$$

$$\int_\Omega \rho u_1u_2\left(\frac{f(u_1)}{u_1} - \frac{f(u_2)}{u_2}\right)\theta_\epsilon(u_1 - u_2)dx.$$

Novamente integrando por partes,

$$\int_\Omega \left[\nabla u_1\nabla(u_2\theta_\epsilon(u_1 - u_2)) - \nabla u_2\nabla(u_1\theta_\epsilon(u_1 - u_2))\right]dx =$$

$$\int_\Omega \rho u_1u_2\left(\frac{f(u_1)}{u_1} - \frac{f(u_2)}{u_2}\right)\theta_\epsilon(u_1 - u_2)dx.$$

Calculando o gradiente, implica em

$$\int_\Omega \nabla u_1(\nabla u_2\theta_\epsilon(u_1-u_2)+u_2\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2))-\nabla u_2(\nabla u_1\theta_\epsilon(u_1-u_2)+$$

$$u_1\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2))dx=\int_\Omega \rho u_1u_2\left(\frac{f(u_1)}{u_1}-\frac{f(u_2)}{u_2}\right)\theta_\epsilon(u_1-u_2)dx.$$

Logo,

$$\int_\Omega \left[(\nabla u_1)u_2\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)-(\nabla u_2)u_1\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)\right]dx=$$

$$\int_\Omega \rho u_1u_2\left(\frac{f(u_1)}{u_1}-\frac{f(u_2)}{u_2}\right)\theta_\epsilon(u_1-u_2)dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left[(\nabla u_1)u_2-(\nabla u_2)u_1\right]\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)dx=\\&\int_\Omega \rho u_1u_2\left(\frac{f(u_1)}{u_1}-\frac{f(u_2)}{u_2}\right)\theta_\epsilon(u_1-u_2)dx.\end{aligned}\tag{D.3}$$

Claramente,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left[(\nabla u_1)u_2-(\nabla u_2)u_1\right]\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)dx\geq\\&\int_\Omega (\nabla u_2)(u_2-u_1)\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)dx.\end{aligned}\tag{D.4}$$

De fato, note que

$$\int_\Omega u_2(\nabla u_1-\nabla u_2)^2\theta'_\epsilon(u_1-u_2)dx\geq 0.$$

Equivalentemente,

$$\int_\Omega u_2(\nabla u_1-\nabla u_2)\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)dx\geq 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega (u_2\nabla u_1-u_2\nabla u_2)\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)dx\geq 0.$$

Somando e subtraindo o termo $u_1\nabla u_2$ no primeiro parenteses, segue-se

$$\int_\Omega (u_2\nabla u_1 - u_1\nabla u_2 + u_1\nabla u_2 - u_2\nabla u_2)\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)dx \geq 0.$$

Dessa forma,

$$\int_\Omega (u_2\nabla u_1 - u_1\nabla u_2)\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)dx + \int_\Omega (u_1\nabla u_2 - u_2\nabla u_2)\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)dx \geq 0.$$

O que implica em

$$\int_\Omega (u_2\nabla u_1 - u_1\nabla u_2)\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)dx \geq \int_\Omega \nabla u_2(u_2-u_1)\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)dx.$$

Observando $(D.3)$, segue $(D.4)$.

Agora definindo

$$\gamma_\epsilon(t) = \int_0^t s\theta'_\epsilon(s)ds,$$

observemos que

$$\nabla\gamma_\epsilon(u_1-u_2) = \gamma'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2).$$

Mas, segundo a definição de $\gamma_\epsilon(t)$,

$$\gamma'_\epsilon(u_1-u_2) = (u_1-u_2)\theta'_\epsilon(u_1-u_2).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\nabla\gamma_\epsilon(u_1-u_2) &= (u_1-u_2)\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)\\ &= -(u_2-u_1)\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2).\end{aligned}$$

Logo, atentando a desigualde $(D.4)$, temos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left[(\nabla u_1)u_2 - (\nabla u_2)u_1\right]\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)dx \geq\\ &-\int_\Omega \nabla u_2\nabla\gamma_\epsilon(u_1-u_2)dx.\end{aligned} \tag{D.5}$$

Visto que $|\gamma_\epsilon(t)| \leq C\epsilon$ e $\Delta u_2 \in L^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left[(\nabla u_1)u_2 - (\nabla u_2)u_1\right]\theta'_\epsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)dx \geq -C\epsilon.$$

Observando $(D.4)$, quando $\epsilon \to 0$, tem-se

$$\int_\Omega \rho u_1 u_2 \left| \frac{f(u_1)}{u_1} - \frac{f(u_2)}{u_2} \right| = 0.$$

Portanto,

$$u_1 = u_2.$$

Método II.

Este método é uma variação do método de Krasnoselkii [20]. Seja u_1 e u_2 duas soluções de $(D.1)$. Sejam

$$\Lambda = \{t \in [0,1]; \quad tu_1 \leq u_2 \quad \text{em } \Omega\}.$$

Claramente Λ contém uma vizinhança de zero.

Lema D.1 $1 \in \Lambda$.

Demonstração. Suponha por contradição que $t_0 = \sup \Lambda < 1$. Então,

$$-\Delta(u_2 - t_0 u_1) = \rho(x) f(u_2) - t_0 f(u_1) \rho(x).$$

Fixando uma constante positiva K suficientemente grande tal que $f(t) + Kt$ é crescente em $[0, \max u_2]$. Então,

$$\begin{aligned} -\Delta(u_2 - t_0 u_1) + K\rho(x)(u_2 - t_0 u_1) &= \rho(x) f(u_2) - t_0 \rho(x) f(u_1) + K\rho(x) u_2 - K\rho(x) t_0 u_1 \\ &= \rho(x) \left[f(u_2) + K u_2 - t_0 (f(u_1) + K u_1) \right]. \end{aligned}$$

Como $t_0 u_1 \leq u_2$, vem que

$$\begin{aligned} -\Delta(u_2 - t_0 u_1) + K\rho(x)(u_2 - t_0 u_1) &\geq \rho \left[f(t_0 u_1) + K(t_0 u_1) - t_0 (f(u_1) + K u_1) \right] \\ &= \rho \left[f(t_0 u_1) - t_0 f(u_1) \right]. \end{aligned}$$

E este último termo é positivo pois estamos considerando $\dfrac{f(u)}{u}$ decrescente. Em $\partial\Omega$ temos $u_2 - t_0 u_1 = (1 - t_0)\varphi \geq 0$.

Distinguimos dois casos, a saber,

Caso 1: $\varphi \equiv 0$. Usando o princípio do máximo forte observamos que por um lado, ou $u_2 - t_0 u_1 > 0$ em Ω com $\dfrac{\partial}{\partial \eta}(u_2 - t_0 u_1) < 0$ em $\partial\Omega$. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que $u_2 - t_0 u_1 \geq \epsilon u_1$.

Assim, $t_0 + \epsilon \in \Lambda$. O que contradiz a hipótese de que $t_0 = \sup \Lambda$.

Ou , $u_2 - t_0 u_1 \equiv 0$. Isso tambem não ocorre visto que iríamos ter $\rho f(u_2) = t_0 \rho f(u_1)$, mas sabemos que $f(t_0 u_1) > t_0 f(u_1)$.

Caso 2: $\varphi \neq 0$. Afirmamos que existe algum $\epsilon > 0$ tal que

$$w = u_2 - t_0 u_1 \geq \epsilon u_1.$$

Suponha por contradição que para todo $\epsilon > 0$ existe algum ponto $x_\epsilon \in \overline{\Omega}$ tal que

$$u_2(x_\epsilon) - t_0 u_1(x_\epsilon) < \epsilon u_1(x_\epsilon).$$

Ou de outra forma,

$$w(x_\epsilon) < \epsilon u_1(x_\epsilon). \tag{D.6}$$

Claramente $x_\epsilon \notin \partial\Omega$ para ϵ pequeno. Escolhendo um ponto de mínimo para a função $w - \epsilon u_1$ podemos assumir também que $\nabla(w - \epsilon u_1) = 0$.

Equivalentemente,

$$\nabla w(x_\epsilon) = \epsilon \nabla u_1(x_\epsilon). \tag{D.7}$$

Quando $\epsilon \to 0$ (através de uma sequência apropriada), $x_\epsilon \to x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que por $(D.6)$ e $(D.7)$,

$$w(x_0) \leq 0 \qquad \text{e} \qquad \nabla w(x_0) = 0.$$

Segue que $w(x_0) = 0$ e assim, $x_0 \in \partial\Omega$.

Isso contradiz o princípio do máximo forte (Teorema B.8) visto que temos

$$\begin{cases} -\Delta w + K\rho w & \geq & 0 & \text{em} & \Omega, \\ w & \geq & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \\ w & \neq & 0. \end{cases}$$

Logo, de fato existe $\epsilon > 0$ tal que $u_2 - t_0 u_1 \geq \epsilon u_1$. Assim, $t_0 + \epsilon \in \Lambda$. Um absurdo pois suponhamos inicialmente $t_0 = \sup \Lambda < 1$. Portanto, $1 \in \Lambda$ e por conseguinte $u_1 = u_2$.

$\square$

Método III.

Esse método é uma variação da técnica de Louis Nirenberg já apresentado na demonstração do Teorema 2.3. Ele exige mais restrições sobre f, a saber, f é positiva, côncava e $\displaystyle\int_0^\delta \frac{1}{f(t)} dt < +\infty$.

Usemos o fato de que

$$v = \int_0^u \frac{1}{f(t)} dt.$$

Em outras palavras, $u = h(v)$ aonde h satisfaz

$$h'(s) = f(h(s)).$$

A equação para v torna-se

$$-\Delta v - f'(h(v))|\nabla v|^2 = \rho.$$

A unicidade vale desde que a função $f'(h(v))$ é não crescente em v (ver a demonstração do Teorema 2.3).

Apêndice E

Um Problema de Autovalor

Neste Apêndice, estamos interessados em estudar o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u & - & c(x)u & = & \lambda u & \text{em } \Omega \\ & & u & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{PA}$$

onde $c \in L^\infty(\Omega)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave. Investigaremos para quais valores de λ o problema (PA) admite solução não trivial.

Definição E.1 *Dizemos que λ é um autovalor do operador $-\Delta - c(x)$ quando existe $u \in H_0^1(\Omega)$ não nula tal que*

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi - c(x)u\varphi)dx = \lambda \int_\Omega u\varphi dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

A função u é chamada de autofunção de $-\Delta - c(x)$ com condição de fronteira de Dirichlet associada ao autovalor λ.

Teorema E.1 *Suponhamos $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \leq 0$, $f \in L^2(\Omega)$. Então*

$$\begin{cases} -\Delta u & - & c(x)u & = & f(x) & \textit{em } \Omega \\ & & u & = & 0 & \textit{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{E.1}$$

tem solução única $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$, para algum $p \in (1, +\infty)$ a qual satisfaz

$$||u|| \leq C||f||_2.$$

Demonstração. Ver [17], Teorema 9.15 e Lema 9.17.

$\square$

Pelo Teorema E.1, fica bem definido o operador solução $S : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ que a cada $f \in L^2(\Omega)$ associa a única solução $u = S(f) \in H_0^1(\Omega)$. Sendo assim, faz sentido considerar o operador $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ como sendo a composição $T := i \circ S$, onde $i : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é o operador imersão compacta, ver Teorema A.11. Estudaremos em seguida, algumas propriedades do operador T, o qual ainda chamaremos de operador solução.

Lema E.1 *O operador solução T é linear.*

Demonstração. Dadas $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos únicas $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ tais que $T(f_1) = u_1$ e $T(f_2) = u_2$, isto é,

$$\int_\Omega (\nabla u_1 \nabla \varphi - c(x) u_1 \varphi) dx = \int_\Omega f_1(x) \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{E.2}$$

e

$$\int_\Omega (\nabla u_2 \nabla \varphi - c(x) u_2 \varphi) dx = \int_\Omega f_2(x) \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{E.3}$$

Multiplicando a igualdade (E.3) por α e somando membro a membro a igualdade resultante com (E.2), teremos

$$\int_\Omega (\nabla u_1 \nabla \varphi - c(x) u_1 \varphi) dx + \alpha \int_\Omega (\nabla u_2 \nabla \varphi - c(x) u_2 \varphi) dx = \int_\Omega f_1(x) \varphi dx + \alpha \int_\Omega f_2(x) \varphi dx$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Equivalentemente,

$$\int_\Omega \left[(\nabla u_1 + \alpha \nabla u_2) \nabla \varphi - c(x)(u_1 + \alpha u_2) \varphi \right] dx = \int_\Omega (f_1(x) + \alpha f_2(x)) \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Segue da linearidade do operador gradiente que

$$\int_\Omega [\nabla(u_1+\alpha u_2)\nabla\varphi - c(x)(u_1+\alpha u_2)\varphi]\,dx = \int_\Omega (f_1(x)+\alpha f_2(x))\varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

logo,

$$T(f_1+\alpha f_2) = T(f_1)+\alpha T(f_2)$$

e portanto T é linear.

$\square$

Lema E.2 *O operador solução T é contínuo.*

Demonstração. Seja $u = T(f)$. Devemos mostrar que existe $M > 0$ tal que

$$||T(f)||_2 \leq M||f||_2 \quad \forall f \in L^2(\Omega).$$

De fato, da definição de solução fraca para o problema (E.1), fixamos u como função teste. Dessa forma,

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla u - c(x)u^2)dx = \int_\Omega f u dx.$$

Pelo Teorema A.8,

$$||u||^2 \leq ||u||^2 - \int_\Omega c(x)u^2 dx = \int_\Omega f u dx \leq ||f||_2||u||_2.$$

Do Teorema A.9, existe $M > 0$ tal que

$$||u||^2 \leq M||f||_2||u||.$$

Logo,

$$c\|u\|_2 \leq \|u\| \leq M\|f\|_2$$

e portanto,

$$||T(f)||_2 \leq M||f||_2 \quad \forall f \in L^2(\Omega).$$

Mostrando que T é limitado, e por ser linear, é contínuo.

$\square$

Lema E.3 *O operador T é compacto.*

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência limitada em $L^2(\Omega)$. Mostraremos que $u_n = T(f_n)$ tem uma subsequência convergente em $L^2(\Omega)$.

Primeiramente, observamos que pelo Teorema E.1,

$$u_n \in W^{2,2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \qquad \text{e} \qquad ||u_n|| \leq C||u_n||_{2,2} \leq C||f_n||_2 \leq C.$$

Portanto (u_n) está limitada em $H_0^1(\Omega)$. Pela imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ - Teorema A.10, concluímos que (u_n) converge em $L^2(\Omega)$ a menos de subsequência.

$\square$

Lema E.4 *Um número real não-nulo λ é um autovalor de T, isto é, $Tu = \lambda u$, se, e somente se, $\dfrac{1}{\lambda}$ é um autovalor de (PA).*

Demonstração. Se λ é um autovalor do operador T, então existe $u \neq 0$ em $H_0^1(\Omega)$ tal que $T(u) = \lambda u \in L^2(\Omega)$. Logo,

$$\int_\Omega [\nabla(\lambda u)\nabla\varphi - c(x)(\lambda u)\varphi]dx = \int_\Omega u\varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Daí,

$$\lambda \int_\Omega [\nabla u \nabla\varphi - c(x)u\varphi]dx = \int_\Omega u\varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Equivalentemente,

$$\int_\Omega [\nabla u \nabla\varphi - c(x)u\varphi]dx = \frac{1}{\lambda}\int_\Omega f(x)\varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

$\square$

Lema E.5 *O zero não é autovalor de T.*

Demonstração. De fato, se isso acontecesse, existiria $f \in L^2(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que $T(f) = 0.f = 0$. Da definição de T, concluiríamos que $f = 0$. Uma contradição.

$\square$

Lema E.6 *O operador T é positivo, isto é,*

$$\langle T(f), f\rangle_2 > 0, \quad \forall f \in L^2(\Omega)\backslash\{0\}.$$

Demonstração. Seja $u = T(f)$. Notemos que

$$\langle T(f), f\rangle_2 = \langle u, f\rangle_2 = \int_\Omega [|\nabla u|^2 - c(x)u^2]dx > 0.$$

$\square$

Lema E.7 *Se existirem, os autovalores de T são positivos.*

Demonstração. Desde que $T(u) = \lambda u$, $u \neq 0$, $u \in L^2(\Omega)$ e observando o Lema E.6, temos que

$$0 < \langle T(u), u\rangle_2 = \langle \lambda u, u\rangle_2 = \lambda ||u||_2^2.$$

Portanto, $\lambda > 0$.

$\square$

Lema E.8 *O operador T é simétrico, isto é,*

$$\langle T(f), g\rangle_2 = \langle f, T(g)\rangle_2, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

Demonstração. Sejam $u = T(f)$ e $v = T(g)$. Então,

$$\int_\Omega [\nabla u \nabla \varphi_1 - c(x)u\varphi_1]dx = \int_\Omega f(x)\varphi_1 dx \quad \forall \varphi_1 \in H_0^1(\Omega) \tag{E.4}$$

e

$$\int_\Omega [\nabla v \nabla \varphi_2 - c(x)v\varphi_2]dx = \int_\Omega g(x)\varphi_2 dx \quad \forall \varphi_2 \in H_0^1(\Omega). \tag{E.5}$$

Considerando $\varphi_2 = u$ em (E.5) e $\varphi_1 = v$ em (E.4), obtemos

$$\int_\Omega [\nabla u \nabla v - c(x)uv]dx = \int_\Omega g(x)vdx = \int_\Omega f(x)udx,$$

e assim

$$\langle T(f), g\rangle_2 = \langle f, T(g)\rangle_2 \quad \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

$\square$

Antes de enunciarmos o principal resultado deste Apêndice, precisaremos de algumas proposições relativas a teoria espectral de operadores compactos e simétricos.

Proposição E.1 *Sejam $\sigma(T)$ o espectro do operador T, $VP(T)$ o conjunto dos autovalores de T, E um espaço normado com $\dim E = \infty$ e $T : E \to E$ um operador linear compacto. Então*

(i) $0 \in \sigma(T)$;

(ii) $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$;

(iii) Ocorre uma, e somente uma, das alternativas:

(a) $\sigma(T) = \{0\}$;

(b) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *é finito e, portanto, discreto;*

(c) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *é uma sequência convergindo para zero.*

Demonstração. Ver [5] , Teorema 6.8, página 164.

$\square$

Proposição E.2 *Seja $\mathcal{L}$ o conjunto dos operadores compactos e $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador autoadjunto tal que $\sigma(T) = \{0\}$. Então $T = 0$.*

Demonstração. Ver [5], Corolário 6.10, página 167.

□

Proposição E.3 *Seja H um espaço de Hilbert seperável e T um operador autoadjunto. Então existe uma base composta de autovalores de T.*

Demonstração. Ver [5], Teorema 6.11, página 167.

□

Podemos agora enunciar e demonstrar o seguinte resultado de existência e regularidade.

Teorema E.2 *Seja $c \leq 0$. O problema (PA) admite uma sequência de autovalores $\{\lambda_n\}$, com $\lambda_n \to +\infty$ e $\lambda_1 > 0$. Além disso, existe uma base hilbertiana ortonormal de $L^2(\Omega)$, $\{\varphi_n\}$, constituida por autofunções de $-\Delta - c(x)$, tal que $\varphi_n \in W^{2,p}(\Omega)$ para todo $p > 1$.*

Demonstração. Considerando $E = L^2(\Omega)$ e os Lemas E.1 e E.3, temos que T é um operador linear e compacto. Assim, pela Proposição E.1, (i), (ii) e somente uma das alternativas (a), (b) e (c) ocorrem. Mostraremos que (a) não ocorre. De fato, se isso acontecesse, concluiríamos da Proposição E.2 que $T = 0$, o que é uma contradição. Vejamos que (b) também não ocorre. Do Lema E.5, concluimos que o operador é injetivo e, portanto, $N(T) = \{0\}$. Se $\sigma(T)\backslash\{0\} = VP(T)\backslash\{0\}$ fosse finito, concluiríamos dos Lemas E.3 e E.8 e da Proposição E.3 que

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{n=1}^{k} V_{\mu_n},$$

onde V_{μ_n} denota o autoespaço associado ao autovalor μ_n do operador T. Do Teorema B.12, isso implicaria que $L^2(\Omega)$ tem dimensão finita, uma contradição.

Logo, $\sigma(T)\backslash\{0\}$ é uma sequência convergindo para zero. Segue dos Lemas E.6 e E.4 que o operador $-\Delta - c(x)$ admite uma sequência (λ_n) de autovalores tais que

$\lambda_n \to +\infty$ e $\lambda_1 > 0$. Por fim, desde que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável e T é autoadjunto, $L^2(\Omega)$ admite uma base hilbertiana ortonormal formada por autofunções de $-\Delta - c(x)$.

Seja $\varphi \in L^2(\Omega)$ uma autofunção do problema linear. Observemos que em virtude ao Teorema A.10, obteremos o resultado se $\varphi \in W^{2,p_0}(\Omega)$ para algum p_0 com $2p_0 > N$, em cujo caso $\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$ e portanto $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ para todo $p > 1$.

Como $\varphi \in W^{2,2}(\Omega)$, se $N = 4$, temos

$$W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \qquad q \geq 2.$$

No caso $N < 4$,

$$W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}).$$

Logo em ambos os casos, $\varphi \in L^p(\Omega)$ para todo $p > 1$ e portanto $\varphi \in W^{2,p}$ para todo $p > 1$.

Assim, podemos supor que $N > 4$ com

$$W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \qquad 2 \leq q \leq \frac{2N}{N-4} > 2.$$

Repetindo o processo obtemos que $\varphi \in W^{2,2N/(N-4n)}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $2.2N(N-4n) > N$ se $4n > N-4$ para n sufucientemente grande.

$\square$

Observação E.1 *Mostra-se, usando a caracterização variacional dos autovalores que a sequência de autovalores obtida no Teorema E.1 é monótona crescente. Não faremos isso neste trabalho, porém, daremos a caracterização variacional do primeiro autovalor, ver Proposição E.4 em seguida.*

Por outro lado, no caso em que $c > 0$, tomamos um número real positivo α tal que $c(x) - \alpha \leq 0$. Segue então do Teorema E.2 que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - [c(x)-\alpha]u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

o qual é equivalente ao problema (PA), admite uma sequência monótona crescente de autovalores (λ_n), com $\lambda_n \to \infty$. Neste caso, porém, não podemos garantir que o primeiro autovalor é positivo.

Destacamos agora algumas propriedades do primeiro autovalor.

Proposição E.4 *O primeiro autovalor do problema (PA) é dado pela fórmula variacional*

$$\lambda_1(c) = \inf_{\substack{u \in H_0^1 \\ \|u\|_2 = 1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega c(x) u^2 dx \right\},$$

mais precisamente,

$$\lambda_1(c) = \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 - c(x)u^2) dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2 dx}.$$

Demonstração. Consideremos os funcionais $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - cu^2) dx,$$

e $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$F(u) = \int_\Omega u^2 dx.$$

Denotando $I(u) := \dfrac{J(u)}{F(u)}$, $u \neq 0$, $u \in H_0^1(\Omega)$, verificamos que $I(u)$ é limitado inferiormente. De fato, se $c \leq c_0$, temos

$$J(u) \geq \int_\Omega (|\nabla u|^2 - c_0 u^2) dx.$$

Pelo Teorema A.9, existe C tal que

$$I(u) \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2 dx} - c_0 \geq C. \tag{E.6}$$

Assim, existe $\sigma_\infty \in \mathbb{R}$ com

$$0 \leq \sigma_\infty = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u).$$

Usando a definiçao de ínfimo, existe uma sucessão minimizante $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ com $||u_n||_2 = 1$ e $I(u_n) \to \sigma_\infty$ quando $n \to +\infty$.

Por $(E.6)$, observamos que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Passando a uma subsequência, do Teorema $A.11$,

$$u_n \to u_0 \quad \text{em } L^2(\Omega).$$

Vejamos que (u_n) é de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$. Com efeito,

$$J\left(\frac{u_n - u_m}{2}\right) + J\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) = \frac{1}{2}(J(u_n) + J(u_m)).$$

Assim, da definição de σ_∞, temos

$$\sigma_\infty \left|\left|\frac{u_n + u_m}{2}\right|\right|_2^2 \leq J\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right),$$

e consequentemente

$$J\left(\frac{u_n - u_m}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(J(u_n) + J(u_m)) - \sigma_\infty \left|\left|\frac{u_n + u_m}{2}\right|\right|_2^2 \to 0 \quad \text{se } m, n \to +\infty.$$

Mostrando que (u_n) é uma sequência de Cauchy. Portanto, $u_n \to u_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $I(u_0) = \sigma_\infty$.

Provamos que o ínfimo é atingido, vejamos agora que se σ_∞ e u são tais que $\sigma_\infty = I(u)$, então σ_∞ é autovalor e u autofunção.

De fato, definamos,

$$f(t) := I(u + tv), \qquad \text{para } v \in H_0^1(\Omega).$$

Daí,

$$0 = f'(0) = I'(u)v = \frac{J'(u)vF(u) - J(u)F'(u)v}{F(u)^2} = J'(u)v - \sigma_\infty F'(u)v,$$

pois $F(u) = 1$ e $J(u) = \sigma_\infty$.

Assim, u é uma autofunção do problema (PA).

Evidentemente, $\sigma_\infty = \inf\limits_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u)$ é o menor de todos os autovalores, já que qualquer outro autovalor $\sigma' < \sigma_\infty$ contradiz a definição de σ_∞. Isto finaliza a demonstração.

$\square$

Notemos em particular que para $c = 0$, temos

$$\lambda_1 \int_\Omega |u|^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2,$$

ou seja,

$$||u||_2 \leq \frac{1}{\lambda_1} ||\nabla u||_2, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

que nada mais é do que o Teorema A.9 para $p = 2$.

Proposição E.5 *Se* $\Omega_1 \subset \Omega_2$ *estritamente, então* $\lambda_1^{\Omega_1}(c) > \lambda_1^{\Omega_2}(c)$.

Demonstração. Seja $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega_1)$ uma autofunção positiva associada a $\lambda_1^{\Omega_1}(c)$. Consideremos

$$u = \begin{cases} \varphi_1 & \text{em} \quad \Omega_1, \\ 0, & \text{em} \quad \Omega_2 - \overline{\Omega}_1. \end{cases}$$

Obtemos que $u \in H_0^1(\Omega_2)$ não é autofunção de $\lambda_1^{\Omega_2}(c)$, já que não é positiva em Ω_2. Assim,

$$\lambda_1^{\Omega_2}(c) < \frac{\displaystyle\int_{\Omega_2} (|\nabla u|^2 - c(x)u^2)dx}{\displaystyle\int_{\Omega_2} u^2 dx} = \frac{\displaystyle\int_{\Omega_1} (|\nabla \varphi_1|^2 - c(x)\varphi_1^2)dx}{\displaystyle\int_{\Omega_1} \varphi_1^2 dx} = \lambda_1^{\Omega_1}(c).$$

$\square$

Bibliografia

[1] Adans, R., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New york, 1975.

[2] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lesbegue Meansure*, jhon wiley e sons, inC., New York, 1966.

[3] Berestycki, H., *Le nombre de solutions de certains problèmes semi-linéaires élliptiques*, J. funct. Analysis 40, pp $1-29$, 1981.

[4] Biezuner, R. J., *Equações Diferenciais Parciais*, Notas de aulas dos cursos de EDP I e II do Programa de Pós-graduação em Matemática, UFMG, 2010.

[5] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2010.

[6] Brezis, H., Kamin, S., *Sublinear Elliptic Equation in* $\mathbb{R}^n$, Manuscripta mathematica, No. 74, 1992, pp. $87-106$.

[7] Brezis, H., Oswald, L., *Remarks on sublinear elliptic equations*, Nonlinear Analysis, Theory, Methodos e Application, V.10, N. 1, pp. 55-64, 1986.

[8] Chipot, M., *Elliptic Equations: An Introductory course*, Birkhäuser Advanced texts, Basel, 2009.

[9] Cohen, D., Laetsch, T., *Nonlinear boundary value problems suggested by chemical reactor theory*, J. diff. Eqns 7, pp $217-226$, 1970.

[10] Costa, D. G., *Tópicos em Análise Não Linear e Aplicações às Equações Diferenciais*, VIII Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.

[11] DiBenedetto, E., *Continuity of weak solutions to a general porous medium equation*, Indiana University, Math. J. 32, 1983 p. $83-118$.

[12] Edelson, A.L., *Asymptotic properties of semilinear equations*, Can. Math. Bull. 32, pp. 34-46, 1989.

[13] Egnell, H., *Asymptotic results for finite energy solution of semilinear elliptic equations*, (to appear).

[14] Evans, L. C., *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol 19, American Mathematical Society, 1998.

[15] Figueredo, G. J. M., *Uma introdução à teoria dos pontos críticos*, Notas de aula, UFPa, 2012.

[16] Folland, G. B., *Introduction to partial differential equations*, 2 ed., Princenton University Press, 1995.

[17] Gilbarg, D., Trudinger N., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin, 1977.

[18] Hess, P., *On uniqueness of positive solution of nonlinear elliptic boundary value problems*, Math. Z. 154, pp. $17-18$, 1977.

[19] Kato, T., *Schödinger operator with singular potentials*, Israel J. Math. 13 p.$135-148$, 1972.

[20] Krasnoselskii, M., *Positive solution of operator equations*, Noordhoff. 1964.

[21] Laetsch, T., *Uniqueness for sublinear boundary value problems*, J. Diff. Eqns 13, pp. $13-23$, 1973.

[22] Lima, E. L., *Análise Real v.* 2, 6 ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

[23] Lis, J. C. S., *Hopf maximum principle revisited*, Eletronic Journal of Differential Equations, vol. 2015, No. 115, pp $1 - 9$.

[24] Naito, M., *A note on bounded positive entire solutions of semilinear elliptic equations*, Hiroshima Math. J. 14, pp. 211-214, 1984.

[25] Smoller, J., Wasserman, A., *Existence, uniqueness and nondegeneracy of positive solution of semilinear elliptic equations*, Communs Math. Phys. 95, pp. 129-159, 1984.