

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

André Fellipe Ribeiro de Almeida

**Análise matemática da equação de  
Cahn-Hilliard**

BELÉM - PA  
Julho - 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**André Fellipe Ribeiro de Almeida**

# **Análise matemática da equação de Cahn-Hilliard**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz.

BELÉM - PA

2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFPA

---

Almeida, Andre Fellipe Ribeiro de, 1991-  
Análise matemática da equação de cahn-hilliard /  
Andre Fellipe Ribeiro de Almeida. - 2015.

Orientadora: Cristina Lucia Dias Vaz.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade  
Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e  
Naturais, Programa de Pós-Graduação em  
Matemática e Estatística, Belém, 2015.

1. Análise numérica. 2. Galerkin, Métodos  
de. 3. Equação de Cahn-Hilliard. 4. Decomposição  
de Adomian. I. Título.

CDD 22. ed. 518.63

---

## CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

André Fellipe Ribeiro de Almeida

### Análise matemática da equação de Cahn-Hilliard

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, julgado pela seguinte banca examinadora:

Cristina Lúcia Dias Vaz

Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz  
Orientadora  
PPGME - UFPA

Midori Makino

Profa. Dra. Midori Makino

Campus de Salinópolis - UFPA

João Rodrigues dos Santos Júnior

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior

PPGME - UFPA

DATA DA AVALIAÇÃO: 03 / 09 / 2015

CONCEITO: Excelente (Aprovado)

# Dedicatória

*Dedico a Deus e à minha família, em especial, à memória de Domingas Ribeiro Dias, minha amada avó.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me permitido realizar o sonho do mestrado em matemática e me dado forças para prosseguir e continuar prosseguindo em minha carreira acadêmica. Aos meus pais Angela Dias e Edward Almeida, por terem me ensinado sobre a vida e estarem comigo em todos os momentos dessa jornada. Ao meu querido irmão Bruno Almeida, por ser meu amigo mais chegado e me aconselhar em situações de dúvidas. À minha tia Olga Dias, por ser minha segunda mãe, e por representar muito bem a minha amada avó Domingas Dias (em memória) em minha vida. Do mesmo modo agradeço a toda a minha família.

Sou eternamente grato a minha orientadora, Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz, por ter me aceitado como seu orientando de iniciação científica, de TCC e de Mestrado, por sua paciência e dedicação, por seus conselhos valiosos sobre a vida e os estudos, e por ter acreditado em mim.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro durante a duração do mestrado. Assim também, como a todos os amigos e colegas que conquistei nessa caminhada, dentre os quais destaco, João Carlos Fortes e Jeziel Nascimento Correia, que estiveram comigo nos caminhos mais difíceis da minha jornada acadêmica, compartilhando dúvidas, aprendizados, momentos engraçados e também desesperadores. Agradeço também aos amigos que fiz durante essa caminhada do mestrado e me ajudaram e ensinaram lições valiosíssimas. Não poderia deixar de agradecer aos professores desse programa que tanto me ajudaram, dentre os quais destaco: Prof. Dr. João Pablo, Prof. Dr. Dilberto Júnior e Prof. Dr. Valcir Farias, que me instruíram, me ajudaram e me motivaram a estudar cada dia mais. Obrigado por sua dedicação à minha formação.

Não posso esquecer dos amigos da minha congregação, que oraram por mim e pela minha

família, me auxiliando no que fosse necessário. E a todos que não foram citados aqui, mas que participaram direta ou indiretamente da realização dessa dissertação, muito obrigado!

# Resumo

O principal objetivo deste trabalho é fazer uma análise matemática de modelos governados pela equação de Cahn-Hilliard. Essencialmente, a equação de Cahn-Hilliard descreve fenômenos de mudança de fase para sistemas conservativos. Foi introduzida, em 1958, por Cahn e Hilliard para descrever a separação de fase de sistemas binários como ligas e misturas de polímeros.

Investigaremos, principalmente, dois modelos: o modelo Cahn-Hilliard clássico e o modelo Allen-Cahn/Cahn-Hilliard para sistemas mesoscópicos. Para melhor compreensão da equação Allen-Cahn/Cahn-Hilliard, investigaremos separadamente a equação de Allen-Cahn.

Todos os modelos foram tratados pelo método de Faedo-Galerkin, que é uma potente ferramenta teórica e numérica. Para ilustrar a versatilidade desta abordagem apresentaremos um exemplo numérico da equação de Cahn-Hilliard unidimensional, acoplando ao método de Faedo-Galerkin, o método da decomposição de Adomian para resolução de equações integrais de Volterra. Este exemplo foi tratado por P. Rebelo no artigo [17]. Os resultados foram implementados com o aplicativo matemático *MAXIMA*.

**Palavras-chave:** Equação Cahn-Hilliard, Método de Galerkin, Decomposição de Adomian

# Abstract

The main objective of this work is to make a mathematical analysis of models governed of the Cahn-Hilliard equation. Essentially, the Cahn-Hilliard equation describes phase change phenomena for conservative systems, and was introduced in 1958, by Cahn and Hilliard, for to describe the phase separation of binary systems like alloys and polymers mixtures.

We investigated, principally, two models: the classic Cahn-Hilliard model and the Cahn-Hilliard/Allen-Cahn model for mesoscopic models. For better understanding of Cahn-Hilliard/Allen-Cahn equation we investigate the Allen-Cahn equation separately.

All the models were treated by the Faedo-Galerkin method, which is a powerfull theoretical and numerical tool. We illustrate the versatility of this approach with the help of one-dimensional Cahn-Hilliard equation. We solve these example by using Galerkin method with Adomian Decomposition method for Voterra integral equations. This example was treated by P. Rebelo in the paper [17]. The results were implemented using the computer algebra system *MAXIMA*.

**Key Words:** Cahn-Hilliard equation, Galerkin Method, Adomian Decomposition Method

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>19</b>
1.1 Notações e espaços funcionais . . . . .	19
1.2 Resultados auxiliares . . . . .	22
1.2.1 Imersões de Sobolev . . . . .	23
1.2.2 Algumas desigualdades . . . . .	23
1.2.3 Os subespaços $H_{bc}^2(\Omega)$ e $H_{bc}^4(\Omega)$ . . . . .	25
1.2.4 A derivada generalizada de funções vetoriais . . . . .	28
1.3 Resultados de equações diferenciais ordinárias . . . . .	30
1.4 Método de Galerkin . . . . .	31
<b>2 Equação de Cahn-Hilliard</b>	<b>34</b>
2.1 Formulação Fraca . . . . .	35
2.2 Formulação aproximada . . . . .	38
2.2.1 Solução do problema aproximado . . . . .	40
2.3 Estimativas <i>a priori</i> . . . . .	43

2.4	Passagem do Limite . . . . .	54
2.4.1	Condição Inicial . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Equações Allen-Cahn e Allen-Cahn/Cahn-Hilliard</b>	<b>60</b>
3.1	Equação de Allen-Cahn . . . . .	60
3.1.1	Formulação Fraca . . . . .	61
3.1.2	Formulação Aproximada . . . . .	62
3.1.3	Estimativas a Priori . . . . .	66
3.1.4	Passagem do Limite . . . . .	72
3.2	Equação de Allen-Cahn/Cahn-Hilliard . . . . .	73
3.2.1	Formulação Fraca . . . . .	74
3.2.2	Formulação Aproximada . . . . .	76
3.2.3	Estimativas <i>a priori</i> . . . . .	78
3.2.4	Passagem do limite . . . . .	85
3.2.5	Regularidade da Solução . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Solução numérica da equação de Cahn-Hilliard unidimensional</b>	<b>97</b>
4.1	Breve resumo sobre equações integrais . . . . .	97
4.2	Método da decomposição de Adomian . . . . .	102
4.3	Solução aproximada da equação de Cahn-Hilliard unidimensional . . . . .	110
4.3.1	Problema aproximado . . . . .	110
<b>Considerações Finais</b>		<b>123</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>125</b>

# Introdução

Este trabalho trata de uma análise matemática das equações de Cahn-Hilliard e Allen-Cahn/Cahn-Hilliard. Estas equações diferenciais descrevem modelos de  do tipo . A principal idéia do método de interface difusa é supor que a interface tem uma , embora fina, e pode ser considerada uma região interfacial, na qual as quantidades físicas variam de modo contínuo. Um exemplo importante de modelos de interface difusa são os chamados .

Nos modelos campo de fase, a mudança de fase é descrita por uma função, chamada , que é uma função contínua do espaço e do tempo. A posição da interface é dada por um valor constante da função campo de fase e a equação de evolução desta função é definida em todo o domínio, ou seja, nenhuma condição é imposta na interface. Por exemplo, em solidificação considera-se uma função  $\varphi(x, t)$ , cujos valores indicam a fase do material: para  $\varphi(x, t) = 1$ , a fase é *; para  $\varphi(x, t) = -1$ , a fase é *, para  $-1 < \varphi(x, t) < 1$ , a fase é  *e a interface localiza-se em  $\varphi(x, t) = k$ ,  $-1 < k < 1$ .***

Quando  $\varphi(x, t)$  indica somente a fase é um parâmetro de ordem *. Porém, em alguns processos de mudança de fase, como por exemplo, solidificação de ligas binárias ou mistura de dois fluidos,  $\varphi(x, t)$  pode representar a  *de uma das substâncias, e neste caso é um parâmetro de ordem *.***

Fundamentalmente, esta formulação usa a energia para descrever as fases do processo, ou seja, considera-se um funcional energia livre com dois tipos de contribuições da energia: uma parcela dependendo do gradiente do campo de fase (e que basicamente fornece a energia acumuladas na interface) e outra correspondente à densidade de energia potencial. Este funcional é conhecido como *funcional energia Ginzburg-Landau* e é dado por

$$E(\varphi) := \int_{\Omega} \frac{\xi^2}{2} |\nabla \varphi|^2 + f(\varphi) dx$$

com  $\xi$  uma constante que define a espessura da interface.

Se o parâmetro de ordem  $\varphi$  representa a “concentração” de alguma substância então pelo *princípio da conservação de massa*, a massa total do sistema é conservada (desde que não haja fluxo de massa pela fronteira). Neste caso, postula-se que o fluxo de massa associado a  $\varphi$  (representado por  $\mathbf{j}$ ) é proporcional ao gradiente da força termodinâmica generalizada (dada pela 1<sup>a</sup> variação do funcional energia), ou seja,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = -m(\varphi, \theta) \nabla \left( \frac{\delta E}{\delta \varphi} \right). \quad (1)$$

Para o caso não conservativo, postula-se que  $\varphi$  é proporcional a força termodinâmica generalizada, ou seja,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -M(\varphi, \theta) \frac{\delta E}{\delta \varphi} \quad (2)$$

com  $\frac{\delta E}{\delta \varphi}$  a 1<sup>a</sup> variação do funcional energia,  $m$  e  $M$  funções coeficientes (funções positivas).

Calculando a 1<sup>a</sup> variação do funcional energia  $E(\varphi)$  obtemos

$$\frac{\delta E}{\delta \varphi} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \xi^2 \Delta \varphi. \quad (3)$$

Considerando  $M$  e  $m$  constantes iguais a 1 e o potencial de densidade de energia um potencial de “poço duplo”, dado por

$$f(\varphi, \theta) = \frac{(\varphi^2 - 1)^2}{4}$$

(3) torna-se

$$\frac{\delta E}{\delta \varphi} = \varphi - \varphi^3 - \xi^2 \Delta \varphi. \quad (4)$$

Substituindo (4) em (1) e (2) obtemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi^2 \Delta \varphi + \varphi - \varphi^3; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta(-\xi^2 \Delta \varphi + \varphi^3 - \varphi). \quad (6)$$

A equação (5) é conhecida como a *equação de Allen-Cahn* (ou equação de Ginzburg-Landau) e a equação (6) é conhecida como a *equação de Cahn-Hilliard*.

Para completarmos a formulação dos problemas descreveremos as condições de fronteira e inicial. Assim, obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi^2 \Delta \varphi + \varphi - \varphi^3 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \mu & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \mu = -\xi^2 \Delta \varphi + \varphi^3 - \varphi & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (8)$$

Os detalhes destas formulações podem ser encontrados em [1, 5, 16] e nas referências citadas nestes trabalhos.

Além destes problemas, tratamos também o modelo chamado *equação de Allen-Cahn/Cahn-Hilliard*. Este problema foi analisado por G. Karali e Y. Nagasse em [13] e modela sistemas mesoscópicos de adsorção/dessorção.

*Sistemas mesoscópicos* são sistemas com uma das dimensões na mesma ordem de grandeza de algum de seus comprimentos. Nestes sistemas as propriedades físicas podem diferir significativamente daquelas observadas em escala macroscópica. O estudo de tais sistemas é importante em diversas aplicações tais como modelos adsorção/dessorção, modelos de reservatórios naturais de petróleo, na limpeza de dejetos, na clarificação de produtos, na indústria farmacêutica, entre outros.

*Sorção* refere-se à ação de ocorrem simultaneamente *absorção* e *adsorção*. A absorção é a incorporação de uma substância de um estado para outro (por exemplo, líquidos de serem absorvidos por um sólido ou gases de ser absorvidos por um líquido). Adsorção é um processo de separação no qual certos componentes de uma fase fluida (gás ou líquido) são transferidos (adsorvidos) para a superfície de um sólido adsorvente. *Dessorção* é o processo de retirada de substância(s) adsorvida(s) ou absorvida(s) por outra(s). O processo de adsorção sólido-líquido explora a capacidade que certos sólidos apresentam em concentrar na sua superfície substâncias específicas presentes em soluções aquosas.

Estes problemas são formulados como problemas com interfaces. Por exemplo, num sistema constituído por água e hidrocarbonetos em condições típicas de reservatórios de petróleo, verifica-se que o sistema pode apresentar três fases: uma fase aquosa, uma fase líquida orgânica e uma fase gasosa, com interfaces em posições definidas.

Sistemas mesoscópicos são modelados por (veja [13])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \mu(u) \nabla \left( \frac{\delta F}{\delta u} \right) \right) \quad (9)$$

com  $u(x, t)$  a função campo de fase e  $\mu(\cdot)$  a mobilidade. O funcional energia é dado por

$$F(u) = \frac{1}{2} \int \int J(r - x) u(r) u(x) dr dx + \int \frac{1}{\beta} u \ln(u) + (1 - u) \ln(1 - u) dr$$

com  $J$  o potencial energia do sistema.

Considerando algumas simplificações (que não detalharemos) no potencial de energia  $J$ , a equação (9) pode ser aproximada pela seguinte uma versão da equação de Allen-Cahn com

difusão não linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M(u)\Delta u + \alpha_0(1 - u - \alpha_1 u e^{-\alpha_2 u}). \quad (10)$$

Destacamos que  $f(u) = 1 - u - \alpha_1 u e^{-\alpha_2 u}$  é a derivada (com relação a  $u$ ) de um tipo de potencial de “poço duplo”.

Por outro lado, para o modelo com difusão, podemos aproximar o funcional energia  $F$  pelo funcional energia Ginzburg-Landau  $E$ , ou seja,

$$F(u) \approx \int \frac{\xi^2 J_2}{8} |\nabla u|^2 + W_\beta(u) dr = E(u) \quad (11)$$

com o potencial “poço duplo”  $W_\beta(\cdot)$  dado por

$$W_\beta = \frac{J_0}{2} u(1 - u) + \frac{1}{\beta}(u \ln(u) + (1 - u) \ln(u))$$

para  $\beta > 4/J_0$ .

Substituindo  $F$  por  $E$  na equação (9) obtemos a equação de Cahn-Hilliard para  $\mu(u) = 1$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \nabla \left( \frac{\delta E}{\delta u} \right) \right). \quad (12)$$

Note que, as equações de Allen-Cahn e Cahn-Hilliard descrevem os modelos mesoscópicos.

Para o caso especial de modelos mesoscópicos de adsorção/dessorção tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \xi^2 \Delta(-\Delta u + W'(u)) + \Delta u - W'(u) \quad (13)$$

com  $W(\cdot)$  um potencial de “poço duplo” com mínimos em  $\pm 1$ .

O termo Cahn-Hilliard em (13) corresponde ao processo de difusão e o termo de Allen-Cahn ao processo de adsorção/dessorção. Neste trabalho usaremos o potencial de “poço duplo”

$$W(u) = \frac{(\varphi^2 - 1)^2}{4}.$$

Assim, o modelo Allen-Cahn/Cahn-Hilliard é dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\xi^2 \Delta(\Delta u - u^3 + u) + (\Delta u - u^3 + u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (14)$$

com  $\xi^2$  a constante de difusão do sistema.

Para mais detalhes sobre a formulação consulte ([12, 13]) e as referências citadas nestes trabalhos.

O trabalho foi organizado do seguinte modo:

No capítulo 1 descreveremos as notações, os espaços funcionais e alguns dos resultados clássicos da teoria das equações diferenciais que serão usados no trabalho.

No capítulo 2 provaremos existência de solução para o modelo Cahn-Hilliard (8), aplicando o método de Faedo-Galerkin. Este modelo apresenta não lineares bem complicadas, pois temos que tratar o bi-laplaciano, o laplaciano do potencial  $f(u)$  e o laplaciano de uma não linearidade cúbica. Por causa destas não linearidades, precisaremos trabalhar com um subespaço do espaço de sobolev  $H^2(\Omega)$  e suas principais desigualdades de interpolação.

No capítulo 3 provaremos existência de solução para o modelo Allen-Cahn/Cahn-Hilliard (14), aplicando o método de Faedo-Galerkin. Para melhor compreensão, provaremos existência de solução para o modelo Allen-Cahn (7). Como as principais dificuldades da equações de Allen-Cahn e Cahn-Hilliard foram tratadas separadamente, a análise matemática do modelo de Allen-Cahn/Cahn-Hilliard (14) é apenas uma adaptação de todos estes resultados.

No capítulo 4 apresentaremos o exemplo numérico governado pela equação de Cahn-Hilliard unidimensional, tratado por P. Rebelo no artigo [17]. Seguindo este autor, usaremos o método de Faedo-Galerkin acoplado ao método de decomposição de Adomian. Para melhor

compreensão, faremos uma breve introdução do método de decomposição de Adomian para resolução de equações integrais de Volterra. Os resultados foram implementados com o aplicativo *MAXIMA*.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo descreveremos as notações, os espaços funcionais e alguns dos resultados clássicos da teoria das equações diferenciais que serão usados no trabalho.

### 1.1 Notações e espaços funcionais

As seguintes notações serão usadas no trabalho:

$\mathbb{R}^n$  representará espaço euclidiano n-dimensional.

$\Omega$  é um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira  $\partial\Omega$ .

$Q = \Omega \times (0, T)$  é um cilindro

$S = \partial\Omega \times (0, T)$  representará a superfície lateral do cilindro  $Q$ .

$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{i=1}^n$  representará o operador gradiente.

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  representará o operador Laplaciano.

As derivadas parciais serão representadas por  $u' = \frac{\partial u}{\partial t}$  e  $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

$\sum_{(j)}$  é o somatório sobre todos os possíveis  $j$ .

$|x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$  e  $|\nabla u| = \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}$  é norma euclidiana de  $x \in \mathbb{R}^n$  e do vetor gradiente.

No que segue, vamos considerar  $0 < T < \infty$ ,  $B$  um espaço de Banach qualquer com norma  $\|\cdot\|_B$  e apresentar a definição de alguns espaços funcionais:

$C^m(\Omega)$  é o espaço das funções com todas as derivadas de ordem  $\leq m$  contínuas em  $\Omega$  ( $m$  inteiro positivo ou  $m = \infty$ ).

$\mathcal{D}(\Omega)$  é o espaço vetorial das funções em  $C^\infty(\Omega)$  com suporte compacto em  $\Omega$  e  $\mathcal{D}'(\Omega)$  o seu dual. Também usaremos os espaços  $\mathcal{D}(0, T)$  e  $\mathcal{D}'(0, T)$ .

$L^q(\Omega)$  é o espaço de Banach das (classes de) funções  $u(x)$  de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$  mensuráveis (no sentido de Lebesgue) e  $q$ -integráveis ( $q \geq 1$ ) cuja norma é dada por

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\Omega)} &= \left( \int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right)^{1/q} && (1 \leq q < \infty), \\ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} &= ess \sup_{\Omega} |u(x)| && (q = \infty). \end{aligned}$$

$W^{m,p}(\Omega)$  é o espaço de Banach (com  $m$  inteiro) das funções  $u(x)$  em  $L^p(\Omega)$  com derivadas generalizadas (no sentido usual) de ordem  $\leq m$  que pertencem a  $L^p(\Omega)$  e cuja norma é dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{j=0}^m \sum_{(j)} \|D_x^j u\|_{L^p(\Omega)}.$$

$W_0^{m,p}(\Omega)$  representará o fecho de  $\mathcal{D}(\Omega)$  em  $W^{m,p}(\Omega)$ .

**Observação 1.1** Para o caso particular de  $p = 2$ , a notação dos espaços de Sobolev será  $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$  e  $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ .

**Definição 1.1** Para  $1 < p < \infty$ , o dual de  $W^{m,p}(\Omega)$ , representado por  $(W^{m,p}(\Omega))'$ , é o conjunto dos funcionais lineares definidos em  $W^{m,p}(\Omega)$ . Pode ser caracterizado como o completamento de  $L^q(\Omega)$  com relação a norma

$$\|v\|_{-m,q} = \sup\{| \langle u, v \rangle | ; u \in W^{m,p}(\Omega), \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq 1\}$$

$$\text{para } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Seja  $W^{-m,q}(\Omega)$  o espaço das distribuições  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  tal que

$$T = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha T_{v_\alpha} \quad (1.1)$$

com  $T_{v_\alpha}(\phi) = \langle \phi, v_\alpha \rangle$ ,  $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Claramente,  $W^{-m,q}(\Omega)$  é separável e reflexivo para  $1 < p < \infty$ .

**Proposição 1.1**  $(W_0^{m,p}(\Omega))' \cong W^{-m,q}(\Omega)$ .

**Observação 1.2** Para o caso particular de  $p = 2$ , a notação dual topológico será  $W^{-m,2}(\Omega) = H^{-m}(\Omega)$ .

No que segue, apresentaremos os espaços usados na análise de problemas de evolução.

Uma função vetorial é uma função  $t \mapsto w(t)$  que para cada  $t \in (0, T)$  associa um elemento do espaço de Banach  $X$ . Dizemos que  $w : (0, T) \rightarrow X$  é fortemente mensurável se a função  $t \mapsto \|w(t)\|_X$  é mensurável.

**Definição 1.2** Representamos por  $L^p(0, T; X)$ , com  $1 \leq p \leq \infty$  o espaço de Banach das (classes de) funções vetoriais  $u : [0, T] \rightarrow X$ , fortemente mensuráveis tal que a função

$t \mapsto \|u(t)\|_X$  (definida q.s. em  $[0, T]$ ) é  $p$ -integrável, com norma dada por

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \left( \int_{\Omega} \|u(t)\|_X^p dx \right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \text{ess} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

**Definição 1.3**  $C([0, T]; X)$  é o espaço de Banach das funções  $u : [0; T] \rightarrow X$  contínuas, cuja a norma é dada por  $\|u\|_{C([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X$ .

## 1.2 Resultados auxiliares

A demonstração dos resultados desta seção pode ser encontrada em [2, 6, 15]:

**Proposição 1.2** Se  $\Omega$  for um subconjunto limitado bem regular do  $\mathbb{R}^n$ , então  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  é denso em  $H^m(\Omega)$ , isto é para cada função  $u \in H^m(\Omega)$  existe uma sequência de funções  $u_k$  em  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  tal que  $u_k \rightarrow u$ .

**Teorema 1.1 (Teorema de Green)** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto de classe  $C^1$  e  $u, v \in H^1(\Omega)$ .

Então

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u) \gamma_0(v) \eta_i ds - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx \quad i = 1, \dots, n$$

com  $\gamma_0$  o operador traço.

**Proposição 1.3** Sejam  $1 \leq p < \infty$ ,  $1 < q \leq \infty$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então,  $u_k \rightharpoonup u$  em  $L^p(\Omega)$  se e somente se

$$\int_{\Omega} u_k(x) v(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \quad \forall v \in L^q(\Omega).$$

**Proposição 1.4** Se  $X$  é um espaço de Banach reflexivo e  $f_k \xrightarrow{*} f$  em  $L^\infty(0, T, X)$  então  $f_k \rightharpoonup f$  em  $L^2(0, T, X)$ .

### 1.2.1 Imersões de Sobolev

**Teorema 1.2** *Seja  $\Omega$  um aberto limitado de classe  $C^1$ . Então as seguintes imersões são contínuas:*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\subset L^{p^*}(\Omega) \quad \text{para } p < n, \quad p^* = np/(n-p), \\ W^{1,p}(\Omega) &\subset L^q(\Omega) \quad \text{para } p = n, \quad \forall q \in [p, +\infty), \\ W^{1,p}(\Omega) &\subset L^\infty(\Omega) \quad \text{para } p > n. \end{aligned}$$

**Teorema 1.3** *Seja  $\Omega$  um aberto limitado de classe  $C^1$ . Então as seguintes imersões são compactas:*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\subset L^q(\Omega) \quad \text{para } p < n, \quad \forall q \in [1, p^*], \\ W^{1,p}(\Omega) &\subset L^q(\Omega) \quad \text{para } p = n, \quad \forall q \in [p, +\infty), \\ W^{1,p}(\Omega) &\subset C(\bar{\Omega}) \quad \text{para } p > n. \end{aligned}$$

com  $p^* = np/(n-p)$ .

**Teorema 1.4** *Sejam  $r, s \in \mathbb{N}$ . Se  $1 \leq r \leq s < \infty$  então a imersão de  $H^s(\Omega)$  em  $H^r(\Omega)$  é contínua.*

### 1.2.2 Algumas desigualdades

Destacamos algumas desigualdades que serão muito utilizadas ao longo de nosso estudo.

**Proposição 1.5 (Desigualdade de Young)** *Sejam  $a, b > 0$  e  $1 < p, q < \infty$  tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ então}$$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Uma versão equivalente a essa desigualdade é que tomindo  $a, b, p$  e  $q$  sob as mesmas hipóteses, temos para todo  $\epsilon > 0$  que

$$ab \leq \epsilon a^p + \frac{b^q}{(\epsilon p)^{\frac{q}{p}} q}$$

**Proposição 1.6 (Desigualdade de Hölder)** Seja  $1 \leq p, q \leq \infty$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Se  $u \in L^p(\Omega)$  e  $v \in L^q(\Omega)$  então

$$\int_{\Omega} |u.v| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

**Proposição 1.7 (Desigualdade de Minkowski)** Sejam  $1 \leq p \leq \infty$  e  $u, v \in L^p(\Omega)$ , então

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

Essa última possui uma versão análoga para os espaços  $W_p^m(\Omega)$ .

**Proposição 1.8 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg)** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado com  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ . Sejam  $m, j \in \mathbb{Z}$  e  $1 \leq p, q, r \leq \infty$ . Então para toda  $u \in W_p^m(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ , existe  $C > 0$  tal que

$$\|D^j u\|_{L^r(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_p^m(\Omega)}^\alpha \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha} \quad (1.2)$$

desde que  $0 \leq |j| \leq m - 1$  e  $\alpha = \frac{|j|}{m}$  e

$$\frac{1}{r} = \frac{|j|}{n} + \alpha \left( \frac{1}{p} - \frac{m}{n} \right) + (1 - \alpha) \frac{1}{q} \quad (1.3)$$

Se  $m - |j| - \frac{n}{p}$  é um inteiro não-negativo, então (1.2) vale.

**Proposição 1.9 (Desigualdade de Gronwall)** Seja  $\eta(\cdot)$  uma função absolutamente contínua não negativa em  $[0, T]$ , que satisfaz, para  $t$  q.s, a desigualdade diferencial

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

em que  $\phi(t), \psi(t)$  são funções integráveis não negativas em  $[0, T]$ . Então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[ \eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right], \quad (1.4)$$

para todo  $t \in [0, T]$ .

### 1.2.3 Os subespaços $H_{bc}^2(\Omega)$ e $H_{bc}^4(\Omega)$

Nesta subseção trataremos dos subespaços  $H_{bc}^2(\Omega)$  e  $H_{bc}^4(\Omega)$  (veja [19]).

**Definição 1.4** *Considere os seguintes subespaços:*

$$H_{bc}^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\},$$

$$H_{bc}^4(\Omega) = \left\{ u \in H^4(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \eta} = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\}$$

com respectivas normas

$$\|u\|_{H_{bc}^2(\Omega)} = \left\{ \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta_1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{H_{bc}^4(\Omega)} = \left\{ \|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

para  $\eta_1 > 0$  e  $\eta_2 > 0$ .

Os espaços  $H_{bc}^2(\Omega)$  e  $H_{bc}^4(\Omega)$  são espaços de Hilbert e temos a seguinte equivalência, que será muito usada no trabalho.

**Proposição 1.10 (Equivalência das normas)** *As normas  $\|u\|_{H_{bc}^2(\Omega)}$  e  $\|u\|_{H_{bc}^4(\Omega)}$  são equivalentes às normas  $\|u\|_{H^2(\Omega)}$  e  $\|u\|_{H^4(\Omega)}$ , respectivamente.*

**Demonstração:** Para mostrarmos que as normas em dois espaços normados  $X$  e  $Y$  são equivalentes, devemos mostrar que existem constantes  $M, N > 0$  tais que  $\|u\|_X \leq M\|u\|_Y$  e  $\|u\|_Y \leq N\|u\|_X$ . Para isso, seja  $u \in H^2(\Omega) \cap H_{bc}^2(\Omega)$ , então pela definição da norma em  $H_{bc}^2(\Omega)$ , temos que

$$\|u\|_{H_{bc}^2(\Omega)}^2 = \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta_1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta_1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Tomando  $M = \max\{1, \eta_1\}$ , obtemos

$$\|u\|_{H_{bc}^2(\Omega)}^2 \leq M(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2) = M\|u\|_{H^2(\Omega)}^2$$

Logo,  $\|u\|_{H_{bc}^2(\Omega)} \leq \sqrt{M}\|u\|_{H^2(\Omega)}$ .

Para mostrar a segunda desigualdade, utilizaremos a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg. Tomando em (1.3)  $r = q = p = m = 2$  e  $j = 1$ , obtemos para  $n = 1, 2, 3$  que  $\alpha = \frac{1}{2}$ , logo,

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$$

Logo, elevando ao quadrado e utilizando a desigualdade de Young com  $p = q = 2$ , obtemos que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (1.5)$$

Assim, utilizando (1.5), obtemos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 &= \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Enfim, obtemos que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq 2 \left( \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq 2 \|u\|_{H_{bc}^2(\Omega)}^2$$

o que implica que  $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq N\|u\|_{H_{bc}^2(\Omega)}$ . Assim, temos que as normas em  $H^2(\Omega)$  e  $H_{bc}^2(\Omega)$  são equivalentes.

Para provarmos a segunda parte da proposição, procederemos de forma análoga. Então, seja  $u \in H^4(\Omega) \cap H_{bc}^4(\Omega)$  e assim,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_{bc}^4(\Omega)}^2 &= \|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq M \|u\|_{H^4(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

com  $M = \max\{1, \eta_2\}$ . Assim sendo, temos que  $\|u\|_{H_{bc}^4(\Omega)} \leq \sqrt{M}\|u\|_{H^4(\Omega)}$ .

Agora, utilizando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, com  $p = q = r = 2$ ,  $m = 4$ , e para  $n = 1, 2, 3$ , obtemos que

$$\|\nabla \Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \quad (1.6)$$

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad (1.7)$$

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \quad (1.8)$$

Elevando as desigualdades (1.6) – (1.7) – (1.8) ao quadrado e utilizando a desigualdade de Young das formas indicadas abaixo, obtemos as seguintes desigualdades

$$p = \frac{4}{3}, q = 4, \varepsilon = \frac{1}{4} \rightarrow \|\nabla \Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{4} \|u\|_{H^4(\Omega)}^2 + \frac{27}{4} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (1.9)$$

$$p = 2, q = 2, \varepsilon = \frac{1}{4} \rightarrow \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{4} \|u\|_{H^4(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (1.10)$$

$$p = 4, q = \frac{4}{3}, \varepsilon = \frac{1}{4} \rightarrow \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{4} \|u\|_{H^4(\Omega)}^2 + \frac{3}{4} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (1.11)$$

Logo, utilizando (1.9) – (1.10) – (1.11), obtemos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^4(\Omega)}^2 &= \|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u\|_{H^4(\Omega)}^2 + \frac{27}{4} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u\|_{H^4(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u\|_{H^4(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{3}{4} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3}{4} \|u\|_{H^4(\Omega)}^2 + \frac{19}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{4} \|u\|_{H^4(\Omega)}^2 \leq \|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{19}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

O que implica que

$$\|u\|_{H^4(\Omega)}^2 \leq 4 \left( \|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{19}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = 4 \|u\|_{H_{bc}^4(\Omega)}^2$$

Portanto  $\|u\|_{H^4(\Omega)} \leq N \|u\|_{H_{bc}^2(\Omega)}$  o que mostra que as normas em  $H^4(\Omega)$  e  $H_{bc}^4(\Omega)$  são equivalentes. ■

### 1.2.4 A derivada generalizada de funções vetoriais

Nesta subseção apresentaremos algumas das propriedades básicas dos espaços funcionais que serão utilizados para o nosso estudo de problemas de evolução.

Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $V$  um espaço de Banach reflexivo sendo  $(\cdot, \cdot)_H$ ,  $\|\cdot\|_H$  e  $\|\cdot\|_V$  o produto interno e a norma de  $H$  e  $\|\cdot\|_V$  a norma de  $V$ , respectivamente. Sejam também  $H'$  e  $V'$  os espaços duais de  $H$  e  $V$  respectivamente, com  $\|\cdot\|_*$  a norma de  $V'$ . Representamos o par de dualidade  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$  por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Suponhamos que  $V \hookrightarrow H$  com imersão densa e contínua. Identificando  $H$  como o seu dual  $H'$  pelo Teorema de Representação de Riez temos que  $H$  pode ser identificado como um subespaço de  $V'$  e as seguintes inclusões são densas e contínuas:

$$V \hookrightarrow H \cong H' \hookrightarrow V'.$$

Observe que, para  $h \in H$  e  $v \in V$  tem-se

$$\langle h, v \rangle_{V' \times V} = (h, v)_H. \quad (1.12)$$

Mais precisamente, cada  $h \in H$  corresponde via (1.12) a um funcional linear e contínuo  $\bar{h}$  definido em  $V$ , isto é,  $\bar{h} \in V'$ . Além disso, a aplicação  $h \mapsto \bar{h}$  de  $H$  em  $V$  é linear, injetiva e contínua. Assim podemos identificar  $h$  com  $\bar{h}$ . A seguir apresentaremos o conceito de derivada fraca de uma função vetorial.

**Lema 1.1** *Seja  $X$  um espaço de Banach e  $X'$  seu dual. Sejam  $u$  e  $g$  funções de  $L^1(a, b; X)$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

**(i)**  *$u$  é q.s. igual a primitiva de  $g$ ,*

$$u(t) = \xi + \int_a^t g(s)ds, \quad \xi \in X, \text{ q.s } t \in [a, b];$$

**(ii)** *Para cada  $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$ ,*

$$\int_a^b u(t)\varphi'(t)dt = - \int_a^b g(t)\varphi(t)dt, \quad \left( \varphi' = \frac{d\varphi}{dt} \right);$$

(iii) Para cada  $\eta \in X'$

$$\frac{d}{dt} \langle \eta, u(t) \rangle = \langle \eta, g(t) \rangle$$

no sentido das distribuições sobre  $(a, b)$ .

Em vista do Lema 1.1 podemos enunciar a seguinte definição:

**Definição 1.5** A função  $g$  dada no Lema 1.1 é chamada derivada fraca de  $u$  e será representada pelos símbolos usuais, isto é,

$$g = u' = \frac{du}{dt}.$$

**Teorema 1.5** Se  $1 \leq p < \infty$  e  $V$  é reflexivo ou  $V'$  é separável, então  $(L^p(0, T; V))' \approx L^{p'}(0, T; V')$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Além disso, se  $1 < p < \infty$  e  $V$  é reflexivo então  $L^p(0, T; V)$  é reflexivo.

## O espaço $W(0, T; V, V')$

Seja  $0 < T < \infty$  um número real fixo. Considere o seguinte espaço de Banach:

$$W(0, T; V, V') = \{u \in L^p(0, T; V); u' \in L^{p'}(0, T; V')\}$$

com norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0, T; V)} + \|u'\|_{L^{p'}(0, T; V')}$$

**Proposição 1.11** Sejam  $V$  um espaço de Banach e  $H$  um espaço de Hilbert tais que  $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V$ . Então:

(i) A seguinte imersão  $W(0, T; V, V') \hookrightarrow C([0, T]; H)$  é contínua. Ou seja, toda função  $u \in W(0, T; V, V')$  é igual q.s a uma função contínua com valores em  $H$ . Além disso

$$\frac{1}{2} \|u\|_H^2 = \langle u'(t), u(t) \rangle_{V', V}$$

(ii) Sejam  $u, w \in W(0, T : V, V')$ . Então vale a seguinte fórmula (de Green)

$$\int_0^T \langle u'(t), w(t) \rangle + \langle w'(t), u(t) \rangle dt = (u(T), w(T))_H - (u(0), w(0))_H$$

(iii) Se  $u \in W(0, T; V, V')$  então

$$\langle u'(t), v \rangle_{V', V} = \frac{d}{dt}(u(t), v)_H \text{ em } D'(0, T)$$

para todo  $v \in V$ .

O próximo teorema tem um papel fundamental neste trabalho.

**Teorema 1.6 (Aubin-Lions)** Sejam  $B_0, B$  e  $B_1$  espaços de Banach reflexivos tais que  $B_0 \subset B \subset B_1$ ,  $B_0 \hookrightarrow B$  é compacta e  $B \hookrightarrow B_1$  é contínua. Sejam  $1 < p < \infty$  e  $1 < q < \infty$  e

$$W(0, T, B_0, B_1) = \{u \in L^p(0, T; B_0); u' \in L^q(0, T; B_1)\}.$$

Então,  $W(0, T, B_0, B_1) \hookrightarrow L^p(0, T; B)$  é compacta.

### 1.3 Resultados de equações diferenciais ordinárias

Nessa seção vamos enunciar um resultado muito importante da teoria de EDO's, que é uma ferramenta fundamental na aplicação do método de Galerkin. Todos os resultados desta seção podem ser encontrados em [8].

**Definição 1.6 (Função de Caratheodóry)** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Dizemos que a função  $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Caratheodóry se satisfaz as seguintes propriedades:

(i) A função  $x \mapsto f(x, y)$  é mensurável para todo  $y \in \mathbb{R}^m$  fixo;

(ii) A função  $y \mapsto f(x, y)$  é contínua para quase todo  $x \in \Omega$  fixo.

Denotaremos por  $CAR(\Omega \times \mathbb{R}^m)$  o conjunto das funções de Caratheodóry.

**Lema 1.2** Sejam  $p, q \in [1, \infty)$ ,  $h \in CAR(\Omega \times \mathbb{R}^m)$ . Se existe uma função  $g \in L^q(\Omega)$  e uma constante  $c \in \mathbb{R}$  tais que

$$|h(x, y)| \leq g(x) + c \sum_{i=1}^m |y_i|^{p/q} \quad \text{q.s. } x \in \Omega, \forall y \in \mathbb{R}^m \quad (1.13)$$

Então  $h(x, \phi_i(x), \phi_m(x)) \in CAR(\Omega \times \mathbb{R}^m)$  para toda  $\phi_i(x) \in L^q(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

**Teorema 1.7 (Caratheodóry)** Sejam  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  aberto,  $f$  é uma função de Caratheodóry e  $U$  um compacto de  $D$ . Se  $f$  satisfaz a condição (1.13) com  $(t, y) \in U$  então existe um intervalo  $I$  e uma função contínua  $y(t)$  tais que  $(t, y(t)) \in D$ ,  $\forall t \in I$  e  $y(t)$  satisfaz o problema

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.14)$$

**Corolário 1.1 (Prolongamento de Solução)** Sejam  $D = [0, T] \times \Omega$  e  $f$  uma função de Caratheodóry. Seja  $y(t)$  uma solução de (1.14) definida no intervalo  $I$ . Se  $\|y(t)\| \leq M$ ,  $\forall t \in I$  e  $M$  independente de  $t$ . Então  $y(t)$  possui um prolongamento em  $[0, T]$ .

## 1.4 Método de Galerkin

Para resolvemos uma equação de operadores  $Fu = y$  definida no espaço de Banach  $B$  podemos considerar problemas aproximados  $F_m u_m = y_m$  em subespaços  $B_m$  com dimensão finita.

Se as sequências  $(F_m)$  e  $(B_m)$  convergem, em algum sentido, para  $F$  e  $B$ , respectivamente, então gostaríamos de obter da sequência de soluções aproximadas  $(u_m)$  de  $F_m u_m = y_m$  em  $B_m$  uma subsequência  $(u_{m_j})$  convergindo para a solução de  $Fu = y$  em  $B$ . Por exemplo,

se  $B$  é um espaço de Banach com base  $(w_k)_{k=1}^{\infty}$  podemos considerar  $B_m$  o subespaço gerado pelas  $m$  primeiras funções de  $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ , ou seja,  $B_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ .

Sejam  $P_m : B \rightarrow B_m$  projeções definidas por  $P_m u = \sum_{k=1}^m x_k w_k = u_m$  então, consideramos o seguinte problema aproximado em  $B_m$ :

$$F_m u_m = P_m y \quad \text{para } u_m \in B_m \quad (1.15)$$

com  $F_m = P_m F$ .

O sistema (1.15) é chamado *método ou aproximação de Galerkin* da equação  $Fu = y$ .

Portanto, aplicando o seguinte resultado de compacidade fraca para espaços de Banach reflexivos obtemos um algoritmo para resolução do problema  $Fu = y$ .

**Teorema 1.8 (Teorema de compacidade fraca)** *Seja  $B$  uma espaço de Banach reflexivo. Se a sequência  $(w_k)_{k=1}^{\infty} \subset B$  é limitada então existem  $u \in B$  e uma subsequência  $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty}$  de  $(w_k)_{k=1}^{\infty}$  tais que  $u_{k_j} \rightharpoonup u$ .*

Em resumo,

1. Mostrar que o problema aproximado (1.15) tem uma única solução para cada  $m$  fixo;
2. Determinar estimativas *a priori* da sequência de soluções  $(u_m)$ , ou seja, obter  $\|u_m\| \leq C$  com  $C > 0$  uma constante que independe de  $m$ , e portanto, obter uma subsequência  $(u_{m_j})$  que converge fracamente para  $u$ ;
3. Usar as propriedades de  $F$ , do espaço  $B$  e do esquema de Galerkin para mostrar que  $u$  é solução do problema original, ou seja, mostrar que  $F_m u_m = P_m y \rightarrow Fu = y$ , em certo sentido.

Chama-se *método de Faedo-Galerkin* o método de Galerkin aplicada à problemas de evolução. Foi proposto por Sandro Faedo [9], trinta e quatro anos após B. Galerkin [10] publicar o seu método.

Para mais detalhes sobre o método de Galerkin e suas variantes consulte [4].

# Capítulo 2

## Equação de Cahn-Hilliard

Nesse capítulo provaremos a existência de solução da equação de Cahn-Hilliard usando o método de Faedo-Galerkin. Especificamente, provaremos o seguinte resultado:

**Teorema 2.1** *Suponha que  $u_0 \in H^1(\Omega)$ . Então existe uma solução*

$$u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap W(0, T; H_{bc}^2(\Omega), (H^1(\Omega))')$$

*que satisfaz*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \xi^2 \Delta (\Delta u - u^3 + u) = 0 \quad em \quad \Omega \times (0, T), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \eta} = 0 \quad em \quad \partial \Omega \times (0, T), \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad em \quad \Omega. \quad (2.3)$$

Para facilitar a compreensão, dividimos a demonstrações em seções. Iniciaremos com a formulação fraca do problema (2.1)-(2.2)-(2.3).

## 2.1 Formulação Fraca

Para obtermos a formulação fraca de (2.1)-(2.2)-(2.3), consideremos  $u(x, t)$  uma solução clássica do problema e associe a esta solução a seguinte aplicação  $u : [0, T] \rightarrow C^4(\Omega)$ . Notamos que para cada  $t \in [0, T]$ ,  $u(x, t)$  associa um elemento  $u(t)$  de  $C^4(\Omega)$ . Desta forma, escrevemos (2.1) do seguinte modo:

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} + \xi^2 \Delta(\Delta u(t)) - u^3(t) + u(t) = 0. \quad (2.4)$$

Multiplicando a equação (2.4) por  $\psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  e integrando em  $\Omega$ , obtém-se

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial t} \psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta(\Delta u(t)) \psi \, dx - \xi^2 \int_{\Omega} \Delta(u^3(t) - u(t)) \psi \, dx = 0. \quad (2.5)$$

Analisamos cada termo de (2.5) separadamente. Como  $u(x, t)$  é uma solução clássica do problema (2.1)-(2.2)-(2.3), então segue que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial t} \psi \, dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \psi \, dx. \quad (2.6)$$

Para o segundo termo, utilizamos a fórmula de Green clássica para obter

$$\int_{\Omega} \Delta(\Delta u(t)) \psi \, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla(\Delta u(t)) \cdot \psi \cdot \eta \, ds - \int_{\Omega} \nabla(\Delta u(t)) \cdot \nabla \psi \, dx. \quad (2.7)$$

Segue da condição (2.2) que

$$\int_{\partial\Omega} \nabla(\Delta u(t)) \cdot \psi \cdot \eta \, ds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta u(t)}{\partial \eta} \cdot \psi \, ds = 0.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} \Delta(\Delta u(t)) \psi \, dx = - \int_{\Omega} \nabla(\Delta u(t)) \cdot \nabla \psi \, dx.$$

Agora, aplicando a fórmula de Green no terceiro termo de (2.7), obtemos

$$- \int_{\Omega} \nabla(\Delta u(t)) \cdot \nabla \psi \, dx = - \int_{\partial\Omega} \Delta u(t) \nabla \psi \cdot \eta \, ds + \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \, dx$$

o que implica

$$-\int_{\Omega} \nabla(\Delta u(t)) \cdot \nabla \psi \, dx = -\int_{\partial\Omega} \Delta u(t) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \, ds + \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \, dx.$$

Mas,  $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0$  em  $\partial\Omega$ . Portanto,

$$-\int_{\Omega} \nabla(\Delta u(t)) \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \, dx. \quad (2.8)$$

Aplicando novamente a fórmula de Green clássica no terceito termo de (2.5) obtemos:

$$\int_{\Omega} \Delta(u^3(t) - u(t)) \psi \, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla(u^3(t) - u(t)) \cdot \psi \cdot \eta \, ds - \int_{\Omega} \nabla(u^3(t) - u(t)) \cdot \nabla \psi \, dx. \quad (2.9)$$

Note que

$$\int_{\partial\Omega} \nabla(u^3(t) - u(t)) \cdot \psi \cdot \eta \, ds = \int_{\partial\Omega} \nabla(u^3(t)) \cdot \psi \cdot \eta \, ds - \int_{\partial\Omega} \nabla u(t) \cdot \psi \cdot \eta \, ds$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \nabla(u^3(t)) \cdot \psi \cdot \eta \, ds &= \int_{\partial\Omega} 3u^2(t) \cdot \nabla u(t) \cdot \psi \cdot \eta \, ds = \int_{\partial\Omega} 3u^2(t) \cdot \psi \cdot \frac{\partial u(t)}{\partial \eta} \, ds = 0; \\ \int_{\partial\Omega} \nabla u(t) \cdot \psi \cdot \eta \, ds &= \int_{\partial\Omega} \psi \cdot \frac{\partial u(t)}{\partial \eta} \, ds = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\partial\Omega} \nabla(u^3(t) - u(t)) \cdot \psi \cdot \eta \, ds = 0. \quad (2.10)$$

Por outro lado, pela fórmula de Green clássica novamente tem-se

$$-\int_{\Omega} \nabla(u^3(t) - u(t)) \cdot \nabla \psi \, dx = -\int_{\partial\Omega} (u^3(t) - u(t)) \cdot \nabla \psi \cdot \eta \, ds + \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \, dx.$$

Mas,

$$-\int_{\partial\Omega} (u^3(t) - u(t)) \cdot \nabla \psi \cdot \eta \, ds = -\int_{\partial\Omega} (u^3(t) - u(t)) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \, ds = 0$$

o que implica

$$-\int_{\Omega} \nabla(u^3(t) - u(t)) \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \, dx \quad (2.11)$$

Combinando (2.10) e (2.11) com (2.9) obtemos

$$\int_{\Omega} \Delta(u^3(t) - u(t)) \psi \, dx = \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \, dx. \quad (2.12)$$

Finalmente, utilizando (2.6), (2.8) em (2.12) com (2.5), temos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \, dx - \xi^2 \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \, dx = 0 \quad (2.13)$$

para toda  $\psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ .

Agora, usando o fato que  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  é denso em  $H_{bc}^2(\Omega)$  concluímos que (2.13) vale  $\forall \psi \in H_{bc}^2(\Omega)$ . De fato, por esta densidade, para  $\psi \in H_{bc}^2(\Omega)$  existe uma sequência  $(\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  tal que  $\psi_n \rightarrow \psi$  em  $H_{bc}^2(\Omega)$ . Assim,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \psi_n \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi_n \, dx - \xi^2 \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi_n \, dx = 0 \quad (2.14)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(t) \psi_n \, dx &\rightarrow \int_{\Omega} u(t) \psi \, dx; \\ \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi_n \, dx &\rightarrow \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \, dx; \\ \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi_n \, dx &\rightarrow \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \, dx. \end{aligned}$$

E passando o limite em (2.14), para  $n \rightarrow \infty$  temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \, dx - \xi^2 \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \, dx = 0. \quad (2.15)$$

para toda  $\psi \in H_{bc}^2(\Omega)$ .

Pelos argumentos apresentados até obtermos (2.15), escolhemos a seguinte tríade fundamental:

$$V = H_{bc}^2(\Omega), \quad H = L^2(\Omega), \quad V' = (H^1(\Omega))'. \quad (2.16)$$

Note também que as imersões  $H_{bc}^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))'$  são contínuas e densas nessa ordem. Em resumo, dizemos que  $u \in W(0, T; H_{bc}^2(\Omega), (H^1(\Omega))')$  é uma solução fraca do problema (2.1)-(2.2)-(2.3) se satisfizer

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)\psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta u(t)\Delta\psi \, dx - \xi^2 \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t))\Delta\psi \, dx = 0, \quad \forall \psi \in H_{bc}^2(\Omega); \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Note que, pela Proposição 1.11(ii) do Capítulo 1, a condição  $u(0) = u_0$  faz sentido, pois  $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$ .

## 2.2 Formulação aproximada

Nosso objetivo é aplicar o método de Faedo-Galerkin para resolver o problema (2.17). Para isto, consideraremos uma base formada pelas autofunções  $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$  do operador laplaciano com correspondentes autovalores  $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$  e condição de Neumann na fronteira, ou seja, as soluções do problema

$$\begin{aligned} \Delta\phi_i &= -\lambda_i\phi_i \quad \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial\phi_i}{\partial\eta} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Deste modo, nossos espaços de aproximação serão  $V_m = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$  e temos  $H_{bc}^2(\Omega) = \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m}$ .

Para obter o problema aproximado aplicamos o operador projeção  $\mathcal{P}_m : H_{bc}^2(\Omega) \rightarrow V_m$  em (2.17) e assim, obtemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t)\psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta u_m(t)\Delta\psi \, dx - \xi^2 \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t))\Delta\psi \, dx = 0, \quad \forall \psi \in V_m. \quad (2.18)$$

Além disso, escolhendo  $u_{0m} = \mathcal{P}_m(u_0)$  tem-se  $u_m(0) = u_{0m}$  e

$$\|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)} = \|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)} = \|\mathcal{P}_m(u_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_m \|\mathcal{P}_m(u_0)\|_{L^2(\Omega)} = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.19)$$

Portanto,  $u_m(t)$  é uma solução aproximada do problema (2.1)-(2.2)-(2.3), se  $u_m(t) \in V_m$  e satisfaz

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta u_m(t) \Delta \psi \, dx - \xi^2 \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta \psi \, dx = 0, \quad \forall \psi \in V_m, \\ u_m(0) = u_{0m}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Em particular, tomando  $\psi = \phi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \phi_j \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta u_m(t) \Delta \phi_j \, dx = \xi^2 \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta \phi_j \, dx. \quad (2.21)$$

Observe que, para cada  $m$ , (2.21) é um sistema de equações diferenciais ordinárias. De fato, como

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \phi_i$$

então (2.21) torna-se

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \phi_i \right) \phi_j \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \phi_i \right) \Delta \phi_j \, dx \\ &= \xi^2 \int_{\Omega} u_m^3(t) \Delta \phi_j \, dx - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \phi_i \Delta \phi_j \, dx, \end{aligned}$$

e segue das propriedades da integral que:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \alpha'_{im}(t) \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \, dx + \xi^2 \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \int_{\Omega} \Delta \phi_i \Delta \phi_j \, dx = \\ &= \xi^2 \int_{\Omega} u_m^3(t) \Delta \phi_j \, dx - \xi^2 \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \int_{\Omega} \phi_i \Delta \phi_j \, dx. \end{aligned}$$

Fazendo  $A = [(\phi_i, \phi_j)_{L^2(\Omega)}]_{m \times m}$ ,  $B = [(\Delta \phi_i, \Delta \phi_j)_{L^2(\Omega)}]_{m \times m}$ ,  $C = [(\phi_i, \Delta \phi_j)_{L^2(\Omega)}]_{m \times m}$  e  $\alpha(t) = [\alpha_{im}(t)]_{m \times 1}$  tem-se

$$A\alpha'(t) + \xi^2 B\alpha(t) = \xi^2 [(u_m^3(t), \Delta \phi_j)_{L^2(\Omega)}]_{m \times 1} - \xi^2 C\alpha(t).$$

Além disso,  $\alpha(0) = [(u_0, \phi_i)_{L^2(\Omega)}] := \alpha_0$ .

Por outro lado,  $A = I_m$ , pois  $(\phi_i, \phi_j)_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}$  e deste modo obtemos

$$\alpha'(t) + \xi^2 B \alpha(t) = \xi^2 [(u_m^3(t), \Delta \phi_j)_{L^2(\Omega)}] - \xi^2 C \alpha(t). \quad (2.22)$$

Portanto, para cada  $m$ , (2.21) é o seguinte sistema de EDO's não lineares:

$$\begin{cases} \alpha'(t) = K \alpha(t) + \xi^2 [(u_m^3(t), \Delta \phi_j)_{L^2(\Omega)}], \\ \alpha(0) = \alpha_0 \end{cases} \quad (2.23)$$

com  $K = -\xi^2 B - \xi^2 C$ .

### 2.2.1 Solução do problema aproximado

Nesta subseção mostramos que, para cada  $m$  fixo, o problema de valor inicial (2.23) possui solução local. Para isto, utilizamos o teorema de Caratheodóry (veja Teorema 1.7 capítulo 1).

Primeiro, provamos que a função

$$\Phi(t, \alpha) = K \alpha(t) + \xi^2 [(u_m^3(t), \Delta \phi_j)_{L^2(\Omega)}]$$

é localmente contínua para  $t$  fixo e localmente mensurável para quase todo  $\alpha$  fixo.

Assim, para  $0 < t < T$  fixo, temos que

$$|\Phi(t, \alpha_1) - \Phi(t, \alpha_2)| \leq \|K\| |\alpha_1 - \alpha_2| + \xi^2 |[(u_{m_1}^3(t) - u_{m_2}^3(t), \Delta \phi_j)_{L^2(\Omega)}]|.$$

Por simplicidade da notação, denotamos  $u_{m_1}(t) = u_{m_1}$  e  $u_{m_2}(t) = u_{m_2}$ . Utilizando a definição de norma em  $\mathbb{R}^n$  e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos que

$$\begin{aligned} |[(u_{m_1}^3 - u_{m_2}^3, \Delta \phi_j)]|^2 &= \sum_{j=1}^m (u_{m_1}^3 - u_{m_2}^3, \Delta \phi_j)_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^m \|u_{m_1}^3 - u_{m_2}^3\|_{L^1(\Omega)}^2 \|\Delta \phi_j\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \\ &\leq \|u_{m_1}^3 - u_{m_2}^3\|_{L^1(\Omega)}^2 \sum_{j=1}^m \|\Delta \phi_j\|_{L^\infty(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|[(u_{m_1}^3 - u_{m_2}^3, \Delta\phi_j)]| \leq \|u_{m_1}^3 - u_{m_2}^3\|_{L^1(\Omega)} \left( \sum_{j=1}^m \|\Delta\phi_j\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, pela desigualdade de Hölder tem-se

$$\begin{aligned} \|u_{m_1}^3 - u_{m_2}^3\|_{L^1(\Omega)} &= \|(u_{m_1} - u_{m_2})(u_{m_1}^2 + u_{m_1}u_{m_2} + u_{m_2}^2)\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \left( \int_\Omega |u_{m_1} - u_{m_2}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_\Omega |u_{m_1}^2 + u_{m_1}u_{m_2} + u_{m_2}^2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |[(u_{m_1}^3(t) - u_{m_2}^3, \Delta\phi_j)]| &\leq C_1 \|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{L^2(\Omega)} \|u_{m_1}^2 + u_{m_1}u_{m_2} + u_{m_2}^2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_1 \|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{L^2(\Omega)} (\|u_{m_2}^2\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{m_1}\|_{L^4(\Omega)} \|u_{m_2}\|_{L^4(\Omega)} + \|u_{m_2}^2\|_{L^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

com  $C_1 = \left( \sum_{j=1}^m \|\Delta\phi_j\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ . Agora, note que  $\|u_{m_1}^2\|_{L^2(\Omega)} = \|u_{m_1}\|_{L^4(\Omega)}^2$  e que pela Desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\|u_{m_1}\|_{L^4(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^m |\alpha_{j_1}| \|\phi_j\|_{L^4(\Omega)} \leq \left( \sum_{i=1}^m |\alpha_{im_1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^m \|\phi_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C_2 |\alpha_1|, \quad (2.24)$$

com  $C_2 = \left( \sum_{j=1}^m \|\phi_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ . Analogamente existe  $C_3 > 0$ , tal que  $\|u_{m_2}\| \leq C_3 |\alpha_2|$ . Logo,

$$|[(u_{m_1}^3 - u_{m_2}^3, \Delta\phi_j)_{L^2(\Omega)}]| \leq (C_2^2 |\alpha_1|^2 + C_2 C_3 |\alpha_1| |\alpha_2| + C_3^2 |\alpha_2|^2) \|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.25)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \sum_{i=1}^m (\alpha_{im_1} - \alpha_{im_2}) \phi_i \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^m |\alpha_{im_1} - \alpha_{im_2}| \|\phi_i\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^m |\alpha_{im_1} - \alpha_{im_2}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^m \|\phi_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_4 |\alpha_1 - \alpha_2|$$

$$\text{com } C_4 = \left( \sum_{i=1}^m \|\phi_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \text{ Assim,}$$

$$|(u_{m_1}^3 - u_{m_2}^3, \Delta\phi_j)_{L^2(\Omega)}| \leq C_1 C_4 (C_2^2 |\alpha_1|^2 + C_2 C_3 |\alpha_1| |\alpha_2| + C_3^2 |\alpha|^2) |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

E tomando  $C_5 = \max\{C_1 C_4 \cdot C_2^2, C_1 C_4 \cdot C_2 \cdot C_3, C_1 C_4 \cdot C_3^2\}$ , temos que

$$|(u_{m_1}^3 - u_{m_2}^3, \Delta\phi_j)_{L^2(\Omega)}| \leq C_5 (|\alpha_1|^2 + |\alpha_1| |\alpha_2| + |\alpha_2|^2) |\alpha_1 - \alpha_2|. \quad (2.26)$$

Assim, de (2.26), temos que

$$|\Phi(t, \alpha_1) - \Phi(t, \alpha_2)| \leq \|K\| |\alpha_1 - \alpha_2| + C_5 \xi^2 (|\alpha_1|^2 + |\alpha_1| |\alpha_2| + |\alpha_2|^2) |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

Agora, tomado  $\alpha_1, \alpha_2 \in \overline{B_R(0)}$ , obtemos que

$$|\alpha_1|^2 + |\alpha_1| |\alpha_2| + |\alpha_2|^2 \leq 3R^2.$$

Logo,

$$|\Phi(t, \alpha_1) - \Phi(t, \alpha_2)| \leq (\|K\| + \xi^2 C_5 3R^2) |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

Portanto,  $\Phi(t, \alpha)$  é localmente lipschitz para  $t$  fixo, logo, localmente contínua.

Observamos que para  $\alpha$  fixo, temos que  $K\alpha$  é fixo e  $u_m = \sum_{j=1}^m \alpha \phi_j$  é constante, logo, contínua e, portanto, mensurável. Além disso, o termo  $(u_m^3, \Delta\phi_j)_{L^2(\Omega)}$  independem de  $t$ , uma vez que  $\alpha$  é fixo; logo, é constante e portanto mensurável. Assim, para  $\alpha$  fixo,  $\Phi(t, \alpha)$  é mensurável.

Por outro lado, de

$$|\Phi(t, \alpha)| \leq \|K\| |\alpha| + \xi^2 |(u_m^3, \Delta\phi_j)_{L^2(\Omega)}|, \quad (2.27)$$

e como

$$|[(u_m^3, \Delta\phi_j)_{L^2(\Omega)}]|^2 = \sum_{j=1}^m |(u_m^3, \Delta\phi_j)_{L^2(\Omega)}|^2.$$

E, pela desigualdade de Hölder, obtemos que:

$$|(u_m^3, \Delta\phi_j)_{L^2(\Omega)}| \leq \|u_m^3\|_{L^{\frac{4}{3}}(\Omega)} \|\Delta\phi_j\|_{L^4(\Omega)} = \|u_m\|_{L^4(\Omega)}^3 \|\Delta\phi_j\|_{L^4(\Omega)}.$$

Logo,

$$|[(u_m^3, \Delta\phi_j)_{L^2(\Omega)}]| \leq C_6 \|u_m\|_{L^4(\Omega)}^3,$$

$$\text{com } C_6 = \left( \sum_{j=1}^m \|\Delta\phi_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De modo análogo ao cálculo de (2.24), existe  $C_7 > 0$  tal que  $\|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)} \leq C_7 |\alpha|$ , temos que

$$|\Phi(t, \alpha)| \leq \|K\| |\alpha| + \xi^2 C_6 \|u_m\|_{L^4(\Omega)}^3 \leq \|K\| |\alpha| + \xi^2 C_6 C_7^3 |\alpha|^3. \quad (2.28)$$

Agora, tomando  $\alpha \in \overline{B_R(0)}$ , temos que

$$|\Phi(t, \alpha)| \leq \|K\| R + C_6 C_7^3 R^3.$$

E como  $\|K\| R + C_6 C_7^3 R^3$  é integrável, segue do Teorema de Caratheodóry, que existe  $\alpha_m(t)$ ,  $t \in [0, t_m]$  solução local para (2.23), implicando na existência de  $u_m(t)$  solução local de (2.20) tal que

$$u_m \in C([0, t_m]; V_m), \quad u'_m \in L^1(0, t_m; V'_m).$$

## 2.3 Estimativas *a priori*

Nessa seção, estabeleceremos algumas estimativas *a priori* para a norma da função  $u_m(t)$ .

## Estimativa 1

Tomando  $\psi = u_m(t)$  em (2.18) obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(t)|^2 dx + \xi^2 \int_{\Omega} |\Delta u_m(t)|^2 dx = \xi^2 \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta u_m(t) dx. \quad (2.29)$$

Aplicando o Teorema de Green obtemos

$$\begin{aligned} \xi^2 \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta u_m(t) dx &= \xi^2 \int_{\partial\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \nabla u_m(t) \cdot \eta ds \\ &\quad - \xi^2 \int_{\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \nabla u_m(t) dx. \end{aligned}$$

Mas, note que

$$\xi^2 \int_{\partial\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \nabla u_m(t) \cdot \eta ds = \xi^2 \int_{\partial\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \frac{\partial u_m(t)}{\partial \eta} ds.$$

Porém,

$$\frac{\partial u_m(t)}{\partial \eta} = \nabla u_m(t) \cdot \eta = \nabla \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \phi_i \right) \cdot \eta = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \cdot \nabla \phi_i \cdot \eta_i = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} = 0,$$

em  $\partial\Omega$ . Logo,

$$\xi^2 \int_{\partial\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \nabla u_m(t) \cdot \eta ds = 0, \quad (2.30)$$

o que implica que

$$\xi^2 \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta u_m(t) dx = -\xi^2 \int_{\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \nabla u_m(t) dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \xi^2 \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta u_m(t) dx &= -\xi^2 \int_{\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \nabla u_m(t) dx \\ &= -\xi^2 \int_{\Omega} 3|u_m(t)|^2 |\nabla u_m(t)|^2 dx - \nabla u_m(t) \cdot \nabla u_m(t) dx \\ &= -\xi^2 \int_{\Omega} 3|u_m(t)|^2 |\nabla u_m(t)|^2 dx + \xi^2 \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Logo, (2.29) torna-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \xi^2 \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = -\xi^2 \int_{\Omega} 3|u_m^2(t)| |\nabla u_m(t)|^2 dx + \xi^2 \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^2 dx,$$

e dessa forma, temos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \xi^2 \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 3\xi^2 \int_{\Omega} |u_m(t)|^2 |\nabla u_m(t)|^2 dx = \xi^2 \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^2 dx. \quad (2.32)$$

Vamos agora utilizar a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg no segundo membro da desigualdade acima. Assim, escolhendo  $m = r = q = p = 2$  e  $j = 1$  obtemos  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Logo, existe uma constante positiva  $C_8$  tal que

$$\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_8 \|u_m(t)\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_8^2 \|u_m(t)\|_{H^2(\Omega)} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

E pela equivalência das normas de  $H^2(\Omega)$  e  $H_{bc}^2(\Omega)$ , existe  $C_9 > 0$  tal que

$$\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_9 C_8^2 \|u_m(t)\|_{H_{bc}^2(\Omega)} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^2 dx &\leq C_8^2 C_9 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \|u_m(t)\|_{H_{bc}^2} \\ &= C_8^2 C_9 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \left( \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta_1 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young com  $p = q = 2$ , temos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{10} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.33)$$

$$\text{com } C_{10} = \frac{C_8^2 C_9}{2} + \frac{\eta_1}{2}.$$

Substituindo (2.33) em (2.32) obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi^2}{2} \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \xi^2 \int_{\Omega} (3u_m^2(t)(\nabla u_m(t))^2) dx \leq C_{11} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.34)$$

com  $C_{11} = C_{10} + 1$ . Assim, obtemos de (2.34) que

$$\frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2C_{11} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall com  $\beta(t) = \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ ,  $\phi(t) = 2C_{11}$  e  $\psi(t) = 0$  obtemos

$$\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{2C_{11}T} \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.35)$$

com  $t \in (0, t_m)$ .

Além disso, por (2.19), (2.35) torna-se

$$\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{2C_{11}T} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.36)$$

Portanto, para cada  $m$ , a norma da solução  $u_m(t)$  é limitada por uma constante que independe de  $m$ . Isso implica que  $u_m(t)$  está definida em  $[0, T]$ .

Assim, por (2.36) tem-se

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{12} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.37)$$

com  $C_{12} = \sqrt{e^{2C_{11}T}}$ . Como  $L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \subset L^2(0, T, L^2(\Omega))$ , em particular, tem-se

$$\|u_m\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq C_{12} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.38)$$

Agora, integrando (2.34) em  $[0, T]$  e usando (2.37), temos que

$$\begin{aligned} & \|u_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \xi^2 \int_0^T \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + 2\xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} (3u_m^2(t)(\nabla u_m(t))^2) dx dt \\ & \leq \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2C_{11} \int_0^T \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq 2C_{11}T \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2C_{11}T \|u_m\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leq (1 + 2C_{11}TC_{12}^2) \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\int_0^T \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C_{13} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.39)$$

com  $C_{13} = (1 + 2C_{11}TC_{12}^2)/\xi^2$ . Portanto, por (2.38), (2.39) temos que

$$\|u_m\|_{L^2(0,T;H_b^2(\Omega))} \leq C_{14} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.40)$$

com  $C_{14} = \sqrt{C_{12}^2 + C_{13}}$ .

## Estimativa 2

No que segue aplicaremos repetidas vezes o Teorema de Green. Assim,

$$\int_{\Omega} \Delta u_m(t) \Delta \psi dx = \int_{\partial\Omega} \Delta u_m(t) \nabla \psi \cdot \eta ds - \int_{\Omega} \nabla \Delta u_m(t) \nabla \psi dx. \quad (2.41)$$

Como  $\psi \in V_m$ , então

$$\int_{\partial\Omega} \Delta u_m(t) \cdot \nabla \psi \cdot \eta ds = 0,$$

logo,

$$\int_{\Omega} \Delta u_m(t) \Delta \psi dx = - \int_{\Omega} \nabla \Delta u_m(t) \nabla \psi dx.$$

Novamente pelo teorema de Green tem-se

$$- \int_{\Omega} \nabla \Delta u_m(t) \nabla \psi dx = - \int_{\partial\Omega} \nabla \Delta u_m(t) \cdot \psi \cdot \eta ds + \int_{\Omega} \Delta^2 u_m(t) \psi dx.$$

E como,

$$\nabla \Delta u_m(t) \cdot \eta = \nabla \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta \phi_i \right) \cdot \eta = \nabla \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i (-\lambda_i \phi_i) \right) \cdot \eta = - \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i \nabla \phi_i \cdot \eta_i = 0,$$

em  $\partial\Omega$ , obtemos

$$- \int_{\partial\Omega} \nabla \Delta u_m(t) \cdot \psi \cdot \eta ds = 0. \quad (2.42)$$

Então,

$$-\int_{\Omega} \nabla \Delta u_m(t) \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} \Delta^2 u_m(t) \psi \, dx.$$

Assim, concluímos que

$$\int_{\Omega} \Delta u_m(t) \Delta \psi \, dx = \int_{\Omega} \Delta^2 u_m(t) \psi \, dx = \int_{\Omega} \Delta(\Delta u_m(t)) \psi \, dx. \quad (2.43)$$

Novamente pelo teorema de Green tem-se

$$\int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta \psi \, dx = \int_{\partial\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \nabla \psi \cdot \eta \, ds - \int_{\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \nabla \psi \, dx.$$

Como  $\psi \in V_m$ , temos que

$$\int_{\partial\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \nabla \psi \cdot \eta \, ds = 0.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta \psi \, dx = - \int_{\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \nabla \psi \, dx.$$

Aplicando novamente pelo teorema de Green no segundo membro da igualdade acima, temos que

$$-\int_{\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \nabla \psi \, dx = - \int_{\partial\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \psi \cdot \eta \, ds + \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \psi \, dx.$$

Contudo, observe que

$$\int_{\partial\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \psi \cdot \eta \, ds = \int_{\partial\Omega} \nabla u_m^3(t) \cdot \psi \cdot \eta \, ds - \int_{\partial\Omega} \nabla u_m(t) \cdot \psi \cdot \eta \, ds.$$

Logo,

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u_m^3(t) \cdot \psi \cdot \eta \, ds = \int_{\partial\Omega} 3u_m^2(t) \nabla u_m(t) \cdot \psi \cdot \eta \, ds = 0,$$

e também observe que

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u_m(t) \cdot \psi \cdot \eta \, ds = 0.$$

Logo,

$$\int_{\partial\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \psi \cdot \eta \, ds = 0. \quad (2.44)$$

Então,

$$\int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta \psi \, dx = \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \psi \, dx. \quad (2.45)$$

Usando (2.43) e (2.45) em (2.18) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \psi \, dx &= -\xi^2 \int_{\Omega} \Delta u_m(t) \Delta \psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta \psi \, dx, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \psi \, dx &= -\xi^2 \int_{\Omega} \Delta(\Delta u_m(t)) \psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \psi \, dx, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \psi \, dx &= -\xi^2 \int_{\Omega} \Delta(\Delta u_m(t) - u_m^3(t) + u_m(t)) \psi \, dx. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Fazendo  $v_m(t) = \Delta u_m(t) - u_m^3(t) + u_m(t)$ , podemos escrever:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \psi \, dx = -\xi^2 \int_{\Omega} \Delta v_m(t) \psi \, dx. \quad (2.47)$$

Agora, tomando  $\psi = v_m(t)$  em (2.47), obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) v_m(t) \, dx = -\xi^2 \int_{\Omega} \Delta v_m(t) v_m(t) \, dx \quad (2.48)$$

e pelo Teorema de Green tem-se

$$-\xi^2 \int_{\Omega} \Delta v_m(t) v_m(t) \, dx = -\xi^2 \int_{\partial\Omega} v_m(t) \nabla v_m(t) \cdot \eta \, ds + \xi^2 \int_{\Omega} \nabla v_m(t) \nabla v_m(t) \, dx.$$

Por (2.42) e (2.44) e pela definição de  $v_m(t)$  obtemos

$$\begin{aligned} \nabla v_m(t) \cdot \eta &= \nabla(\Delta u_m(t) + u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \eta, \\ &= \nabla(\Delta u_m(t)) \cdot \eta - \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \eta, \\ &= \frac{\partial \Delta u_m(t)}{\partial \eta} - 3u_m(t)^2 \frac{\partial u_m(t)}{\partial \eta} + \frac{\partial u_m(t)}{\partial \eta}, \\ &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Portanto,

$$-\xi^2 \int_{\Omega} \Delta v_m(t) v_m(t) \, dx = \xi^2 \int_{\Omega} |\nabla v_m(t)|^2 \, dx. \quad (2.49)$$

Da definição de  $v_m(t)$  e utilizando a fórmula de Green, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) v_m(t) \, dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) (\Delta u_m(t) - u_m^3(t) + u_m(t)) \, dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \cdot \Delta u_m(t) \, dx - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \cdot u_m^3(t) \, dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \cdot u_m(t) \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(t)}^2. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Usando (2.49) e (2.50) em (2.48) obtemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(t)}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 + \xi^2 \|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.51)$$

Integrando (2.51) de  $(0, t)$  com  $t \in [0, T]$  tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(t)}^2 \, dt &= \int_0^t \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt + \int_0^t \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 \, dt - \\ &\quad + \xi^2 \int_0^t \|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \xi^2 \int_0^t \|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt + \frac{1}{2} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ &\quad \frac{1}{4} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 - \frac{1}{4} \|u_m(0)\|_{L^4(\Omega)}^4 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^4 + \xi^2 \int_0^T \|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_m(0)\|_{L^4}^4 - \frac{1}{2} \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \left[ \frac{1}{2} \|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_m(0)\|_{L^4}^4 - \frac{1}{2} \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_m(0)\|_{L^4}^4 + \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Da imersão contínua  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ , obtemos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^4 + \xi^2 \int_0^T \|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_0\|_{L^4(\Omega)}^4 + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^4). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 + \|\nabla v_m\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \\ & \leq C(\|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^4). \end{aligned} \tag{2.52}$$

Assim, de (2.37) e (2.52) obtemos que

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega))} \leq C_{15} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}; \tag{2.53}$$

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))} \leq C_{16} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}; \tag{2.54}$$

$$\|\nabla v_m\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq C_{17} \|u_0\|_{H^1(\Omega)} \tag{2.55}$$

com as constantes  $C_{15}$ ,  $C_{16}$  e  $C_{17}$  dependendo de  $\|u_0\|_{H^1(\Omega)}$ .

### Estimativa 3

Agora, obteremos uma estimativa para a derivada temporal.

De (2.46) temos que

$$\int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial t} \psi \, dx = -\xi^2 \int_\Omega \Delta(\Delta u_m(t) - u_m^3(t) + u_m(t)) \psi \, dx. \tag{2.56}$$

Utilizando a definição de  $v_m(t)$  e o Teorema de Green tem-se

$$\int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial t} \psi \, dx = \xi^2 \int_\Omega \nabla v_m(t) \nabla \psi \, dx \tag{2.57}$$

e pela desigualdade de Hölder tem-se

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{\partial u_m}{\partial t}, \psi \right\rangle \right| & \leq \xi^2 \int_\Omega |\nabla v_m(t)| |\nabla \psi| \, dx \\ & \leq \xi^2 \|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Assim,

$$\left\| \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\psi \in H^1(\Omega)} \frac{|\langle \frac{\partial u_m}{\partial t}, \psi \rangle|}{\|\psi\|_{H^1(\Omega)}} \leq \xi^2 \|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.59)$$

Elevando-se ao quadrado e integrando em  $[0, T]$  e usando (2.55) obtemos

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt \leq \xi^2 \int_0^T \|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \xi^2 C_{17}^2 \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

o que implica

$$\left\| \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T,(H^1(\Omega))')} \leq C_{17}^2 T \xi^2 \|u_0\|_{H^1(\Omega)}, \quad (2.60)$$

Portanto, pelas estimativas (2.37), (2.40), (2.53), (2.54), (2.60)

$$\begin{cases} u_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_{bc}^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \\ u'_m \text{ é limitada em } L^2(0, T, (H^1(\Omega))'). \end{cases}$$

Logo, existem  $u \in L^2(0, T; H_{bc}^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, L^4(\Omega))$  e uma subsequência  $(u_k)$  de  $(u_m)$  tais que

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u_1 && \text{em } L^2(0, T; H_{bc}^2(\Omega)), \\ u_k &\xrightarrow{*} u_2 && \text{em } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \\ u'_k &\rightharpoonup w && \text{em } L^2(0, T, (H^1(\Omega))'). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Além disso, temos que  $u_m$  é uniformemente limitada em

$$W = \{u \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)); u' \in L^2(0, T, (H^1(\Omega))')\}.$$

Como  $H^1(\Omega) \subset L^2(Q)$  é compacta e  $L^2(Q) \subset (H^1(\Omega))'$  é contínua segue do Lema de Aubin-Lions que

$$W \subset L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ é compacta.} \quad (2.62)$$

Portanto, temos as seguintes convergências:

$$u_k \rightarrow u_3 \text{ em } C([0, T]; L^2(\Omega)); \quad (2.63)$$

$$u_k \rightarrow u_4 \text{ em } L^2(\Omega \times (0, T)) \text{ q.s.} \quad (2.64)$$

Antes de fazer a passagem do limite na formulação aproximada, vamos mostrar o seguinte resultado.

**Proposição 2.1** *Dadas as convergências acima, temos que  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$  e  $w = u'_4$*

**Demonstração:**

$u_1 = u_2$ . Seja  $\phi \in L^2(0, T, H_{bc}^2(\Omega))$ . Da imersão de  $H_{bc}^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ , obtemos que  $\phi \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$ . Logo, se  $u_k \rightharpoonup u_2$  em  $L^2(0, T, H_{bc}^2(\Omega))$  então  $u_k \rightharpoonup u_1$  em  $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ .

Assim,

$$\int_0^T (u_k, \phi)_{H^1(\Omega)} dt \longrightarrow \int_0^T (u_1, \phi)_{H^1(\Omega)} dt \quad \forall \phi \in L^2(0, T, H^1(\Omega)). \quad (2.65)$$

Agora, se  $u_k \xrightarrow{*} u_2$  em  $L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ , então  $u_k \xrightarrow{*} u_2$  em  $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ , pois  $H^1(\Omega)$  é reflexivo. Logo,

$$\int_0^T (u_k, \phi)_{H^1(\Omega)} dt \longrightarrow \int_0^T (u_2, \phi)_{H^1(\Omega)} dt. \quad (2.66)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_1 - u_2, \phi)_{H^1(\Omega)} dt &= \int_0^T (u_1 - u_k + u_k - u_2, \phi)_{H^1(\Omega)} dt \\ &\leq \int_0^T (u_1 - u_k, \phi)_{H^1(\Omega)} dt + \int_0^T (u_k - u_2, \phi)_{H^1(\Omega)} dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Assim, por densidade de  $H^1(\Omega)$  em  $L^2(\Omega)$ , segue do Lema de Du Bois-Raymond que  $u_1 = u_2$ .

$u_1 = u_4$ . Como  $H_{bc}^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , temos que  $L^2(0, T, H_{bc}^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T, L^2(\Omega)) \cong L^2(Q)$ . Logo, como  $u_k \rightarrow u_4$  em  $L^2(Q)$  então  $u_k \rightharpoonup u_4$  em  $L^2(Q)$ . Segue então da unicidade do limite fraco, que  $u_1 = u_4$ .

$u_4 = u_3$ . Note que  $C([0, T], L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q)$ , de fato,

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^2(Q)} &= \int_0^T \int_\Omega |w(t)|^2 dx dt = \int_0^T \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq T \max_{t \in [0, T]} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq T \|w\|_{C([0, T], L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Assim, se  $u_k \rightarrow u_3$  em  $C([0, T], L^2(\Omega))$  então  $u_k \rightarrow u_3$  em  $L^2(Q)$ . E, desde que  $u_k \rightarrow u_3$  em  $L^2(Q)$ , segue da unicidade do limite que  $u_4 = u_3$ .

$w = u'_4$ . Note que pelo teorema da representação de Riesz podemos identificar  $L^2(0, T, (H^1(\Omega))')$  com o seu dual  $L^2(0, T, (H^1(\Omega)))$ . Mas também,  $L^2(0, T, H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T)$ , esse último sendo o espaço dual de  $\mathcal{C}_0^\infty(0, T)$  que é o espaço das funções contínuas infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto definidas em  $(0, T)$ . Sendo assim,  $u'_k \rightharpoonup w$  em  $\mathcal{D}'(0, T)$ . Como  $L^2(Q) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T)$ , segue da convergência  $u_k \rightarrow u_4$  em  $L^2(Q)$  que  $u_k \rightarrow u_4$  em  $\mathcal{D}'(0, T)$  e como o operador derivação é contínuo em  $\mathcal{D}'(0, T)$ , segue que  $u'_k \rightarrow u'_4$  em  $\mathcal{D}'(0, T)$ , e portanto,  $u'_k \rightharpoonup u'_4$  em  $\mathcal{D}'(0, T)$ . Assim, pela unicidade do limite fraco, segue que  $w = u'_4$ .  $\blacksquare$

Portanto, temos as seguintes convergências:

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T, H_{bc}^2(\Omega)); \quad (2.67)$$

$$u_k \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T, H^1(\Omega)); \quad (2.68)$$

$$u'_k \rightharpoonup u' \text{ em } L^2(0, T, (H^1(\Omega))'); \quad (2.69)$$

$$u_k \rightarrow u \text{ em } C([0, T]; L^2(\Omega)); \quad (2.70)$$

$$u_k \rightarrow u \text{ em } L^2(\Omega \times (0, T)) \text{ q.s.} \quad (2.71)$$

## 2.4 Passagem do Limite

Nessa seção faremos a passagem do limite na formulação aproximada do problema, no sentido das distribuições, utilizando as convergências obtidas em (2.67)–(2.71).

Para isso, seja  $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ . Multiplicando (2.20) por  $\varphi$  e integrando em  $[0, T]$ , obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega u'_k(t) \psi \varphi \, dx \, dt + \xi^2 \int_0^T \int_\Omega \Delta u_k(t) \Delta \psi \varphi \, dx \, dt - \xi^2 \int_0^T \int_\Omega (u_k^3(t) - u_k(t)) \Delta \psi \varphi \, dx \, dt = 0, \quad (2.72)$$

$\forall \psi \in V_m$ .

Integrando por partes tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u_k'(t) \psi \varphi \, dx \, dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} u_k(t) \psi \varphi' \, dx \, dt - \overbrace{(u_k(T), \psi \varphi(T))_{L^2(\Omega)}}^0 + \overbrace{(u_k(0), \psi \varphi(0))_{L^2(\Omega)}}^0 \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} u_k(t) \psi \varphi' \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Assim, (2.72) torna-se

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} u_k(t) \psi \varphi' \, dx \, dt + \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u_k(t) \Delta \psi \varphi \, dx \, dt \\ - \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u_k(t)) \Delta \psi \varphi \, dx \, dt = 0, \end{aligned} \quad (2.74)$$

$\forall \psi \in V_m$ .

Mas por (2.67) tem-se

$$- \int_0^T \int_{\Omega} u_k(t) \psi \varphi' \, dx \, dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} - \int_0^T \int_{\Omega} u(t) \psi \varphi' \, dx \, dt; \quad (2.75)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \Delta u_k(t) \Delta \psi \varphi' \, dx \, dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \varphi' \, dx \, dt. \quad (2.76)$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u_k(t) - u^3(t) + u(t)) \Delta \psi \varphi \, dx \, dt &= \int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u^3(t)) \Delta \psi \varphi \, dx \, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} (u_k(t) - u(t)) \Delta \psi \varphi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Pela convergência (2.67) obtemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u_k(t) - u(t)) \Delta \psi \varphi \, dx \, dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.77)$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u^3(t)) \Delta \psi \varphi \, dx \, dt \leq \\
& \leq \int_0^T \int_{\Omega} |u_k(t) - u(t)| |u_k^2(t) + u_k(t)u(t) + u^2(t)| |\Delta \psi| |\varphi| \, dx \, dt, \\
& \leq \int_0^T \int_{\Omega} \|u_k(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} \|u_k^2(t) + u_k(t)u(t) + u^2(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta \psi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\varphi\|_{L^\infty(0,T)} \, dt, \\
& \leq C_{18} \int_0^T \|u_k(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} \|u_k^2(t) + u_k(t)u(t) + u^2(t)\|_{L^2(\Omega)} \, dt, \\
& \leq C_{18} \int_0^T \|u_k(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} \left( \|u_k(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|u_k(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \|u(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|u(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \right) \, dt, \\
& \leq C_{18} \left( \|u_k\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))}^2 (1 + \|u\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))}^2) + \|u\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))}^2 \right) \|u_k - u\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \quad (2.78)
\end{aligned}$$

com  $C_{18} = \|\Delta \psi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\varphi\|_{L^\infty(0,T)}$ .

Observe que, pela estimativa (2.54), a norma  $\|u_k\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))}^2$  é limitada por uma constante que independe de  $k$ , portanto (2.78) torna-se

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u^3(t)) \Delta \psi \varphi \, dx \, dt \leq C_{19} \|u_k - u\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \quad (2.79)$$

com  $C_{19}$  uma constante que depende da norma  $\|u_0\|_{H^1(\Omega)}$ .

Além disso, como  $L^2(0, T, L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0, T, L^2(\Omega))$ , existe  $C > 0$  tal que

$$\|u\|_{L^1(0,T,L^2(\Omega))} \leq C_{20} \|u\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}.$$

Usando este fato em (2.79) obtemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u^3(t)) \Delta \psi \varphi \, dx \, dt \leq C_{21} \|u_k - u\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}.$$

Como  $\|u_k - u\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  temos que

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u^3(t)) \Delta \psi \varphi \, dx \, dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (2.80)$$

Combinando (2.77) e (2.80) concluímos que

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u_k(t)) \Delta \psi \varphi(t) \, dx \, dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \varphi(t) \, dx \, dt. \quad (2.81)$$

Assim, usando (2.75), (2.76), (2.81) podemos passar o limite em (2.74) para obter

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} u(t) \psi \varphi'(t) \, dx \, dt + \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \varphi(t) \, dx \, dt \\ & - \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \varphi(t) \, dx \, dt = 0. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Integrando por partes no primeiro termo de (2.82) tem-se

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} u'(t) \psi \varphi(t) \, dx \, dt + \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \varphi(t) \, dx \, dt \\ & - \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \varphi(t) \, dx \, dt = 0. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Portanto,  $u$  é solução do problema (2.1)-(2.2)-(2.3) no sentido das distribuições. ■

#### 2.4.1 Condição Inicial

Nessa seção mostraremos que  $u_0 = u(0)$ .

Para isso, sejam  $\psi \in H_{bc}^2(\Omega)$  e  $\varphi \in C^1(0, T)$  tal que  $\varphi(T) = 0$  tal que  $\varphi(0) \neq 0$ .

Usando integração por partes temos que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} u'(t) \psi \varphi(t) \, dx \, dt = \\ & = - \int_0^T \int_{\Omega} u(t) \psi \varphi'(t) \, dx \, dt + (u(T), \psi \varphi(T))_{L^2(\Omega)} - (u(0), \psi \varphi(0))_{L^2(\Omega)} \\ & = - \int_0^T \int_{\Omega} u(t) \psi \varphi'(t) \, dx \, dt + (u(T), \psi)_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{T} 0 - (u(0), \psi)_{L^2(\Omega)} \varphi(0) \\ & = - \int_0^T \int_{\Omega} u(t) \psi \varphi'(t) \, dx \, dt - (u(0), \psi)_{L^2(\Omega)} \varphi(0). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Usando (2.84) em (2.83) obtemos

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} u(t) \psi \varphi'(t) dx dt - (u(0), \psi)_{L^2(\Omega)} \varphi(0) = \\ & = -\xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \varphi(t) dx dt + \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \varphi(t) dx dt. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Por outro lado, pelo problema aproximado tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u'_k(t) \psi \varphi(t) dx dt &= -\xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u_k(t) \Delta \psi \varphi(t) dx dt \\ &\quad + \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u_k(t)) \Delta \psi \varphi(t) dx dt. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Efetuando novamente integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} u'_k(t) \psi \varphi(t) dx dt = \\ & = - \int_0^T \int_{\Omega} u_k(t) \psi \varphi'(t) dx dt + (u_k(T), \psi \varphi(T))_{L^2(\Omega)} - (u_k(0), \psi \varphi(0))_{L^2(\Omega)} \\ & = - \int_0^T \int_{\Omega} u_k(t) \psi \varphi'(t) dx dt + (u_k(T), \psi)_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{T \rightarrow 0} (u_k(0), \psi)_{L^2(\Omega)} \varphi(0) \\ & = - \int_0^T \int_{\Omega} u_k(t) \psi \varphi'(t) dx dt - (u_k(0), \psi)_{L^2(\Omega)} \varphi(0) \\ & = - \int_0^T \int_{\Omega} u_k(t) \psi \varphi'(t) dx dt - (u_{0k}, \psi)_{L^2(\Omega)} \varphi(0). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Assim, (2.86) torna-se

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} u_k(t) \psi \varphi'(t) dx dt - (u_{0k}, \psi)_{L^2(\Omega)} \varphi(0) = \\ & -\xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u_k(t) \Delta \psi \varphi(t) dx dt + \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u_k(t)) \Delta \psi \varphi(t) dx dt, \end{aligned} \quad (2.88)$$

Usando os mesmos argumento da seção anterior, podemos passar o limite em (2.88), para  $k \rightarrow +\infty$  e obter

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} u(t) \psi \varphi'(t) dx dt - (u_0, \psi)_{L^2(\Omega)} \varphi(0) = \\ & = -\xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \varphi(t) dx dt + \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \varphi(t) dx dt. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Comparando (2.85) e (2.89) obtemos

$$-(u_0, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi(0) = -(u(0), \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi(0)$$

o que implica

$$(u_0 - u(0), \psi)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Pela densidade de  $H_{bc}^2(\Omega)$  em  $L^2(\Omega)$  e de  $L^2(\Omega)$  em  $L_{loc}^1(\Omega)$ , segue do Lema fundamental do Cálculo Variacional que

$$u_0 - u(0) = 0 \Rightarrow u(0) = u_0. \quad \blacksquare$$

# Capítulo 3

## Equações Allen-Cahn e Allen-Cahn/Cahn-Hilliard

Neste capítulo, provaremos existência de solução para o modelo Allen-Cahn/Cahn-Hilliard, aplicando o método de Faedo-Galerkin. Para melhor compreensão, provaremos existência de solução da equação de Allen-Cahn. Como as principais dificuldades da equações de Allen-Cahn e Cahn-Hilliard serão tratadas separadamente, a análise matemática do modelo de Allen-Cahn/Cahn-Hilliard será uma compilação e organização de todos estes resultados.

### 3.1 Equação de Allen-Cahn

Provaremos o seguinte resultado de existência de solução da equação de Allen-Cahn:

**Teorema 3.1** *Suponha que  $u_0 \in H^1(\Omega)$  e considere*

$$V_1 = \left\{ u \in H^1(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\}$$

*Então existe uma solução*

$$u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap W(0, T; V_1, (H^1(\Omega))') \cap L^4(\Omega \times (0, T))$$

*que satisfaça*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \xi^2 \Delta u = u - u^3 \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{em } \Omega \quad (3.3)$$

**Demonstração:** Procederemos como no capítulo anterior e dividiremos a demonstração desse teorema em subseções para a melhor compreensão.

### 3.1.1 Formulação Fraca

Suponhamos que  $u(x, t)$  seja uma solução clássica do problema (3.1)-(3.2)-(3.3). Logo, como anteriormente, podemos associar à solução  $u(t, x)$  uma aplicação  $u : [0, T] \rightarrow C^2(\Omega)$ . Dessa forma podemos escrever

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} - \xi^2 \Delta u(t) = (u(t) - u^3(t)).$$

Seja  $\psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ . Multiplicando a equação (3.1) por  $\psi$  e integrando em  $\Omega$ , temos que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial t} \psi \, dx - \xi^2 \int_{\Omega} \Delta u(t) \psi \, dx = \int_{\Omega} (u(t) - u^3(t)) \psi \, dx.$$

Como  $u(x, t)$  é solução clássica de (3.1)-(3.2)-(3.3), então

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial t} \psi \, dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \psi \, dx.$$

e utilizando a fórmula de Green clássica, obtemos

$$-\int_{\Omega} \Delta u(t) \psi \, dx = -\int_{\partial\Omega} \nabla u(t) \cdot \psi \cdot \eta \, ds + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla \psi \, dx.$$

E, por (3.2), temos que

$$-\int_{\partial\Omega} \nabla u(t) \cdot \psi \cdot \eta \, ds = 0,$$

Dessa forma,

$$-\int_{\Omega} \Delta u(t) \psi \, dx = \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla \psi \, dx.$$

Logo, podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} (u(t) - u^3(t)) \psi \, dx \quad (3.4)$$

Da densidade de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  em  $V_1$ , obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (u(t) - u^3(t)) v \, dx \quad \forall \psi \in V_1 \quad (3.5)$$

Portanto, adotaremos a seguinte tríade fundamental para esse problema,

$$V = V_1, \quad H = L^2(\Omega), \quad V' = (H^1(\Omega))'$$

Assim, definimos que  $u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap W(0, T; V_1, (H^1(\Omega))') \cap L^4(Q)$ , para todo  $T > 0$  é solução fraca do problema (3.1)-(3.2)-(3.3) se satisfaz

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} (u(t) - u^3(t)) \psi \, dx, & \forall \psi \in V_1, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Formulação Aproximada

Escolhemos a base formada pelas autofunções do operador laplaciano definida na Seção 2.2 com condições de Neumann na fronteira.

Consideremos  $V_m = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ , com  $(\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij}$ . Aplicando o operador projeção  $\mathcal{P} : V_1 \rightarrow V_m$  em (3.6) obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \nabla u_m(t) \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} (u_m(t) - u_m^3(t)) \psi \, dx. \quad (3.7)$$

Adotaremos  $u_{0m} = \mathcal{P}(u_0)$ , e logo, tem-se  $u_{0m} \rightarrow u_0$  em  $L^2(\Omega)$ . Assim, a formulação aproximada do problema (3.1)-(3.2)-(3.3) é encontrar  $u_m \in V_m$ , ou seja,

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \phi_i(x),$$

que satisfaça

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \nabla u_m(t) \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} (u_m(t) - u_m^3(t)) \psi \, dx, & \forall \psi \in V_m, \\ u_m(0) = u_{0m}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Em particular, tomando  $\psi = \phi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , tem-se

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \phi_j \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \nabla u_m(t) \nabla \phi_j \, dx = \int_{\Omega} (u_m(t) - u_m^3(t)) \phi_j \, dx. \quad (3.9)$$

E substituindo o valor de  $u_m(t, x)$ , temos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{im} \phi_i \right) \phi_j \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \nabla \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{im} \phi_i \right) \phi_j \, dx = \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{im} \phi_i \right) \phi_j - \int_{\Omega} u_m^3(t) \phi_j \, dx, \quad (3.10)$$

e, utilizando as propriedades da integral, obtemos:

$$\sum_{i=1}^m \alpha'_{im}(t) \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \, dx + \xi^2 \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \int_{\Omega} \nabla \phi_i \nabla \phi_j \, dx = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \int_{\Omega} \phi_i \phi_j - \int_{\Omega} u_m(t) \phi_j \, dx. \quad (3.11)$$

Denotando por  $A = [(\phi_i, \phi_j)_{L^2(\Omega)}]$  e  $B = [(\nabla \phi_i, \nabla \phi_j)_{L^2(\Omega)}]$  e  $\alpha(t) = [\alpha_{im}(t)]$  tem-se que

$$A\alpha'(t) + \xi^2 B\alpha(t) = A\alpha(t) - [(u_m^3(t), \phi_j)_{L^2(\Omega)}],$$

E, chamando  $\alpha(0) = [(u_0, \phi_i)_{L^2(\Omega)}] = \alpha_0$ . Como  $A = I_m$ , e portanto inversível, temos

$$\alpha'(t) + \xi^2 B\alpha(t) = \alpha(t) - [(u_m^3(t), \phi_j)_{L^2(\Omega)}].$$

E assim, obtemos que

$$\begin{cases} \alpha'(t) = K\alpha(t) - [(u_m^3(t), \phi_j)_{L^2(\Omega)}], \\ \alpha(0) = \alpha_0, \end{cases}$$

com  $K = -\xi^2 B + I_m$ .

## Solução do problema aproximado

Mostraremos que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \alpha'(t) = K\alpha(t) - [(u_m^3(t), \phi_i)_{L^2(\Omega)}] \\ \alpha(0) = \alpha_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

possui solução local, e como anteriormente, utilizaremos o teorema de Caratheodóry.

Inicialmente, mostraremos que a função  $\Phi(t, \alpha) = K\alpha(t) - [(u_m^3(t), \phi_i)_{L^2(\Omega)}]$  é localmente contínua para  $t$  fixo e mensurável para quase todo  $\alpha$  fixo. Assim, para  $t \in (0, T)$ ,  $t < T$ , temos que

$$|\Phi(t, \alpha_1) - \Phi(t, \alpha_2)| \leq \|K\| |\alpha_1 - \alpha_2| + |[(u_{m_1}^3(t) - u_{m_2}^3(t), \phi_j)_{L^2(\Omega)}]|.$$

Utilizando a definição de norma em  $\mathbb{R}^n$  e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |[(u_{m_1}^3(t) - u_{m_2}^3(t), \phi_j)]|^2 &= \sum_{j=1}^m |(u_{m_1}^3 - u_{m_2}^3, \phi_j)_{L^2(\Omega)}|^2 \leq \sum_{j=1}^m \|u_{m_1}^3 - u_{m_2}^3\|_{L^1(\Omega)}^2 \|\phi_j\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \\ &\leq \|(u_{m_1} - u_{m_2})(u_{m_2}^2 + u_{m_1}u_{m_2} + u_{m_2}^2)\|_{L^1(\Omega)}^2 \sum_{j=1}^m \|\phi_j\|_{L^\infty(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$|[(u_{m_1}^3(t) - u_{m_2}^3, \phi_j)]| \leq \|(u_{m_1} - u_{m_2})(u_{m_2}^2 + u_{m_1}u_{m_2} + u_{m_2}^2)\|_{L^1(\Omega)} \left( \sum_{j=1}^m \|\phi_j\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \|(u_{m_1} - u_{m_2})(u_{m_2}^2 + u_{m_1}u_{m_2} + u_{m_2}^2)\|_{L^1(\Omega)} &\leq C_1 \|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{L^2(\Omega)} \|u_{m_2}^2 + u_{m_1}u_{m_2} + u_{m_2}^2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_1 \|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{L^2(\Omega)} (\|u_{m_2}^2\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{m_1}\|_{L^4(\Omega)} \|u_{m_2}\|_{L^4(\Omega)} + \|u_{m_2}^2\|_{L^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

com  $C_1 = \left( \sum_{j=1}^m \|\phi_j\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ . Como  $\|u_{m_1}^2\|_{L^2(\Omega)} = \|u_{m_1}\|_{L^4(\Omega)}^2$  e pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder, obtemos

$$\|u_{m_1}\|_{L^4(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^m |\alpha_{j_1}| \|\phi_j\|_{L^4(\Omega)} \leq C_2 |\alpha_1| \quad (3.13)$$

com  $C_2 = \left( \sum_{j=1}^m \|\phi_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)$ . Analogamente, temos  $\|u_{m_2}\| \leq C_3 |\alpha_2|$ , logo,

$$|(u_{m_1}^3 - u_{m_2}^3, \phi_j)_{L^2(\Omega)}| \leq C_1(C_2^2 |\alpha_1|^2 + C_2 C_3 |\alpha_1| |\alpha_2| + C_3^2 |\alpha|^2) \|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.14)$$

E como ,

$$\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^m |\alpha_{j_1} - \alpha_{j_2}| \|\phi_j\|_{L^2(\Omega)} \leq C_4 |\alpha_1 - \alpha_2|,$$

resulta

$$\begin{aligned} |(u_{m_1}^3 - u_{m_2}^3, \phi_j)_{L^2(\Omega)}| &\leq C_1 C_4 (C_2^2 |\alpha_1|^2 + C_2 C_3 |\alpha_1| |\alpha_2| + C_3^2 |\alpha|^2) |\alpha_1 - \alpha_2| \\ |(u_{m_1}^3 - u_{m_2}^3, \phi_j)_{L^2(\Omega)}| &\leq C_5 (|\alpha_1|^2 + |\alpha_1| |\alpha_2| + |\alpha|^2) |\alpha_1 - \alpha_2|, \end{aligned} \quad (3.15)$$

com  $C_5 = \max\{C_1 C_4 C_2^2, C_1 C_4 C_2 C_3, C_1 C_4 C_3^2\}$ . Assim, de (3.15), obtemos que

$$|\Phi(t, \alpha_1) - \Phi(t, \alpha_2)| \leq \|K\| |\alpha_1 - \alpha_2| + \xi^2 C_5 (|\alpha_1|^2 + |\alpha_1| |\alpha_2| + |\alpha_2|^2) |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

Agora, tomindo  $\alpha_1, \alpha_2 \in \overline{B_R(0)}$ , temos

$$|\alpha_1|^2 + |\alpha_1| |\alpha_2| + |\alpha_2|^2 \leq 3R^2. \quad (3.16)$$

Logo,

$$|\Phi(t, \alpha_1) - \Phi(t, \alpha_2)| \leq (\|K\| + \xi^2 C_5 3R^2) |\alpha_1 - \alpha_2|. \quad (3.17)$$

Portanto,  $\Phi(t, \alpha)$  é localmente lipschitz para  $t$  fixo, logo, localmente contínua.

Agora, note que para  $\alpha$  fixo, temos que  $K\alpha$  é fixo e  $u_m = \sum_{j=1}^m \alpha \phi_j$  é constante, logo, contínua e, portanto, mensurável. E, o termo  $(u_m^3, \phi_j)_{L^2(\Omega)}$  independe de  $t$ , logo, constante e portanto mensurável. Assim, para  $\alpha$  fixo,  $\Phi(t, \alpha)$  é mensurável.

E ainda mais, note que

$$|\Phi(t, \alpha)| \leq \|K\| |\alpha| + |[(u_m^3, \phi_j)_{L^2(\Omega)}]|. \quad (3.18)$$

E, pela desigualdade de Hölder, obtemos:

$$\begin{aligned} |[(u_m^3, \phi_j)_{L^2(\Omega)}]|^2 &\leq \sum_{j=1}^m |(u_m^3, \phi_j)_{L^2(\Omega)}|^2 \leq \|u_m\|_{L^4(\Omega)}^6 \sum_{j=1}^m \|\phi_j\|_{L^4(\Omega)}^2 = C_6^2 \|u_m\|_{L^4(\Omega)}^6, \\ |[(u_m^3, \phi_j)_{L^2(\Omega)}]| &\leq C_6 \|u_m\|_{L^4(\Omega)}^3, \\ \text{com } C_6 &= \left( \sum_{j=1}^m \|\phi_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Logo, usando (3.13), obtemos:

$$|\Phi(t, \alpha)| \leq \|K\| |\alpha| + C_6 \|u_m\|_{L^4(\Omega)}^3 \leq \|K\| |\alpha| + C_6 |\alpha|^3.$$

Agora, tomindo  $\alpha \in \overline{B_R(0)}$ , temos

$$|\Phi(t, \alpha)| \leq \|K\| R + C_6 R^3. \quad (3.20)$$

Como  $\|K\|R + C_6R^3$  é integrável segue do Teorema de Carathéodory que existe  $\alpha_m(t)$ ,  $t \in [0, t_m]$  solução local para (3.12) e implicando na existência de  $u_m(t)$  solução local de (3.8) tal que

$$u_m \in C([0, t_m]; V_m), \quad u'_m \in L^1(0, t_m; V'_m).$$

### 3.1.3 Estimativas a Priori

Nessa seção buscaremos estimativas para a norma da função  $u_m(t)$  para usarmos argumentos de compacidade.

## Estimativa 1

Tomando  $\psi = u_m(t)$  em (3.7), obtemos

$$\frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 = \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.21)$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Pela desigualdade de Gronwall obtemos

$$\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^T \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Além disso,  $\|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$  e, portanto,

$$\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^T \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^T \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Logo, pelo Corolário 1.1, garantimos a existência de solução global para o problema (3.12)

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.22)$$

com  $C_7 = \sqrt{e^T}$ . Logo,

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_7 \|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando novamente (3.21) em  $[0, T]$  tem-se

$$\begin{aligned} & \|u_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi^2}{2} \int_0^T \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 dt \\ &= \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leq \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 T. \end{aligned}$$

Por (3.22) tem-se

$$\frac{\xi^2}{2} \int_0^T \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 dt \leq C_8 \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$$

com  $C_8 = 1 + TC_7$ .

Em resumo, temos as seguintes estimativas:

$$\|u_m\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leq C_7^2 \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2; \quad (3.23)$$

$$\|\nabla u_m\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{2C_8}{\xi^2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2; \quad (3.24)$$

$$\|u_m\|_{L^4(0,T,L^4(\Omega))} \leq C_8^{\frac{1}{4}} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.25)$$

Combinando essas estimativas obtemos

$$\|u_m\|_{L^2(0,T,V_1)} \leq C_9 \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.26)$$

$$\text{com } C_9 = \sqrt{C_7^2 T + \frac{2}{\xi^2} C_8}.$$

## Estimativa 2

Agora, utilizando a fórmula de Green, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u_m(t) \nabla \psi \, dx = - \int_{\Omega} \Delta u_m(t) \psi \, dx. \quad (3.27)$$

E por (3.8) podemos escrever

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} \psi \, dx = \int_{\Omega} (\xi^2 \Delta u_m(t) + u_m(t) - u_m^3(t)) \psi \, dx. \quad (3.28)$$

Denotando por  $v_m(t) = \xi^2 \Delta u_m(t) - u_m^3(t) + u_m(t)$  temos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} \psi \, dx = \int_{\Omega} v_m(t) \psi \, dx. \quad (3.29)$$

Desse modo, tomindo  $\psi = v_m(t)$  obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} v_m(t) \, dx = \|v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.30)$$

E usando a definição de  $v_m(t)$  temos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} (\xi^2 \Delta u_m(t) - u_m^3(t) + u_m(t)) \, dx = \xi^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} \Delta u_m(t) \, dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} u_m^3(t) \, dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} u_m(t) \, dx.$$

Utilizando a proposição (1.11(iii)) e aplicando a fórmula de Green obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} (\xi^2 \Delta u_m(t) - u_m^3(t) + u_m(t)) \, dx &= -\xi^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Combinando (3.30) e (3.31) concluímos que

$$\|v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \xi^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dx + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0. \tag{3.32}$$

E, integrando em  $(0, t)$  com  $t \in [0, T]$ , obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^t \|v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt + \frac{\xi^2}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt + \frac{1}{4} \int_0^t \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 \, dt \\ &- \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt = 0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} \|v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &+ \frac{\xi^2}{2} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dx + \frac{1}{4} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 = \frac{\xi^2}{2} \|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \frac{1}{4} \|u_m(0)\|_{L^4(\Omega)}^4 - \frac{1}{2} \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Mas também observe que

$$\begin{aligned} &\frac{\xi^2}{2} \|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_m(0)\|_{L^4(\Omega)}^4 - \frac{1}{2} \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \left| \frac{\xi^2}{2} \|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_m(0)\|_{L^4(\Omega)}^4 - \frac{1}{2} \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right| \\ &\leq \frac{\xi^2}{2} \|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_m(0)\|_{L^4(\Omega)}^4 + \frac{1}{2} \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{\xi^2}{2} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_0\|_{L^4(\Omega)}^4 + \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \tag{3.35}$$

e, utilizando a imersão contínua de  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ , temos

$$\frac{\xi^2}{2} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_0\|_{L^4(\Omega)}^4 + \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{10} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^4, \quad (3.36)$$

com  $C_{10} = \max \left\{ \frac{\xi^2}{2}, 1 \right\}$ . Logo, por (3.34),

$$\|v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi^2}{2} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dx + \frac{1}{4} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq C_{10} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^4. \quad (3.37)$$

o que implica

$$\|\nabla u_m\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq C_{11} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}; \quad (3.38)$$

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))} \leq C_{12} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}; \quad (3.39)$$

$$\|v_m\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq C_{13} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.40)$$

com as constantes  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  e  $C_{13}$  dependendo da norma  $\|u_0\|_{H^1(\Omega)}$ .

Combinando (3.22) e (3.38), temos

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega))} \leq C_{14} \|u_0\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.41)$$

com a constante  $C_{14}$  dependendo da norma  $\|u_0\|_{H^1(\Omega)}$ .

### Estimativa 3

Agora, vamos conseguir uma estimativa para a derivada temporal. Assim, de (3.29) temos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} \psi \, dx = \int_{\Omega} v_m(t) \psi \, dx. \quad (3.42)$$

Logo, tomando  $\psi = \frac{\partial u_m(t)}{\partial t}$  temos

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} \right|^2 \, dx = \int_{\Omega} v_m(t) \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} \, dx.$$

Logo, pelas desigualdades de Hölder e Young obtemos

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Integrando em  $[0, T]$ , temos

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \int_0^T \|v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \quad (3.43)$$

Usando a estimativa (3.40) em (3.43) obtemos

$$\left\| \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega)))} \leq C_{10} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.44)$$

Portanto, pela estimativas (3.25),(3.26),(3.39), (3.41) temos que a sequência  $(u_m)$  é uniformemente limitada em  $W_1 = W(0, T, V_1, L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, L^4(\Omega))$  com  $W(0, T, V_1, L^2(\Omega)) = \{u \in L^2(0, T, H^1(\Omega)); u' \in L^2(0, T, L^2(\Omega))\}$ .

Além disso, como a imersão de  $H^1(\Omega)$  em  $L^2(\Omega)$  é compacta, segue do Lema de Aubin-Lions,  $W$  está imerso compactamente em  $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ . Logo existem  $u \in W_1$  e uma subsequência  $(u_k(t))$  tais que

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u_1 \text{ em } L^2(0, T, H^1(\Omega)); \\ u_k &\rightharpoonup u_2 \text{ em } L^4((0, T) \times \Omega); \\ u_k &\xrightarrow{*} u_3 \text{ em } L^\infty(0, T, H^1(\Omega)); \\ u'_k &\rightharpoonup w \text{ em } L^2(0, T, L^2(\Omega)); \\ u_k &\rightarrow u_4 \text{ em } L^2(Q) \text{ q.s. em } \Omega \times (0, T); \\ u_k &\xrightarrow{*} u_5 \text{ em } L^\infty(0, T, L^4(\Omega)). \end{aligned}$$

A demonstração do seguinte resultado é análogo à da proposição (2.1).

**Proposição 3.1** *Os limites das convergências acima, são tais que*

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 \quad w = u'.$$

Logo podemos reescrever as convergências acima como sendo

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T, V^1(\Omega)); \quad (3.45)$$

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } L^4((0, T) \times \Omega); \quad (3.46)$$

$$u_k \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T, H^1(\Omega)); \quad (3.47)$$

$$u'_k \rightharpoonup u' \text{ em } L^2(0, T, (H^1(\Omega))'); \quad (3.48)$$

$$u'_k \rightharpoonup u' \text{ em } L^2(Q); \quad (3.49)$$

$$u_k \rightarrow u \text{ em } L^2(Q) \text{ q.s. em } \Omega \times (0, T); \quad (3.50)$$

$$u_k \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T, L^4(\Omega)). \quad (3.51)$$

### 3.1.4 Passagem do Limite

Seja  $\varphi \in C^1(0, T)$ . Multiplicando (3.7) por  $\varphi(t)$  e integrando em  $[0, T]$ , obtemos para toda  $\psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ ,

$$\int_0^T \int_{\Omega} u'_k(t) \psi \varphi \, dx \, dt + \int_{\Omega} \nabla u_k(t) \nabla \psi \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u_k(t)) \psi \varphi \, dx \, dt = 0. \quad (3.52)$$

Agora, note que por (3.45) e (3.49), temos

$$\int_0^T \int_{\Omega} u'_k(t) \psi \varphi(t) \, dx \, dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} u'(t) \psi \varphi(t) \, dx \, dt; \quad (3.53)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \nabla u_k(t) \nabla \psi \varphi(t) \, dx \, dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla \psi \varphi(t) \, dx \, dt. \quad (3.54)$$

De modo que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u_k(t) - u^3(t) + u(t)) \psi \varphi(t) \, dx \, dt &= \int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u^3(t)) \psi \varphi(t) \, dx \, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} (u_k(t) - u(t)) \psi \varphi(t) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Da convergência (3.45) segue que  $\int_0^T \int_{\Omega} (u_k(t) - u(t)) \psi \varphi(t) \, dx \, dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ .

Além disso, de

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u^3(t)) \psi \varphi(t) dx dt \leq C \int_0^T \int_{\Omega} |(u_k(t) - u(t))(u_k^2(t + u_k(t)u(t) + u^2(t))| dx dt,$$

usando a desigualdade de Hölder tem-se

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u^3(t)) \psi \varphi(t) dx dt \\ & \leq \int_0^T \|u_k(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} \left( \|u_k(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|u_k(t)\|_{L^4(\Omega)} \|u(t)\|_{L^4(\Omega)} + \|u(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \right) \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\varphi\|_\infty dt \\ & \leq C_{15} \int_0^T \|u_k(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} dt \left( \|u_k\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))}^2 + \|u_k\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))} \|u\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))} + \|u\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))}^2 \right) \\ & \leq C_{16} \int_0^T \|u_k(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} dt \\ & \leq C_{16} \|u_k - u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

$$\text{com } C_{15} = \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\varphi\|_\infty \text{ e } C_{16} = C_{15} (\|u_k\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))}^2 + \|u_k\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))} \|u\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))} + \|u\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))}^2)$$

Assim, concluímos que

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u_k(t)) \psi \varphi(t) dx dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \psi \varphi(t) dx dt. \quad (3.55)$$

Usando as convergências (3.53), (3.54), (3.55) passamos limite em (3.52) para obter

$$\int_0^T \int_{\Omega} u'(t) \psi \varphi(t) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla \psi \varphi(t) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \psi \varphi(t) dx dt = 0.$$

A verificação da condição inicial é análoga a que foi realizada na seção (2.4.1). Assim, o problema (3.1)-(3.2)-(3.3) tem solução fraca. ■

## 3.2 Equação de Allen-Cahn/Cahn-Hilliard

Nesta seção vamos provar o seguinte resultado:

**Teorema 3.2** Suponha que  $u_0 \in H^1(\Omega)$ , então existe uma função

$$u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap W(0, T; H_{bc}^2(\Omega), (H^1(\Omega))') \cap L^4(\Omega \times (0, T))$$

solução fraca do seguinte problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \xi^2 \Delta (\Delta u - u^3 + u) - (\Delta u - u^3 + u) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \quad (3.57)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{em } \Omega \quad (3.58)$$

com  $v = \Delta u - u^3 + u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ . Além disso, se  $u_0 \in H^2(\Omega)$  e  $n = 1, 2, 3$  então a solução fraca  $u$  do problema (3.56)-(3.57)-(3.58) é solução forte, isto é,

$$u \in C([0, T]; H_{bc}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_{bc}^4(\Omega)).$$

Como anteriormente, utilizaremos o Método de Faedo-Galerkin para demonstrar o problema (3.56)-(3.57)-(3.58) e dividiremos a demonstração em várias seções, para uma melhor compreensão.

### 3.2.1 Formulação Fraca

Supondo que  $u(t, x)$  é uma solução clássica do problema (3.56)-(3.57)-(3.58), associamos a  $u(t, x)$  uma função  $u : [0, T] \rightarrow C^4(\Omega)$ , tal que

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} + \xi^2 \Delta (\Delta u(t) - u^3(t) + u(t)) - (\Delta u(t) - u^3(t) + u(t)) = 0. \quad (3.59)$$

Seja  $\psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ . Multiplicando a equação (3.59) por  $\psi$  e integrando em  $\Omega$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial t} \psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta^2 u(t) \psi \, dx - \xi^2 \int_{\Omega} \Delta(u^3(t) - u(t)) \psi \, dx - \int_{\Omega} \Delta u(t) \psi \, dx + \\ + \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \psi \, dx = 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Como  $u(t, x)$  é solução clássica, então,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial t} \psi \, dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \psi \, dx. \quad (3.61)$$

Utilizando a fórmula de Green clássica duas vezes nos segundo e terceiro termos de (3.60), obtemos que

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u(t) \psi \, dx = \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \, dx, \quad (3.62)$$

$$\int_{\Omega} \Delta(u^3(t) - u(t)) \psi \, dx = \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \, dx, \quad (3.63)$$

e aplicando a fórmula de Green clássica uma vez no quarto membro de (3.60), obtemos

$$-\int_{\Omega} \Delta u(t) \psi \, dx = \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla \psi \, dx. \quad (3.64)$$

Dessa forma, utilizando (3.61) - (3.62) - (3.63)- (3.64) em (3.60), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \, dx - \xi^2 \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla \psi \, dx \\ \quad + \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \psi \, dx = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}). \end{array} \right. \quad (3.65)$$

Da densidade de  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  em  $H_{bc}^2(\Omega)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \, dx - \xi^2 \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla \psi \, dx \\ \quad + \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \psi \, dx = 0, \quad \forall \psi \in H_{bc}^2(\Omega). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Desse modo, adotaremos a seguinte tríade fundamental para a demonstração do teorema

$$V = H_{bc}^2(\Omega) \quad H = L^2(\Omega) \quad V' = (H^1(\Omega))'.$$

Note que as imersões  $H_{bc}^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))'$  são contínuas e esses espaços são densos nessa ordem.

Portanto, dizemos que  $u \in W(0, T; H_{bc}^2(\Omega), (H^1(\Omega))')$ , para todo  $T > 0$ , é solução fraca do problema (3.56)-(3.57)-(3.58) se satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)\psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta u(t)\Delta\psi \, dx - \xi^2 \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t))\Delta\psi \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t)\nabla\psi \, dx \\ + \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t))\psi \, dx = 0, \quad \forall \psi \in H_{bc}^2(\Omega), \\ u(0) = u_0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

### 3.2.2 Formulação Aproximada

Como anteriormente, consideremos a base formada pelas autofunções  $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$  do operador laplaciano e os autovalores  $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$  associados, com condições de Neumann na fronteira. Definimos  $V_m$  como sendo o espaço gerado pelas  $m$  primeiras autofunções do laplaciano, isto é,

$$V_m = \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\},$$

e, pelas propriedades de base hilbertiana, temos  $(\phi_i, \phi_j)_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}$ . Aplicando o operador projeção  $\mathcal{P} : H_{bc}^2(\Omega) \rightarrow V_m$  em (3.66) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t)\psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta u_m(t)\Delta\psi \, dx - \xi^2 \int_{\Omega} (u_m(t) - u_m^3(t))\Delta\psi \, dx + \int_{\Omega} \nabla u_m(t)\nabla\psi \, dx \\ + \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t))\psi \, dx = 0, \quad \forall v \in V_m. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Escolhendo  $u_{0m} = \mathcal{P}_m(u_0)$  temos  $u_{0m} \rightarrow u_0$  em  $H^1(\Omega)$  e  $\|u_{0m}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u_0\|_{H^1(\Omega)}$ .

Definimos que  $u_m(t)$  é solução aproximada do problema (3.56)-(3.57)-(3.58),

se  $u_m(t) \in V_m$  e satisfaz

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \psi \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta u_m(t) \Delta \psi \, dx + \int_{\Omega} \nabla u_m(t) \nabla \psi \, dx = \\ + \xi^2 \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta \psi \, dx + \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \psi \, dx, \quad \forall \psi \in V_m, \\ u_m(0) = u_{0m}. \end{cases} \quad (3.69)$$

Em particular, tomando  $\psi = \phi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , usando  $u_m(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \phi_i$  e as propriedades da integral, obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \alpha'_{im}(t) \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \, dx + \xi^2 \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \int_{\Omega} \Delta \phi_i \Delta \phi_j \, dx + \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \int_{\Omega} \nabla \phi_i \nabla \phi_j \, dx \\ &= \xi^2 \int_{\Omega} u_m^3(t) \Delta \phi_j \, dx - \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \int_{\Omega} \phi_i \Delta \phi_j \, dx - \int_{\Omega} u_m^3(t) \phi_j \, dx + \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \, dx. \end{aligned}$$

Denotando  $A = [(\phi_i, \phi_j)_{L^2(\Omega)}]$ ,  $B = [(\Delta \phi_i, \Delta \phi_j)_{L^2(\Omega)}]$ ,  $C = [(\nabla \phi_i, \nabla \phi_j)_{L^2(\Omega)}]$ ,  $D = [(\phi_i, \Delta \phi_j)_{L^2(\Omega)}]$  e  $\alpha(t) = [\alpha_{im}(t)]$  tem-se

$$A\alpha'(t) + \xi^2 B\alpha(t) + C\alpha(t) = \xi^2 [(u_m^3(t), \Delta \phi_j)_{L^2(\Omega)}] - \xi^2 D\alpha(t) - [(u_m^3(t), \phi_j)_{L^2(\Omega)}] + A\alpha(t),$$

com  $\alpha(0) = [(u_0, \phi_j)_{L^2(\Omega)}] = \alpha_0$ .

Sabemos que  $A = I_m$ , logo, temos o seguinte sistema de EDO's não lineares:

$$\begin{cases} \alpha'(t) = K\alpha(t) + [(u_m^3(t), \Delta \phi_j)_{L^2(\Omega)}] - [(u_m^3(t), \phi_j)_{L^2(\Omega)}], \\ \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases}$$

com  $K = -\xi^2 B - C - \xi^2 D + I_m$ .

## Solução do problema aproximado

Mostraremos que, para  $m$  fixo, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \alpha'(t) = K\alpha(t) + [(u_m^3(t), \Delta \phi_j)_{L^2(\Omega)}] - [(u_m^3(t), \phi_j)_{L^2(\Omega)}], \\ \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases} \quad (3.70)$$

possui solução local. Para isto, aplicaremos o Teorema de Caratheodóry. Primeiramente, mostraremos que a função

$$\Phi(t, \alpha) = K\alpha(t) + [(u_m^3(t), \Delta\phi_j)_{L^2(\Omega)}] - [(u_m^3(t), \phi_i)_{L^2(\Omega)}]$$

é localmente contínua para  $t$  fixo e localmente mensurável para quase todo  $\alpha$  fixo.

Combinando (2.26) e (3.15) temos que  $\Phi(t, \alpha)$  é localmente Lipschitz.

Por outro lado, para  $\alpha$  fixo, temos que  $K\alpha$  é fixo e  $u_m = \sum_{j=1}^m \alpha\phi_j$  é constante, logo, contínua e, portanto, mensurável. E como, os termos  $(u_m^3, \phi_j)_{L^2(\Omega)}$  e  $(u_m^3, \Delta\phi_j)_{L^2(\Omega)}$  independentemente de  $t$ , logo, constantes e portanto mensuráveis. Assim, para  $\alpha$  fixo,  $\Phi(t, \alpha)$  é mensurável.

Além disso, combinando (2.28) e (3.19) obtemos constantes  $C_1 > 0$  e  $C_2 > 0$  tais que

$$|[(u_m^3, \Delta\phi_j)_{L^2(\Omega)}]| \leq C_1|\alpha|^3 \quad |[(u_m^3, \phi_j)_{L^2(\Omega)}]| \leq C_2|\alpha|^3.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\Phi(t, \alpha)| &\leq \|K\||\alpha| + \xi^2|[(u_m^3, \Delta\phi_j)_{L^2(\Omega)}]| + |[(u_m^3, \phi_j)_{L^2(\Omega)}]| \\ &\leq \|K\||\alpha| + \xi^2C_1|\alpha|^3 + C_2|\alpha|^3. \end{aligned}$$

Agora, tomado  $\alpha \in \overline{B_R(0)}$ , temos que

$$|\Phi(t, \alpha)| \leq \|K\|R + (\xi^2C_1 + C_2)R^3$$

com  $\|K\|R + (\xi^2C_1 + C_2)R^3$  é integrável. Portanto, pelo Teorema de Caratheodóry, existe  $\alpha_m(t)$ ,  $t \in [0, t_m]$  solução local para (3.70). Isto implica que existe  $u_m(t)$  solução local de (3.69) tal que

$$u_m \in C([0, t_m]; V_m), \quad u_m' \in L^1(0, t_m; V_m').$$

### 3.2.3 Estimativas *a priori*

Como feito em seções anteriores, determinaremos estimativas *a priori* da solução  $u_m(t)$  usando argumentos de compacidade.

## Estimativa 1

Tomando  $\psi = u_m(t)$  em (3.68), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(t)|^2 dx + \xi^2 \int_{\Omega} |\Delta u_m(t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^2 dx &= \xi^2 \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta u_m(t) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) u_m(t) dx. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Pela fórmula de Green obtemos

$$\xi^2 \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta u_m(t) dx = -\xi^2 \int_{\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \nabla u_m(t) dx.$$

Além disso, por (2.30) temos que

$$\xi^2 \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta u_m(t) dx = -\xi^2 \int_{\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \nabla u_m(t) dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \xi^2 \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta u_m(t) dx &= -\xi^2 \int_{\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \nabla u_m(t) dx \\ &= -\xi^2 \int_{\Omega} (3u_m^2(t) \nabla u_m(t) - \nabla u_m(t)) \cdot \nabla u_m(t) dx \\ &= -\xi^2 \int_{\Omega} |3u_m(t)| |\nabla u_m(t)|^2 dx + \xi^2 \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^2 dx. \end{aligned} \tag{3.72}$$

De

$$\int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) u_m(t) dx = \int_{\Omega} u_m^4(t) - u_m^2(t). \tag{3.73}$$

E usando (3.72) e (3.73) em (3.71) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \xi^2 \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &+ \xi^2 \int_{\Omega} 3|u_m(t)|^2 |\nabla u_m(t)|^2 dx + \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 \\ &= \xi^2 \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \tag{3.74}$$

e assim, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \xi^2 \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &+ \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 \\ &\leq \xi^2 \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Utilizando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg no termo  $\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$  e escolhendo  $m = r = q = p = 2$ ,  $j = 1$  e obtemos  $\alpha = 1/2$ . Logo, existe uma constante  $C_3 > 0$  tal que

$$\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \|u_m(t)\|_{H^2(\Omega)} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Por outro lado, elevando-se ao quadrado a desigualdade acima e utilizando a equivalência das normas de  $H^2(\Omega)$  e  $H_{bc}^2(\Omega)$ , implica na existência de uma constante  $C_4 > 0$  tal que

$$\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_3^2 C_4 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \left( \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta_1 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

E usando a desigualdade de Young, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{C_3^2 C_4}{2} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left( \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta_1 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_6 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\text{com } C_6 = \frac{C_3^2 C_4}{2} + \frac{\eta_1}{2}.$$

Usando (3.76) em (3.75) obtemos

$$\frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi^2}{2} \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq C_7 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.77)$$

com  $C_7 = C_6 + 1$ . Logo,

$$\frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_7 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

e pela desigualdade de Gronwall temos

$$\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_8 \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.78)$$

em que  $C_8$  é uma constante que independe de  $m$ . Como,  $\|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)} = \|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ , obtemos

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_8 \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.79)$$

Logo, pelo Corolário 1.1, temos solução global para o problema (3.70).

Integrando (3.77) em  $[0, T]$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \|u_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi^2}{2} \int_0^T \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & + \int_0^T \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 dt \leq \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Por (3.79) garantimos

$$\begin{aligned} & \|u_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi^2}{2} \int_0^T \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & + \int_0^T \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 dt \leq (1 + C_8) \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leq C_8^2 \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2; \quad (3.80)$$

$$\|\Delta u_m\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leq C_9 \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2; \quad (3.81)$$

$$\|\nabla u_m\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leq (1 + C_8) \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2; \quad (3.82)$$

$$\|u_m\|_{L^4(0,T,L^4(\Omega))}^4 \leq (1 + C_8) \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.83)$$

com a constante  $C_9$  dependendo de  $\xi$  e  $C_8$ .

Por (3.80), (3.81) e (3.82) temos que

$$\|u_m(t)\|_{L^2(0,T,H_{bc}^2(\Omega))} \leq C_{10} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.84)$$

com  $C_{10}$  uma constante que independe de  $m$ .

## Estimativa 2

Aplicando a fórmula de Grenn (duas vezes, se necessário) obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Delta u_m(t) \Delta \psi \, dx &= \int_{\Omega} \Delta^2 u_m(t) \psi \, dx = \int_{\Omega} \Delta(\Delta u_m(t)) \psi \, dx, \\ \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta \psi \, dx &= \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \psi \, dx.\end{aligned}$$

Por (3.68) tem-se

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \psi \, dx = -\xi^2 \int_{\Omega} \Delta(\Delta u_m(t) - u_m^3(t) + u_m(t)) \psi \, dx + \int_{\Omega} (\Delta u_m(t) - u_m^3(t) + u_m(t)) \psi \, dx. \quad (3.85)$$

Fazendo  $v_m(t) = \Delta u_m(t) - u_m^3(t) + u_m(t)$ , obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \psi \, dx = -\xi^2 \int_{\Omega} \Delta v_m(t) \psi \, dx + \int_{\Omega} v_m(t) \psi \, dx.$$

Tomando  $\psi = v_m(t)$  e aplicando a fórmula de Green temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) v_m(t) \, dx &= -\xi^2 \int_{\Omega} \Delta v_m(t) v_m(t) \, dx + \int_{\Omega} v_m(t) v_m(t) \, dx \\ &= \xi^2 \int_{\Omega} \nabla v_m(t) \cdot \nabla v_m(t) \, dx + \int_{\Omega} v_m(t) v_m(t) \, dx.\end{aligned} \quad (3.86)$$

Usando a definição de  $v_m(t)$  e a fórmula de Green novamente, garantimos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) v_m(t) \, dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) (\Delta u_m(t) - u_m^3(t) + u_m(t)) \, dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \Delta u_m(t) \, dx - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) u_m^3(t) \, dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) u_m(t) \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned} \quad (3.87)$$

Combinando (3.86) e (3.87) temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 + \xi^2 \|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.88)$$

Integrando em  $(0, t)$  com  $t \in [0, T]$  obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 + \xi^2 \int_0^T \|v_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
&= \frac{1}{2} \|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_m(0)\|_{L^4(\Omega)}^4 - \frac{1}{2} \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \left| \frac{1}{2} \|\nabla u_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_{0m}\|_{L^4(\Omega)}^4 - \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right| \\
&\leq C_{11} \|u_{0m}\|_{H^1(\Omega)}^4 + \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{11} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^4 + \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Usando a estimativa (3.79) garantimos

$$\frac{1}{2} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 + \xi^2 \int_0^T \|v_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq C_{12} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2$$

com as constantes  $C_{11}$  e  $C_{12}$  dependendo de  $\xi$ ,  $\Omega$  e  $\|u_0\|_{H^1(\Omega)}$ . Logo,

$$\frac{1}{2} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)} \right)^4 + \xi^2 \|v_m\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2 \leq C_{12} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (3.89)$$

Combinando (3.79) e (3.89) obtemos

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega))} \leq C_{13} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}; \quad (3.90)$$

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T,L^4(\Omega))} \leq C_{14} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}; \quad (3.91)$$

$$\|v_m\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2 \leq C_{15} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.92)$$

com as constantes  $C_{13}$ ,  $C_{14}$  e  $C_{15}$  dependendo de  $\xi^2$  e  $\|u_0\|_{H^1(\Omega)}$ .

### Estimativa 3

Agora, vamos obter uma estimativa para a derivada temporal. Por (3.85) temos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_m}{\partial t} \psi \, dx = -\xi^2 \int_{\Omega} \Delta(\Delta u_m(t) - u_m^3(t) + u_m(t)) \psi \, dx + \int_{\Omega} (\Delta u_m(t) - u_m^3(t) + u_m(t)) \psi \, dx. \quad (3.93)$$

Utilizando a fórmula de Green e a definição de  $v_m(t)$ , obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_m}{\partial t} \psi \, dx = \xi^2 \int_{\Omega} \nabla v_m(t) \nabla \psi \, dx + \int_{\Omega} v_m(t) \psi \, dx, \quad (3.94)$$

e, pela desigualdade de Hölder garantimos

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{\partial u_m}{\partial t}, \psi \right\rangle \right| &\leq \xi^2 \int_{\Omega} |\nabla v_m(t)| |\nabla \psi| \, dx + \int_{\Omega} |v_m(t)| |\psi| \, dx \\ &\leq \xi^2 \|\nabla v_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} + \|v_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{16} \|v_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.95)$$

com  $C_{16} = \max\{\xi^2, 1\}$ . Assim,

$$\left\| \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\|_{(H^1(\Omega))'} = \sup \left\{ \frac{\left| \left\langle \frac{\partial u_m}{\partial t}, \psi \right\rangle \right|}{\|\psi\|_{H^1(\Omega)}}, \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \leq 1 \right\} \leq C_{16} \|v_m(t)\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.96)$$

Elevando ao quadrado (3.96) e integrando em  $[0, T]$  obtemos

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\|_{(H^1(\Omega))'}^2 dt \leq C_{16}^2 \int_0^T \|v_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt.$$

Usando (3.92) temos

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\|_{(H^1(\Omega))'}^2 dt \leq C_{16}^2 \int_0^T \|v_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq C_{16}^2 \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2$$

o que implica

$$\left\| \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')} \leq C_{16}^2 \|u_0\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.97)$$

Portanto, pelas estimativas (3.83),(3.84),(3.90), (3.91), (3.92) e (3.97) a sequência  $(u_m)$  é uniformemente limitada em  $W_1 = L^2(0, T, H_{bc}^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, H^1(\Omega)) \cap L^4((0, T) \times \Omega)$ . Além disso, como a imersão  $H_{bc}^2(\Omega)$  em  $H^1(\Omega)$  é compacta segue do lema de Aubin-Lions que  $W = \{u \in L^2(0, T, H_{bc}^2(\Omega)); u' \in L^2(0, T, (H^1(\Omega))')\}$  está compactamente imerso em  $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ . Logo, existe  $u \in W_1$  e uma subsequência  $(u_k)$  tais que

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T, H_{bc}^2(\Omega)); \quad (3.98)$$

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } L^4(Q_T); \quad (3.99)$$

$$u_k \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T, H^1(\Omega)); \quad (3.100)$$

$$u'_k \rightharpoonup u' \text{ em } L^2(0, T, (H^1(\Omega))'); \quad (3.101)$$

$$u_k \rightarrow u \text{ em } L^2(0, T, H^1(\Omega)); \quad (3.102)$$

$$u_k \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T, L^4(\Omega)); \quad (3.103)$$

$$v_k \rightharpoonup v \text{ em } L^2(0, T, H^1(\Omega)). \quad (3.104)$$

### 3.2.4 Passagem do limite

Nessa seção passaremos o limite na equação (3.68) no sentido das distribuições.

Seja  $\varphi \in C^1(0, T)$ . Multiplicando (3.68) por  $\varphi(t)$  e integrando em  $[0, T]$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega u'_k(t) \psi \varphi(t) dx dt + \xi^2 \int_0^T \int_\Omega \Delta u_k(t) \Delta \psi \varphi(t) dx dt \\ & - \xi^2 \int_0^T \int_\Omega (u_k^3(t) - u_k(t)) \Delta \psi \varphi(t) dx dt - \int_\Omega \Delta u_k(t) \psi \varphi(t) dx dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega (u_k^3(t) - u_k(t)) \psi \varphi(t) dx dt = 0, \quad \forall \psi \in V_m. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u'_k(t) \psi \varphi(t) dx dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} u_k(t) \psi \varphi'(t) dx dt - (u_k(T), \psi \varphi(T))_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (u_k(0), \psi \varphi(0))_{L^2(\Omega)} \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} u_k(t) \psi \varphi'(t) dx dt. \end{aligned}$$

Logo, (3.105) torna-se

$$\begin{aligned} &- \int_0^T \int_{\Omega} u_k(t) \psi \varphi'(t) dx dt + \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u_k(t) \Delta \psi \varphi(t) dx dt \\ &- \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u_k(t)) \Delta \psi \varphi(t) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u_k(t) \psi \varphi(t) dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u_k(t)) \psi \varphi(t) dx dt = 0. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Note que por (3.98), temos

$$- \int_0^T \int_{\Omega} u_k(t) \psi \varphi'(t) dx dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} - \int_0^T \int_{\Omega} u(t) \psi \varphi'(t) dx dt, \tag{3.107}$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \nabla u_k(t) \nabla \psi \varphi(t) dx dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla \psi \varphi(t) dx dt, \tag{3.108}$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \Delta u_k(t) \Delta \psi \varphi(t) dx dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \varphi(t) dx dt. \tag{3.109}$$

E por (3.102) (de modo análogo como (2.81)) obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u_k(t) - u^3(t) + u(t)) \Delta \psi \varphi(t) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u^3(t)) \Delta \psi \varphi(t) dx dt \\ &- \int_0^T \int_{\Omega} (u_k(t) - u(t)) \Delta \psi \varphi(t) dx dt, \end{aligned} \tag{3.110}$$

Novamente por (3.102) (de modo análogo como (3.55)) garantimos

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u_k^3(t) - u_k(t)) \psi \varphi(t) dx dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \psi \varphi(t) dx dt. \tag{3.111}$$

Portanto, usando (3.107), (3.108), (3.109), (3.110), e (3.111) podemos passar o limite em (3.106) para obter

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} u(t) \psi \varphi'(t) dx dt + \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \varphi(t) dx dt \\ & - \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \varphi(t) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u(t) \psi \varphi(t) dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \psi \varphi(t) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (3.112)$$

E integrando por partes no primeiro termo de (3.112) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} u'(t) \psi \varphi(t) dx dt + \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta \psi \varphi(t) dx dt \\ & - \xi^2 \int_0^T \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \Delta \psi \varphi(t) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u(t) \psi \varphi(t) dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} (u^3(t) - u(t)) \psi \varphi(t) dx dt = 0. \end{aligned}$$

A verificação da condição inicial é obtida de modo análogo a seção (2.4.1). ■

### 3.2.5 Regularidade da Solução

Nessa seção, mostraremos que a solução fraca do problema (3.56)-(3.57)-(3.58) é uma solução forte se  $u_0 \in H^2(\Omega)$ . Para isso, considere  $\psi = \Delta^2 u_m(t)$  em (3.68) para obter

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m(t) \Delta^2 u_m(t) dx + \xi^2 \int_{\Omega} \Delta^2 u_m(t) \Delta^2 u_m(t) dx - \xi^2 \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx \\ & - \int_{\Omega} \Delta u_m(t) \Delta^2 u_m(t) dx + \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx = 0. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Analisaremos cada termo de (3.113). Para o primeiro termo, aplicamos fórmula de Green para obter

$$\int_{\Omega} u_m(t) \Delta^2 u_m(t) dx = \int_{\partial\Omega} u_m(t) \cdot \nabla \Delta u_m(t) \cdot \eta ds - \int_{\Omega} \nabla u_m(t) \cdot \nabla \Delta u_m(t) dx.$$

Como, por (2.42) temos

$$\int_{\partial\Omega} u_m(t) \cdot \nabla \Delta u_m(t) \cdot \eta \, ds = 0$$

e logo,

$$\int_{\Omega} u_m(t) \Delta^2 u_m(t) \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u_m(t) \cdot \nabla \Delta u_m(t) \, dx.$$

Aplicando a fórmula de Grenn novamente, obtemos

$$-\int_{\Omega} \nabla u_m(t) \cdot \nabla \Delta u_m(t) \, dx = - \int_{\partial\Omega} \nabla u_m(t) \cdot \Delta u_m(t) \cdot \eta \, ds + \int_{\Omega} |\Delta u_m(t)|^2 \, dx.$$

Mas  $\frac{\partial u_m(t)}{\partial \eta} = 0$  em  $\partial\Omega$ . Então,

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u_m(t) \cdot \Delta u_m(t) \cdot \eta \, ds = 0. \quad (3.114)$$

Logo,

$$\int_{\Omega} u_m(t) \Delta^2 u_m(t) \, dx = \int_{\Omega} |\Delta u_m(t)|^2 \, dx.$$

Para o quinto termo, aplicamos a fórmula de Grenn para obter

$$-\int_{\Omega} \Delta u_m(t) \Delta^2 u_m(t) \, dx = \int_{\partial\Omega} \Delta u_m(t) \cdot \nabla \Delta u_m(t) \cdot \eta \, ds + \int_{\Omega} |\nabla \Delta u_m(t)|^2 \, dx.$$

Mas também, por (2.42), temos que

$$-\int_{\Omega} \Delta u_m(t) \Delta^2 u_m(t) \, dx = \int_{\Omega} |\nabla \Delta u_m(t)|^2 \, dx.$$

Assim, (3.113) torna-se:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta u_m(t)|^2 \, dx + \xi^2 \int_{\Omega} |\Delta^2 u_m(t)|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla \Delta u_m(t)| \, dx \\ &= \xi^2 \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) \, dx - \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) \, dx. \end{aligned} \quad (3.115)$$

No que segue, estimaremos a soma

$$\xi^2 \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) \, dx - \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) \, dx. \quad (3.116)$$

Para majorar a primeira parcela da soma acima, utilizaremos a desigualdade de Hölder, então:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx &\leq \left| \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))| |\Delta^2 u_m(t)| dx \leq \left( \int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\Delta^2 u_m(t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

e, pela desigualdade de Young com  $p = q = 2$ , obtemos

$$\int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta^2 u_m(t)|^2 dx. \quad (3.117)$$

Para majorar a segunda parcela, aplicamos a fórmula de Grenn o que garante que

$$\int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx = \int_{\partial\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \nabla \Delta u_m(t) \cdot \eta ds - \int_{\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \nabla \Delta u_m(t) dx.$$

E por (2.42) temos

$$\int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx = - \int_{\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \nabla \Delta u_m(t) dx.$$

Novamente aplicando a fórmula de Grenn tem-se

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \nabla \Delta u_m(t) dx &= - \int_{\partial\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \cdot \Delta u_m(t) \cdot \eta ds \\ &\quad \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta u_m(t) dx. \end{aligned}$$

E (2.44) obtemos

$$- \int_{\Omega} \nabla(u_m^3(t) - u_m(t)) \nabla \Delta u_m(t) dx = \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta u_m(t) dx.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx = \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta u_m(t) dx. \quad (3.118)$$

Deste modo, combinando (3.117) e (3.118), temos:

$$\begin{aligned}
& \xi^2 \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx - \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx \\
& \leq \left| \xi^2 \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx - \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx \right| \\
& \leq \left| \xi^2 \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx \right| + \left| \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx \right| \\
& \leq \frac{\xi^2}{2} \int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx + \frac{\xi^2}{2} \int_{\Omega} |\Delta^2 u_m(t)|^2 dx + \left| \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta u_m(t) dx \right| \\
& \leq \frac{\xi^2}{2} \int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx + \frac{\xi^2}{2} \int_{\Omega} |\Delta^2 u_m(t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))| |\Delta u_m(t)| dx.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando a desigualdade de Hölder na parcela

$$\int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))| |\Delta u_m(t)| dx,$$

obtemos

$$\int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))| |\Delta u_m(t)| dx \leq \left( \int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\Delta u_m(t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

E, pela desigualdade de Young, com  $p = q = 2$  e  $\varepsilon = \frac{\xi^2}{2}$ , temos que

$$\int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))| |\Delta u_m(t)| dx \leq \frac{\xi^2}{2} \int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx + \frac{1}{2\xi^2} \int_{\Omega} |\Delta u_m(t)|^2 dx. \quad (3.119)$$

Logo, utilizando (3.119), resulta

$$\begin{aligned}
& \xi^2 \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx - \int_{\Omega} (u_m^3(t) - u_m(t)) \Delta^2 u_m(t) dx \\
& \leq \frac{\xi^2}{2} \int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx + \frac{\xi^2}{2} \int_{\Omega} |\Delta^2 u_m(t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))| |\Delta u_m(t)| dx \\
& \leq \xi^2 \int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx + \frac{\xi^2}{2} \int_{\Omega} |\Delta^2 u_m(t)|^2 dx + \frac{1}{2\xi^2} \int_{\Omega} |\Delta u_m(t)|^2,
\end{aligned} \quad (3.120)$$

Combinando (3.115) e (3.120) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta u_m(t)|^2 dx + \frac{\xi^2}{2} \int_{\Omega} |\Delta^2 u_m(t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \Delta u_m(t)| dx \\ & \leq \xi^2 \int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx + \frac{1}{2\xi^2} \int_{\Omega} |\Delta u_m(t)|^2. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Por outro lado, como

$$\Delta(u_m^3(t) - u_m(t)) = 6u_m(t)(\nabla u_m(t))^2 + (3u_m^2(t) - 1)\Delta u_m(t). \quad (3.122)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx &= \int_{\Omega} 36|u_m(t)|^2|\nabla u_m(t)|^4 dx + \\ &\quad \int_{\Omega} 12u_m(t)|\nabla u_m(t)|^2(3u_m(t) - 1)\Delta u_m(t) dx + \int_{\Omega} (3u_m^2(t) - 1)|\Delta u_m(t)|^2 dx \\ &\leq 36 \int_{\Omega} |u_m(t)|^2|\nabla u_m(t)|^4 dx + 36 \int_{\Omega} |u_m(t)|^3|\nabla u_m(t)|^3\Delta u_m(t) dx \\ &\quad + 9 \int_{\Omega} |u_m(t)|^4|\Delta u_m(t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta u_m(t)|^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx &\leq 36\|u_m(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|\nabla u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 \\ &\quad + 36\|u_m(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^3\|\nabla u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^2\|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + 9\|u_m(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^4\|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dx. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para  $n = 1, 2, 3$ .

Para  $n = 1$ .

**(i)** Escolhendo  $j = 1$ ,  $r = 4$ ,  $m = 4$ ,  $p = 2$  e  $q = \infty$  obtemos  $\alpha = \frac{3}{14}$ . Logo, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|\nabla u_m(t)\|_{L^4(\Omega)} \leq C\|u_m(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{11}{14}}\|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{3}{14}}. \quad (3.124)$$

**(ii)** Escolhendo  $j = 2$ ,  $r = 2$ ,  $m = 4$ ,  $p = 2$  e  $q = \infty$ , obtemos  $\alpha = \frac{3}{7}$ . Logo, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u_m(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{4}{7}}\|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{3}{7}}. \quad (3.125)$$

Usando (3.124) e (3.125) em (3.123) obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx &\leq C\|u_m(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{36}{7}}\|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{6}{7}} \\ &\quad + C\|u_m(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{36}{7}}\|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{6}{7}} \\ &\quad + C\|u_m(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{36}{7}}\|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{6}{7}}\|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C\|u_m(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{36}{7}}\|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{6}{7}} + \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Young e a equivalência das normas de  $H^4(\Omega)$  e  $H_{bc}^4(\Omega)$ , temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx &\leq \frac{1}{\xi^2}C\|u_m(t)\|_{L^\infty}^9 + \frac{\xi^2}{4}\|\Delta^2 u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi^2}{4}\eta_2\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

E da imersão contínua de Sobolev,  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ , existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|u_m(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u_m(t)\|_{H^1(\Omega)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx &\leq \frac{C}{\xi^2}\|u_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^9 + \frac{\xi^2}{4}\|\Delta^2 u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi^2}{4}\eta_2\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Para  $n = 2$ .

**(i)** Escolhendo  $j = 1$ ,  $r = 4$ ,  $m = 4$ ,  $p = 2$  e  $q = 3$  obtemos  $\alpha = \frac{7}{22}$ . Logo, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|\nabla u_m(t)\|_{L^4(\Omega)} \leq C\|u_m(t)\|_{L^3(\Omega)}^{\frac{15}{22}}\|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{7}{22}}. \quad (3.126)$$

**(ii)** Escolhendo  $j = 2$ ,  $r = 2$ ,  $m = 4$ ,  $p = 2$  e  $q = 3$ , obtemos  $\alpha = \frac{5}{11}$ . Logo,

$$\|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_m(t)\|_{L^3(\Omega)}^{\frac{6}{11}} \|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{5}{11}}. \quad (3.127)$$

**(iii)** Escolhermos  $j = 0$ ,  $r = \infty$ ,  $m = 4$ ,  $p = 2$  e  $q = 3$ , obtemos  $\alpha = \frac{2}{11}$ . Logo, existe uma constante  $C_{14} > 0$  tal que

$$\|u_m(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{15} \|u_m(t)\|_{L^3(\Omega)}^{\frac{9}{11}} \|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{2}{11}}. \quad (3.128)$$

Usando (3.126), (3.127) e (3.128) em (3.123) obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx &\leq C \|u_m(t)\|_{L^3(\Omega)}^{\frac{48}{11}} \|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{18}{11}} \\ &\quad + C \|u_m(t)\|_{L^3(\Omega)}^{\frac{48}{11}} \|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{18}{11}} \\ &\quad + C \|u_m(t)\|_{L^3(\Omega)}^{\frac{48}{11}} \|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{18}{11}} + \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C \|u_m(t)\|_{L^3(\Omega)}^{\frac{48}{11}} \|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{18}{11}} + \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Young e a equivalência das normas de  $H^4(\Omega)$  e  $H_{bc}^4(\Omega)$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx &\leq \frac{C}{\xi^2} \|u_m(t)\|_{L^3(\Omega)}^{24} + \frac{\xi^2}{4} \|\Delta^2 u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi^2}{4} \eta_2 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

E da imersão contínua de  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega)$ , existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|u_m(t)\|_{L^3(\Omega)} \leq C \|u_m(t)\|_{H^1(\Omega)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx &\leq \frac{C}{\xi^2} \|u_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^{24} + \frac{\xi^2}{4} \|\Delta^2 u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi^2}{4} \eta_2 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Para  $n = 3$ .

**(i)** Escolhendo  $j = 1$ ,  $r = 4$ ,  $m = 4$ ,  $p = 2$  e  $q = 6$  obtemos  $\alpha = \frac{1}{4}$ . Logo, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|\nabla u_m(t)\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|u_m(t)\|_{L^6(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{1}{4}}. \quad (3.129)$$

**(ii)** Escolhendo  $j = 2$ ,  $r = 2$ ,  $m = 4$ ,  $p = 2$  e  $q = 6$ , obtemos  $\alpha = \frac{1}{3}$ . Logo, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u_m(t)\|_{L^6(\Omega)}^{\frac{2}{3}} \|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{1}{3}}. \quad (3.130)$$

**(iii)** Escolhendo  $j = 0$ ,  $r = \infty$ ,  $m = 4$ ,  $p = 2$  e  $q = 6$ , obtemos  $\alpha = \frac{1}{6}$ . Logo, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|u_m(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u_m(t)\|_{L^6(\Omega)}^{\frac{5}{6}} \|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{1}{6}}. \quad (3.131)$$

Usando (3.129), (3.130) e (3.131) em (3.123) obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx &\leq C \|u_m(t)\|_{L^6(\Omega)}^{\frac{14}{3}} \|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{4}{3}} \\ &\quad + C \|u_m(t)\|_{L^6(\Omega)}^{\frac{14}{3}} \|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{4}{3}} \\ &\quad + CC \|u_m(t)\|_{L^6(\Omega)}^{\frac{14}{3}} \|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{4}{3}} + \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C \|u_m(t)\|_{L^6(\Omega)}^{\frac{14}{3}} \|u_m(t)\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{4}{3}} + \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Young e a equivalência das normas de  $H^4(\Omega)$  e  $H_{bc}^4(\Omega)$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx &\leq \frac{C}{\xi^2} \|u_m(t)\|_{L^6(\Omega)}^{14} + \frac{\xi^2}{4} \|\Delta^2 u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi^2}{4} \eta_2 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Da imersão contínua de  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ , existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|u_m(t)\|_{L^6(\Omega)} \leq C\|u_m(t)\|_{H^1(\Omega)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Delta(u_m^3(t) - u_m(t))|^2 dx &\leq \frac{C}{\xi^2} \|u_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^{14} + \frac{\xi^2}{4} \|\Delta^2 u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi^2}{4} \eta_2 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Portanto, para  $n = 1, 2, 3$ , tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta(u_m^3(t) - u_m(t))^2 dx &\leq C\|u_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^\alpha + \frac{\xi^2}{4} \|\Delta^2 u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \xi^2 4\eta_2 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

com  $\alpha = 9$  para  $n = 1$ ,  $\alpha = 24$  para  $n = 2$  e  $\alpha = 14$  para  $n = 3$ .

Assim, (??) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta u_m(t)|^2 dx + \frac{\xi^2}{4} \int_{\Omega} |\Delta^2 u_m(t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla(\Delta u_m(t))|^2 dx \\ \leq C(\|u_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^\alpha dx + \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dx + \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2). \end{aligned} \tag{3.132}$$

com  $C$  dependendo de  $\xi$  e  $\Omega$ .

Assim,, de (3.132), temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta u_m(t)|^2 dx \leq C(\|u_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^\alpha + \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dx + \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2).$$

Agora, pelas estimativas (3.79) e (3.90) temos que

$$\frac{d}{dt} \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Pela desigualdade de Gronwall obtemos que

$$\|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (+C\|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Delta u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2)e^{CT}. \tag{3.133}$$

Assim,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (3.134)$$

Logo,

$$\|\Delta u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

Integrando (3.132) em  $[0, T]$  e utilizando (3.79), (3.90) e (3.134), temos

$$\begin{aligned} \|\Delta u_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 &+ \frac{\xi^2}{4} \int_0^T \int_\Omega |\Delta^2 u_m(t)|^2 dx dt + \int_0^T \int_\Omega |\nabla(\Delta u_m(t))|^2 dx dt \\ &\leq \|\Delta u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + T \sup_{0 \leq t \leq T} \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Assim,

$$\|\Delta^2 u_m(t)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla(\Delta u_m(t))\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

E obtemos

$$\begin{aligned} \|\Delta^2 u_m(t)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &\leq C \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2; \\ \|\nabla(\Delta u_m(t))\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &\leq C \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Combinando as estimativas (3.83), (3.84), (3.90), (3.79), (3.134), (3.136) e (3.136) temos

$$\begin{aligned} \|u_m\|_{L^\infty(0,T;H_{bc}^2(\Omega))} &\leq C \|u_0\|_{H^2(\Omega)}, \\ \|u_m\|_{L^2(0,T;H_{bc}^4(\Omega))} &\leq C \|u_0\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Procedendo de modo análogo como na seção anterior, passamos o limite no problema aproximado e obtemos que a solução fraca satisfaz  $u \in C([0, T]; H_{bc}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_{bc}^4(\Omega))$  quando  $u_0 \in H^2(\Omega)$  e  $n = 1, 2, 3$  ■

# Capítulo 4

## Solução numérica da equação de Cahn-Hilliard unidimensional

Nesse capítulo apresentaremos o exemplo numérico governado pela equação de Cahn-Hilliard unidimensional, tratado por P. Rebelo no artigo [17]. Seguindo este autor, usaremos o método de Faedo-Galerkin acoplado ao método da decomposição de Adomian. Para melhor compreensão, faremos uma breve introdução do método de decomposição de Adomian para resolução de equações integrais de Volterra. Usamos o aplicativo matemático *MAXIMA* na implementação dos resultados mostrados na figura 1

### 4.1 Breve resumo sobre equações integrais

Equações Integrais aparecem em muitas aplicações da Matemática e da Engenharia. Podemos citar a teoria de potencial, acústica, eletricidade, mecânica dos fluidos, genética de populações, entre outros. Estas equações podem ser escritas como equações de operadores para operadores integrais. A teoria clássica das equações integrais trata de dois tipos

de equações: equação de *Volterra* e equação de *Fredholm*. Nas equações do tipo Fredholm a região de integração é fixa enquanto de nas equações do tipo Volterra é variável. Por exemplo, a equação

$$c\alpha(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s, \alpha(s)) ds, \quad a \leq t \leq b$$

é do tipo Fredholm enquanto que a equação

$$c\alpha(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t, s, \alpha(s)) ds, \quad a \leq t \leq b$$

é do tipo Volterra.

Escrevemos as equações integrais na forma de equações de operadores do seguinte modo: consideremos o operador  $K$  que a cada função  $\alpha(t)$  associa uma única função dada por

$$K[\alpha](t) = \int_a^t k(t, s, \alpha(s)) ds.$$

O operador  $K$  é chamado *operador integral*. Assim,

$$c\alpha(t) - \lambda K[\alpha](t) = f(t). \quad (4.1)$$

Quando  $c = 0$  em (4.1), a equação integral é chamada de *primeira espécie*. Para  $c = 1$ , é chamada de *segunda espécie*. Se  $k(t, s, \alpha(s)) = k(t, s)\alpha(s)$ , as equações integrais são *lineares*, em outros casos são *não lineares*.

Em muitos casos, resolver uma equação integral é equivalente a resolver um problema de contorno ou valor inicial governado por uma equação diferencial. O exemplo mais conhecido é a equivalência entre o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

e a equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds.$$

Mais detalhes sobre as propriedades das equação integral de Volterra podem ser encontrados em [14]. No que segue, provaremos um resultado de existência e unicidade de solução para esta equação.

**Teorema 4.1** *Supondo que as funções  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $k : [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas e  $k$  é lipschitziana na terceira variável, ou seja, existe uma constante  $L > 0$  tal que  $k$  satisfaz a condição*

$$|k(t, s, y) - k(t, s, z)| \leq L|y - z|, \quad (4.2)$$

com  $L$  uma constante. Então a equação integral de Volterra

$$\alpha(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s, \alpha(s)) ds \quad (4.3)$$

tem uma única solução contínua em  $[0, T]$ .

**Demonstração:** Vamos aplicar o método das sucessivas aproximações. Para isto, considere uma sequência gerada por:

$$\alpha_n(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s, \alpha_{n-1}(s)) ds. \quad (4.4)$$

Primeiro, provaremos, por indução, que

$$|\alpha_n(t) - \alpha_{n-1}(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{(Lt)^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

com  $M = \max_{0 \leq t, s \leq T} |k(t, s, z)|$  para  $|z| < c$ .

De fato, para  $n = 1$  temos

$$\begin{aligned} |\alpha_1(t) - \alpha_0(t)| &= |\alpha_1(t) - f(t)| = \left| \int_0^t k(t, s, f(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |k(t, s, f(s))| ds \leq M t = \frac{M}{L} \frac{(Lt)^1}{1!}. \end{aligned}$$

Observe que,  $\max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| < c$ .

Suponha, por hipótese de indução, que

$$|\alpha_k(t) - \alpha_{k-1}(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{(Lt)^k}{k!}.$$

Então, por (4.4), a condição de  $k(t, s, z)$  ser lipschitz na terceira variável e hipótese de indução obtemos

$$\begin{aligned} |\alpha_{k+1}(t) - \alpha_k(t)| &\leq \int_0^t |k(t, s, \alpha_k(s)) - k(t, s, \alpha_{k-1}(s))| ds, \\ |\alpha_{k+1}(t) - \alpha_k(t)| &\leq L \int_0^t |\alpha_k(t) - \alpha_{k-1}(t)| ds, \\ &\leq L \int_0^t \frac{M}{L} \frac{(Ls)^k}{k!} ds, \\ &\leq L \frac{M}{L} \frac{L^k}{k!} \int_0^t s^k ds = \frac{M}{L} \frac{(Lt)^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Agora, provaremos que a sequência de funções  $(\alpha_n(t))$  obtida por (4.4), converge uniformemente em  $[0, T]$ . De fato, observe que, para  $t \in [0, T]$ , tem-se

$$\frac{M}{L} \frac{(Lt)^k}{(k)!} \leq \frac{M}{L} \frac{(LT)^k}{(k)!}.$$

Além disso, a série numérica (positiva)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{L} \frac{(LT)^k}{(k)!}$$

é absolutamente convergente e converge para  $\frac{M}{L}(e^{LT} - 1)$ .

Logo, pelo teste da comparação (veja [18, teorema 7.10]), a série de funções

$$\alpha_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_{k+1}(t) - \alpha_k(t)]$$

é uniformemente convergente, pois  $\frac{M}{L} \frac{(LT)^k}{k!}$  independe de  $t$  em  $[0, T]$ .

Como a  $n$ -ésima soma parcial desta série é

$$\alpha_0(t) + \sum_{k=1}^n [\alpha_{k+1}(t) - \alpha_k(t)] = \alpha_n(t)$$

temos que a sequência de funções contínuas  $(\alpha_n(t))$  converge uniformemente em  $[0, T]$ .

Seja  $\alpha(t)$  a função contínua que é o limite da sequência  $(\alpha_n(t))$ , isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(t) = \alpha(t).$$

Mostraremos que  $\alpha(t)$  é solução de (4.3). Por (4.4) temos que

$$\alpha(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(t) = f(t) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t k(t, s, \alpha_n(s)) ds. \quad (4.5)$$

Sabemos que, se a sequência  $(k(t, s, \alpha_n(s)))$  converge uniformemente para  $(k(t, s, \alpha(s)))$  então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t k(t, s, \alpha_n(s)) ds = \int_0^t k(t, s, \alpha(s)) ds. \quad (4.6)$$

Como  $k(t, s, z)$  é uma função lipschitz na terceira variável temos

$$|k(t, s, \alpha_n(t)) - k(t, s, \alpha(t))| \leq L |\alpha_n(t) - \alpha(t)|$$

e, logo,

$$\sup_{(t,s) \in [0,T] \times [0,T]} |k(t, s, \alpha_n(t)) - k(t, s, \alpha(t))| \leq L \sup_{t \in [0,T]} |\alpha_n(t) - \alpha(t)|.$$

Mas,  $\alpha_n(t) \rightarrow \alpha(t)$  uniformemente em  $[0, T]$ , o que implica  $\|\alpha_n - \alpha\|_\infty \rightarrow 0$ . Logo,  $k(t, s, \alpha_n(t)) \rightarrow k(t, s, \alpha(t))$  uniformemente em  $[0, T]$ .

Combinando (4.5) e (4.6) obtemos

$$\alpha(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s, \alpha(s)) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

*Unicidade da solução.* Suponha que  $\alpha_1(t)$  e  $\alpha_2(t)$  seja soluções de (4.3). Seja  $\phi(t) = \alpha_1(t) - \alpha_2(t)$ , então  $\phi(t)$  satisfaz

$$\phi(t) = \int_0^t [k(t, s, \alpha_1(s)) - k(t, s, \alpha_2(s))] ds. \quad (4.7)$$

Como  $k(t, s, z)$  é uma função lipschitz na terceira variável temos que

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &\leq \int_0^t |k(t, s, \alpha_1(s)) - k(t, s, \alpha_2(s))| ds \\ &\leq L \int_0^t |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)| ds = L \int_0^t |\phi(s)| ds. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\phi(t)| \leq L \int_0^t |\phi(s)| ds. \quad (4.8)$$

Assim,

$$|\phi(t)| \leq LC t \quad (4.9)$$

com  $C = \sup_{t \in [0, T]} |\phi(t)|$ .

Usando (4.9) em (4.8) tem-se

$$|\phi(t)| \leq L \int_0^t LC s ds = C \frac{Lt^2}{2!}.$$

Repetindo sucessivamente este processo, obtemos

$$|\phi(t)| \leq C \frac{Lt^n}{n!} \quad n = 1, 2, \dots \quad t \in [0, T].$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  concluímos que  $\phi(t) = 0$  em  $[0, T]$

■

## 4.2 Método da decomposição de Adomian

Nessa seção descreveremos o método da decomposição de Adomian, proposto por George Adomian nos anos 90 para obtenção de solução aproximada de equações diferenciais ordinárias.

Consideremos a equação não linear de operadores

$$Fu = g \quad (4.10)$$

com  $g$  é uma função dada e  $F$  um operador, definidos em espaços convenientes. Suponhamos que (4.10) admite uma única solução.

O método de Adomian é uma técnica para encontrar a solução de (4.10) como uma série  $u = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i$  usando-se o seguinte esquema de recorrência

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \tilde{g}, \\ \alpha_1 &= A_0(\alpha_0) + L(\alpha_0), \\ \alpha_2 &= A_1(\alpha_0, \alpha_1) + L(\alpha_1), \\ &\vdots \\ \alpha_n &= A_{n-1}(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) + L(\alpha_{n-1}).\end{aligned}\tag{4.11}$$

com  $L$  um operador relacionado com a parte linear da equação e  $A_i$  uma classe especial de operadores, chamados *polinômios de Adomian*, que são construídos expandindo em série de Taylor o termo não linear.

Observe que uma característica importante dos polinômios de Adomian é que são construídos de modo que  $A_0$  dependa somente de  $\alpha_0$  (ou seja,  $A_0(\alpha_0)$ ),  $A_1$  dependa somente de  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  (ou seja,  $A_1(\alpha_0, \alpha_1)$ ),  $\dots$   $A_i(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$  e assim sucessivamente.

Seja  $N$  a parte não linear de  $F$  e suponha que a parte linear pode ser decomposta na forma  $L + R$  com  $L$  é inversível e  $R$  um operador. Em geral,  $L$  é o operador derivação.

Assim, a equação (4.10) torna-se

$$Lu + Ru + Nu = g.$$

Aplicando operador  $L^{-1}$  na equação acima, obtemos a seguinte equação integral do tipo Volterra.

$$u = L^{-1}(g - Ru) - L^{-1}Nu.\tag{4.12}$$

Note que a ideia é escrever (4.10) na forma  $u = \tilde{L}u + \tilde{N}u$  com  $\tilde{L}$  um operador linear e  $\tilde{N}$  um operador não linear.

Suponha que  $u = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i$  e  $Nu = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$ , então a equação (4.12) torna-se

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = L^{-1}g - L^{-1}R\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i\right) - L^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right). \quad (4.13)$$

Expandido a expressão (4.13) e comparando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= L^{-1}g, \\ \alpha_1 &= -L^{-1}R\alpha_0 - L^{-1}A_0, \\ \alpha_2 &= -L^{-1}R\alpha_1 - L^{-1}A_1, \\ &\vdots \\ \alpha_i &= -L^{-1}R\alpha_{i-1} - L^{-1}A_{i-1} \end{aligned} \quad (4.14)$$

que é um esquema geral para o método de Adomian.

Por exemplo, considere  $Nu = f(u)$ . Fazendo a expansão de Taylor em torno do ponto inicial  $\alpha_0$  temos

$$f(u) = f(\alpha_0) + \frac{d}{dt}f'(\alpha_0)(u - \alpha_0) + \frac{1}{2}f''(\alpha_0)(u - \alpha_0)^2 + \frac{1}{2}f^{(3)}(\alpha_0)(u - \alpha_0)^3 + \dots$$

Substituindo  $u = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i$  obtém-se

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\alpha_0) + \frac{d}{dt}f'(\alpha_0)(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots) + \frac{1}{2}f''(\alpha_0)(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}f^{(3)}(\alpha_0)(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots)^3 + \dots \end{aligned}$$

Neste caso, os polinômios de Adomian são escolhidos como

$$\begin{aligned} A_0 &= f(\alpha_0), \\ A_1 &= \alpha_1 f'(\alpha_0), \\ A_2 &= \alpha_2 f'(\alpha_0) + \frac{\alpha_1^2}{2} f''(\alpha_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \alpha_3 \frac{d}{d\alpha_0} f'(\alpha_0) + \alpha_1 \alpha_2 f''(\alpha_0) + \frac{u_1^3}{3!} f'''(\alpha_0), \\
A_4 &= \alpha_4 f'(\alpha_0) + (\alpha_1 \alpha_3 + \frac{\alpha_2^2}{2!}) f''(\alpha_0) + \frac{\alpha_1^2}{2!} \alpha_2 f'''(\alpha_0) + \frac{\alpha_1^4}{4!} f^{(4)}(\alpha_0), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

De forma abreviada, podemos escrever os termos dos polinômios na forma

$$A_m = \sum_{j=1}^m C(j, m) f^{(j)}(\alpha_0), \quad (4.15)$$

com  $C(j, m)$  representando os coeficientes de cada termo do polinômio para  $1 \leq j \leq m$ .

Note que  $C(j, m)$  é o produto ou a soma dos produtos dos  $j$  componentes de  $u$  até  $m$  dividido pelo fatorial do número de termos repetidos. Por exemplo,  $C(1, 4) = u_4$ ,  $C(2, 4) = u_1 u_3 + \frac{u_2^2}{2!}$ ,  $C(3, 4) = \frac{u_1^2}{2!} u_2$  e  $C(4, 4) = \frac{u_1^4}{4!}$ .

No seguinte exemplo, aplicaremos o método da decomposição de Adomian para obter uma solução aproximada de um problema de valor inicial:

**Exemplo 4.1** Usando o método da decomposição de Adomian obtenha uma solução aproximada do seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \operatorname{sen}\theta = 0, \quad (4.16)$$

$$\theta(0) = \gamma, \theta'(0) = 0. \quad (4.17)$$

*Solução:* Para aplicarmos o método da decomposição de Adomian, vamos decompor a equação diferencial na forma  $L\theta + N\theta = 0$  com  $L$  operador diferencial de segunda ordem e  $N$  o seno.

Vamos integrar duas vezes a equação. Usaremos a notação  $L^{-1} = \int_0^t \int_0^t (\cdot) dt dt$ . Portanto,

$$\theta = \gamma - L^{-1} N\theta = \gamma - L^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} A_i. \quad (4.18)$$

Denotando por  $\theta = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i$  e expandido  $N\theta = \sin \theta$  em série de Taylor em torno de  $\gamma$ , obtemos os seguintes polinômios de Adomian:

$$\begin{aligned} A_0 &= \sin \gamma, \\ A_1 &= \theta_1 \cos \gamma, \\ A_2 &= -\left(\frac{\theta_1^2}{2}\right) \sin \gamma + \theta_2 \cos \gamma, \\ A_3 &= -\left(\frac{\theta_1^3}{6}\right) \cos \gamma - \theta_1 \theta_2 \sin \gamma + \theta_3 \cos \gamma, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como  $\theta_0 = \gamma$ ,  $\theta_1 = -L^{-1}A_0$ ,  $\theta_2 = -L^{-1}A_1$ , ... temos que

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \gamma, \\ \theta_1 &= -\frac{t^2}{2} \sin \gamma, \\ \theta_2 &= \frac{t^4}{4!} \sin \gamma \cos \gamma, \\ \theta_3 &= -\frac{t^6}{6!} (\sin \gamma \cos^2 \gamma - 3 \sin^3 \gamma), \\ \theta_4 &= \frac{t^8}{8!} (\sin \gamma \cos^3 \gamma - 33 \sin^3 \gamma \cos \gamma), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, a solução aproximada do problema é

$$\theta = \gamma - \frac{t^2}{2} \sin \gamma + \frac{t^4}{4!} \sin \gamma \cos \gamma - \frac{t^6}{6!} (\sin \gamma \cos^2 \gamma - 3 \sin^3 \gamma) + \frac{t^8}{8!} (\sin \gamma \cos^3 \gamma - 33 \sin^3 \gamma \cos \gamma) + \dots$$

■

## Várias variáveis

Para funções de várias variáveis, a ideia do método é similar com a diferença que, neste caso, usa-se a série de Taylor generalizada. Em particular, estamos interessados em funções

com três variáveis, por esta razão trabalharemos com a série de Taylor para funções de três variáveis e construiremos os correspondentes polinômios de Adomian em torno do ponto inicial  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Considere as funções  $x, y, z$  aproximadas pelas séries  $x = \sum_{i=0}^m x_i$ ,  $y = \sum_{i=0}^m y_i$  e  $z = \sum_{i=0}^m z_i$  e a seguinte expansão de Taylor da função  $f(x, y, z)$  em torno de  $(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) \\
&+ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^2 \\
&+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)^2 \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(z - z_0) \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)(z - z_0) + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^3 \\
&+ \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)^3 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)^3 \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^2(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^2(z - z_0) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)^2(z - z_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^2(y - y_0) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(z - z_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)(z - z_0)^2 \\
&+ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(y - y_0)(z - z_0) + \dots
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Substituindo  $x = \sum_{i=0}^m x_i$ ,  $y = \sum_{i=0}^m y_i$  e  $z = \sum_{i=0}^m z_i$  em (4.19) podemos considerar os seguintes polinômios:

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(x_0, y_0, z_0), \\
A_1 &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + y_1 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + z_1 \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= x_2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + y_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + z_2 \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + \frac{x_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) \\
&+ \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) + \frac{z_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) + x_1 y_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) \\
&+ x_1 z_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0) + y_1 z_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0), \\
A_3 &= x_3 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + y_3 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + z_3 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + x_1 x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) \\
&+ y_1 y_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) + z_1 z_2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) + x_1 y_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) \\
&+ x_2 y_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) + x_1 z_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0) + x_2 z_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0) \\
&+ y_1 z_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0) + y_2 z_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0) + \frac{x_1^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0, z_0) \\
&+ \frac{y_1^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0, z_0) + \frac{z_1^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(x_0, y_0, z_0), \\
A_4 &= x_4 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + y_4 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + z_4 \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + \left( x_1 x_3 + \frac{x_2^2}{2!} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) \\
&+ \left( y_1 y_3 + \frac{y_2^2}{2!} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) + \left( z_1 z_3 + \frac{z_2^2}{2!} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) + x_1 y_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) \\
&+ x_3 y_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) + x_1 z_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0) + x_3 z_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0) \\
&+ y_1 z_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0) + y_3 z_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0) + \frac{x_1^2}{2!} x_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0, z_0) \\
&+ \frac{y_1^2}{2!} y_2 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0, z_0) + \frac{z_1^2}{2!} z_2 \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(x_0, y_0, z_0) + \frac{x_1^2}{2!} y_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0, z_0) \\
&+ \frac{x_1^2}{2!} z_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(x_0, y_0, z_0) + x_2 \frac{y_1^2}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0, z_0) + x_2 \frac{z_1^2}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \\
&+ \frac{y_1^2}{2!} z_2 \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}(x_0, y_0, z_0) + y_2 \frac{z_1^2}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \\
&+ (x_2 y_1 z_1 + x_1 y_2 z_1 + x_1 y_1 z_2) \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0) + \frac{x_1^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x_0, y_0, z_0) \\
&+ \frac{y_1^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x_0, y_0, z_0) + \frac{z_1^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial z^4}(x_0, y_0, z_0),
\end{aligned}$$

⋮

## Convergência

O próximo teorema trata da convergência do método da decomposição de Adomian e sua prova pode ser encontrada em [7].

Considere as seguintes hipóteses:

- (i) a solução de (4.10) pode ser dada por uma série de funções  $u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$  com a série absolutamente convergente, isto é,  $\sum |\alpha_i| < \infty$ ;
- (ii) o termos não linear  $Nu$  é dado pela série  $N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} N^{(n)}(0) \frac{u^n}{n!}$  com raio de convergência infinito, isto é,  $|u| < \infty$ .

Então temos o seguinte resultado:

**Teorema 4.2 (Convergência método da decomposição de Adomian)** *Se as hipóteses (i)-(ii) valem então a série de Adomian  $u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$  é uma solução da equação (4.12) com  $\alpha_i$  satisfazendo (4.14).*

Mais detalhes sobre o método da decomposição de Adomian podem ser encontrados em [3] e referências citadas neste livro.

## 4.3 Solução aproximada da equação de Cahn-Hilliard unidimensional

Nesta seção aplicaremos o método de Faedo-Galerkin acoplado ao método de Adomian para obtermos uma solução aproximada da equação de Cahn-Hilliard unidimensional.

Como vimos no Capítulo 1, quando aplicamos o método de Faedo-Galerkin na equação de Cahn-Hilliard buscamos soluções aproximadas da forma

$$u_m(t, x) = \alpha_0(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \phi_i(x) \quad (4.20)$$

com  $(\phi_i(x))$  uma base e  $\alpha_i(t)$  soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias. Nossa objetivo é aplicar o método de Adomian na resolução deste sistema, e deste modo, obter uma solução aproximada da equação diferencial.

Devemos ressaltar que para obtermos uma boa aproximação da solução exata devemos ter uma boa aproximação do dado inicial  $u_0(x)$ . Escolhendo a base  $(\phi_i(x))$  com as autofunções do operador laplaciano, que no caso unidimensional, são dadas por

$$\phi_i(x) = \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Aproximamos a condição inicial pela projeção de  $u_0(x)$  no espaço gerado pelas  $m$ -primeiras  $\phi_i(x)$ , ou seja, o subespaço dado por  $V_m = \text{span}[\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_{m-1}(x)]$ . Logo,  $u_{0m}(x) = \mathcal{P}(u_0)$  com o operador projeção em  $V_m$ .

### 4.3.1 Problema aproximado

Considere a equação de Cahn-Hilliard unidimensional:

$$u_t = (-\varepsilon^2 u_{xx} + u^3 - u)_{xx} \quad \text{para } (t, x) \in (0, T] \times [0, L], \quad (4.21)$$

$$u_x(t, x) = u_{xxx}(t, x) = 0 \quad \text{para } x = 0, L; \quad t \in [0, T], \quad (4.22)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{para } x \in [0, L]. \quad (4.23)$$

Sabemos que formulação fraca do problema (4.21)-(4.23)-(4.22) é dada por

$$\begin{aligned} \int_0^L u_t v \, dx &= -\varepsilon^2 \int_0^L u_{xx} v_{xx} \, dx + \int_0^L u^3 v_{xx} \, dx - \int_0^L u_{xx} v \, dx, \quad \forall v \in V_m, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Deste modo temos o seguinte problema aproximado:

$$\begin{aligned} \int_0^L (u_m)_t v \, dx &= -\varepsilon^2 \int_0^L (u_m)_{xx} v_{xx} \, dx + \int_0^L (u_m)^3 v_{xx} \, dx - \int_0^L (u_m)_{xx} v \, dx, \quad \forall v \in V_m, \\ u_m(0) &= u_{0m}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Logo, usando a definição de  $u_m(t, x)$  e tomando  $v = \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , obtemos

$$(u_m)_t = \alpha'_0(t)v(x) + \sum_{i=1}^m \alpha'_i(t) \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (4.26)$$

$$(u_m)_{xx} = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t)v(x) = -\sum_{i=1}^m \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \alpha_i(t) \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right). \quad (4.27)$$

Assim, substituindo em (4.25) e integrando, tem-se

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m \alpha'_i(t) \int_0^L \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \, dx = \\ &= -\varepsilon^2 \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^m i^2 \alpha_i(t) \int_0^L \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \, dx - \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \int_0^L (u_m(t))^3 \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \, dx + \\ &+ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^m i^2 \alpha_i(t) \int_0^L \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \, dx. \end{aligned}$$

Observe que

$$\int_0^L \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \, dx = \frac{L}{2} \delta_{ij}.$$

Portanto, tomindo  $j = i$  em (4.3.1) obtemos

$$\frac{L}{2} \alpha'_i(t) = \frac{L}{2} \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{i\varepsilon\pi}{L} \right)^2 \right) \alpha_i(t) - \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \int_0^L u_m^3(t) \cos \left( \frac{i\pi x}{L} \right) dx.$$

Integrando em  $[0, t]$ , para  $t \leq T$ , tem-se

$$\alpha_i(t) = \alpha_i(0) + \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{i\varepsilon\pi}{L} \right)^2 \right) \int_0^t \alpha_i(t) dt - \frac{2}{L} \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \int_0^t \int_0^L u_m^3(t) \cos \left( \frac{i\pi x}{L} \right) dx dt.$$

Por simplicidade, usaremos a seguinte de notação:

$$C_i = \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{i\varepsilon\pi}{L} \right)^2 \right),$$

$$F_{i,m}(t) = \int_0^L u_m^3(t) \cos \left( \frac{i\pi x}{L} \right) dx.$$

Portanto, para cada  $m$ , temos seguinte sistema de equações integrais de Volterra de segunda espécie:

$$\alpha_{i,m+1}(t) = \alpha_i(0) + C_i \int_0^t \alpha_{i,m}(t) dt - \frac{2}{L} \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \int_0^t F_{i,m}(t) dt \quad (4.28)$$

com as condições iniciais

$$u_{0m}(0) = \alpha_0(0) = \frac{1}{L} \int_0^L u_0(x) dx,$$

$$\alpha_i(0) = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \cos \left( \frac{i\pi x}{L} \right) dx.$$

Devemos ressaltar que o sistema de equações diferenciais gerado pelo método de Faedo-Galerkin é equivalente ao sistema de equações integrais (4.28). Pela análise do Capítulo 1 sabemos que (4.28) tem uma única solução global para cada  $m$ .

Nosso objetivo é obter uma solução aproximada de (4.28) pelo método de Adomian. Para isto, suponhamos que a solução de (4.28) é da forma  $\alpha_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}(t)$  e que o termo não

linear  $F_i(t)$  pode ser escrito como

$$F_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik}.$$

Além disso, como em  $F_i(t)$  temos uma não-linearidade cúbica, ao substituirmos  $u_m$  pela expressão (4.20) em  $F_i(t)$  obteremos expressões da forma  $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$ , indicando que o termo não linear é uma função de três variáveis. Usando a notação  $F_i(t) = G(u, v, z)$ , temos seguintes polinômios de Adomian:

$$\begin{aligned} A_{i0} &= u_{i0} v_{i0} z_{i0}, \\ A_{i1} &= u_{i1} v_{i0} z_{i0} + u_{i0} v_{i1} z_{i0} + u_{i0} v_{i0} z_{i1}, \\ A_{i2} &= u_{i2} v_{i0} z_{i0} + u_{i0} v_{i2} z_{i0} + u_{i0} v_{i0} z_{i2} + u_{i1} v_{i1} z_{i0} + u_{i0} v_{i1} z_{i1} + u_{i1} v_{i0} z_{i1}, \\ A_{i3} &= u_{i3} v_{i0} z_{i0} + u_{i0} v_{i3} z_{i0} + u_{i0} v_{i0} z_{i3} + u_{i0} v_{i1} z_{i2} + u_{i0} v_{i2} z_{i1} + u_{i1} v_{i2} z_{i0} + u_{i1} v_{i0} z_{i2} \\ &\quad + u_{i1} v_{i1} z_{i1} + u_{i2} v_{i1} z_{i0} + u_{i2} v_{i0} z_{i1}, \\ A_{i4} &= u_{i4} v_{i0} z_{i0} + u_{i0} v_{i4} z_{i0} + u_{i0} v_{i0} z_{i4} + u_{i1} v_{i3} z_{i0} + u_{i1} v_{i2} z_{i1} + u_{i1} v_{i1} z_{i2} + u_{i1} v_{i0} z_{i3} \\ &\quad + u_{i2} v_{i2} z_{i0} + u_{i2} v_{i1} z_{i1} + u_{i2} v_{i0} z_{i2} + u_{i3} v_{i0} z_{i1} + u_{i3} v_{i1} z_{i0} + u_{i0} v_{i3} z_{i1} + u_{i0} v_{i2} z_{i2} \\ &\quad + u_{i0} v_{i1} z_{i3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para ilustrar, vamos considerar o seguinte exemplo:

**Exemplo 4.2** Considere  $L = 1$ ,  $m = 4$ ,  $\varepsilon^2 = 10^{-2}$  e  $u_0(x) = \frac{\cos(4\pi x)}{100}$ .

Assim, as condições iniciais tornam-se

$$\begin{aligned} \alpha_4(0) &= \frac{1}{100} \\ \alpha_i(0) &= 0 \quad i = 0, \dots, 3. \end{aligned} \tag{4.29}$$

e o sistema (4.14) torna-se

$$\begin{aligned}\alpha_{1,m+1}(t) &= \alpha_1(0) + C_1 \int_0^t \alpha_{1,m}(t) dt - (2\pi^2) \int_0^t F_{1,m}(t) dt, \\ \alpha_{2,m+1}(t) &= \alpha_2(0) + C_2 \int_0^t \alpha_{2,m}(t) dt - (8\pi^2) \int_0^t F_{2,m}(t) dt, \\ \alpha_{3,m+1}(t) &= \alpha_3(0) + C_3 \int_0^t \alpha_{3,m}(t) dt - (18\pi^2) \int_0^t F_{3,m}(t) dt, \\ \alpha_{4,m+1}(t) &= \alpha_4(0) + C_4 \int_0^t \alpha_{4,m}(t) dt - (32\pi^2) \int_0^t F_{4,m}(t) dt.\end{aligned}\tag{4.30}$$

Onde

$$\begin{aligned}C_1 &= \pi^2 - \frac{\pi^4}{10^4}, \\ C_2 &= 4\pi^2 - \frac{16\pi^4}{10^4}, \\ C_3 &= 9\pi^2 - \frac{81\pi^4}{10^4}, \\ C_4 &= 16\pi^2 - \frac{256\pi^4}{10^4}.\end{aligned}$$

No que segue, calcularemos os termos não lineares.

$$\begin{aligned}F_i(t) &= \int_0^1 (\alpha_0^3 + 3\alpha_0^2\alpha_1 \cos(\pi x) + 3\alpha_0^2\alpha_2 \cos(2\pi x) + 3\alpha_0\alpha_3 \cos(3\pi x) + 3\alpha_0^2\alpha_4 \cos(4\pi x) \\ &\quad + 3\alpha_0\alpha_1^2 \cos^2(\pi x) + 6\alpha_0\alpha_1\alpha_2 \cos(\pi x) \cos(2\pi x) + 6\alpha_0\alpha_1\alpha_3 \cos(\pi x) \cos(3\pi x) \\ &\quad + 6\alpha_0\alpha_1\alpha_4 \cos(\pi x) \cos(4\pi x) + 3\alpha_0\alpha_2^2 \cos^2(2\pi x) + 6\alpha_0\alpha_2\alpha_3 \cos(2\pi x) \cos(3\pi x) \\ &\quad + 6\alpha_0\alpha_2\alpha_4 \cos(2\pi x) \cos(4\pi x) + 3\alpha_0\alpha_3^2 \cos^2(3\pi x) + 6\alpha_0\alpha_3\alpha_4 \cos(3\pi x) \cos(4\pi x) \\ &\quad + 3\alpha_0\alpha_4^2 \cos^2(4\pi x) + \alpha_1^3 \cos^3(\pi x) + 3\alpha_1^2\alpha_2 \cos^2(\pi x) \cos(2\pi x) \\ &\quad + 3\alpha_1^2\alpha_3 \cos^2(\pi x) \cos(3\pi x) + 3\alpha_1^2\alpha_4 \cos^2(\pi x) \cos(4\pi x) + 3\alpha_1\alpha_2^2 \cos(\pi x) \cos^2(2\pi x) \\ &\quad + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cos(\pi x) \cos(2\pi x) \cos(3\pi x) + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_4 \cos(\pi x) \cos(2\pi x) \cos(4\pi x) \\ &\quad + 3\alpha_1\alpha_3^2 \cos(\pi x) \cos^2(3\pi x) + 6\alpha_1\alpha_3\alpha_4 \cos(\pi x) \cos(3\pi x) \cos(4\pi x) + \\ &\quad + 3\alpha_1\alpha_4^2 \cos(\pi x) \cos^2(4\pi x) + \alpha_2^3 \cos^3(2\pi x) + 3\alpha_2^2\alpha_3 \cos^2(2\pi x) \cos(3\pi x) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3\alpha_2^2\alpha_4 \cos^2(2\pi x) \cos(4\pi x) + 3\alpha_2\alpha_3^2 \cos(2\pi x) \cos^2(3\pi x) \\
& + 6\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \cos(2\pi x) \cos(3\pi x) \cos(4\pi x) + 3\alpha_2\alpha_4^2 \cos(2\pi x) \cos^2(4\pi x) \\
& + \alpha_3^3 \cos^3(3\pi x) + 3\alpha_3^2\alpha_4 \cos^2(3\pi x) \cos(4\pi x) + 3\alpha_3\alpha_4^2 \cos(3\pi x) \cos^2(4\pi x) \\
& + \alpha_4^3 \cos^3(4\pi x) \big) \cos(i\pi x) dx. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
F_1(t) &= \frac{3}{8} (4\alpha_0^2\alpha_1 + 4\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_0\alpha_2\alpha_3 + 4\alpha_0\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1^3 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_4 \\
&\quad + 2\alpha_1\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_4^2 + \alpha_2^2\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3\alpha_4), \\
F_2(t) &= \frac{3}{8} (4\alpha_0^2\alpha_2 + 2\alpha_0\alpha_1^2 + 4\alpha_0\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_0\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_2^3 + 2\alpha_2\alpha_4^2 \\
&\quad + \alpha_3^2\alpha_4), \\
F_3(t) &= \frac{3}{8} (4\alpha_0^2\alpha_3 + 2\alpha_0\alpha_1^2 + 4\alpha_0\alpha_1\alpha_4 + 3\alpha_1^3 + 2\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_4 + 2\alpha_2^2\alpha_3 \\
&\quad + 2\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3^3 + 2\alpha_3\alpha_4^2), \\
F_4(t) &= \frac{3}{8} (4\alpha_0^2\alpha_4 + 4\alpha_0\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_0\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3^2 + 2\alpha_3^2\alpha_4 + \alpha_4^3).
\end{aligned}$$

Logo, o sistema de equações integrais de Volterra é dado por

$$\alpha_{i,m+1}(t) = \alpha_i(0) + C_i \int_0^t \alpha_{i,m}(t) dt - 2(i\pi)^2 \int_0^t F_{i,m}(t) dt$$

e aplicando o método de Adomian obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,0} &= \alpha_i(0), \\
\alpha_{i,m+1} &= C_i \int_0^t \alpha_{i,m}(t) dt - 2(i\pi)^2 \int_0^t A_{i,m}(t) dt.
\end{aligned}$$

Faremos os calculos para  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  e  $m = 0, 1, 2, 3, 4$ .

Utilizando as condições iniciais tem-se  $\alpha_{0,m} = 0$  para  $0 \leq m \leq 4$  e

$$[(\alpha_{i,0})] = \begin{bmatrix} \alpha_{1,0} \\ \alpha_{2,0} \\ \alpha_{3,0} \\ \alpha_{4,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1(0) \\ \alpha_2(0) \\ \alpha_3(0) \\ \alpha_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{100} \end{bmatrix}.$$

**m = 0:**

Usando estas condições obtemos

$$\begin{aligned} A_{1,0} &= \frac{3}{8} (4\alpha_{0,0}^2\alpha_{1,0} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,0}\alpha_{2,0} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{2,0}\alpha_{3,0} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{3,0}\alpha_{4,0} + \alpha_{1,0}^3 + \alpha_{1,0}^2\alpha_{3,0} \\ &\quad + \alpha_{1,0}\alpha_{2,0}^2 + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,0}\alpha_{4,0} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{3,0}^2 + 2\alpha_{1,0}\alpha_{4,0}^2 + \alpha_{2,0}^2\alpha_{3,0} + 2\alpha_{2,0}\alpha_{3,0}\alpha_{4,0}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2,0} &= \frac{3}{8} (4\alpha_{0,0}^2\alpha_{2,0} + 2\alpha_{0,0}\alpha_{1,0}^2 + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,0}\alpha_{3,0} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,0}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,0}\alpha_{3,0} \\ &\quad + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,0}\alpha_{4,0} + \alpha_{2,0}^3 + 2\alpha_{2,0}\alpha_{4,0}^2 + \alpha_{3,0}^2\alpha_{4,0}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{3,0} &= \frac{3}{8} (4\alpha_{0,0}^2\alpha_{3,0} + 2\alpha_{0,0}\alpha_{1,0}^2 + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,0}\alpha_{4,0} + 3\alpha_{1,0}^3 + 2\alpha_{1,0}^2\alpha_{3,0} + \alpha_{1,0}\alpha_{2,0}^2 \\ &\quad + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,0}\alpha_{4,0} + 2\alpha_{2,0}^2\alpha_{3,0} + 2\alpha_{2,0}\alpha_{3,0}\alpha_{4,0} + \alpha_{3,0}^3 + 2\alpha_{3,0}\alpha_{4,0}^2) = 0 \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1}(t) &= C_1 \int_0^t \alpha_{1,0} dt - 2\pi^2 \int_0^t A_{1,0} dt = 0, \\ \alpha_{2,1}(t) &= C_2 \int_0^t \alpha_{2,0} dt - 8\pi^2 \int_0^t A_{2,0} dt = 0, \\ \alpha_{3,1}(t) &= C_3 \int_0^t \alpha_{3,0} dt - 18\pi^2 \int_0^t A_{3,0} dt = 0. \end{aligned}$$

Resta calcularmos  $A_{4,0}$ .

$$\begin{aligned} A_{4,0} &= \frac{3}{8} (4\alpha_{0,0}^2\alpha_{4,0} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,0}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{0,0}\alpha_{2,0}^2 + \alpha_{1,0}^2\alpha_{2,0} + \alpha_{1,0}^2\alpha_{4,0} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,0}\alpha_{3,0} \\ &\quad + \alpha_{2,0}\alpha_{3,0}^2 + 2\alpha_{3,0}^2\alpha_{4,0} + \alpha_{4,0}^3) = \frac{3}{8} \left( \frac{1}{100} \right)^3 \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \alpha_{4,1}(t) &= C_4 \int_0^t \alpha_{4,0} dt - 32\pi^2 \int_0^t A_{4,0} dt \\ &= \left[ 16\pi^2 - \left( \frac{256\pi^4}{10^4} \right) \right] \frac{1}{100} t - 12\pi^2 \left( \frac{1}{100} \right)^3 t \\ &\approx 1,554081542t. \end{aligned}$$

**m = 1:**

Note que

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= \frac{3}{8} [4\alpha_{0,0}^2\alpha_{1,1} + 8\alpha_{0,1}\alpha_{0,0}\alpha_{1,0} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,0}\alpha_{2,1} + 4\alpha_{0,1}\alpha_{1,0}\alpha_{2,0} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,1}\alpha_{2,0} \\
&\quad + 4\alpha_{1,1}\alpha_{2,0}\alpha_{3,0} + 4\alpha_{1,0}\alpha_{2,1}\alpha_{3,0} + 4\alpha_{1,0}\alpha_{2,0}\alpha_{3,1} + 4\alpha_{1,1}\alpha_{3,0}\alpha_{4,0} \\
&\quad + 4\alpha_{0,0}\alpha_{3,1}\alpha_{4,0} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{3,0}\alpha_{4,1} + 3\alpha_{1,0}^2\alpha_{1,1} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{1,1}\alpha_{3,0} + \alpha_{1,0}^2\alpha_{3,1} \\
&\quad + 2\alpha_{1,1}\alpha_{2,0}\alpha_{4,0} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,1}\alpha_{4,0} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,0}\alpha_{4,1} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{4,0}^2 + 4\alpha_{1,0}\alpha_{4,0}\alpha_{4,1} \\
&\quad + 4\alpha_{2,0}\alpha_{2,1}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{2,0}^2\alpha_{3,1} + 2\alpha_{2,1}\alpha_{3,0}\alpha_{4,0} + 2\alpha_{2,0}\alpha_{3,1}\alpha_{4,0} + \alpha_{2,0}\alpha_{3,0}\alpha_{4,1}] = 0.
\end{aligned}$$

De modo análogo, obtenemos  $A_{2,1} = A_{3,1} = 0$ , o que implica

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,2} &= \left[ \pi^2 - \frac{\pi^4}{10^4} \right] \int_0^t \alpha_{1,1} dt - 2\pi^2 \int_0^t A_{1,1} dt = 0, \\
\alpha_{2,2} &= 0, \quad \alpha_{3,2} = 0.
\end{aligned}$$

Resta calcularmos  $A_{4,1}$ .

$$\begin{aligned}
A_{4,1} &= \frac{3}{8} [8\alpha_{0,0}\alpha_{0,1}\alpha_{4,0} + 4\alpha_{0,0}^2\alpha_{4,1} + 4\alpha_{4,1}\alpha_{1,0}\alpha_{3,0} + 4\alpha_{4,0}\alpha_{1,1}\alpha_{3,0} + 4\alpha_{4,0}\alpha_{1,0}\alpha_{3,1} \\
&\quad + 2\alpha_{0,1}\alpha_{2,0}^2 + 2\alpha_{0,0}\alpha_{2,0}\alpha_{2,1}2\alpha_{1,0}\alpha_{1,1}\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}\alpha_{1,0}^2 + 2\alpha_{1,0}^2\alpha_{4,1} + 4\alpha_{1,0}\alpha_{1,1}\alpha_{4,0} \\
&\quad + 2\alpha_{1,1}\alpha_{2,0}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,1}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,0}\alpha_{3,1} + \alpha_{2,1}\alpha_{3,0}^2 + 2\alpha_{2,0}\alpha_{3,0}\alpha_{3,1} \\
&\quad + 4\alpha_{3,0}\alpha_{3,1}\alpha_{4,0} + 2\alpha_{3,0}^2\alpha_{4,1} + 3\alpha_{4,0}^2\alpha_{4,1}] \\
&= \frac{3}{8}3\alpha_{4,0}^2\alpha_{4,1} = \frac{9}{8}(0,01)^2(1,554081542t)
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\alpha_{4,2} &= \left[ 16\pi^2 - \frac{256\pi^4}{10^4} \right] \int_0^t \alpha_{4,1} dt - 32\pi^2 \int_0^t A_{4,1} dt \\
&= \left[ 16\pi^2 - \left( \frac{256\pi^4}{10^4} \right) \right] \left( \frac{1}{2} \right) (1,554081542t^2) - 18\pi^2(0,01)^2(1,554081542t^2) \\
&\approx 120.7400661t^2.
\end{aligned}$$

**m = 2, 3, 4:**

De modo análogo, ao realizarmos os cálculos obtemos

$$\alpha_{1,3} = \alpha_{1,4} = \alpha_{1,5} = \alpha_{2,3}\alpha_{2,4} = \alpha_{2,5} = \alpha_{3,3} = \alpha_{3,4} = \alpha_{3,5} = 0.$$

Desse modo, basta calcularmos  $\alpha_{4,3}$ ,  $\alpha_{4,4}$  e  $\alpha_{4,5}$ .

Para isso, note que

$$\begin{aligned} A_{4,2} &= \frac{3}{8} [8\alpha_{0,2}\alpha_{0,0}\alpha_{4,0} + 4\alpha_{0,0}^2\alpha_{4,2} + 8\alpha_{0,0}\alpha_{0,1}\alpha_{4,1} + 4\alpha_{0,1}^2\alpha_{4,1} + 4\alpha_{0,2}\alpha_{1,0}\alpha_{3,0} \\ &\quad + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,2}\alpha_{3,2} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,0}\alpha_{3,2} + 4\alpha_{0,1}\alpha_{1,1}\alpha_{3,0} + 4\alpha_{0,1}\alpha_{1,0}\alpha_{3,1} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,1}\alpha_{3,1} \\ &\quad + 2\alpha_{0,2}\alpha_{2,0}^2 + 4\alpha_{0,0}\alpha_{2,0}\alpha_{2,2} + 4\alpha_{0,1}\alpha_{2,1}\alpha_{2,0} + 2\alpha_{0,0}\alpha_{2,1}^2 + 2\alpha_{1,2}\alpha_{1,0}\alpha_{2,0} \\ &\quad + \alpha_{1,0}^2\alpha_{2,2} + \alpha_{1,1}^2\alpha_{2,0} + 2\alpha_{1,1}\alpha_{1,0}\alpha_{2,1} + 2\alpha_{1,2}\alpha_{2,0}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,2}\alpha_{3,0} \\ &\quad + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,0}\alpha_{3,2} + 2\alpha_{1,1}\alpha_{2,1}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{1,1}\alpha_{2,0}\alpha_{3,1} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,1}\alpha_{3,1} + \alpha_{2,2}\alpha_{3,0}^2 \\ &\quad + 2\alpha_{2,0}\alpha_{3,2}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{1,1}\alpha_{3,1}\alpha_{3,0} + \alpha_{2,0}\alpha_{3,1}^2 + 4\alpha_{3,2}\alpha_{3,0}\alpha_{4,0} + 2\alpha_{3,0}^2\alpha_{4,2} + 2\alpha_{3,1}^2\alpha_{4,0} \\ &\quad + 4\alpha_{3,1}\alpha_{3,0}\alpha_{4,1} + 3\alpha_{4,0}^2\alpha_{4,2} + 3\alpha_{4,0}\alpha_{4,1}^2] \\ &= \frac{9}{8}\alpha_{4,0}^2\alpha_{4,2} + \frac{9}{8}\alpha_{4,0}\alpha_{4,1}^2 = \frac{9}{8}(0,01)^2(120.7400661t^2) + \frac{9}{8}(0,01)(1,554081542t)^2 \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \alpha_{4,3} &= \left[ 16\pi^2 - \frac{256\pi^4}{10^4} \right] \int_0^t \alpha_{4,2} dt - 32\pi^2 \int_0^t A_{4,2} dt \\ &= \left[ 16\pi^2 - \frac{256\pi^4}{10^4} \right] \left( \frac{1}{3} \right) (120.7400661)t^3 - 12\pi^2((0,01)^2(120.7400661) \\ &\quad +(0,01)(1,554081542)^2)t^3 \approx 6250,849864t^3. \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned} A_{4,3} &= \frac{3}{8} [4\alpha_{0,3}\alpha_{0,0}\alpha_{4,0} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{4,3} + 8\alpha_{0,2}\alpha_{0,0}\alpha_{4,1} + 8\alpha_{0,1}\alpha_{0,0}\alpha_{4,2} + 4\alpha_{0,1}^2\alpha_{4,1} \\ &\quad + 4\alpha_{0,3}\alpha_{1,0}\alpha_{3,0} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,3}\alpha_{3,0} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,3}\alpha_{3,0} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,0}\alpha_{3,3} + 4\alpha_{0,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,0} \\ &\quad + 4\alpha_{0,1}\alpha_{1,0}\alpha_{3,2} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,1}\alpha_{3,2} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,2}\alpha_{3,1} + 4\alpha_{0,2}\alpha_{1,0}\alpha_{3,1} + 4\alpha_{0,1}\alpha_{1,1}\alpha_{3,1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\alpha_{0,3}\alpha_{0,0}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{0,0}^2\alpha_{2,3} + 4\alpha_{0,2}\alpha_{0,1}\alpha_{2,0} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{2,1}\alpha_{2,2} + 4\alpha_{0,2}\alpha_{0,0}\alpha_{2,1} \\
& + 2\alpha_{0,1}^2\alpha_{2,1} + 2\alpha_{1,3}\alpha_{1,0}\alpha_{2,0} + \alpha_{1,0}^2\alpha_{2,3} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{1,1}\alpha_{2,2} + 2\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{2,0} \\
& + 2\alpha_{1,2}\alpha_{1,0}\alpha_{2,1} + \alpha_{1,1}^2\alpha_{2,1} + 4\alpha_{1,3}\alpha_{1,0}\alpha_{4,0} + \alpha_{1,0}^2\alpha_{4,3} + 4\alpha_{1,0}\alpha_{1,1}\alpha_{4,2} \\
& + 4\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{4,0} + 4\alpha_{1,2}\alpha_{1,0}\alpha_{4,1} + 2\alpha_{1,1}^2\alpha_{4,1} + 2\alpha_{1,3}\alpha_{2,0}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,3}\alpha_{3,0} \\
& + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,0}\alpha_{3,3} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1} + 2\alpha_{1,1}\alpha_{2,0}\alpha_{3,2} + 2\alpha_{1,1}\alpha_{2,1}\alpha_{3,1} \\
& + 2\alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{1,2}\alpha_{2,0}\alpha_{3,1} + 2\alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\alpha_{3,0} + \alpha_{2,3}\alpha_{3,0}^2 + 2\alpha_{2,0}\alpha_{3,0}\alpha_{3,3} \\
& + 2\alpha_{2,0}\alpha_{3,1}\alpha_{3,2} + 2\alpha_{2,1}\alpha_{3,2}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{2,2}\alpha_{3,1}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{2,1}\alpha_{3,1}^2 + 2\alpha_{3,0}^2\alpha_{4,3} \\
& + 4\alpha_{3,3}\alpha_{3,0}\alpha_{4,0} + 4\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\alpha_{4,0} + 4\alpha_{3,2}\alpha_{3,0}\alpha_{4,1} + 4\alpha_{3,0}\alpha_{3,1}\alpha_{4,2} + 2\alpha_{3,1}^2\alpha_{4,1} \\
& + 3\alpha_{4,3}\alpha_{4,0}^2 + 6\alpha_{4,0}\alpha_{4,1}\alpha_{4,2} + \alpha_{4,1}^3] = \frac{9}{8}\alpha_{4,3}\alpha_{4,0}^2 + \frac{9}{4}\alpha_{4,0}\alpha_{4,1}\alpha_{4,2} + \frac{3}{8}\alpha_{4,1}^3 \\
= & \frac{9}{8}(6250,849864)(0.01)^2t^3 + \frac{9}{4}(0.01)(1,554081542)(120.7400661)t^3 + \frac{3}{8}(1,554081542)^3t^3
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\alpha_{4,4} &= \left[ 16\pi^2 - \frac{256\pi^4}{10^4} \right] \int_0^t \alpha_{4,3} dt - 32\pi^2 \int_0^t A_{4,3} dt \\
&= \left[ 16\pi^2 - \frac{256\pi^4}{10^4} \right] \left( \frac{1}{4} \right) (6250,849864)t^4 - 8\pi^2 \left[ \frac{9}{8}(6250,849864)(0.01)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{4}(0.01)(1,554081542)(120,7400661) + \frac{3}{8}(1,554081542)^3 \right] t^4 \\
&\approx 242376,7632t^4.
\end{aligned}$$

Resta calcularmos  $A_{4,4}$ .

$$\begin{aligned}
A_{4,4} &= \frac{3}{8} [8\alpha_{0,4}\alpha_{0,0}\alpha_{4,0} + 4\alpha_{0,0}^2\alpha_{4,4} + 8\alpha_{0,0}\alpha_{0,1}\alpha_{4,3} + 8\alpha_{0,0}\alpha_{0,2}\alpha_{4,2} + 8\alpha_{0,0}\alpha_{0,3}\alpha_{4,1} \\
&\quad + 4\alpha_{0,1}^2\alpha_{4,2} + 8\alpha_{0,1}\alpha_{0,2}\alpha_{4,1} + 8\alpha_{0,1}\alpha_{0,3}\alpha_{4,0} + \alpha_{0,2}^2\alpha_{4,0} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,0}\alpha_{3,4} \\
&\quad + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,1}\alpha_{3,3} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,2}\alpha_{3,2} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,3}\alpha_{3,1} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{1,4}\alpha_{3,0} + 4\alpha_{0,1}\alpha_{1,0}\alpha_{3,3} \\
&\quad + 4\alpha_{0,1}\alpha_{1,1}\alpha_{3,2} + 4\alpha_{0,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,1} + 4\alpha_{0,1}\alpha_{1,3}\alpha_{3,0} + 4\alpha_{0,2}\alpha_{1,0}\alpha_{3,2} + 4\alpha_{0,2}\alpha_{1,1}\alpha_{3,1} \\
&\quad + 4\alpha_{0,2}\alpha_{1,2}\alpha_{3,0} + 4\alpha_{0,3}\alpha_{1,0}\alpha_{3,1} + 4\alpha_{0,3}\alpha_{1,1}\alpha_{3,0} + 4\alpha_{0,4}\alpha_{1,0}\alpha_{3,0} + \alpha_{1,0}^2\alpha_{2,4}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\alpha_{1,0}\alpha_{1,1}\alpha_{3,3} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{1,2}\alpha_{2,2} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{1,3}\alpha_{2,1} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{1,4}\alpha_{2,0} + 2\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{2,1} \\
& + 2\alpha_{1,1}\alpha_{1,3}\alpha_{2,0} + \alpha_{1,2}^2\alpha_{2,0} + \alpha_{1,1}^2\alpha_{2,2} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{2,2}\alpha_{2,4} + 4\alpha_{0,0}\alpha_{2,1}\alpha_{2,3} + 2\alpha_{0,0}\alpha_{2,2}^2 \\
& + 4\alpha_{0,1}\alpha_{2,0}\alpha_{2,3} + 4\alpha_{0,1}\alpha_{2,1}\alpha_{2,2} + 4\alpha_{0,2}\alpha_{2,0}\alpha_{2,2} + 2\alpha_{0,2}\alpha_{2,1}^2 + 4\alpha_{0,3}\alpha_{2,0}\alpha_{2,1} \\
& + 2\alpha_{0,4}\alpha_{2,0}^2 + 2\alpha_{1,0}^2\alpha_{4,4} + 4\alpha_{1,0}\alpha_{1,1}\alpha_{4,3} + 4\alpha_{1,0}\alpha_{1,2}\alpha_{4,2} + 4\alpha_{1,0}\alpha_{1,3}\alpha_{4,1} \\
& + 4\alpha_{1,0}\alpha_{1,4}\alpha_{4,0} + 2\alpha_{1,1}^2\alpha_{4,2} + 4\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{4,1} + 4\alpha_{1,1}\alpha_{1,3}\alpha_{4,0} + 2\alpha_{1,2}^2\alpha_{4,0} \\
& + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,0}\alpha_{3,4} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,1}\alpha_{3,3} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,2}\alpha_{3,2} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1} + 2\alpha_{1,0}\alpha_{2,4}\alpha_{3,0} \\
& + 2\alpha_{1,1}\alpha_{2,0}\alpha_{3,3} + 2\alpha_{1,1}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2} + 2\alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1} + 2\alpha_{1,1}\alpha_{2,3}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{1,2}\alpha_{2,0}\alpha_{3,2} \\
& + 2\alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\alpha_{3,1} + 2\alpha_{1,2}\alpha_{2,2}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{1,3}\alpha_{2,0}\alpha_{3,1} + 2\alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,0} + 2\alpha_{1,4}\alpha_{2,0}\alpha_{3,0} \\
& + 2\alpha_{2,0}\alpha_{3,0}\alpha_{3,4} + 2\alpha_{2,0}\alpha_{3,1}\alpha_{3,2} + \alpha_{2,0}\alpha_{3,2}^2 + 2\alpha_{2,1}\alpha_{3,0}\alpha_{3,2} + 2\alpha_{2,1}\alpha_{3,1}\alpha_{3,2} \\
& + 2\alpha_{2,2}\alpha_{3,0}\alpha_{3,3} + \alpha_{2,2}\alpha_{3,1}^2 + 2\alpha_{2,3}\alpha_{3,0}\alpha_{3,1} + \alpha_{2,4}\alpha_{3,0}^2 + 2\alpha_{3,0}^2\alpha_{4,4} + 4\alpha_{3,0}\alpha_{3,1}\alpha_{4,3} \\
& + 4\alpha_{3,0}\alpha_{3,2}\alpha_{4,2} + 4\alpha_{3,0}\alpha_{3,3}\alpha_{4,1} + 4\alpha_{3,0}\alpha_{3,4}\alpha_{4,0} + 2\alpha_{3,1}^2\alpha_{4,2} + 4\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\alpha_{4,1} \\
& + 4\alpha_{3,1}\alpha_{3,3}\alpha_{4,0} + 2\alpha_{3,2}^2\alpha_{4,0} + \alpha_{4,0}^2\alpha_{4,4} + 6\alpha_{4,0}\alpha_{4,1}\alpha_{4,3} + 3\alpha_{4,0}\alpha_{4,2}^2 + 3\alpha_{4,1}^2\alpha_{4,2} \\
= & \frac{3}{8}\alpha_{4,0}^2\alpha_{4,4} + 6\alpha_{4,0}\alpha_{4,1}\alpha_{4,3} + 3\alpha_{4,0}\alpha_{4,2}^2 + 3\alpha_{4,1}^2\alpha_{4,2} \\
= & \frac{3}{8}(0,01)^2(242376, 7632) + 6(0,01)(1, 554081542)(6250, 849864) \\
& + 3(0,01)(120, 7400661)^2 + 3(1, 554081542)^2(120, 7400661)t^4
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\alpha_{4,5} & = \left[ 16\pi^2 - \frac{256\pi^4}{10^4} \right] \int_0^t \alpha_{4,4} dt - 32\pi^2 \int_0^t A_{4,4} dt \\
& = \left[ 16\pi^2 - \frac{256\pi^4}{10^4} \right] (242376, 7632) \left( \frac{1}{5} \right) t^5 - \frac{12}{5}\pi^2(0,01)^2(242376, 7632) \\
& \quad + 6(0,01)(1, 554081542)(6250, 849864) + 3(0,01)(120, 7400661)^2 \\
& \quad + 3(1, 554081542)^2(120, 7400661)t^5 \\
& \approx 7368687, 064t^5.
\end{aligned}$$

Em resumo,a solução aproximada é dada por

$$u(t, x) \approx \alpha_4(t) \cos(4\pi x) = \left( \sum_{m=0}^4 \alpha_{4,m} \right) \cos(4\pi x)$$

com

$$\begin{aligned}\alpha_{4,0} &= 0,01, \\ \alpha_{4,1} &= 1,554081542t, \\ \alpha_{4,2} &= 120.7400661t^2, \\ \alpha_{4,3} &= 6250,849864t^3, \\ \alpha_{4,4} &= 242376,7632t^4, \\ \alpha_{4,5} &= 7368687,064t^5.\end{aligned}$$

Logo, a solução aproximada é dada por

$$\begin{aligned}u(t, x) \approx & \left( 0,01 + 1,554081542t + 120.7400661t^2 + 6250,849864t^3 + 242376,7632t^4 \right. \\ & \left. + 7368687,064t^5 \right) \cos(4\pi x).\end{aligned}$$

Graficamente,

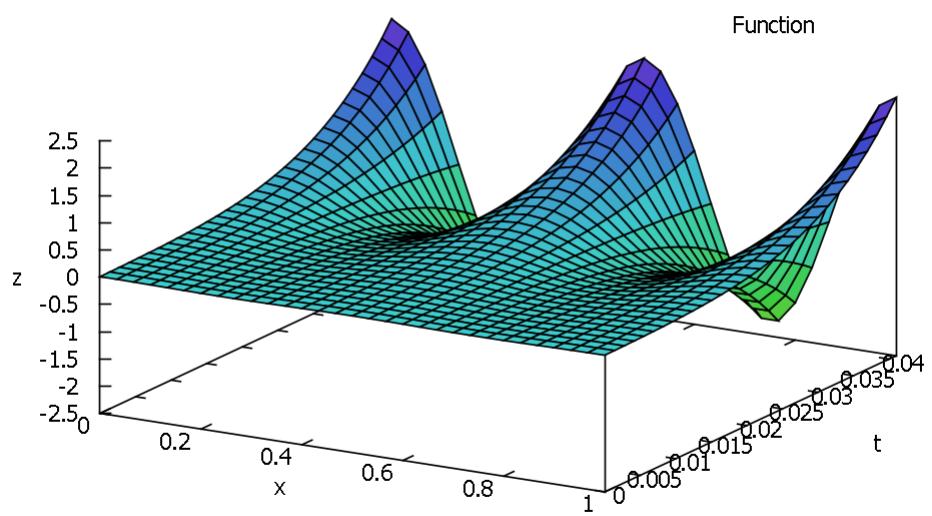


Figura 4.1: Dinâmica da separação de fase para  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$

# Considerações Finais

Nesta dissertação estudamos as equações diferenciais de Cahn-Hilliard e Allen-Cahn/Cahn-Hilliard com potencial de “duplo poço” do tipo polinomial e condição de Neumann na fronteira. Com hipótese de baixa regularidade no dado inicial, provamos existência da solução fraca das equações citadas. Este resultado foi obtido pelo método de Faedo-Galerkin e argumentos de compacidade. Escolhemos o método de Galerkin por se tratar de uma ferramenta muito potente na prova de existência de solução de equações diferenciais e também por ser uma técnica numérica.

As equações diferenciais do tipo Cahn-Hilliard apresentam não linearidades bem complexas envolvendo o bi-laplaciano e o laplaciano do potencial de “duplo poço”. Estas não linearidades forçam uma formulação variacional em espaços de Sobolev mais regulares e a aplicação de várias desigualdades de interpolação relacionadas com esses espaços. A equação Allen-Cahn/Cahn-Hilliard nos permitiu tratar de problemas interessantes sem maiores

complexidades do ponto de vista matemático, além de elaborar uma breve análise matemática da equação de Allen-Cahn, que é um modelo muito usado nas simulações de problemas de solidificação não conservativos.

Para ilustrarmos a característica numérica do método de Galerkin, apresentamos uma solução aproximada da equação de Cahn-Hilliard unidimensional. Nessa dissertação não fizemos um estudo detalhado de esquemas numéricos, convergência, ordem de convergência

e comparação de resultados, mas para ilustrar como a formulação aproximada oriunda do método de Galerkin pode ser usada para obtenção de aproximações da solução do problema original. Reproduzimos na Figura 1 os resultados obtidos por P. Rebelo no artigo [17] usando o aplicativo computacional *MAXIMA*.

O esquema aproximado proposto em [17] trata-se do método de Galerkin acoplado ao método de decomposição de Adomian. Especificamente, resolve o sistema de equações integrais de Volterra associado ao sistema de equações diferenciais ordinárias gerado pelo método de Galerkin usando decomposição de Adomian.

Essencialmente, o método de decomposição de Adomian aproxima a solução do problema por uma série e usando a expansão em série de Taylor da não linearidade e define polinômios especiais, chamados *polinômios de Adomian*, que dependem dos coeficientes da série que representa a solução. É um esquema atrativo, pois não discretiza o domínio, evitando assim muito esforço computacional, porém não pudemos avaliar a sua eficiência numérica com relação à outros métodos, tais como elementos finitos e diferenças finitas.

Para finalizar, destacamos que, a partir deste trabalho, outros modelos governados por equações do tipo Cahn-Hilliard podem ser investigados, por exemplo modelos com mobilidade variável tais como crescimento de cristais, modelos não isotérmicos para os quais deve-se incorporar a energia térmica do sistema ou modelos para solidificação de fluidos para os quais tem-se as equações de Navier-Stokes, entre outros. Além disso, devido a complexidade da equação Cahn-Hilliard, muita investigação pode ser realizada, do ponto de vista da análise numérica.

# Bibliografia

- [1] H. Abels, *On a diffuse interface model for two-phase flows of viscous, incompressible fluids with matched densities*, Arch. Rational Mech. Anal. 194 (2009), pp. 463-506.
- [2] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [3] G. Adomian, *Solving frontier Problems of physics: O método da decomposição*, Fundamental theories of Physics, Vol 60, Springer-Science + Business Media, 1994.
- [4] K. Atkinson e W. Han, *Theoretical Numerical Analysis: A functional analysis framework*, Texts in Applied Mathematics, 39, Springer, 2009.
- [5] C. Beckermann, H.J. Diepers, I. Steinbach, A. Karma and X. Tong, *Modeling melt convection in phase-field simulations of solidification*, J. Comp. Phys., 154 (1999), pp. 468-496.
- [6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.
- [7] Y. Cherruault, G. Adomian, *Decomposition Methods: A New Proof of Convergence*, Mathematical Computation Modelling, Vol. 8, No. 12, p. 103-106, 1993.
- [8] E. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations* Tata McGraw-Hill Publishing CO.LTD. New Delhi, 1987.

- [9] S. Faedo, *Un Nuovo Metodo per L'Analisi Esistenziale e Quantitativa dei Problemi di Propagazione*, Annali della Scuola Norm. Sup., Roma (1949), 1-41.
- [10] B. G. Galerkin, *Barras e placas. As séries em algumas questões de equilíbrio de barras e placas*, Notícias dos Engenheiros, vol. 1, (1915), 897-908). (em Russo: *Sterzhni i plastinki. Riady v nekotorykh voprosah uprugogo ravnovesia sterzhnei i plastinok*, Vestnik Ingenerov, vol.1, (1915), 897-908).
- [11] G. Karali and Y. Nagasse, *On the existence of solution for a Cahn-Hilliard / Allen - Cahn equation*.
- [12] G. Karali and T. Ricciardi, *On the convergence of a fourth order evolution equation to the Allen-Cahn equation*, Nonlinear Anal. 72 (2010), no. 11, 4271-4281.
- [13] G. Karali and M. A. Katsoulakis, *The role of multiple microscopic mechanisms in cluster interface evolution*, Journal Differential Equations, No. 235, p. 418-438, 2007.
- [14] P. Linz, *Analitical and Numerical Methods for Volterra equations*, Série Studies in Applied and Numerical Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, Filadélfia, 1985.
- [15] M. Miranda e L. A. Medeiros, *Espaços de Sobolev: introdução aos problemas elíticos não homogêneos*, IM - UFRJ, 2000.
- [16] N. Moelans, B. Blanpain and P. Wollants, *An introduction to phase-field modeling of microstructure evolution*, Comp. Coupl. Phase. Diag. and Thermochemistry, 32 (2008), pp. 268-294.
- [17] P. Rebelo, *On the approximate solution to an initial boundary valued problem for the Cahn-Hilliard equation*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, No. 15, páginas 225 - 231, 2010.

- [18] W. Rudin, *principles of mathematical analysis*, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, New York, 1976.
- [19] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Second edition. Applied Mathematical Sciences, 68. Springer-Verlag, New York, 1997.