UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

UM RESULTADO DE OBSERVABILIDADE PARA UM SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE ONDA E SUA CONTRAPARTIDA SEMI-DISCRETA EM DIFERENÇAS FINITAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

João Carlos Pantoja Fortes

Belém-PA

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

UM RESULTADO DE OBSERVABILIDADE PARA UM SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE ONDA E SUA CONTRAPARTIDA SEMI-DISCRETA EM DIFERENÇAS FINITAS

João Carlos Pantoja Fortes
Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Belém-PA
2015

Fortes, João Carlos Pantoja,1991-

Um resultado de observabilidade para um sistema acoplado de equações de onda e sua contrapartida semi-discreta em diferenças finitas/ João Carlos Pantoja Fortes.

Orientador: Dilberto da Silva Almeida Júnior.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará. Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística. Belém, 2015.

1. Análise Numérica. 2. Diferenças Finitas. 3. Desigualdades (Matemática). 4. Equaçãod e onda-Soluções numéricas. 5. Funções exponenciais. I. Título.

CDD 22. ed. 518

UM RESULTADO DE OBSERVABILIDADE PARA UM SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE ONDA E SUA CONTRAPARTIDA SEMI-DISCRETA EM DIFERENÇAS FINITAS

João Carlos Pantoja Fortes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará (PPGME-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Banca Examinadora

Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (Orientador)

Dr. Anderson David de Souza Campelo (UFPA)

Dr. Mauro de Lima Santos (UFPA)

Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro (UFPA/Abaetetuba)

Belém-PA

2015

Resumo

UM RESULTADO DE OBSERVABILIDADE PARA UM SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE ONDA E SUA CONTRAPARTIDA SEMI-DISCRETA EM DIFERENÇAS FINITAS

João Carlos Pantoja Fortes

Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará (PPGME-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

No presente trabalho investigamos as propriedades de observabilidade da energia para um esquema numérico espacialmente discretizado em diferenças finitas aplicado em um sistema hiperbólico de propagação de ondas acopladas. Nossos resultados mais importantes versam sobre a perda de observabilidade numérica em dimensão finita. Paralelamente construímos uma subclasse de soluções numéricas que são numericamente observáveis usando a técnica de filtragem numérica.

Palavras-chave: Análise numérica; diferenças finitas; ondas acopladas; energia e desigualdade de observabilidade.

Belém-Pará

2015

Abstract

AN OBSERVABILITY RESULT TO A COUPLET SYSTEM OF WAVE EQUATIONS AND ITS SEMI-DISCRET COUNTERPART IN FINITE-DIFFERENCE

João Carlos Pantoja Fortes

Advisor: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Abstract of Master's Thesis submitted to the Postgraduate Program in Mathematics and Statistics, Federal University of Pará (UFPA-PPGME) as part of the requirements for obtaining a Master's Degree in Mathematics .

In this study we investigated the properties of observability of the energy for a numerical scheme spatially discretized into finite differences applied to a hyperbolic system of coupled wave propagation. Our most important results deal with a loss of numerical observability in finite dimension. Parallel construct a subclass of numerical solutions that are observable using the technique of numerical filtration.

Keywords: Numerical analysis; finite difference; coupled waves; energy method; numerical observability .

Belém-Pará

2015

"Dedico as minhas avós Maria e Paixão que mesmo ao lado de Deus sempre estarão torcendo pelas minhas vitórias."

"É das hipóteses mais simples que mais devemos desconfiar, porque são aquelas que têm mais possibilidades de passar despercebidas".

(Poincaré)

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus pelo dom da vida e a pela oportunidade de estar conseguindo convergir para o tão sonhado mestrado e futuramente o doutorado, a todos que contribuíram para o sucesso deste trabalho, em especial, destaco minha mãe Terezinha do Socorro Pantoja Fortes que nunca deixou eu perder o foco nas horas mais difíceis, ao meu pai Edir Corrêa Fortes pelos ensinamentos de honra e justiça, a minha irmã Tamyris Pantoja Fortes pelos momentos de amor e descontração, aos meus amigos Jeziel do Nascimento Correia e André Fellipe Almeida que sempre me acompanharam nessa grande jornada, por momentos de dúvidas e certezas, a todos os colegas do GPAMN (Grupo de Pesquisa de Análise Matemática e Numérica) e principalmente ao meu orientador Dilberto da Silva Almeida Junior pela sua paciência em me orientar e vontade de repassar sua vasta experiência matemática. A todos vocês, meu imenso obrigado.

Sumário

Introdução

Controlar oscilações em problemas traduzidos em termos de uma equação diferencial parcial de evolução têm despertado o interesse de muitos pesquisadores nos últimos anos. Um exemplo seria controlar as vibrações de uma membrana em duas dimensões, onde as vibrações da membrana são regidas pela clássica equação de onda. Devido a isto, muito se tem estudado a respeito das questões de observabilidade e controlabilidade de EDP's no contexto contínuo, mas quando nos referimos aos ambientes numéricos discretos muito ainda há de ser realizado. Para sistemas acoplados de equação de ondas poucos resultados são encontrados a respeito do problema de observabilidade numérica da energia.

Iniciamos este trabalho mostrando um rápido panorama do já se tem feito no estudo de problemas clássicos de vibrações de ondas livres, onde começamos por destacar o problema contínuo no que diz respeito as questões de energia, propriedade conservativa e a propriedade de observabilidade até chegarmos a análise semi-discreta. Esta por sua vez está bem fundamentada como poderemos ver através dos trabalhos de J.A. Infante e E. Zuazua [4]. Por que como poderemos constatar, ao passarmos de um ambiente contínuo para um ambiente numérico, a desigualdade de observabilidade não é satisfeita devido à presença de soluções numéricas espúrias (soluções responsáveis pela perda de observabilidade do sistema) introduzidas no modelo quando o parâmetro de malha h tende a zero. No capítulo 2, apresentamos o problema objeto de estudo, que constitui-se de um sistema conservativo de equações de ondas acopladas em paralelo com um tipo de acoplamento que se baseia no acoplamento de osciladores harmônicos. Destacamos que o problema é observável e mostramos a técnica usada ao longo deste trabalho para alcançarmos os resultados desejados.

No capítulo 3, estudamos os métodos numéricos em diferenças finitas, começando pela dinâmica semi-discreta do modelo de ondas acopladas onde também estudamos a questão da perda de observabilidade numérica por meio da análise espectral

No capítulo 4, introduzimos uma subclasse de soluções semi-discreta onde conseguimos obter a desigualdade de observabilidade uniforme usando técnicas multiplicativas discretas.

Finalmente, finalizamos o trabalho com conclusões e perspectiva.

Capítulo 1

Perda de Observabilidade no Cenário Semi-discreto

Apresentaremos neste capitulo um levantamento dos principais resultados já existentes sobre o problema da observabilidade da fronteira da equação de ondas, tanto no contexto teórico quanto no contexto numérico. É muito importante a inserção desses resultados, para que possamos mais adiante utilizarmos das mesmas técnicas para resolvermos o problema objeto de estudo desta dissertação.

1.1 A equação de ondas a nível do contínuo

A fim de motivar nossos estudos, analisaremos primeiramente as propriedades de observabilidade da equação de propagação de ondas unidimensional dada por:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = 0, \quad em \quad (0, L) \times (0, T) \tag{1.1}$$

$$\phi(0,t) = \phi(L,t) = 0 = 0, \quad 0 < t < T \tag{1.2}$$

$$\phi(x,0) = \phi_0(x), \ \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \quad 0 < x < L. \tag{1.3}$$

Em $(1.1) - (1.3)$, $\phi = \phi(x,t)$ descreve o deslocamento de uma corda vibrante atuando no intervalo $(0, L)$.

Matematicamente o problema $(1.1) - (1.3)$ é bem posto no espaço de energia $H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$. Mais precisamente, para quaisquer $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$ existe uma única solução

$$\phi \in C([0,T];H_0^1(0,L)) \cap C^1([0,T];L^2(0,L)).$$

A energia das soluções é dada por,

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L \Big[|\phi_t|^2 + |\phi_x|^2\Big]dx, \quad \forall t \geq 0, \tag{1.4}$$

e ela é conservada ao longo do tempo, isto é,

$$E(t) = E(0), \ \forall t \geq 0. \tag{1.5}$$

O problema de observabilidade da fronteira de $(1.1)-(1.3)$ pode ser formulado da seguinte maneira: Dado um $T>0$, existe $C(T)>0$ tal que a seguinte desigualdade

$$E(0) \leq C(T)\int_0^T |\phi_x(L,t)|^2 dt, \tag{1.6}$$

conhecida como desigualdade de observabilidade é valida para todas as soluções de $(1.1)-(1.3)$.

A desigualdade (1.6), quando existe, garante que a energia total das soluções de $(1.1)-(1.3)$ pode ser "observada"ou estimada a partir da energia concentrada na fronteira $x=L$ durante um determinado espaço de tempo (Ver [6, 17]. Isto de fato ocorre, pois usando o fato de que a energia é conservada, resulta que

$$E(t) = E(0) \leq C(T)\int_0^T |\phi_x(L,t)|^2 dt. \tag{1.7}$$

Já a constante $C(T)$ na desigualdade (1.6) será referida como a constante de observabilidade. Temos então um primeiro resultado que pode ser verificado no trabalho [1].

Teorema 1.1 *Para qualquer $T \geq 2L$, o sistema (1.1)-(1.3) é observável. Em outras palavras, para qualquer $T \geq 2L$, existe $C(T)>0$ tal que (1.6) é válida para qualquer solução de (1.1)-(1.3).* Caso contrário, se $T<2L$ o sistema $(1.1)-(1.3)$ não é observável ou equivalentemente

$$\sup_{\phi \text{ solução de } (1.1)-(1.3)} \frac{E(0)}{\displaystyle\int_0^T |\phi_x(L,t)|^2} \to \infty. \tag{1.8}$$

A prova do Teorema 1.1 para $T \geq 2L$ pode ser realizada de várias maneiras diferentes, incluindo Série de Fourier, técnicas multiplicativas (Komornik [17]; Lions [6]) ou usando as desigualdades de Carleman (Zhang [18]).

Agora vamos explicar como isso pode ser provado através de Séries de Fourier. As soluções de (1.1) – (1.3) para $L = 1$, podem ser escritas na forma,

$$\phi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t) \right] \sin(k\pi x), \tag{1.9}$$

onde a_k e b_k são os coeficientes de Fourier dados por:

$$\phi^0(x) = \sum_{k \geq 1} a_k \sin(k\pi x), \qquad \phi^1(x) = \sum_{k \geq 1} b_k \sin(k\pi x). \tag{1.10}$$

Daí resulta pela propriedade de ortogonalidade das funções $\sin(\cdot)$ e $\cos(\cdot)$,

$$E(0) = \frac{1}{4} \sum_{k \geq 1} k^2 \pi^2 (a_k^2 + b_k^2). \tag{1.11}$$

Por outro lado,

$$\phi_x(1,t) = \sum_{k \geq 1} (-1)^k k\pi \left[a_k \sin(k\pi t) + b_k \cos(k\pi t) \right]. \tag{1.12}$$

Novamente pela propriedade de ortogonalidade para as funções $\sin(k\pi t)$ e $\cos(k\pi t)$ em $L^2(0,2)$, segue-se que

$$\int_0^2 |\phi_x(1,t)|^2 dt = \sum_{k \geq 1} k^2 \pi^2 (a_k^2 + b_k^2). \tag{1.13}$$

As identidades (1.11) e (1.13) mostram que a desigualdade de observabilidade vale quando $T = 2$ e também para qualquer $T > 2$. Na verdade, neste caso particular, temos de fato a identidade

$$E(0) = \frac{1}{4} \int_0^2 |\phi_x(1,t)|^2 dt. \tag{1.14}$$

Por outro lado, para $T < 2$ a desigualdade de observabilidade não se sustenta. Ver Zuazua [1].

A seguir, analisaremos o problema (1.1)-(1.3) no contexto semi-discreto das diferenças finitas e suas propriedades.

1.2 Aproximação por Diferenças Finitas

Analisamos o análogo de (1.1) – (1.3) para semi-discretizações numéricas da equações de ondas. Em particular, essas semi-discretizações ocorrem no nível da variável espacial x sendo o tempo t contínuo.

Vejamos primeiramente a semi-discretização em diferenças finitas para ilustrar o tipo de problema que ocorre e que foi identificado em detalhes no trabalho pioneiro de Infante e Zuazua [4].

Dado $J \in \mathbb{N}$ e $h = L/(J+1)$ introduzimos a seguinte partição regular de malha

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_j = jh < ... < x_J < x_{J+1} = L,$$

com $j = 0, 1, 2, ..., J+1$. Em seguida introduzimos a seguinte semi-discretização em diferenças finitas de $(1.1) - (1.3)$

$$\begin{aligned} \phi_j'' - \Delta_h \phi_j &= 0, \quad 0 < t < T, \quad j = 1, 2, ..., J & (1.15) \\ \phi_0(t) = \phi_{J+1}(t) &= 0, \quad \forall t \geq 0 & (1.16) \\ \phi_j(0) = \phi_j^0, \ \phi_j'(0) &= \phi_j^1, \ \forall \ 1 \leq j \leq J+1 & (1.17) \end{aligned}$$

onde Δ_h é o operador Laplaciano semi-discreto dado por,

$$\Delta_h \phi_j := \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{h^2}.$$

Em $(1.15) - (1.17)$ denotamos por $(')$ e $('')$ a derivação de $1^{\underline{a}}$ e $2^{\underline{a}}$ ordem no tempo. O sistema $(1.15) - (1.17)$ é um sistema de J equações diferenciais lineares com J incógnitas $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_J$, uma vez que, $\phi_0 \equiv \phi_{J+1} = 0$.

Obviamente $\phi_j = \phi_j(t)$ é a aproximação para $\phi(x_j, t)$ sendo ϕ solução do problema contínuo $(1.1) - (1.3)$, desde que os dados iniciais (ϕ_j^0, ϕ_j^1), para $j = 0, 1, 2, ..., J+1$ sejam aproximações dos dados iniciais de $(1.1) - (1.3)$.

A energia do sistema $(1.15) - (1.17)$ é dada por

$$E_h(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{J} \left[|\phi_j{}'|^2 + \left| \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{h} \right|^2 \right], \ \forall t \geq 0, \tag{1.18}$$

que é a discretização da energia contínua em (1.4) para o caso de diferenças finitas. É fácil ver que a energia E_h é conservada ao longo do tempo para toda solução de $(1.15) - (1.17)$,

$$E_h(t) = E_h(0), \ \forall t \geq 0. \tag{1.19}$$

Em seguida temos a versão semi-discreta de (1.6),

$$E_h(0) \leq C(T, h) \int_0^T \left| \frac{\phi_J(t)}{h} \right|^2 dt, \tag{1.20}$$

onde usamos o operador de diferenças avançadas para ϕ_x no extremo $x = L$, isto é,

$$\phi_x(L,t) = \frac{\phi_{J+1}(t) - \phi_J(t)}{h}. \tag{1.21}$$

Tendo em conta que, $\phi_{J+1} = 0$ deduzimos que,

$$\phi_x(L,t) = \frac{-\phi_J(t)}{h}, \tag{1.22}$$

o que justifica a desigualdade de observabilidade (1.20).

Podemos notar que para todo $h > 0$ a desigualdade (1.20) realmente é verdadeira. Entretanto, o interesse principal reside na uniformidade da constante $C(T,h)$ com $h \to 0$. Se $C(T,h)$ permanece limitada quando $h \to 0$ dizemos que o sistema semi-discreto (1.15) – (1.17) é uniformemente observável com respeito ao parâmetro de malha h. Por outro lado, tendo em conta que a observabilidade do sistema contínuo (1.1) – (1.3) vale para $T > 2L$ seria natural que $T > 2L$ também seja uma condição necessária para a observabilidade uniforme do sistema (1.15) – (1.17). No entanto, tal condição esta longe de ser suficiente e falha para todo $T > 0$, de acordo com os resultados já estabelecidos por Infante e Zuazua [4].

Em geral essas deficiências numéricas afetam as dinâmicas numéricas semi-discretas em Diferenças Finitas ou até mesmo para discretizações particulares em Elementos Finitos. Vejamos um primeiro resultado negativo.

Teorema 1.2 *Para qualquer $T > 0$, temos*

$$\sup_{\phi_j \text{ soluções de } (1.15)-(1.17)} \frac{E_h(0)}{\displaystyle\int_0^T |\frac{\phi_J}{h}|^2} \to \infty \quad com \quad h \to 0. \tag{1.23}$$

Este fato se deve ao surgimento de soluções espúrias que o esquema numérico introduz à altas frequências. Isso foi observado primeiramente nos trabalhos de R. Glowinski et al. em ([13, 14, 15]), para o caso clássico de ondas livres em conexão com o problema de controlabilidade exata da fronteira usando implementações numéricas do método HUM(Hilbert Uniqueness Method) (ver J.L. Lions [6]). Nestes trabalhos foram propostos dois métodos para ajustar tal "erro"numérico: o procedimento de regularização de Tychonoff para minimização de funcionais e a técnica de filtragem para eliminar as componentes de ondas curtas das soluções do sistema semi-discreto. A eficiência dos dois métodos foi exibida nestes trabalhos em diversos experimentos numéricos. No entanto, nenhuma análise numérica mais apurada foi realizada pelos autores para comprovar tais suspeitas.

Em face ao contexto anterior, entra a principal contribuição realizada no sentido de analisar numericamente a imprecisão dos resultados comprovados por R. Glowinski et al. Isto é realizado no trabalho pioneiro de J.A. Infante e E. Zuazua [4].

Vejamos alguns pontos principais deste trabalho. Por exemplo, para provar o Teorema 1.2 Infante e Zuazua usaram a análise espectral do problema $(1.15)-(1.17)$ e técnicas multiplicativas para se obter a desigualdade de observabilidade para os respectivos autovetores do problema de autovalor associado. Para provar a contrapartida positiva do Teorema 1.2, isto é, desigualdades da forma (1.20) que são uniformes com $h \to 0$, os autores, usaram uma técnica conhecida como técnica de filtragem numérica. Como mencionado acima, para que essas desigualdades sejam uniformes com $h \to 0$, deve-se descartar as soluções espúrias introduzidas pelo esquema numérico. Isso é feito considerando as classes adequadas de soluções de $(1.15)-(1.17)$ geradas pela baixa freqüência dos autovetores, ou em outras palavras, por um truncamento adequado ao desenvolvimento de soluções de Fourier de $(1.15)-(1.17)$. Assim, essa abordagem é muito próxima da técnica de filtragem acima mencionada. Reportamo-nos aos trabalhos de R. Glowinski para uma discussão completa deste assunto.

Para uma melhor compreensão do tipo de problema numérico que acomete a dinâmica numérica em diferenças finitas quando analisada do ponto de vista da observabilidade, vamos considerar o seguinte problema de autovalores associado as equações $(1.15)-(1.16)$:

$$-\frac{\varphi_{j+1}-2\varphi_j+\varphi_{j-1}}{h^2} = \lambda\varphi_j, \ j=1,2,...,J, \tag{1.24}$$

$$\varphi_0=\varphi_{J+1} = 0. \tag{1.25}$$

Denotamos por $\lambda_1(h), \lambda_2(h), ..., \lambda_J(h)$ os J autovalores tais que

$$0<\lambda_1(h)<\lambda_2(h)<...<\lambda_J(h). \tag{1.26}$$

Esses autovalores podem ser calculados explicitamente tal como realizado por Isaacson e Keller em [2]. Basicamente, podemos admitir que funções do tipo $\varphi_j=\sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right), k=1,...,J,$ resolvem o problema de autovalor (1.24)-(1.25), pois tais funções satisfazem as condições de contorno. Portanto, usando de relações trigonométricas, obtemos

$$\lambda_k(h)=\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right), \quad k=1,2,...,J. \tag{1.27}$$

Portanto, os autovetores $\varphi^k = (\varphi_{k,1}, \varphi_{k,2}, ..., \varphi_{k,J})$ associados aos autovalores são dados por

$$\varphi_{k,j} = \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right), \quad j,k = 1,2,...,J. \tag{1.28}$$

As soluções de (1.15) – (1.17) admitem um desenvolvimento de Fourier sobre a base de autovetores de sistema (1.24) – (1.25). Mais precisamente, cada solução $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_J)$ de (1.15) – (1.17) pode ser escrita como

$$\phi(x_j, t) = \sum_{k=1}^{J} \left[a_k \cos(\sqrt{\lambda_k(h)}t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k(h)}t)\right]\varphi_{k,j}, \tag{1.29}$$

onde os coeficientes a_k e $b_k \in \mathbb{R}$ podem ser calculados explicitamente em termos dos dados iniciais de (1.15) – (1.17). Antes de entrar na discussão sobre a observabilidade de soluções de (1.15) – (1.17), é interessante analisar a observabilidade da fronteira dos autovetores. O Lema a seguir fornece um importante resultado.

Lema 1.1 *Para qualquer autovetor $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_J)$ do sistema (1.24)-(1.25) é válida seguinte identidade:*

$$h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h}\right|^2 = \frac{2L}{4 - \lambda_k(h)h^2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2 \tag{1.30}$$

para todo $\lambda_k(h)$ em (1.27).

Prova: Ver J.A. Infante e E. Zuazua [4] para os detalhes da prova.

Esta identidade estabelece uma relação explícita entre a energia total dos autovetores (o lado esquerdo de (1.30)) e a energia concentrada no extremo $x = L$, que é representada pela quantidade $\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2$.

Nesse sentido, é fácil verificar que

$$\lambda h^2 < 4, \tag{1.31}$$

para todo $h > 0$ e todo o autovalor λ. No entanto, isto não exclui a possibilidade da ocorrência de um "blow-up"da constante no lado direito de (1.30). De fato, pode-se verificar que para o $J-$ésimo autovalor tem-se,

$$\lambda_J(h)h^2 \to 4 \quad com \quad h \to 0.$$

Portanto, um "blow-up" ocorre e daí decorre a prova imediatamente o Teorema 1.2. Por outro lado, a fim de obter a contrapartida positiva do Teorema 1.2, introduzimos uma subclasses de soluções adequadas de $(1.15)-(1.17)$ no seguinte sentido: dado qualquer $0 < \gamma < 4$ introduzimos a classe $\mathcal{C}_h(\gamma)$ de soluções de $(1.15) - (1.17)$ gerada por autovetores de $(1.24) - (1.25)$ associados com autovalores de tal forma que

$$\lambda h^2 \leq \gamma < 4.$$

Mais precisamente, define-se a classe de soluções filtradas e que são numericamente observáveis, por:

$$\mathcal{C}_h(\gamma) := \left\{ \phi(x_j, t) = \sum_{\lambda_k(h) \leq \gamma h^{-2}} \left[a_k \cos(\sqrt{\lambda_k(h)}t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k(h)}t) \right] \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right), \quad a_k, b_k \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

De acordo com o Lema 1.1, a energia de cada autovetor em $\mathcal{C}_h(\gamma)$ pode ser estimada de maneira uniforme em termos da energia concentrada na fronteira. Este é o procedimento numérico conhecido como filtragem das soluções espúrias.

O resultado a seguir garante que este é, de fato, o caso de todas as soluções de $(1.15) - (1.17)$ na classe $\mathcal{C}_h(\gamma)$ para o tempo T suficientemente grande, cuja demonstração se encontra no trabalho de Infante e Zuazua [4].

Teorema 1.3 *Suponha que $0 < \gamma < 4$. Então existe $T(\gamma) \geq 2L$ tal que para todo $T > T(\gamma)$, existe $C = C(T, \gamma)$ tal que (1.20) é válida para todas as soluções de (1.15)-(1.17) na classe $\mathcal{C}_h(\gamma)$, uniformemente quando $h \to 0$. Sendo assim,*
a) $T(\gamma) \nearrow \infty$ com $\gamma \nearrow 4$ e $T(\gamma) \searrow 2L$ com $\gamma \searrow 0$
b) $C(T, \gamma) \searrow \frac{L}{2(T-2L)}$ com $\gamma \searrow 0$.

Nota 1.1 O Teorema 1.3 afirma que a desigualdade de observabilidade (1.20) é válida na classe $\mathcal{C}_h(\gamma)$ para T suficientemente grande. Na verdade, $T(\gamma) \to \infty$ com $\gamma \to 4$ e para $\gamma \to 0$ a observabilidade para o $T(\gamma) \to 2L$, que é o tempo de observabilidade para o sistema $(1.1) - (1.3)$. Nota-se que, de acordo com esse resultado, a desigualdade de observabilidade (1.20) é válida para $T > 2L$ para soluções de $(1.15) - (1.17)$ da forma

$$\phi(x_j, t) = \sum_{\lambda_k(h) \leq \gamma h^{-2}} \left[a_k \cos(\sqrt{\lambda_k(h)}t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k(h)}t) \right] \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right). \tag{1.32}$$

Isso permite recuperar a observabilidade do sistema original (1.1) – (1.3) para essa classe de soluções da forma (1.32) da dinâmica numérica em diferenças finitas.

Observa-se também, de acordo com o Teorema 1.3, que a constante $C(T,\gamma)$ converge para $L/2(T-2L)$, que é a constante de observabilidade do sistema contínuo (1.1) – (1.3). Portanto o Teorema 1.3 nos garante que o sistema semi-discreto é uniformemente observável com $h \to 0$ desde que as altas freqüências sejam filtradas.

Por último destacamos mais um Lema que é utilizado na demonstração da perda de observabilidade numérica do sistema semi-discreto em diferenças finitas.

Lema 1.2 *Para qualquer autovetor φ com autovalor λ de* (1.24) – (1.25) *temos a seguinte identidade*

$$h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_j}{h}\right|^2 = \lambda h\sum_{j=0}^{J}|\varphi_j|^2 \tag{1.33}$$

e se φ_k e φ_l são autovetores associados a autovalores $\lambda_k \neq \lambda_l$ segue-se que:

$$h\sum_{j=0}^{J}(\varphi_{k,j+1}-\varphi_{k,j})(\varphi_{l,j+1}-\varphi_{l,j}) = 0. \tag{1.34}$$

Prova: Ver J.A. Infante e E. Zuazua [4].

No que segue, para uma melhor compreensão do resultado de perda de observabilidade numérica, forneceremos a prova do Teorema 1.2 que consta no trabalho de Infante e Zuazua [4].

1.3 Perda de Observabilidade Numérica

Nesta seção descrevemos a demonstração do Teorema 1.2, o qual se encontra no trabalho de Infante e Zuazua [4]. Seja então ϕ uma solução de (1.15) – (1.17) associado ao $J-$ésimo autovetor e dada por,

$$\phi_J(t) = \cos(\sqrt{\lambda_J(h)}t)\varphi_J.$$

Temos então

$$\int_0^T\left|\frac{\phi_J(t)}{h}\right|^2 dt = \left|\frac{\varphi_{J,J}}{h}\right|^2\int_0^T\left|\cos(\sqrt{\lambda_J(h)}t)\right|^2 dt.$$

De (1.30) obtemos,

$$\int_0^T \left|\frac{\phi_J(t)}{h}\right|^2 dt = \frac{4-\lambda_J(h)h^2}{2L} h \sum_{j=0}^{J} \left|\frac{\varphi_{J,j+1}-\varphi_{J,j}}{h}\right|^2 \int_0^T \left|\cos(\sqrt{\lambda_J(h)}t)\right|^2 dt. \tag{1.35}$$

Por outro lado, usando o Lema (1.2),

$$E_h(0) = \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[\lambda_J(h)|\varphi_{J,j}|^2 + \left|\frac{\varphi_{J,j+1}-\varphi_{J,j}}{h}\right|^2\right] = h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{J,j+1}-\varphi_{J,j}}{h}\right|^2,$$

e por conseguinte,

$$\int_0^T \left|\frac{\phi_J(t)}{h}\right|^2 dt = \frac{(4-\lambda_J(h)h^2)}{2L} E_h(0) \int_0^T \left|\cos(\sqrt{\lambda_J(h)}t)\right|^2 dt, \tag{1.36}$$

de onde resulta que,

$$\frac{E_h(0)}{\displaystyle\int_0^T \left|\frac{\phi_J(t)}{h}\right|^2 dt} = \frac{2L}{4-\lambda_J(h)h^2} \frac{1}{\displaystyle\int_0^T \left|\cos(\sqrt{\lambda_J(h)}t)\right|^2 dt}.$$

Como $\displaystyle\int_0^T \left|\cos(\sqrt{\lambda_J(h)}t)\right|^2 dt \to T/2$ com $h \to 0$, temos

$$\frac{E_h(0)}{\displaystyle\int_0^T \left|\frac{\phi_J(t)}{h}\right|^2 dt} = \frac{4L}{T(4-\lambda_J(h)h^2)}. \tag{1.37}$$

e usando o fato de que $h = \frac{L}{J+1}$, obtemos

$$\lambda_J(h)h^2 = 4\sin^2\left(\frac{J\pi h}{2L}\right) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{h\pi}{2L}\right) = 4\cos^2\left(\frac{h\pi}{2L}\right) \to 4, \quad com \quad h \to 0.$$

Combinando esses dois últimos temos que

$$\frac{E_h(0)}{\displaystyle\int_0^T \left|\frac{\phi_J(t)}{h}\right|^2 dt} \to \infty, \text{ com } h \to 0, \tag{1.38}$$

■

e portanto segue imediatamente a prova do Teorema 1.2.

A demonstração do Teorema 1.3 é feita por meio de técnicas multiplicativas e estimativas de alguns operadores numéricos na classe de soluções filtradas.

Todos esses resultados nos motivaram fortemente a estudar uma possível perda observabilidade numérica para esquemas numéricos semi-discretos em diferenças finitas aplicados às equações de ondas acopladas, em que duas propagações de ondas interagem em um mesmo sistema.

Capítulo 2

O Sistema de Ondas Acopladas

Neste capítulo destacamos o sistema hiperbólico de ondas acopladas que se constitui no objeto principal de nossas investigações no campo da análise numérica. Destacamos também alguns resultados existentes na literatura matemática e, neste sentido, ressaltamos também que nosso foco principal de pesquisa se concentra nas propriedades de observabilidade numérica dos esquemas mais elementares em diferenças finitas quando aplicados sobre uma desigualdade de observabilidade.

2.1 Apresentação do Problema

O sistema hiperbólico de ondas acopladas objeto de nossas investigações matemáticas consiste nas equações:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} + \alpha v &= 0, \quad em \;\; (0,L)\times(0,T) &(2.1)\\
v_{tt} - v_{xx} + \alpha u &= 0, \quad em \;\; (0,L)\times(0,T) &(2.2)\\
u(0,t) = u(L,t) = v(0,t) = v(L,t) &= 0, \;\; \forall t \in (0,T) &(2.3)\\
u(x,0) = u_0(x),\; u_t(x,0) = u_1(x), \;\; v(x,0) = v_0(x),\; v_t(x,0) &= v_1(x), \;\; \forall x \in (0,L). &(2.4)
\end{aligned}
$$

O sistema (2.1) - (2.4) versa sobre a propagação de ondas em um meio elástico em que dois modelos interagem entre si por meio da constante positiva de acoplamento α onde t e x são as variáveis temporal e espacial, respectivamente. As funções $u(x,t)$ e $v(x,t)$ são os deslocamentos de duas cordas vibrantes tal que suas medidas são a partir das posições de equilíbrio.

Sua solução é bem representada no espaço $(H_0^1(0,L) \times L^2(0,L))^2$. Assim, denotando $U = (u, u_t, v, v_t)$ teremos que para qualquer $U_0 \in (H_0^1(0,L) \times L^2(0,L))^2$ existe uma única solução $U \in (C([0,T]; H_0^1(0,L)) \cap C^1([0,T]; L^2(0,L)))^2$.

Esse sistema é motivado por problemas similares em equações diferenciais ordinárias para osciladores harmônicos acoplados.

Sistemas hiperbólicos acoplados do tipo $(2.1) - (2.4)$ tem merecido especial atenção por parte de alguns pesquisadores nos últimos anos. Podemos mencionar dos trabalhos de Najafi et al. ([7], [8], [9], [10]), todos no contexto de estabilização. Outro importante trabalho é devido a Rajaram e Najafi [12], sobre a controlabilidade exata em $\boldsymbol{R}^n$ em que os autores mostram uma desigualdade de observabilidade no caso em que as velocidades de propagações de ondas são iguais.

No decorrer deste capítulo, primeiramente construímos o funcional de energia associado às equações $(2.1) - (2.4)$ e mostramos o seu caráter conservativo. Outra importante propriedade que se diz a respeito a energia é a sua positividade. Nesse sentido, mostraremos que a energia (2.1)-(2.4) é positiva.

Além disso, descreveremos a solução do sistema (2.1)-(2.4) em termos da Série de Fourier e construiremos a desigualdade de observabilidade.

A abordagem que usaremos para obter essas propriedades consiste no desacoplamento do sistema (2.1)-(2.4) em dois sistemas desacoplados. Esse procedimento é feito em todo restante do trabalho.

Assim, segue nossa primeira propriedade:

Proposição 2.1.1 *(Conservação de Energia) Para todo $t \geq 0$, a energia de (2.1)-(2.4) será:*

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0),$$

onde $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L v_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L u_x^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L v_x^2 dx + \alpha\int_0^L uv dx.$

Demonstração: Inicialmente consideremos a equação (2.1), onde multiplicamos por u_t e integramos em $(0,L)$. Segue que,

$$\int_0^L u_{tt}u_t dx - \int_0^L u_{xx}u_t dx + \alpha \int_0^L v u_t dx = 0 \tag{2.5}$$

Reescrevendo a equação acima:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u_t^2 dx - \int_0^L u_{xx}u_t dx + \alpha \int_0^L v u_t dx = 0 \tag{2.6}$$

Usando integração por partes no termo $\int_0^L u_{xx}u_t dx$ obteremos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u_t^2 dx - u_x u_t\Big|_0^L + \int_0^L u_x u_{tx} dx + \alpha \int_0^L v u_t dx = 0 \tag{2.7}$$

Temos das condições de contorno que $u_x(L,T)$ e $u_t(L,T)$ são iguais a zero. Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u_x^2 dx + \alpha \int_0^L v u_t dx = 0. \tag{2.8}$$

Analogamente para equação (2.2) :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L v_t^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L v_x^2 dx + \alpha \int_0^L u v_t dx = 0. \tag{2.9}$$

Somando (2.8) e (2.9) obtemos:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = 0$$

onde $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L v_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L u_x^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L v_x^2 dx + \alpha \int_0^L uv dx$. Portanto,

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0), \forall\ t \geq 0,$$

o que prova que a energia do sistema é conservada.

$\blacksquare$

2.2 Desenvolvimento das Soluções em Série de Fourier

Vamos construir as soluções de (2.1) − (2.4) usando o desacoplamento das mesmas onde obteremos dois problemas associados. O primeiro é obtido fazendo a soma de (2.1) com (2.2) que denotaremos por $\phi := u + v$ onde teremos:

$$\begin{aligned} \phi_{tt} - \phi_{xx} + \alpha\phi &= 0, \ (0,L) \times (0,T) && (2.10) \\ \phi(0,t) = \phi(L,t) &= 0 \quad 0 < t < T && (2.11) \\ \phi(.,0) = \phi_0(.), \phi_t(.,0) &= \phi_1(.), \quad x \in (0,L) && (2.12) \end{aligned}$$

E o outro, fazendo a subtração de (2.1) com (2.2) que denotaremos de $\psi := u - v$ onde teremos:

$$\begin{aligned} \psi_{tt} - \psi_{xx} - \alpha\psi &= 0, \ (0,L) \times (0,T) && (2.13) \\ \psi(0,t) = \psi(L,t) &= 0 \quad 0 < t < T && (2.14) \\ \psi(.,0) = \psi_0(.), \psi_t(.,0) &= \psi_1(.) \quad x \in (0,L) && (2.15) \end{aligned}$$

Com esta dinâmica de desacoplamento, podemos construir as soluções do sistema (2.1)−(2.4). Notemos que é suficiente construir as propriedades que desejamos somente para o sistema (2.13)-(2.15). Para as propriedades do sistema (2.10)-(2.12) basta mudar $-\alpha$ para α.

Proposição 2.2.1 *A solução do sistema (2.13)-(2.15) via Séries de Fourier é dada por:*

$$\psi(x,t) = \sum_{k \geq 1} \left[a_k \sin(\sqrt{\zeta_k}\ t) + b_k \cos(\sqrt{\zeta_k}\ t) \right] \rho_k,$$

onde a_k, b_k são os coeficientes de Fourier, $\zeta_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 - \alpha$, $\forall$ k inteiro positivo, são os autovalores e ρ_k são os autovetores dados por:

$$\rho_k = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), k \ \ \textit{intereio positivo.}$$

Demonstração: Usando o método da separação de variáveis, onde $\psi(x,t) = \rho(x)g(t)$ e substituindo em (2.13) obteremos:

$$\rho(x)g''(t) - \rho''(x)g(t) - \alpha\rho(x)g(t) = 0$$

O que implica em

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = \frac{\rho''(x) + \alpha\rho(x)}{\rho(x)} = -\zeta \tag{2.16}$$

Perceba que um lado de (2.16) depende somente de t e do outro somente de x. Logo são iguais a um ζ que é determinado de modo que as condições de contorno sejam também satisfeitas. Portanto de (2.16) temos:

$$\rho''(x) = (-\zeta - \alpha)\rho(x) \tag{2.17}$$

$$g''(t) + \zeta g(t) = 0 \tag{2.18}$$

Para soluções não triviais, tomemos $\zeta > 0$ e obteremos o problema de autovetores dado por (2.17) cuja solução que satisfaz as condições de contorno é $\rho(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ e conseqüentemente seus autovalores são dados por

$$\zeta = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 - \alpha$$

De (2.18) temos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem homogênea dependente do tempo cuja solução é:

$$g(t) = a_k \sin(\sqrt{\zeta_k}\ t) + b_k \cos(\sqrt{\zeta_k}\ t)$$

Onde a_k, b_k são os coeficientes de Fourier. Assim,do princípio da superposição de soluções, segue o resultado ■

Analogamente teremos:

Proposição 2.2.2 *A solução do sistema (2.10)-(2.12) via Séries de Fourier é dada por*

$$\phi(x,t) = \sum_{k\geq 1} \left[c_k \sin(\sqrt{\xi_k}\ t) + d_k \cos(\sqrt{\xi_k}\ t)\right] \rho_k,$$

onde c_k, d_k *são os coeficientes de Fourier,* $\xi_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + \alpha$*,* k *inteiro natural, são os autovalores e* ρ_k *são os autovetores dados por*

$$\rho_k = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), k \text{ inteiro positivo.}$$

É imediato da Proposição (2.2.1) e (2.2.2) que:

Proposição 2.2.3 *A solução do sistema (2.1)-(2.4) via Séries de Fourier é dada por:*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\left[a_k \sin(\sqrt{\zeta_k}\ t) + b_k \cos(\sqrt{\zeta_k}\ t) + c_k \sin(\sqrt{\xi_k}\ t) + d_k \cos(\sqrt{\xi_k}\ t)\right]\rho_k \\ v(x,t) &= \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\left[-a_k \sin(\sqrt{\zeta_k}\ t) - b_k \cos(\sqrt{\zeta_k}\ t) + c_k \sin(\sqrt{\xi_k}\ t) + d_k \cos(\sqrt{\xi_k}\ t)\right]\rho_k \end{aligned}$$

onde a_k, b_k, c_k, d_k *são os coeficientes de Fourier,* $\zeta_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 - \alpha$ *e* $\xi_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + \alpha$*,* $\forall\ k = 1, ..., n$ *são os autovalores e* ρ_k *são os autovetores dados por*

$$\rho_k = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), k \text{ inteiro natural}$$

Demonstração: De fato, basta notarmos que $\phi = u + v$ e $\psi = u - v$, de onde temos que $u = \frac{\phi + \psi}{2}$ e $v = \frac{\phi - \psi}{2}$.

A seguir, iremos construir a desigualdade de observabilidade a nível de contínuo a partir dos sistemas associados $(2.10) - (2.12)$ e $(2.13) - (2.15)$.

2.3 Desigualdade de Observabilidade

Em geral, desigualdades de observabilidade (ou desigualdades inversas) são importantes no contexto da teoria de controle e teoria de estabilização. Iremos estabelecer uma desigualdade de observabilidade para os sistemas (2.10)-(2.12) e (2.13)-(2.15), porém, antes devermos enunciar e demonstrar alguns resultados auxiliares.

Proposição 2.3.1 *(Conservação da energia) Para todo* $t \geq 0$*, a energia de* (2.13)-(2.15) *será:*

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}(0),$$

onde $\mathcal{G}(t) = \frac{1}{2}\int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L |\psi_x|^2 dx - \frac{\alpha}{2}\int_0^L |\psi|^2 dx.$

Demonstração: Multiplicando a equação (2.13) por ψ_t e integrando-a no intervalo $(0, L)$ obteremos

$$\int_0^L \psi_{tt}\psi_t dx - \int_0^L \psi_{xx}\psi_t dx - \alpha\int_0^L \psi\psi_t dx = 0 \tag{2.19}$$

Reescrevendo a equação acima:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\psi_t|^2 dx - \int_0^L \psi_{xx}\psi_t dx - \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\psi|^2 dx = 0 \tag{2.20}$$

Usando integração por partes no termo $\int_0^L \psi_{xx}\psi_t dx$ obteremos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\psi_t|^2 dx - \psi_x\psi_t\Big|_0^L + \int_0^L \psi_x\psi_{tx} dx - \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\psi|^2 dx = 0 \tag{2.21}$$

Segue das condições de contorno que

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}(0),$$

onde $\mathcal{G}(t) = \frac{1}{2}\int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L |\psi_x|^2 dx - \frac{\alpha}{2}\int_0^L |\psi|^2 dx.$ ■

Sabemos que sistemas físicos, em geral, tem suas energias como uma forma definida positiva. Agora mostraremos uma importante propriedade da energia $\mathcal{G}(t)$: sua positividade. Porém, antes disso, iremos enunciar alguns teoremas importantes tanto para a prova da positividade quanto para as desigualdades de observabilidade.

Teorema 2.3.2 *(Desigualdade de Poincaré) Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_a^b |u|^2\, dx \leq \frac{L^2}{\pi^2}\int_a^b |u_x|^2\, dx. \tag{2.22}$$

Teorema 2.3.3 *(Desigualdade de Young) Sejam p e q tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, com $1<p,q<+\infty$. Então vale a desigualdade :*

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p}+\frac{|y|^q}{q} \tag{2.23}$$

O leitor interessado na demonstração dos Teoremas 2.3.2 e 2.3.3, consultar a referência [19]. Mediante desses dois Teoremas provemos a positividade da energia $\mathcal{G}(t)$.

Proposição 2.3.4 *(Positividade da energia) Para todo $\alpha \leq \frac{\pi^2}{L^2}$ teremos:*

$$\mathcal{G}(t) \geq \frac{\pi^2-\alpha L^2}{2\pi^2}\left[\int_0^L |\psi_t|^2 dx + \int_0^L |\psi_x|^2 dx\right] \geq 0, \forall t \in (0,T)$$

Demonstração: Temos que a energia é dada por:

$$\mathcal{G}(t) = \frac{1}{2}\left[\int_0^L |\psi_t|^2 dx + \int_0^L |\psi_x|^2 dx - \alpha \int_0^L |\psi|^2 dx\right].$$

Usando a desigualdade de Poincaré obteremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) \quad &\geq \quad \frac{1}{2}\left[\int_0^L |\psi_t|^2 dx + \int_0^L |\psi_x|^2 dx - \frac{\alpha L^2}{\pi^2}\int_0^L |\psi_x|^2 dx\right]. \\ &= \quad \frac{1}{2}\left[\int_0^L |\psi_t|^2 dx + \left(1-\frac{\alpha L^2}{\pi^2}\right)\int_0^L |\psi_x|^2 dx\right] \end{aligned}$$

Desde que $\alpha \leq \frac{\pi^2}{L^2}$, segue que:

$$\mathcal{G}(t) \geq \frac{\pi^2-\alpha L^2}{2\pi^2}\left[\int_0^L \psi_t^2 dx + \int_0^L \psi_x^2 dx.\right]$$

■

De forma análoga a Proposição (2.3.1) obtemos a energia associada ao sistema (2.10)-(2.12)

Proposição 2.3.5 *Para todo $t \geq 0$, a energia de* (2.10)-(2.12) *será:*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(0),$$

onde $\mathcal{F}(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^L |\phi_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^L |\phi_x|^2 dx + \frac{\alpha}{2}\int\limits_0^L |\phi|^2 dx.$

Assim, podemos provar a positividade da energia $\mathcal{E}(t)$

Proposição 2.3.6 *Para todo* $\alpha < \dfrac{\pi^2}{L^2}$ *e* $t > 0$ *teremos:*

$$\mathcal{E}(t) \geq \frac{\pi^2 - \alpha L^2}{2\pi^2}\left[\int_0^L u_t^2 dx + \int_0^L u_x^2 dx + \int_0^L v_t^2 dx + \int_0^L v_x^2 dx\right]. \tag{2.24}$$

Demonstração: Sabe-se que:

$$2\mathcal{E}(t) = \mathcal{F}(t) + \mathcal{G}(t) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(t) \geq \left[\int_0^L \phi_t^2 dx + \int_0^L \phi_x^2 dx\right].$$

Assim, segue da Proposição 2.3.4 e das informações acima que

$$2\mathcal{E}(t) \;=\; \mathcal{F}(t) + \mathcal{G}(t) \geq \frac{\pi^2 - \alpha L^2}{2\pi^2}\left[\int_0^L \psi_t^2 dx + \int_0^L \psi_x^2 dx\right] + \left[\int_0^L \phi_t^2 dx + \int_0^L \phi_x^2 dx\right].$$

Tomando o $min\left\{1, \dfrac{\pi^2 - \alpha L^2}{2\pi^2}\right\} = \dfrac{\pi^2 - \alpha L^2}{2\pi^2}$ obteremos:

$$2\mathcal{E}(t) \geq \frac{\pi^2 - \alpha L^2}{2\pi^2}\left[\int_0^L \psi_t^2 dx + \int_0^L \psi_x^2 dx + \int_0^L \phi_t^2 dx + \int_0^L \phi_x^2 dx\right].$$

Usando o fato que $u = \dfrac{\phi + \psi}{2}$ e $v = \dfrac{\phi - \psi}{2}$ teremos

$$\mathcal{E}(t) \geq \frac{\pi^2 - \alpha L^2}{2\pi^2}\left[\int_0^L u_t^2 dx + \int_0^L u_x^2 dx + \int_0^L v_t^2 dx + \int_0^L v_x^2 dx\right].$$

■

A partir dos resultados anteriores, finalmente teremos os seguintes Teoremas

Teorema 2.3.7 *(Desigualdade de Observabilidade) Para* $\alpha < \dfrac{\pi^2}{L^2}$ *e para todo* $T > 2L\dfrac{\pi^2}{\pi^2 - \alpha L^2}$ *tem-se:*

$$\mathcal{G}(0) \leq C_1(T)\left[\frac{L}{2}\int\limits_0^T \psi_x^2(L,t)dt - \alpha\int\limits_0^T\int\limits_0^L |\psi|^2 dx dt\right],$$

para toda solução de (2.13) - (2.15) onde $C_1(T) = \dfrac{\pi^2 - \alpha L^2}{T(\pi^2 - \alpha L^2) - 2L\pi^2}$.

Demonstração: Multiplicaremos a equação (2.13) por $x\psi_x$ e a integraremos em $(0,L)\times(0,T)$. Teremos então:

$$\int_0^T\int_0^L \psi_{tt}x\psi_x dxdt - \int_0^T\int_0^L \psi_{xx}x\psi_x dxdt - \alpha\int_0^T\int_0^L x\psi_x\psi dxdt = 0 \tag{2.25}$$

Segue da integração por partes que:

$$\int_0^T\int_0^L \psi_{tt}x\psi_x dxdt = \left[\int_0^L \psi_t\psi_x x dx\right]_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T x\psi_t^2\Big|_0^L + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \psi_t^2 dxdt \tag{2.26}$$

$$\int_0^T\int_0^L \psi_{xx}x\psi_x dxdt = \frac{L}{2}\int_0^T \psi_x^2(L,t) - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \psi_x^2 dxdt \tag{2.27}$$

$$\alpha\int_0^T\int_0^L x\psi_x\psi dxdt = \frac{\alpha}{2}\int_0^T |\psi|^2\Big|_0^L - \frac{\alpha}{2}\int_0^T\int_0^L |\psi|^2 dxdt \tag{2.28}$$

Substituindo em (2.25) e tendo em mente as condições de contorno, obteremos

$$\mathcal{X}_\psi(t)\Big|_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L |\psi_t|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L |\psi_x|^2 dxdt + \frac{\alpha}{2}\int_0^T\int_0^L |\psi|^2 dxdt = \frac{L}{2}\int_0^T \psi_x^2(L,t)dt \tag{2.29}$$

onde $\mathcal{X}_\psi(t) = \int_0^L \psi_t\psi_x x dx$.

Da Proposição 2.3.1 segue que

$$\mathcal{X}_\psi(t)\Big|_0^T + \int_0^T \mathcal{G}(t) = \frac{L}{2}\int_0^T \psi_x^2(L,t)dt - \alpha\int_0^T\int_0^L |\psi|^2 dxdt \tag{2.30}$$

Observe que, usando a Desigualdade de Young, teremos:

$$|\mathcal{X}_\psi(t)| = \left|\int_0^L \psi_t\psi_x x\ dx\right| \leq \int_0^L |\psi_t\psi_x x|\ dx \tag{2.31}$$

$$\leq \frac{L}{2}\int_0^L |\psi_t|^2\ dx + \frac{L}{2}\int_0^L |\psi_x|^2\ dx \tag{2.32}$$

Segue da Proposição 2.3.4 que

$$|\mathcal{X}_\psi(t)| \leq \frac{L\pi^2}{\pi^2 - \alpha L^2}\mathcal{G}(t) \tag{2.33}$$

Assim, substituindo (2.33) em (2.30) obteremos

$$\left(T - \frac{2L\pi^2}{\pi^2 - \alpha L^2}\right)\mathcal{G}(t) \leq \frac{L}{2}\int_0^T \psi_x^2(L,t)dt - \alpha \int_0^T\int_0^L |\psi|^2 dxdt \tag{2.34}$$

Como a energia é conservativa, concluímos que

$$\mathcal{G}(t) \leq C_1(T)\left[\frac{L}{2}\int_0^T \psi_x^2(L,t)dt - \alpha \int_0^T\int_0^L |\psi|^2 dxdt\right],$$

onde $C_1(T) = \dfrac{\pi^2 - \alpha L^2}{T(\pi^2 - \alpha L^2) - 2L\pi^2}$. ■

De forma análoga, obteremos:

Teorema 2.3.8 *(Desigualdade de Observabilidade) Para todo $T > 2L$ tem-se:*

$$\mathcal{F}(0) \leq C_2(T)\left[\frac{L}{2}\int_0^T \phi_x^2(L,t)dt + \alpha \int_0^T\int_0^L |\phi|^2 dxdt\right],$$

para toda solução de (2.10) - (2.12) onde $C_2(T) = \dfrac{1}{T - 2L}$.

Demonstração: Procedendo com o mesmo raciocínio da demonstração do Teorema 2.3.7 até o instante da equação (2.30). Assim, teremos que

$$\mathcal{X}_\phi(t)\Big|_0^T + \int_0^T \mathcal{F}(t) = \frac{L}{2}\int_0^T \phi_x^2(L,t)dt + \alpha \int_0^T\int_0^L |\phi|^2 dxdt \tag{2.35}$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{X}_\phi(t)| &= \left|\int_0^L \phi_t\phi_x x \; dx\right| \leq \int_0^L |\phi_t\phi_x x| \; dx && (2.36)\\
&\leq \frac{L}{2}\int_0^L |\phi_t|^2 \; dx + \frac{L}{2}\int_0^L |\phi_x|^2 \; dx \leq L\mathcal{F}(t) && (2.37)
\end{aligned}
$$

Combinando (2.37) com (2.35) obteremos

$$
(T-2L)\mathcal{F}(t) \leq \frac{L}{2}\int_0^T \phi_x^2(L,t)dt + \alpha\int_0^T\int_0^L |\phi|^2 dxdt \tag{2.38}
$$

Usando a conservação da energia, obteremos:

$$
\mathcal{F}(t) \leq C_2(T)\left[\frac{L}{2}\int_0^T \phi_x^2(L,t)dt + \alpha\int_0^T\int_0^L |\phi|^2 dxdt\right],
$$

onde $C_2(T) = \dfrac{1}{T-2L}$. ■

Finalmente obteremos o principal resultado deste capítulo

Teorema 2.3.9 *Para* $\alpha < \dfrac{\pi^2}{L^2}$ *e para todo* $T > 2L\dfrac{\pi^2}{\pi^2-\alpha L^2}$ *tem-se:*

$$
\mathcal{E}(0) \leq C(T)\left[\alpha\int_0^T\int_0^L (u^2+v^2)dxdt + \frac{L}{2}\int_0^T u_x^2(L,t)dt + \frac{L}{2}\int_0^T v_x^2(L,t)dt\right] \tag{2.39}
$$

para toda solução de (1.1)-(1.4) onde $C(T) = \dfrac{\pi^2-\alpha L^2}{T(\pi^2-\alpha L^2)-2L\pi^2}$

Demonstração: Temos que $\psi = u - v$ e $\phi = u + v$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(t) &\leq C_1(T)\left[\frac{L}{2}\int_0^T \psi_x^2(L,t)dt - \alpha\int_0^T\int_0^L |\psi|^2 dxdt\right]\\
&= C_1(T)\left[\frac{L}{2}\int_0^T (u-v)_x^2(L,t)dt - \alpha\int_0^T\int_0^L (u-v)^2 dxdt\right] && (2.40)
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(t) &\leq C_2(T)\left[\frac{L}{2}\int\limits_0^T \phi_x^2(L,t)dt + \alpha\int\limits_0^T\int\limits_0^L |\phi|^2 dxdt\right]\\ &= C_2(T)\left[\frac{L}{2}\int\limits_0^T (u+v)_x^2(L,t)dt + \alpha\int\limits_0^T\int\limits_0^L (u+v)^2 dxdt\right] \qquad (2.41)\end{aligned}$$

Assim, somando (2.40) com (2.41) e tomando $C(T) = max\{C_1(T), C_2(T)\}$ obteremos

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(t)+\mathcal{F}(t) &\leq C(T)\left[\frac{L}{2}\int\limits_0^T \Big((u-v)_x^2(L,t) + (u+v)_x^2(L,t)\Big)dt - \alpha\int\limits_0^T\int\limits_0^L \Big((u-v)^2 - (u+v)^2\Big)dxdt\right]\\ &= C(T)\left[\frac{L}{2}\int\limits_0^T \Big(2u_x^2(L,t) + 2v_x^2(L,t)\Big) + \alpha\int\limits_0^T\int\limits_0^L 4uvdxdt\right]\end{aligned}$$

Como sabemos que $\mathcal{F}(t) + \mathcal{G}(t) = 2\mathcal{E}(t)$ e a energia é conservativa, portanto

$$\mathcal{E}(0) \leq C(T)\left[2\alpha\int\limits_0^T\int\limits_0^L uvdxdt + \frac{L}{2}\int\limits_0^T u_x^2(L,t)dt + \frac{L}{2}\int\limits_0^T v_x^2(L,t)dt\right].$$

E usando a desigualdade de Young no termo cruzado uv segue que

$$\mathcal{E}(0) \leq C(T)\left[\alpha\int\limits_0^T\int\limits_0^L (u^2+v^2)dxdt + \frac{L}{2}\int\limits_0^T u_x^2(L,t)dt + \frac{L}{2}\int\limits_0^T v_x^2(L,t)dt\right].$$

■

No próximo capítulo passaremos a explorar as propriedades da dinâmica numérica semi-discreta em diferenças finitas para o sistema $(2.1)-(2.4)$, e um de nossos principais resultados diz respeito a perda de observabilidade numérica com respeito ao parâmetro de discretização espacial, resultado este que não corresponde a desigualdade de observabilidade para o caso contínuo.

Capítulo 3

Diferenças Finitas Semi-discretas aplicadas às Ondas Acopladas

Em geral, os problemas que envolvem equações diferenciais, necessitam de uma variedade de ferramentas para sua resolução. Além das soluções analíticas, os métodos numéricos podem ser utilizados para obtenção aproximada da solução de uma equação diferencial parcial. A idéia básica dos métodos numéricos é o processo de semi-discretização (ou discretização), que reduz o problema contínuo, com dimensão infinito, em um problema semi-discreto (ou discreto) em dimensão finita, podendo assim ser resolvido computacionalmente. Neste capítulo analisaremos do ponto de vista numérico das equações semi-discretas em diferenças finitas a propriedade de observabilidade numérica para o sistema de ondas acopladas $(2.1) - (2.4)$. Para tanto, para a maioria dos nossos resultados usaremos o procedimento de desacoplamento das equações que propomos no capítulo anterior.

O principal resultado deste capítulo versa sobre a perda de observabilidade numérica para a dinâmica semi-discreta e, paralelamente, aplicamos também a técnica de filtragem das soluções numéricas espúrias para obtermos uma classe de soluções que são numericamente observáveis.

3.1 A Dinâmica Numérica Semi-discreta: O Caso Clássico

Para o sistema hiperbólico (2.1)-(2.4), assumimos o seguinte esquema numérico semi-discreto em diferenças finitas,

$$u_j'' - \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + \alpha v_j = 0, \ j = 1, ..., J \tag{3.1}$$

$$v_j'' - \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} + \alpha u_j = 0 \ j = 1, ..., J \tag{3.2}$$

$$u_0(t) = u_{J+1}(t) = 0; v_0(t) = v_{J+1}(t) = 0, \forall \ t \geq 0 \tag{3.3}$$

$$u_j(0) = u_{0j}; \quad u_j' = u_{1j}; v_j(0) = v_{0j}; \quad v_j' = v_{1j}, \ j = 0, 1, ..., J, J+1 \tag{3.4}$$

Onde $h = \dfrac{L}{J+1}$ onde $J \in \mathbb{Z}_+^*$, é o parâmetro de discretização espacial e definiremos $u_j(t) = u_j; v_j(t) = v_j$.

Em $(3.1) - (3.4)$ denotamos $(')$ e $('')$ a derivação de 1ª e 2ª ordem no tempo. O sistema $(3.1) - (3.4)$ é um sistema de $2J$ equações diferenciais lineares nas incógnitas $u_1, u_2, ..., u_J$ e $v_1, v_2, ..., v_J$, uma vez que, em vista das condições de contorno, $u_0 \equiv u_{J+1} = 0$ e $v_0 \equiv v_{J+1} = 0$. Obviamente $u_j = u_j(t)$ e $v_j = v_j(t)$ são aproximações para $u(x_j, t)$ e $v(x_j, t)$ respectivamente, sendo (u, v) solução do caso contínuo desde que os dados iniciais (u_{0j}, u_{1j}) e (v_{0j}, v_{1j}), $j = 0, 1, ..., J+1$ sejam aproximações dos dados iniciais do problema contínuo.

Iremos agora mostrar a primeira propriedade do esquema numérico $(3.1) - (3.4)$, a conservação do funcional energia.

Proposição 3.1.1 *(Conservação de Energia) Para todo $h > 0$ e $(u_j, v_j), \forall j$, a energia de (3.1)-(3.4) é:*

$$\mathcal{E}_h(t) = \mathcal{E}_h(0), \forall t \in [0, T]$$

onde $\mathcal{E}_h(t) = \dfrac{h}{2} \displaystyle\sum_{j=0}^{J} \left[|u_j'|^2 + |v_j'|^2 + \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right)^2 + \left(\frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right)^2 + 2\alpha u_j v_j. \right]$

Demonstração: Multiplicando (3.1) por hu'_j e fazendo o somatório de $1 \leq j \leq J$ teremos:

$$h\sum_{j=1}^{J} u''_j u'_j - \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{J} u'_j(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + h\alpha \sum_{j=1}^{J} u'_j v_j = 0.$$

Reescrevendo a equação acima:

$$\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J} \frac{d}{dt}|u'_j|^2 - \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{J} u'_j(u_{j+1} - u_j) - \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{J} u'_j(u_{j-1} - u_j) + h\alpha \sum_{j=1}^{J} u'_j v_j = 0. \tag{3.5}$$

Analisaremos o termo

$$S_{1h} = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{J} u'_j(u_{j-1} - u_j).$$

Para S_{1h} note que, em função das condições de contorno, pode-se ser escrita da forma

$$\begin{aligned}
S_{1h} &= \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{J} u'_j(u_{j-1} - u_j) = \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{J-1} u'_{j+1}(u_j - u_{j+1}) \\
&= \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{J-1} \left(u'_{j+1}(u_j - u_{j+1}) + \frac{1}{h}(u_j - u_{j+1})u'_{j+1} - \frac{1}{h}(u_j - u_{j+1})u'_{j+1} \right) \\
&= \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{J} u'_{j+1}(u_j - u_{j+1}).
\end{aligned}$$

Substituindo S_{1h} em (3.5) obteremos:

$$\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J} \frac{d}{dt}|u'_j|^2 + \frac{1}{2h}\sum_{j=0}^{J} \frac{d}{dt}(u_{j+1} - u_j)^2 + h\alpha \sum_{j=0}^{J} u'_j v_j = 0. \tag{3.6}$$

De forma análoga para a equação (3.2)

$$\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J} \frac{d}{dt}|v'_j|^2 + \frac{1}{2h}\sum_{j=0}^{J} \frac{d}{dt}(v_{j+1} - v_j)^2 + h\alpha \sum_{j=0}^{J} v'_j u_j = 0. \tag{3.7}$$

Somando (3.6) e (3.7), teremos:

$$\mathcal{E}_h(t) = \mathcal{E}_h(0), \forall\ t \geq 0,$$

onde $\mathcal{E}_h(t) = \dfrac{h}{2}\displaystyle\sum_{j=0}^{J}\left[|u_j'|^2 + |v_j'|^2 + \left(\frac{u_{j+1}-u_j}{h}\right)^2 + \left(\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\right)^2 + 2\alpha u_j v_j\right]$, o que caracteriza que o sistema semi-discreto sob consideração é conservativo, tal como no caso contínuo.

■

Vamos agora analisar a versão semi-discreta de (2.39), a qual é

$$\mathcal{E}_h(0) \leq C\left[\alpha \int_0^T h\sum_{j=0}^{J}(u_j^2+v_j^2)\,dt + \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{u_J}{h}\right|^2 dt + \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{v_J}{h}\right|^2 dt\right] \tag{3.8}$$

Agora, olhando para (2.39) pode-se esperar que, quando $T > 2L\dfrac{\pi^2}{\pi^2 - \alpha L^2}$, existe $C(T) > 0$ independente de h tal que (3.8) vale para todas as soluções de $(3.1) - (3.4)$ e para todo $0 < h < L$.

Neste capítulo mostraremos um Teorema que afirma que isso é falso. Tal fato se deve a introdução de soluções numéricas espúrias próprias do esquema numérico em diferenças finitas. Para provar o mesmo, utilizaremos o procedimento usado por Infante e Zuazua [4], que consiste em analisar o espectro de $(3.1)-(3.4)$ e usando as técnicas multiplicativas obtém-se as identidades de observabilidade para os autovetores do problema de autovalor associado a $(3.1)-(3.4)$ e concluir a respeito da perda de observabilidade numérica. Assim, para que essas desigualdades serem uniformes com respeito ao parâmetro de malha h, temos que descartar as soluções numéricas espúrias introduzidas pelo esquema numérico sob consideração. Para este propósito, consideremos inicialmente a análise espectral do problema semi-discreto $(3.1) - (3.4)$.

3.2 Análise Espectral Semi-discreta

Os autovalores e a solução explícita do problema $(3.1)-(3.4)$ podem ser encontrados utilizando a técnica de desacoplamento tal como no caso contínuo. Para isso, consideraremos dois sistemas associados ao mesmo, onde o primeiro é obtido através da soma de (3.1) com (3.2) que denotaremos por $\phi_j := u_j + v_j$ o qual teremos:

$$
\begin{aligned}
\phi_j'' - \Delta_h \phi_j + \alpha \phi_j &= 0, \ j = 1, 2, ..., J, \ 0 < t < T; && (3.9)\\
\phi_0(t) = \phi_{J+1}(t) &= 0, \quad 0 < t < T; && (3.10)\\
\phi_j(0) = \phi_j^0, \phi'(0) &= \phi_j^1, \ j = 1, 2, ..., J+1, && (3.11)
\end{aligned}
$$

onde $\Delta_h \phi_j = \dfrac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{h^2}$. E o outro, fazendo a subtração de (3.1) com (3.2) que denotaremos de $\psi_j := u_j - v_j$ o qual teremos:

$$
\begin{aligned}
\psi_j'' - \Delta_h \psi_j - \alpha \psi_j &= 0, \ j = 1, 2, ..., J, \ 0 < t < T; && (3.12)\\
\psi_0(t) = \psi_{J+1}(t) &= 0 \quad 0 < t < T; && (3.13)\\
\psi_j(0) = \psi_j^0, \psi'(0) &= \psi_j^1, \ j = 1, 2, ..., J+1. && (3.14)
\end{aligned}
$$

As energias dos sistemas (3.12)-(3.14) e (3.9)-(3.11) são dadas, respectivamente por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_h(t) &:= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{J} \left[|\psi_j'|^2 + \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 - \alpha |\psi_j|^2 \right], && (3.15)\\
\mathcal{F}_h(t) &:= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{J} \left[|\phi_j'|^2 + \left| \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{h} \right|^2 + \alpha |\phi_j|^2 \right]. && (3.16)
\end{aligned}
$$

As mesmas são obtidas usando os multiplicadores ψ_j' e ϕ_j' e as condições de contorno.

Além disso, as energias são conservativas e a positividade de $\mathcal{G}_h(t)$ é garantida desde que $\alpha < \dfrac{L^2}{\pi^2}$ (Ver a demonstração no Lema 4.0.9). Conseqüentemente, a positividade de $\mathcal{E}_h(t)$ segue da positividade de $\mathcal{G}_h(t)$.

A solução de cada sistema sistema desacoplado e seus autovalores serão:

Proposição 3.2.1 *A solução do sistema (3.12)-(3.14) via Séries de Fourier é dada por:*

$$
\psi_h(t) = \sum_{k=1}^{J} \left[a_k \sin(\sqrt{\lambda_k^-}\ t) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k^-}\ t) \right] \varphi^k
$$

onde a_k, b_k são os coeficientes de Fourier, $\varphi^k = (\varphi_{k,1}, ..., \varphi_{k,J})$,$\lambda_k^- = \lambda_k^-(h) = \dfrac{4}{h^2} \sin^2 \left(\dfrac{k\pi h}{2L} \right) - \alpha$, $\forall k = 1, ..., J$ são os autovalores e $\varphi_{k,j}$ são os autovetores dados por:

$$\varphi_{k,j} = \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right), \ j,k = 1,...,J.$$

Demonstração: Fazendo $\psi_j = \varphi_j p(t)$ e substituindo em (3.12) obteremos:

$$\varphi_j p''(t) - \frac{\varphi_{j+1}p(t) - 2\varphi_j p(t) + \varphi_{j-1}p(t)}{h^2} - \alpha\varphi_j p(t) = 0$$

Usando o método da separação de variáveis obteremos:

$$\frac{p''(t)}{p(t)} = \left[\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} + \alpha\varphi_j\right]\frac{1}{\varphi_j} = -\lambda^-, \ \forall t > 0, \ \forall j = 0, 1, 2, ..., J, J+1$$

Assim, obteremos:

$$\begin{aligned} -\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} - \alpha\varphi_j &= \lambda^-\varphi_j, \ j = 1, ..., J & (3.17) \\ p''(t) + \lambda p(t) &= 0, \ \forall t > 0 & (3.18) \end{aligned}$$

Para soluções não triviais, tomemos $\lambda^- > 0$ e obteremos o problema de autovetores dado por (3.17) cuja solução que satisfaz as condições de contorno é $\varphi_{k,j} = \sin\left(\dfrac{k\pi x_j}{L}\right)$ e conseqüentemente seus autovalores são dados por

$$\lambda_k^- = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) - \alpha, \ \forall k = 1, ..., J \tag{3.19}$$

Com efeito, substituindo $\varphi_{k,j} = \sin\left(\dfrac{k\pi x_j}{L}\right)$ em (3.17) e considerando $x_{j\pm1} = x_j \pm h$ teremos:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right)(\lambda^- + \alpha) &= \frac{-\sin\left(\frac{k\pi x_{j+1}}{L}\right) + 2\sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) - \sin\left(\frac{k\pi x_{j-1}}{L}\right)}{h^2} \\ &= \frac{-\sin\left(\frac{k\pi (x_j+h)}{L}\right) + 2\sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) - \sin\left(\frac{k\pi (x_j-h)}{L}\right)}{h^2} \quad (3.20) \end{aligned}$$

Note que,

$$\sin\left(\frac{k\pi(x_j+h)}{L}\right) = \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi h}{L}\right) + \sin\left(\frac{k\pi h}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) \tag{3.21}$$

$$\sin\left(\frac{k\pi(x_j-h)}{L}\right) = \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi h}{L}\right) - \sin\left(\frac{k\pi h}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) \tag{3.22}$$

Somando (3.21) e (3.22) obteremos $2\sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi h}{L}\right)$. Dessa forma, teremos:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right)(\lambda^- + \alpha) &= \frac{-\sin\left(\frac{k\pi(x_j+h)}{L}\right) + 2\sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) - \sin\left(\frac{k\pi(x_j-h)}{L}\right)}{h^2} \\
&= \frac{2\sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) - 2\sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi h}{L}\right)}{h^2} \\
&= \frac{2\sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right)\left[1-\cos\left(\frac{k\pi h}{L}\right)\right]}{h^2}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
1-\cos\left(\frac{k\pi h}{L}\right) &= 1-\cos\left(\frac{k\pi h}{2L}+\frac{k\pi h}{2L}\right) \\
&= 1-\left[\cos^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) - \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right)\right] \\
&= 2\sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Combinando (3.24) com (3.23) obteremos os autovalores do problema dados por (3.19).

Agora, de (3.18) temos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem homogênea cuja solução é:

$$p(t) = a_k \sin(\sqrt{\lambda_k^-}\ t) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k^-}\ t),\ k = 1, ..., J,\ \forall t > 0,$$

onde a_k, b_k são os coeficientes de Fourier. Assim, pelo princípio da superposição segue o resultado. ∎

De forma análoga, temos que :

Proposição 3.2.2 *A solução do sistema (3.9)-(3.11) via Séries de Fourier é dada por:*

$$\phi_h(t) = \sum_{k=1}^{J} \left[c_k \sin(\sqrt{\lambda_k^+}\ t) + d_k \cos(\sqrt{\lambda_k^+}\ t) \right] \varphi_{k,j}$$

onde c_k, d_k *são os coeficientes de Fourier,* $\lambda_k^+ = \lambda_k^+(h) = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) + \alpha$, $\forall k = 1, ..., J$ *são os autovalores e* φ_k *são os autovetores dados por:*

$$\varphi_{k,j} = \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right),\ j, k = 1, ..., J.$$

Assim, a solução explicita de (3.1)-(3.4) e seus autovalores é dada pela seguinte Proposição:

Proposição 3.2.3 *A solução do sistema (3.1)-(3.4) via Séries de Fourier é dada por:*

$$\begin{aligned} u_h(t) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{J} \left[a_k \sin(\sqrt{\lambda_k^-}\ t) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k^-}\ t) + c_k \sin(\sqrt{\lambda_k^+}\ t) + d_k \cos(\sqrt{\lambda_k^+}\ t) \right] \varphi^k \\ v_h(t) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{J} \left[-a_k \sin(\sqrt{\lambda_k^-}\ t) - b_k \cos(\sqrt{\lambda_k^-}\ t) + c_k \sin(\sqrt{\lambda_k^+}\ t) + d_k \cos(\sqrt{\lambda_k^+}\ t) \right] \varphi^k \end{aligned}$$

onde a_k, b_k, c_k, d_k *são os coeficientes de Fourier,* $\varphi^k = (\varphi_{k,1}, ..., \varphi_{k,J})$, $\lambda_k^+ = \lambda_k^+(h) = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) + \alpha$ *e* $\lambda_k^- = \lambda_k^-(h) = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) - \alpha$ $\forall k = 1, ..., J$ *são os autovalores e* $\varphi_{k,j}$ *são os autovetores dados por:*

$$\varphi_{k,j} = \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right), j, k = 1, ..., J.$$

Na seqüencia vamos construir uma observabilidade para o espectro.

Lema 3.2.4 *Para quaisquer autovetores* $\varphi_{k,j}$*, associado ao problema* $(3.12) - (3.14)$ *é válida a seguinte identidade*

$$h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h}\right|^2 = \frac{2L}{4 - (\lambda_k^- + \alpha)h^2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2, \tag{3.25}$$

onde $\lambda_k^- = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) - \alpha, \forall k = 1, ..., J.$

Demonstração: Focaremos nas equações espectrais (3.17)–(3.18), onde multiplicaremos a equação (3.17) pelo multiplicador $\dfrac{j(\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1})}{2}$ e faremos o somatório de $j=1,...,J$. Assim, segue que:

$$-\sum_{j=1}^{J}\frac{\varphi_{j+1}-2\varphi_j+\varphi_{j-1}}{h^2}j\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1}}{2}-\alpha\sum_{j=1}^{J}\varphi_j j\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1}}{2}=\lambda^-\sum_{j=1}^{J}\varphi_j j\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1}}{2} \quad (3.26)$$

Analizaremos os termos:

$$S_{1h}=\sum_{j=1}^{J}\frac{\varphi_{j+1}-2\varphi_j+\varphi_{j-1}}{h^2}j\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1}}{2};\ S_{2h}=\sum_{j=1}^{J}\varphi_j j\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1}}{2}$$

Para S_{1h}, note que, das condições de contorno teremos:

$$\begin{aligned}
S_{1h} &= \sum_{j=1}^{J}\frac{\varphi_{j+1}-2\varphi_j+\varphi_{j-1}}{h^2}j\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1}}{2}\\
&= \sum_{j=1}^{J}\frac{j(\varphi_{j+1}^2-\varphi_{j-1}^2)}{2h^2}-\sum_{j=1}^{J}\frac{j\varphi_j(\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1})}{h^2}\\
&= \sum_{j=1}^{J}\frac{j\varphi_{j+1}^2}{2h^2}-\sum_{j=1}^{J}\frac{j\varphi_{j-1}^2}{2h^2}-\sum_{j=1}^{J}\frac{j\varphi_j\varphi_{j+1}}{h^2}+\sum_{j=1}^{J}\frac{j\varphi_j\varphi_{j-1}}{h^2}\\
&= \sum_{j=1}^{J}\frac{j\varphi_{j+1}^2}{2h^2}-\sum_{j=1}^{J}\frac{j\varphi_{j-1}^2}{2h^2}-\sum_{j=1}^{J}\frac{j\varphi_j\varphi_{j+1}}{h^2}+\sum_{j=1}^{J}\frac{(j+1)\varphi_{j+1}\varphi_j}{h^2}\\
&= \sum_{j=1}^{J}\frac{(j-1)\varphi_j^2}{2h^2}-\sum_{j=1}^{J}\frac{(j+1)\varphi_j^2}{2h^2}-\sum_{j=1}^{J}\frac{j\varphi_j\varphi_{j+1}}{h^2}+\sum_{j=1}^{J}\frac{(j+1)\varphi_{j+1}\varphi_j}{h^2}\\
&= -\frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{J}\varphi_j^2+\frac{J+1}{2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2+\frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{J}\varphi_{j+1}\varphi_j,
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$
\begin{aligned}
S_{2h} &= \sum_{j=1}^{J} \varphi_j j \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \\
&= \sum_{j=1}^{J} \frac{j\varphi_j\varphi_{j+1}}{2} - \sum_{j=1}^{J} \frac{j\varphi_j\varphi_{j-1}}{2} \\
&= \sum_{j=1}^{J} \frac{j\varphi_j\varphi_{j+1}}{2} - \sum_{j=1}^{J} \frac{(j+1)\varphi_{j+1}\varphi_j}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J} \varphi_{j+1}\varphi_j.
\end{aligned}
$$

Substituindo S_{1h} e S_{2h} em (3.26) e normalizando os autovetores, isto é, tomando $h\sum_{j=1}^{J} \varphi_j^2 = 1$ obteremos:

$$
\frac{J+1}{2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2 = \frac{1}{h^3} + \frac{\lambda^- h^2 + \alpha h^2 - 2}{2h^2} \sum_{j=1}^{J} \varphi_{j+1}\varphi_j. \tag{3.27}
$$

Agora, iremos multiplicar por $h\varphi_j$ a equação (3.17) e faremos o somatório de $j = 1, ..., J$. Logo, teremos:

$$
-h\sum_{j=1}^{J} \frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2}\varphi_j - \alpha h \sum_{j=1}^{J} \varphi_j^2 = \lambda^- h \sum_{j=1}^{J} \varphi_j^2
$$

Procedendo como capítulos anteriores:

$$
h\sum_{j=0}^{J} \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h}\right)^2 = (\lambda^- + \alpha) h \sum_{j=0}^{J} \varphi_j^2, \tag{3.28}
$$

Reescrevendo a equação acima:

$$
\frac{2}{h^2}\sum_{j=1}^{J}(\varphi_j^2 - \varphi_{j+1}\varphi_j) = (\lambda^- + \alpha)\sum_{j=1}^{J}\varphi_j^2 \Rightarrow \sum_{j=1}^{J} \rho_{j+1}\rho_j = -\frac{\lambda h^2 + \alpha h^2 - 2}{2h}. \tag{3.29}
$$

Substituindo (3.29) em (3.27), segue que:

$$
\frac{L}{2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2 = \frac{1}{h^2} - \left(\frac{\lambda^- h^2 + \alpha h^2 - 2}{2h}\right)\left(\frac{\lambda^- h^2 + \alpha h^2 - 2}{2h}\right), \tag{3.30}
$$

ou:

$$\lambda^- = -\alpha + \frac{2L}{4-(\lambda^- + \alpha)h^2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2. \tag{3.31}$$

No entanto, de (3.28) obteremos:

$$h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_j}{h}\right|^2 = \frac{2L}{4-(\lambda^- + \alpha)h^2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2. \tag{3.32}$$

■

Analogamente teremos o seguinte lema:

Lema 3.2.5 *Para quaisquer autovetores $\varphi_{k,j}$, associado ao problema (3.9)−(3.11) é válida a seguinte identidade*

$$h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_j}{h}\right|^2 = \frac{2L}{4-(\lambda_k^+ - \alpha)h^2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2, \tag{3.33}$$

onde $\lambda_k^+ = \dfrac{4}{h^2}\sin^2\left(\dfrac{k\pi h}{2L}\right) + \alpha, \forall k = 1, ..., J.$

As identidades (3.25) e (3.33) provém da relação explícita entre a energia total dos autovetores e a energia concentrada em $x = L$ na qual é quantificada por $\left|\dfrac{\varphi_J}{h}\right|^2$. Porém, note que

$$[\lambda_J^- + \alpha]h^2 \to 4,\ h \to 0 \quad , \quad [\lambda_J^+ - \alpha]h^2 \to 4,\ h \to 0.$$

Logo, "blow-up" acontece no lado direito de (3.25) e (3.33), obtendo assim a perda de observabilidade numérica para o problema espectral.

A seguir, mostraremos o nosso primeiro resultado negativo em relação a observabilidade numérica.

3.3 Perda de Observabilidade Numérica

A seguir, nosso próximo resultado versa sobre a perda de observabilidade numérica para os sistemas (3.12)-(3.14) e (3.9)-(3.11) e assim, obteremos a perda de observabilidade para o sistema (3.1)-(3.4).

Teorema 3.3.1 *Para todo $T > 0$ teremos*

$$\sup_{\psi_j \text{ solução } (3.12)-(3.14)} \frac{\mathcal{G}_h(0)}{-\alpha h \sum_{j=0}^{J} \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \int_0^T \left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2 dt} \to \infty \quad \textit{quando} \quad h \to 0. \tag{3.34}$$

Demonstração: Seja ψ a solução de (3.12)-(3.14) associada para o autovetor $J-th$ dada por:

$$\psi = e^{i\sqrt{\lambda_J^-}t}\varphi_J. \tag{3.35}$$

Para essa solução particular, temos:

$$-\alpha h \sum_{j=0}^{J} \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \int_0^T \left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2 dt = T\Big[-\alpha h \sum_{j=0}^{J} \left|\varphi_{J,j}\right|^2 + \left|\frac{\varphi_{J,J}}{h}\right|^2\Big]. \tag{3.36}$$

Do Lema 3.2.4, podemos escrever:

$$-\alpha h \sum_{j=0}^{J} \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \int_0^T \left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2 dt = T\Big[-\alpha h \sum_{j=0}^{J} \left|\varphi_{J,j}\right|^2 + \frac{4-(\lambda_J^- + \alpha)h^2}{2L} h \sum_{j=0}^{J} \left|\frac{\varphi_{J,j+1}-\varphi_{J,j}}{h}\right|^2\Big].$$

Por outro lado é fácil ver que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_h(0) &= \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\Big[|\psi_j'|^2 + \left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2 - \alpha|\psi_j|^2\Big] \\
&= \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\Big[\left|ie^{i\sqrt{\lambda_J^-}t}\varphi_{J,j}\sqrt{\lambda_J^-}\right|^2 + \left|e^{i\sqrt{\lambda_J^-}t}\frac{(\varphi_{J,j+1}-\varphi_{J,j})}{h}\right| - \alpha\left|e^{i\sqrt{\lambda_J^-}t}\varphi_{J,j}\right|^2\Big] \\
&= \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\Big[(\lambda_J - \alpha)|\varphi_{J,j}|^2 + \left|\frac{\varphi_{J,j+1}-\varphi_{J,j}}{h}\right|^2\Big],
\end{aligned}$$

Tendo a identidade (3.28), escreveremos $\mathcal{G}_h(0)$ como:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_h(0) &= \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[\frac{\lambda_J^- - \alpha}{\lambda_J^- + \alpha}\left|\frac{\varphi_{J,j+1}-\varphi_{J,j}}{h}\right|^2 + \left|\frac{\varphi_{J,j+1}-\varphi_{J,j}}{h}\right|^2\right] \\ &= \frac{\lambda_J^-}{\lambda_J^- + \alpha} h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{J,j+1}-\varphi_{J,j}}{h}\right|^2. \qquad (3.37)\end{aligned}$$

Sabendo que $h\sum_{j=0}^{J}\left|\varphi_{J,j}\right|^2 = 1$ e usando (3.37) segue que:

$$\begin{aligned}-\alpha h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\psi_j|^2dt + \int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2 dt &= T\left[-\alpha + \frac{4-(\lambda_J^- + \alpha)h^2}{2L}\frac{\lambda_J^- + \alpha}{\lambda_J}\mathcal{G}_h(0)\right] \\ &= -T\alpha + \frac{T[4-(\lambda_J^- + \alpha)h^2]}{2L}\frac{\lambda_J^- + \alpha}{\lambda_J}\mathcal{G}_h(0). \qquad (3.38)\end{aligned}$$

Note que, de (3.39) temos

$$T\alpha - \alpha h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\psi_j|^2dt + \int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2 dt = \frac{T[4-(\lambda_J^- + \alpha)h^2]}{2L}\frac{\lambda_J^- + \alpha}{\lambda_J}\mathcal{G}_h(0).$$

Dividindo a equação acima por $-\alpha h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\psi_j|^2dt + \int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2 dt$, obteremos:

$$\frac{\mathcal{G}_h(0)}{-\alpha h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\psi_j|^2dt + \int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2 dt} = \left(1 + \alpha\frac{T}{-\alpha h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\psi_j|^2dt + \int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2 dt}\right)$$
$$\times\frac{2L}{T[4-(\lambda_J^- + \alpha)h^2]}\frac{\lambda_J^-}{\lambda_J^- + \alpha}.$$

Tendo a identidade (3.36) e considerando novamente $h\sum_{j=0}^{J}\left|\rho_{J,j}\right|^2 = 1$, podemos reescrever a equação acima como:

$$\frac{\mathcal{G}_h(0)}{-\alpha h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\psi_j|^2dt + \int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2 dt} = \frac{|\varphi_{J,J}|^2}{-\alpha h^2 + |\varphi_{J,J}|^2}\frac{2L}{T[4-(\lambda_J^- + \alpha)h^2]}\frac{\lambda_J^-}{\lambda_J^- + \alpha}.$$

Finalmente, concluímos que:

$$\frac{G_h(0)}{-\alpha h \sum_{j=0}^{J} \int_0^T |\psi_j(t)|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{\psi_J(t)}{h} \right|^2 dt} \to \infty,$$

pois precisamente teremos:

$$\lambda_J^- h^2 + \alpha h^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{J\pi h}{2L} \right) = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{h\pi}{2L} \right) = 4 \cos^2 \left(\frac{h\pi}{2L} \right) \to 4, \text{ quando } h \to 0.$$

■

De forma análoga segue que:

Teorema 3.3.2 *Para todo $T > 0$ teremos:*

$$\sup_{\psi_j \text{ solução } (3.9)-(3.11)} \frac{\mathcal{F}_h(0)}{\alpha h \sum_{j=0}^{J} \int_0^T |\phi_j|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{\phi_J}{h} \right|^2 dt} \to \infty \quad \textit{quando} \quad h \to 0.$$

Agora estabeleceremos um dos resultados principais deste trabalho: a desigualdade de observabilidade não uniforme do sistema acoplado (3.1)-(3.4).

Teorema 3.3.3 *Para todo $T > 0$ teremos:*

$$\sup_{(u_j, v_j) \text{ solução } (3.1)-(3.4)} \frac{\mathcal{E}_h(0)}{2\alpha h \sum_{j=0}^{J} \int_0^T u_j v_j dt + \int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{v_J}{h} \right|^2 dt} \to \infty,$$

quando $h \to 0$.

Demonstração: A prova é conseqüência imediata de $\mathcal{E}_h(0) = \dfrac{\mathcal{F}_h(0) + \mathcal{G}_h(0)}{2}$.

A fim de obtermos uma contrapositiva do Teorema 3.3.3, introduzimos uma subclasses de soluções adequadas de $(3.1) - (3.4)$. Para tanto, podemos notar que as constantes de observabilidade dos autovetores no Lema 3.2.4 e no Lema 3.2.5 são dadas respectivamente por,

$$\frac{2L}{4-(\lambda_k^- + \alpha)h^2} \quad \text{e} \quad \frac{2L}{4-(\lambda_k^+ - \alpha)h^2}.$$

Notemos que 4 é o valor do limite para o qual os valores de $(\lambda_k^- + \alpha)h^2$ e $\lambda_k^+ - \alpha)h^2$ convergem quando $h \to 0$. Podemos, portanto, considerar que dado qualquer $0 < \gamma < 4$ existe as classes

$$\mathcal{P}_h(\gamma) := \left\{ \psi = \sum_{\lambda_k^- \leq \gamma h^{-2}} \left[a_k \sin(\sqrt{\lambda_k^-}\ t) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k^-}\ t) \right] \varphi_{k,j} \right\}$$

e

$$\mathcal{Q}_h(\gamma) := \left\{ \phi = \sum_{\lambda_k^+ \leq \gamma h^{-2}} \left[c_k \sin(\sqrt{\lambda_k^+}\ t) + d_k \cos(\sqrt{\lambda_k^+}\ t) \right] \varphi_{k,j}, \right\}$$

onde são as classes de soluções filtradas para (3.12)-(3.14) e (3.9)-(3.11) respectivamente.

Conseqüentemente, existirá uma classe $\mathcal{D}_h(\gamma)$ de soluções de $(3.1)-(3.4)$ gerada por autovetores associados com autovalores de tal forma que,

$$\lambda_k^{\pm} h^2 \leq \gamma < 4.$$

Mais precisamente,

$$\mathcal{D}_h(\gamma) := \begin{cases} u_h(t) &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda_k^{\pm} \leq \gamma h^{-2}} \left[a_k \sin(\sqrt{\lambda_k^-}\ t) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k^-}\ t) + c_k \sin(\sqrt{\lambda_k^+}\ t) + d_k \cos(\sqrt{\lambda_k^+}\ t) \right] \varphi_{k,j} \\ v_h(t) &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda_k^{\pm} \leq \gamma h^{-2}} \left[-a_k \sin(\sqrt{\lambda_k^-}\ t) - b_k \cos(\sqrt{\lambda_k^-}\ t) + c_k \sin(\sqrt{\lambda_k^+}\ t) + d_k \cos(\sqrt{\lambda_k^+}\ t) \right] \varphi_{k,j} \end{cases}$$

com $\lambda_k^{\pm} = \lambda_k^{\pm}(h)$.

Procedendo deste modo, iremos concluir que a energia de cada autovetor em $\mathcal{D}_h(\gamma)$ pode ser estimada de maneira uniforme em termos da energia concentrada na fronteira.

Capítulo 4

Desigualdade de Observabilidade Uniforme

Esta seção é dedicada a construção do resultado de observabilidade numérica das soluções filtradas (livre das oscilações numéricas espúrias) para os problemas (3.12)-(3.14) e (3.9)-(3.11), e assim, obtendo a observabilidade numérica das soluções filtradas para (3.1)-(3.4). Para isso, usaremos o método multiplicativo o qual foi usado por Infante e Zuazua [4].

Temos, então, os seguintes resultados preliminares nesta direção:

Lema 4.0.4 *Para qualquer autovetor φ com autovalor λ^- de (3.17) a seguinte identidade vale:*

$$\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_j}{h}\right|^2 = (\lambda^- + \alpha)\sum_{j=0}^{J}|\varphi_j|^2, \tag{4.1}$$

se φ^k e φ^l são autovetores associados com autovalores $\lambda_k^- \neq \lambda_l^-$ segue que

$$\sum_{j=0}^{J}(\varphi_{k,j}-\varphi_{k,j+1})(\varphi_{l,j}-\varphi_{l,j+1}) = 0 \tag{4.2}$$

Demonstração: Multiplicando por φ_j e fazendo o somatório de $j = 1, .., J$ a equação (3.17) teremos:

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{(\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1})}{h^2}\varphi_j - \alpha \sum_{j=1}^{J} |\varphi_j|^2 = \lambda^- \sum_{j=1}^{J} |\varphi_j|^2$$

Reescrevendo a equação acima teremos:

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{(\varphi_{j+1} - \varphi_j)\varphi_j}{h^2} + \sum_{j=1}^{J} \frac{(\varphi_{j-1} - \varphi_j)\varphi_j}{h^2} = (\lambda^- + \alpha) \sum_{j=1}^{J} |\varphi_j|^2$$

Usando as condições de contorno obteremos:

$$\sum_{j=0}^{J} \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j)\varphi_j}{h^2} + \sum_{j=0}^{J} \frac{(\varphi_j - \varphi_{j+1})\varphi_j}{h^2} = (\lambda^- + \alpha) \sum_{j=1}^{J} |\varphi_j|^2$$

De onde segue o resultado:

$$\sum_{j=0}^{J} \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 = (\lambda^- + \alpha) \sum_{j=0}^{J} |\varphi_j|^2.$$

Por outro lado, pela ortogonalidade os autovetores com distintos autovalores segue que

$$\sum_{j=0}^{J} (\varphi_{k,j} - \varphi_{k,j+1})(\varphi_{l,j} - \varphi_{l,j+1}) = 0.$$

■

Lema 4.0.5 *Para todo $h > 0$ e ψ solução de (3.12)-(3.14) temos:*

$$\frac{h}{2} \sum_{j=0}^{J} \int_0^T \left[\psi_j' \psi_{j+1}' + \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \right] dt + \frac{\alpha h}{2} \sum_{j=0}^{J} \int_0^T \psi_j \psi_{j+1} \, dt + \mathcal{X}_h(t) \Big|_0^T = \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt,$$

onde $\mathcal{X}_h(t) = h \sum_{j=0}^{J} j \psi_j' \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right)$.

Demosntração: Multiplicando (3.12) por $hj\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2}$, fazendo o somatório de $j = 1, ..., J$ e integrando em $(0, T)$ teremos:

$$h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\psi_j''\frac{\psi_{j+1}-\psi_{j-1}}{2}\ dt - h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T \frac{\psi_{j+1}-2\psi_j+\psi_{j-1}}{h^2}j\frac{\psi_{j+1}-\psi_{j-1}}{2}\ dt$$
$$-h\alpha\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\psi_j\frac{\psi_{j+1}-\psi_{j-1}}{2}\ dt = 0 \qquad (4.3)$$

Analisaremos cada somatório separadamente. Usando integração por partes teremos

$$\begin{aligned} h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\psi_j''\frac{\psi_{j+1}-\psi_{j-1}}{2}\ dt &= \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J}\psi_j' j(\psi_{j+1}-\psi_{j-1})\Big|_0^T - \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T \psi_j' j(\psi_{j+1}'-\psi_{j-1}')\ dt \\ &= \mathcal{X}_h(t)\Big|_0^T - \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T \left[j\psi_j'\psi_{j+1}' + j\psi_j'\psi_{j-1}'\right]\ dt, \qquad (4.4) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{X}_h(t) = \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\psi_j' j(\psi_{j+1}-\psi_{j-1})$.

Tendo em mente as condições de contorno (3.13), teremos a seguinte simplificação:

$$\begin{aligned} -\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\psi_j'\psi_{j+1}'\ dt + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\psi_j'\psi_{j-1}'\ dt &= -\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T j\psi_j'\psi_{j+1}'\ dt + \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T (j+1)\psi_{j+1}'\psi_j'\ dt \\ &= \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \psi_{j+1}'\psi_j'\ dt. \end{aligned}$$

Portanto, retornando a (4.4), obtemos

$$h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\psi_j''\frac{\psi_{j+1}-\psi_{j-1}}{2}\ dt = \mathcal{X}_h(t)\Big|_0^T + \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \psi_{j+1}'\psi_j', \qquad (4.5)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T \frac{\psi_{j+1}-2\psi_j+\psi_{j-1}}{h^2}j\frac{\psi_{j+1}-\psi_{j-1}}{2}dt &= \frac{h}{2h^2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j(|\psi_{j+1}|^2-|\psi_{j-1}|^2)dt \\ &- \frac{h}{h^2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\psi_j(\psi_{j+1}-\psi_{j-1})dt \quad (4.6) \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\frac{h}{2h^2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j|\psi_{j-1}|^2dt &= \frac{h}{2h^2}\sum_{j=0}^{J-1}\int_0^T (j+1)|\psi_j|^2dt + \frac{h}{2h^2}\int_0^T (J+1)|\psi_J|^2dt - \frac{h}{2h^2}\int_0^T (J+1)|\psi_J|^2dt \\
&= \frac{h}{2h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T (j+1)|\psi_j|^2dt - \frac{h}{2h^2}\int_0^T (J+1)|\psi_J|^2dt.
\end{aligned}$$

Assim, usando novamente as condições de contorno (3.13) a simplificação acima será dada por:

$$\begin{aligned}
h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T \frac{\psi_{j+1}-2\psi_j+\psi_{j-1}}{h^2}j\frac{\psi_{j+1}-\psi_{j-1}}{2}dt &= \frac{h}{2h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T j|\psi_{j+1}|^2\ dt - \frac{h}{2h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T (j+1)|\psi_j|^2dt \\
&+ \frac{h}{2h^2}\int_0^T (J+1)|\psi_J|^2dt - \frac{h}{h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T j\psi_j\psi_{j+1}\ dt \\
&+ \frac{h}{h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T (j+1)\psi_{j+1}\psi_j\ dt \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Reajustando o índice do primeiro somatório, teremos:

$$\frac{h}{2h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T j|\psi_{j+1}|^2\ dt = \frac{h}{2h^2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T (j-1)|\psi_j|^2\ dt = \frac{h}{2h^2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T (j-1)|\psi_j|^2\ dt$$

Assim teremos (4.7) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T \frac{\psi_{j+1}-2\psi_j+\psi_{j-1}}{h^2}j\frac{\psi_{j+1}-\psi_{j-1}}{2}dt &= -\frac{h}{2h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \left[|\psi_j|^2-\psi_{j+1}\psi_j+|\psi_{j+1}|^2\right]dt \\
&+ \frac{(J+1)h}{2h^2}\int_0^T |\psi_J|^2dt \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Portanto, (4.8) será da forma

$$\begin{aligned}
h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T \frac{\psi_{j+1}-2\psi_j+\psi_{j-1}}{h^2}j\frac{\psi_{j+1}-\psi_{j-1}}{2}dt &= -\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2 dt \\
&+ \frac{(J+1)h}{2h^2}\int_0^T |\psi_J|^2dt \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Finalmente teremos que

$$
\begin{aligned}
h\alpha\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\psi_j\frac{\psi_{j+1}-\psi_{j-1}}{2}\,dt &= \frac{h\alpha}{2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\psi_j\psi_{j+1}-\frac{h\alpha}{2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\psi_j\psi_{j-1}\\
&= \frac{h\alpha}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T j\psi_j\psi_{j+1}-\frac{h\alpha}{2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T (j+1)\psi_{j+1}\psi_j\\
&= -\frac{h\alpha}{2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T \psi_{j+1}\psi_j \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Combinando (4.5),(4.9) e (4.10) com (4.3) teremos

$$
\mathcal{X}_h(t)\Big|_0^T+\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \psi'_{j+1}\psi'_j+\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2\,dt-\frac{(J+1)h}{2h^2}\int_0^T|\psi_J|^2dt+\frac{h\alpha}{2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T\psi_{j+1}\psi_j=
$$

Usando o fato que $h=\dfrac{L}{J+1}$ obteremos

$$
\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left[\psi'_j\psi'_{j+1}+\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2\right]dt+\frac{\alpha h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\psi_j\psi_{j+1}\,dt+\mathcal{X}_h(t)\Big|_0^T = \frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2\,dt,
$$

onde $\mathcal{X}_h(t)=h\displaystyle\sum_{j=0}^{J}j\psi'_j\left(\frac{\psi_{j+1}-\psi_{j-1}}{2}\right)$. ∎

Lema 4.0.6 *(Equipartição de energia) Para qualquer $h>0$ e $\psi_j=\psi_j(t)$ solução de* (3.12) - (3.14) *temos*

$$
-h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\psi'_j|^2\,dt+h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left[\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2-\alpha|\psi_j|^2\right]\,dt+\mathcal{Y}_h(t)\Big|_0^T=0
$$

onde $\mathcal{Y}_h(t)=h\displaystyle\sum_{j=0}^{J}\psi'_j\psi_j$.

Demonstração: Multiplicando a equação (3.12) por $h\psi_j$, integrando em $(0,L)\times(0,T)$ e fazendo o somatório de $j=1,...,J$ teremos:

$$h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \psi_j''\psi_j dt - h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \left(\frac{\psi_{j+1}-2\psi_j+\psi_{j-1}}{h}\right)\psi_j dt - h\alpha\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\psi_j|^2 dt = 0 \quad (4.11)$$

Note que:

$$h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \psi_j''\psi_j \; dt = h\sum_{j=0}^{J}\psi_j'\psi_j\Big|_0^T - h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\psi_j'|^2 \; dt \quad (4.12)$$

Usando as condições de contorno e substituindo (4.12) em (4.11) obteremos

$$-h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\psi_j'|^2 \; dt + h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \left[\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2 - \alpha|\psi_j|^2\right] \; dt + \mathcal{Y}_h(t)\Big|_0^T = 0$$

onde $\mathcal{Y}_h(t) = h\sum_{j=0}^{J}\psi_j'\psi_j$. ■

Corolário 4.0.7 *Para qualquer solução do esquema* (3.12)−(3.14) *temos a seguinte igualdade*

$$h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\psi_j'|^2 dt = TG_h(0) + \frac{1}{2}\mathcal{Y}_h(t)\Big|_0^T$$

Demonstração: Conseqüência direta do lema da equipartição da energia. Basta apenas somar e subtrair o termo

$$2h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\psi_j'|^2 \; dt.$$

Lema 4.0.8 *Para qualquer solução do esquema* (3.12) − (3.14) *com autovalor* Λ *suficientemente grande, temos a seguinte desigualdade*

$$h\sum_{j=0}^{J}|\psi_{j+1}' - \psi_j'|^2 \le \Lambda h^3 \sum_{j=0}^{J}|\psi_j'|^2.$$

Demonstração: Consideremos

$$\psi = \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} a_k e^{i\mu_k t} \varphi_k,$$

com $\mu_k = \sqrt{\lambda_k -}$. Assim,

$$\psi' = i \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} a_k \mu_k e^{i\mu_k t} \varphi_k.$$

Então:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{J} |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2 &= \sum_{j=0}^{J} \left| \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} a_k e^{i\mu_k t} (\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j}) \right|^2 \\
&= \sum_{j=0}^{J} \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} |a_k|^2 \mu_k^2 (\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j})^2 \\
&+ \sum_{j=0}^{J} \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} a_k a_l \mu_k \mu_l e^{i\mu_k - \mu_l} (\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j})(\varphi_{l,j+1} - \varphi_{l,j})
\end{aligned}$$

Usando o lema 4.0.4 a equação acima será reescrita da forma:

$$\sum_{j=0}^{J} |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2 = \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} |a_k|^2 \lambda^- h^2 (\lambda^- + \alpha) \sum_{j=0}^{J} |\rho_j|^2$$

Tomando $\Lambda \geq \lambda^- + \alpha$ obteremos

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=0}^{J} |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2 &\leq \Lambda \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} |a_k|^2 \lambda^- h^3 \sum_{j=0}^{J} |\rho_j|^2 \\
&= \Lambda h^3 \sum_{j=0}^{J} |\psi'_j|^2.
\end{aligned}$$

■

Lema 4.0.9 *(Positividade da energia) Para* $\dfrac{\pi^2}{L^2}$ *e para qualquer* $\psi_j = \psi_j(t)$ *solução do esquema* $(3.12) - (3.14)$ *teremos*

$$\frac{\pi^2}{\pi^2-\alpha L^2}\mathcal{G}_h(t) \geq \sum_{j=0}^{J}\left[|\psi'|^2 + \left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2\right].$$

Demonstração: Temos que

$$\mathcal{G}_h(t) = \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[|\psi'|^2 + \left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2 - \alpha|\psi_j|^2\right].$$

Aplicando a desigualdade de imersão,

$$h\sum_{j=0}^{J}|\psi_j|^2 \leq h\frac{L^2}{\pi^2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2,$$

teremos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_h(t) &= \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[|\psi'|^2 + \left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2 - \alpha|\psi_j|^2\right] \\
&\geq \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[|\psi'|^2 + \left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2 - \alpha\frac{L^2}{\pi^2}\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2\right] \\
&= \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[|\psi'|^2 + \left(1-\alpha\frac{L^2}{\pi^2}\right)\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2\right].
\end{aligned}$$

Como $\alpha\dfrac{L^2}{\pi^2}$ é positivo, teremos então que

$$\mathcal{G}_h(t) \geq \left(1-\alpha\frac{L^2}{\pi^2}\right)\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[|\psi'|^2 + \left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2\right]$$

.

De onde segue que

$$\frac{\pi^2}{\pi^2-\alpha L^2}\mathcal{G}_h(t) \geq \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[|\psi'|^2 + \left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2\right]$$

. ■

Lema 4.0.10 *Para todo $h > 0$, $t \in (0,T)$ e ψ solução de* (3.12)- (3.14) *teremos*

$$|\mathcal{Z}_h(t)| \leq \sqrt{L^2 - \frac{\Lambda h^4}{16} + \frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1}} \frac{\pi^2}{\pi^2 - \alpha L^2} \mathcal{G}_h(t),$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor do Laplaciano discreto, Λ é o maior dos autovalores entre o desenvolvimento de Fourier e

$$\mathcal{Z}_h(t) = h \sum_{j=1}^{J} \psi_j' \left[j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) - \frac{\Lambda h^2}{8} \psi_j \right].$$

Demonstração: Temos que

$$|\mathcal{Z}_h(t)| = \left| h \sum_{j=1}^{J} \psi_j' \left[j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) - \frac{\Lambda h^2}{8} \psi_j \right] \right|$$

Aplicando a desigualdade de Hölder obteremos

$$|\mathcal{Z}_h(t)| \leq h \left(\sum_{j=1}^{J} |\psi_j'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{J} \left| \frac{j(\psi_{j+1} - \psi_{j-1})}{2} + \eta \psi_j \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $\eta = -\dfrac{\Lambda h^2}{8}$. Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=1}^{J} \left| \frac{j(\psi_{j+1} - \psi_{j-1})}{2} + \eta \psi_j \right|^2 &= h \sum_{j=1}^{J} \left[\frac{j^2}{4} |\psi_{j+1} - \psi_{j-1}|^2 + \eta j (\psi_{j+1} - \psi_{j-1}) \psi_j + \eta^2 \psi_j^2 \right] \\
&= h \sum_{j=1}^{J} \left[\frac{j^2}{4} |(\psi_{j+1} - \psi_j) + (\psi_j - \psi_{j-1})|^2 + \eta j (\psi_{j+1} - \psi_{j-1}) \psi_j \right. \\
&+ \left. \eta^2 \psi_j^2 \right] \\
&= h \sum_{j=1}^{J} \left[\frac{j^2}{4} |(\psi_{j+1} - \psi_j)^2 + 2(\psi_{j+1} - \psi_j)(\psi_j - \psi_{j-1}) + (\psi_j - \psi_{j-1})^2| \right. \\
&+ \left. \eta j (\psi_{j+1} - \psi_{j-1}) \psi_j + \eta^2 \psi_j^2 \right]
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young obteremos

$$
\begin{aligned}
h\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{j(\psi_{j+1}-\psi_{j-1})}{2}+\eta\psi_j\right|^2 &\leq h\sum_{j=1}^{J}\left[\frac{j^2}{4}|2(\psi_{j+1}-\psi_j)^2+2(\psi_j-\psi_{j-1})^2|+\eta j(\psi_{j+1}-\psi_{j-1})\psi_j+\eta^2\psi\right.\\
&\leq h\sum_{j=1}^{J}\left[\frac{j^2}{2}(\psi_{j+1}-\psi_j)^2+\frac{j^2}{2}(\psi_j-\psi_{j-1})^2+\eta j\psi_{j+1}\psi_j-\eta j\psi_{j-1}\psi_j\right.\\
&+ \left.\eta^2\psi_j^2\right]\\
&\leq h\sum_{j=1}^{J}\left[\frac{j^2}{2}(\psi_{j+1}-\psi_j)^2+\frac{j^2}{2}(\psi_j-\psi_{j-1})^2+\eta^2\psi_j^2-\eta\psi_j\psi_{j+1}\right]\\
&\leq h\sum_{j=1}^{J}\left[\frac{j^2}{2}(\psi_{j+1}-\psi_j)^2+\frac{(j+1)^2}{2}(\psi_{j+1}-\psi_j)^2+\eta^2\psi_j^2-\eta\psi_j\psi_{j+1}\right]
\end{aligned}
$$

Usando o fato que $j^2\leq (j+1)^2\leq (J+1)^2=L^2$ e $h=\dfrac{L}{J+1}$ segue que

$$
\begin{aligned}
h\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{j(\psi_{j+1}-\psi_{j-1})}{2}+\eta\psi_j\right|^2 &\leq h\sum_{j=1}^{J}\left[(J+1)^2(\psi_{j+1}-\psi_j)^2+\eta^2\psi_j^2-\eta\psi_j\psi_{j+1}+|\eta||\psi_j|^2-|\eta||\psi_j|^2\right]\\
&\leq hL^2\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2-|\eta|h\sum_{j=1}^{J}(\psi_j^2-\psi_j\psi_{j+1})+(\eta^2+|\eta|)h\sum_{j=1}^{J}\psi_j^2\\
&\leq hL^2\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2-|\eta|h\sum_{j=1}^{J}\left(\frac{\psi_j^2}{2}+\frac{\psi_j^2}{2}-\psi_j\psi_{j+1}\right)\\
&+ (\eta^2+|\eta|)h\sum_{j=1}^{J}\psi_j^2\\
&\leq \left(L^2-\frac{|\eta|h^2}{2}\right)h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2+(\eta^2+|\eta|)h\sum_{j=1}^{J}\psi_j^2.
\end{aligned}
$$

Usando a versão semidiscreta da desigualdade de Poincaré obteremos

$$
h\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{j(\psi_{j+1}-\psi_{j-1})}{2}+\eta\psi_j\right|^2\leq\left(L^2-\frac{|\eta|h^2}{2}+\frac{\eta+|\eta|}{\lambda_1}\right)h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2
$$

Note que $|\eta|=\dfrac{\Lambda h^2}{8}\leq\dfrac{1}{2}$. Assim,

$$
\eta^2+|\eta|=\frac{\Lambda^2h^4}{64}+\frac{\Lambda h^2}{8}=\frac{\Lambda h^2}{8}\left(\frac{\Lambda h^2}{8}+1\right)\leq\frac{3\Lambda h^2}{16}
$$

.

Portanto, teremos que

$$h\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{j(\psi_{j+1}-\psi_{j-1})}{2}+\eta\psi_j\right|^2\leq\left(L^2-\frac{|\eta|h^2}{2}+\frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1}\right)h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2.$$

Logo,

$$|\mathcal{Z}_h(t)|\leq h\left(\sum_{j=0}^{J}|\psi_j'|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left(L^2-\frac{|\eta|h^2}{2}+\frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1}\right)h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Usando a desigualdade de Young obteremos

$$|\mathcal{Z}_h(t)|\leq\sqrt{L^2-\frac{|\eta|h^2}{2}+\frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1}}\left(\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(|\psi_j'|^2+\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2\right)\right)$$

Finalmente, do lema 4.0.9, segue que

$$|\mathcal{Z}_h(t)|\leq\sqrt{L^2-\frac{\Lambda h^4}{16}+\frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1}}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-\alpha L^2}\right)\mathcal{G}_h(t).$$

∎

Lema 4.0.11 *Para toda função discreta* $\{f_0,f_1,...,f_{J+1}\}$ *tal que* $f_0=f_{J+1}$ *a seguinte identidade é verdadeira*

$$h\sum_{j=0}^{J}|f_{j+1}+f_j|^2=\theta_k h\sum_{j=0}^{J}|f_j|^2,$$

onde $\theta_k=\theta_k(h)=4\cos\left(\dfrac{k\pi h}{2L}\right),\quad k=1,...,J.$

Demonstração: Considere o problema de autovalor dado por

$$\begin{aligned}f_{j+1}+2f_j+f_{j-1}&=\theta f_j,\ j=1,...,J &(4.13)\\ f_0=f_{J+1}&=0. &(4.14)\end{aligned}$$

Por capítulos anteriores, é fácil ver que $f_j = \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right)$, $k = 1,..,J$ resolve o problema de autovalor (4.13)-(4.14), e conseqüentemente teremos que $\theta_k = \theta_k(h) = 4\cos\left(\frac{k\pi h}{2L}\right), \quad k = 1,...,J.$

Por outro lado, multiplicando (4.13) por hf_j e fazendo o somatório de $j = 1,..J$ obteremos:

$$h\sum_{j=1}^{J}(f_{j+1} + f_j + f_{j-1})f_j = h\theta\sum_{j=1}^{J}|f_j|^2.$$

Reescrevendo a equação acima

$$h\sum_{j=1}^{J}(f_{j+1} + f_j)f_j + h\sum_{j=1}^{J}(f_j + f_{j-1})f_j = h\theta\sum_{j=1}^{J}|f_j|^2.$$

Usando (4.14) segue que

$$h\sum_{j=0}^{J}(f_{j+1} + f_j)f_j + h\sum_{j=0}^{J}(f_{j+1} + f_j)f_{j+1} = h\theta\sum_{j=1}^{J}|f_j|^2.$$

O que implica em

$$h\sum_{j=0}^{J}|f_{j+1} + f_j|^2 = \theta_k h\sum_{j=0}^{J}|f_j|^2,$$

onde $\theta_k = \theta_k(h) = 4\cos\left(\frac{k\pi h}{2L}\right), \quad k = 1,...,J.$ ■

Agora, estabeleceremos os resultados principais do trabalho.

Teorema 4.0.12 *Assuma que $0 < \gamma < 4$. Então, existe $T(\gamma) \geq \frac{2L\pi^2}{\pi^2 - \alpha L^2}$ tal que para todo $T > T(\gamma)$ existe uma constante positiva $C(T,\alpha,\gamma)$ tal que a estimativa uniforme a seguir é verdadeira quando $h \to 0$.*

$$\mathcal{G}_h(0) \leq C(T,\alpha,\gamma)\left[-\frac{\alpha}{4}\theta_k h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\psi_j|^2dt + \frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2dt\right], \tag{4.15}$$

onde $\theta_k = \theta_k(h) = 4\cos\left(\dfrac{k\pi h}{2L}\right)$, $k = 1,...,J$ *e* ψ *é a solução de* (3.12)-(3.14) *na classe das soluções filtradas* $\mathcal{P}_h(\gamma)$. *Além disso,*

(a) $T(\gamma) \nearrow \infty$ *quando* $\gamma \nearrow 4$ *e* $T(\gamma) \searrow \dfrac{2L\pi^2}{\pi^2-\alpha L^2}$ *quando* $\gamma \searrow 0$;

(b) $C(T,\gamma) \searrow \dfrac{\pi^2-\alpha L^2}{T(\pi^2-\alpha L^2)-2L\pi^2}$ *quando* $\gamma \searrow 0$.

Demonstração: Partiremos do lema 4.0.5. Assim, somando e subtraindo os termos $\dfrac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T(\psi_j'^2+\alpha\psi_j^2)dt$ obteremos

$$\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left[\psi_j'^2+\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2-\alpha\psi_j^2\right]dt + \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T(\psi_{j+1}'\psi_j'-\psi_j'^2)dt + \frac{\alpha h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T(\psi_{j+1}\psi_j+\psi_j^2)dt$$
$$+ \mathcal{X}_h(t)\Big|_0^T = \frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2dt.$$

Reescrevendo a equação acima

$$T\mathcal{G}_h(0)+\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T(\psi_{j+1}'\psi_j'-\psi_j'^2)dt+\frac{\alpha h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T(\psi_{j+1}\psi_j+\psi_j^2)dt+\mathcal{X}_h(t)\Big|_0^T = \frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2dt.$$

Das condições de contorno segue que

$$T\mathcal{G}_h(0)-\frac{h}{4}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T(\psi_{j+1}'-\psi_j')^2dt+\frac{\alpha h}{4}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T(\psi_{j+1}+\psi_j)^2dt+\mathcal{X}_h(t)\Big|_0^T = \frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2dt.$$

Do lema 4.0.8 temos que

$$T\mathcal{G}_h(0)-\frac{\Lambda h^3}{4}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\psi_j^2dt+\frac{\alpha h}{4}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T(\psi_{j+1}+\psi_j)^2dt+\mathcal{X}_h(t)\Big|_0^T \leq \frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2dt.$$

Usando o Corolário 4.0.7 obteremos

$$T\mathcal{G}_h(0)-\frac{\Lambda h^2}{4}\left(T\mathcal{G}_h(0)+\frac{1}{2}\mathcal{Y}_h(t)\Big|_0^T\right)+\frac{\alpha h}{4}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T(\psi_{j+1}+\psi_j)^2dt+\mathcal{X}_h(t)\Big|_0^T\leq\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2dt.$$

Novamente reescrevendo a equação anterior

$$T\left(1-\frac{\Lambda h^2}{4}\right)\mathcal{G}_h(0)+\mathcal{Z}_h(t)\Big|_0^T\leq-\frac{\alpha h}{4}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T(\psi_{j+1}+\psi_j)^2dt+\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2dt,\quad(4.16)$$

onde $\mathcal{Z}_h(t)=\mathcal{X}_h(t)-\dfrac{\Lambda h^2}{8}\mathcal{Y}_h(t)$. Do lema 4.0.10 segue que

$$\begin{aligned}T\left(1-\frac{\Lambda h^2}{4}\right)\mathcal{G}_h(0)-2\sqrt{L^2-\frac{\Lambda h^4}{16}+\frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1}}\frac{\pi^2}{\pi^2-\alpha L^2}\mathcal{G}_h(0) &\leq -\frac{\alpha h}{4}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T(\psi_{j+1}+\psi_j)^2dt\\ &+\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2dt.\end{aligned}$$

E usando o lema 4.0.11 obteremos

$$T\left(1-\frac{\Lambda h^2}{4}\right)\mathcal{G}_h(0)-2\sqrt{L^2-\frac{\Lambda h^4}{16}+\frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1}}\frac{\pi^2}{\pi^2-\alpha L^2}\mathcal{G}_h(0)\leq-\frac{\alpha}{4}\theta_k h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\psi_j^2dt+\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2dt.$$

Portanto, para $\Lambda h^2=\gamma$ e $\lambda_1\geq\dfrac{\pi^2}{2L^2}$ na classe de soluções $\mathcal{P}_h(\gamma)$ de (3.12)-(3.14) teremos a seguinte desigualdade de observabilidade uniforme dada por

$$\mathcal{G}_h(0)\leq C(T,\alpha,\gamma)\left[-\frac{\alpha}{4}\theta_k h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\psi_j^2dt+\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2dt\right],$$

onde

$$C(T,\alpha,\gamma)=\frac{\pi^2-\alpha L^2}{T\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)(\pi^2-\alpha L^2)-2\pi^2\sqrt{L^2\left(1+\frac{3\gamma}{8\pi^2}\right)-\frac{\gamma h^2}{16}}}$$

e

$$T(\gamma)=\frac{2\sqrt{L^2\left(1+\frac{3\gamma}{8\pi^2}\right)-\frac{\gamma h^2}{16}}\frac{\pi^2}{\pi^2-\alpha L^2}}{1-\frac{\gamma}{4}}.$$

$\blacksquare$

Analogamente teremos

Teorema 4.0.13 *Assuma que $0 < \gamma < 4$. Então, existe $T(\gamma) \geq 2L$ tal que para todo $T > T(\gamma)$ existe uma constante positiva $C(T,\gamma)$ tal que a estimativa uniforme a seguir é verdadeira quando $h \to 0$.*

$$\mathcal{F}_h(0) \leq C(T,\gamma)\left[\frac{\alpha}{4}\theta_k(k)h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\phi_j|^2 dt + \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{\phi_J}{h}\right|^2 dt\right], \tag{4.17}$$

onde $\theta_k(h) = 4\cos\left(\frac{k\pi h}{2L}\right)$, $k = 1, ..., J$ e ψ é a solução de (3.9)-(3.11) na classe das soluções filtradas $\mathcal{Q}_h(\gamma)$. Além disso,

(a) $T(\gamma) \nearrow \infty$ quando $\gamma \nearrow 4$ e $T(\gamma) \searrow 2L$ quando $\gamma \searrow 0$;

(b) $C(T,\gamma) \searrow \dfrac{1}{T-2L}$ quando $\gamma \searrow 0$.

Demonstração: Iremos proceder com o mesmo raciocínio seguido no Teorema 4.0.12 até a desigualdade (4.16). Assim, obteremos

$$T\left(1 - \frac{\Lambda h^2}{4}\right)\mathcal{F}_h(0) + \mathcal{W}_h(t)\Big|_0^T \leq \frac{\alpha h}{4}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T (\phi_{j+1} + \phi_j)^2 dt + \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{\phi_J}{h}\right|^2 dt,$$

onde $\mathcal{W}_h(t) = h\sum_{j=1}^{J}\phi_j'\left[j\left(\frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{2}\right) + \eta\phi_j\right]$, $\quad \eta = \frac{-\Lambda h^2}{8}$.

É fácil ver que

$$|\mathcal{W}_h(t)| \leq \sqrt{L^2 - \frac{\Lambda h^4}{16} + \frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1}}\mathcal{F}_h(t).$$

Logo, para $\Lambda h^2 = \gamma$ e $\lambda_1 \geq \dfrac{\pi^2}{2L^2}$ na classe de soluções $\mathcal{Q}_h(\gamma)$ de (3.9)-(3.11) teremos a seguinte desigualdade de observabilidade uniforme dada por

$$\mathcal{F}_h(0) \leq C(T,\gamma)\left[\frac{\alpha}{4}\theta_k h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \phi_j^2 dt + \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{\phi_J}{h}\right|^2 dt\right],$$

onde

$$C(T,\gamma) = \frac{1}{T\left(1-\frac{\gamma}{4}\right) - 2\pi^2\sqrt{L^2\left(1+\frac{3\gamma}{8\pi^2}\right) - \frac{\gamma h^2}{16}}}$$

e

$$T(\gamma) = \frac{2\sqrt{L^2\left(1+\frac{3\gamma}{8\pi^2}\right) - \frac{\gamma h^2}{16}}}{1-\frac{\gamma}{4}}.$$

■

Assim, podemos enunciar o resultado principal deste trabalho.

Teorema 4.0.14 *Assuma que $0 < \gamma < 4$. Então, existe $T(\gamma) \geq \dfrac{2L\pi^2}{\pi^2 - \alpha L^2}$ tal que para todo $T > T(\gamma)$ existe uma constante positiva $C(T,\alpha,\gamma)$ tal que a estimativa uniforme a seguir é verdadeira quando $h \to 0$.*

$$\mathcal{E}_h(0) \leq C(T,\alpha,\gamma)\left[\alpha h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T (u_j^2+v_j^2)dt + \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{u_J}{h}\right|^2 dt + \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{v_J}{h}\right|^2 dt\right], \quad (4.18)$$

para toda solução de (3.1)-(3.4) na classe das soluções filtradas $\mathcal{D}_h(\gamma)$. Além disso,

(a) $T(\gamma) \nearrow \infty$ quando $\gamma \nearrow 4$ e $T(\gamma) \searrow \dfrac{2L\pi^2}{\pi^2 - \alpha L^2}$ quando $\gamma \searrow 0$;

(b) $C(T,\gamma) \searrow \dfrac{\pi^2 - \alpha L^2}{T(\pi^2 - \alpha L^2) - 2L\pi^2}$ quando $\gamma \searrow 0$.

Demonstração: Sabemos que $2\mathcal{E}_h(t) = \mathcal{F}_h(t) + \mathcal{G}_h(t)$ e $\psi_j = u_j - v_j$ e $\phi_j = u_j + v_j$. Portanto, segue que

$$\begin{aligned}
2\mathcal{E}_h(t) &\leq C(T,\alpha,\gamma)\left[-\frac{\alpha}{4}\theta_k h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \psi_j^2 dt + \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2 dt\right] \\
&+ C(T,\gamma)\left[\frac{\alpha}{4}\theta_k h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \phi_j^2 dt + \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{\phi_J}{h}\right|^2 dt\right] \\
&\leq max\{C(T,\alpha,\gamma), C(T,\gamma)\}\left[max\{\theta_k\}\frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T (\phi_j^2-\psi_j^2)dt + \frac{L}{2}\int_0^T \left(\left|\frac{\phi_J}{h}\right|^2 + \left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2\right)dt\right],
\end{aligned}$$

e sabendo que $max\{C(T,\alpha,\gamma), C(T,\gamma)\} = C(T,\alpha,\gamma)$ e $max\{\theta_k\} = 4,\ k = 1,...,J$ obteremos a desigualdade de observabilidade uniforme

$$\mathcal{E}_h(0) \leq C(T,\alpha,\gamma)\left[2\alpha h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T u_j v_j dt + \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{u_J}{h}\right|^2 dt + \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{v_J}{h}\right|^2 dt\right].$$

E usando a Desigualdade de Young no termo cruzado $u_j v_j$ obteremos

$$\mathcal{E}_h(0) \leq C(T,\alpha,\gamma)\left[\alpha h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T (u_j^2+v_j^2)dt + \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{u_J}{h}\right|^2 dt + \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{v_J}{h}\right|^2 dt\right].$$

O que conclui a demonstração. ■

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Iniciamos este trabalho fazendo uma descrição dos resultados matemáticos consolidados na literatura que versam sobre o problema de observabilidade (na fronteira) numérica de esquemas numéricos em diferenças finitas e em elementos finitos quando aplicados ao problema de observabilidade da fronteira da equação de ondas unidimensional. Assim a principal conclusão a respeito dessas abordagens numéricas diz respeito a perda de observabilidade numérica para os esquemas numéricos semi-discretos mais usuais como é o caso das diferenças finitas e dos elementos finitos clássico, usando as funções de forma lineares. Este tipo de patologia numérica já tinha sido observado experimentalmente e evidenciado nos trabalhos de R. Glowinski, Lions e outros no início dos anos 90. Somente em 1999 com o trabalho de Infante e Zuazua é que se faz uma análise numérica apurada do porquê desta perda de observabilidade numérica e também a caracterização de uma classe de soluções numéricas que são numericamente observáveis. As conclusões por eles tiradas são de grande importância para a análise de observabilidade e controlabilidade de esquema numéricos, principalmente com a relação que eles guardam com o contexto da estabilização de sistemas hiperbólicos com dissipações fracas.

Todo esse contexto possibilitou uma série de novas investigações no campo da análise numérica, principalmente com a análise de métodos numéricos mais eficientes para se reproduzir o problema da observabilidade numérica. Nesta direção, nosso trabalho se baseia nesses resultados, porém realizados sobre um sistema hiperbólico acoplado de equações de onda. Nossas conclusões de um modo bem amplo, é que esquemas numéricos como diferenças finitas não são robustos o suficiente em reproduzir o problema da observabilidade da energia. Assim, conseguimos identificar a perda de observabilidade numérica para as equações semi-discreta de ondas acopladas e, paralelamente, conseguimos identificar uma classe de soluções numéricas que são observáveis.

Como continuidade deste trabalho, objetivamos relacionar a observalidade numérica com problemas de estabilização para modelos numéricos fracamente dissipativos, como por exemplo, problema com dissipações pontuais ou localizadas. Outras metodologias numéricas também podem ser investigas para tratar a questão da observabilidade uniforme. Destacamos as seguintes:

1. Elementos finitos clássicos;
2. Método "θ" em diferenças finitas;
3. Desigualdade do tipo Ingham;
4. Método de duas malhas;
5. Regularização de Tychonoff.

Citamos a referência [1] para a descrição de uma série de métodos que são usadas para o controle ou eliminação das soluções numéricas espúrias.

Outra questão pertinente, diz respeito ao problema de controle associado a desigualdade de observabilidade que construímos.

Referências Bibliográficas

[1] E. Zuazua, **Propagation, observation, control and numerical approximation of waves approximated by finite differerence methods**. SIAM Rev. 47, $197 - 243$, (2005).

[2] E. Isaacson and H.B. Keller, **Analysis of Numerical Methods**. John Wiley, (1966).

[3] F. Alabau, **Observabilité frontière indirecte de systèmes faiblement couplés**. C. R. Acad. Paris, t. 333 (2001), Série I, 645-650.

[4] J.A. Infante and E. Zuazua, **Boundary Observability for the Space-discretizations of the One-dimensional Wave Equation**. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 33. $407 - 438$. (1999).

[5] J. D. Smith, **Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods**. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, 1984.

[6] J.L. Lions, **Contrôlabilité Exacte, Stabilisation et Perturbations de Systèmes Distribués**. Tome 1. Contrôlabilité Exacte, Masson, Paris, RMA 8. (1988).

[7] M. Najafi and R. Sarhangi, **Boundary Stabilization of Coupled Wave Equations**. Appl. Math. and Comp. Sci., Vol 7, number 3, 479–494, (1997).

[8] M. Najafi, **Study of Exponential Stability of Coupled Wave Systems via Distributed Stabilizer**. Hindawi Publishing Corp., IJMMS 28 : 8 479 − 491. (2001).

[9] M. Najafi, H. Massah, M. Daemi, M. Taeibi-Rahni and H. Khoramishad, **On the MADM Solution of Coupled Wave System with Mixed Boundary Conditions**. Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Istambul, Turkey, pages 68–73, (2006).

[10] M. Najafi and H. Massah, **Analytical and Computational Study of the Stability of Coupled Wave Equations**. Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Istambul, Turkey, pages 78–83, (2006).

[11] M. L. Santos, M.P.C. Rocha and S.C. Gomes, **Polynomial stability of a coupled system of wave equation weakly dissipative**. Applicable Analysis, Vol. 86, 1293-1302, 2007.

[12] R. Rajaram and M. Najafi, **Exact Controllability of Wave Equation in $\mathbb{R}^n$ Coupled in Parallel**. Journal of Mathematical Analysis and Applications., 356 7 − 12. (2009).

[13] R. Glowinski, C.H. Li and J.L. Lions, **A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation. (I) Dirichlet Controls: Description of the numerical methods**. Jap. J. App. Math. 7. 1 − 76. (1990).

[14] R. Glowinski and J.L. Lions, **Exact and Approximate Controllability for Distributed Parameter Systems**. Acta Numerica. 159 − 333. (1996).

[15] R. Glowinski, **Ensuring Well-Posedness by Analogy - Stokes Problem and Boundary Control for the Wave Equation**. J. Comput. Phys. 103. 189 − 221. (1992).

[16] T. J. R. Hughes, **The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis**. Prentice-Hall, New Jersey, 1987.

[17] V. Komornik, **Exact controllability and stabilization. The multiplier method**. John Wiley, Masson (1994).

[18] X. Zhang, **Explicit observability inequalities for the wave equation with lower order terms by means Calerman inequalities**. SIAM J. Control Optim. 3, 812–834, (2000).

[19] E. Kreyszig, **Introductory Functional Analysis With Applications**. Wiley Classics Library Edition Published, (1989).