UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Jeziel do Nascimento Correia

Solução positiva para uma equação assintoticamente linear no infinito via variedade de Pohozaev

BELÉM- PA
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Jeziel do Nascimento Correia

Solução positiva para uma equação assintoticamente linear no infinito via variedade de Pohozaev

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME) da Universidade Federal do Pará- UFPA para obtenção de título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus M. Figueiredo

BELÉM - PA
2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Correia, Jeziel do Nascimento, 1985-
Solução positiva para uma equação assintoticamente linear no infinito via variedade de pohozaev / Jeziel do Nascimento Correia. - 2015.

Orientadora: Giovany de Jesus Malcher Figueiredo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2015.

1. Schrodinger, Equação de. 2. Variedade de Pohozaev. 3. Soluções positivas. 4. Sequências (Matemática). I. Título.

CDD 22. ed. 515.353

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

Jeziel do Nascimento Correia

Solução positiva para uma equação assintoticamente linear no infinito via variedade de Pohozaev

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME) da Universidade Federal do Pará- UFPA para obtenção de título de Mestre em Matemática:

Prof. Dr. Giovany de Jesus M. Figueiredo - UFPA - Orientador

Prof. Dr. Antonio Suarez Fernandez - Univ. de Sevilla - Espanha

João Pablo Pinheiro da Silva

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva - UFPA

DATA DA AVALIAÇÃO: 01 / 07 /2015

Dedicatória

Aos meus "grandes"amigos e aos meus familiares, em especial a meu pai, Adauto Correia e a minha mãe, Maria Conceição do Nascimento Correia.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por dar-me forças para realizar este trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Giovany de Jesus M. Figueiredo, pelo profissionalismo e brilhantismo com que conduziu esta orientação, mostrando-se sempre disposto a esclarecer minhas dúvidas.

À minha família, em especial aos meus pais, Adauto Correia e Maria Conceição do Nascimento Correia, pelo exemplo de honestidade, trabalho e dedicação à família, e pela forma que me educaram.

A todo o corpo docente do PPGME, em especial aos professores: Dr. João Pablo Pinheiro da Silva, Drª. Cristina Lúcia Dias Vaz e Dr. Dilberto da Silva Almeida júnior.

Aos amigos, pelo companheirismo nos bons e maus momentos.

Aos colegas do curso de mestrado e doutorado em matemática, em especial: João Carlos Pantoja Fortes, André Almeida, Ítalo Bruno Mendes Duarte, Julio Roberto, Raimundo Leão, Claudionei Pereira, Andreia Pinheiro, Mirelson Martins Freitas, Fernando Bruno Martins Nunes, Gelson Santos.

Não poderia aqui deixar de agradecer a Willian Cintra, pela amizade e pela disposição em ajudar-me sempre que foi solicitado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME.

Epígrafe

"Se fui capaz de ver mais longe, é porque me apoiei em ombros de gigantes".

Isaac Newton

Resumo

Neste trabalho mostraremos um resultado de existência de solução positiva para a seguinte equaçõa de Schrodinger

$$-\Delta u + \lambda u = a(x)f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

para $N \geq 3$, λ positivo, $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ e satisfaz outras condições adequadas a serem apresentadas ao longo do trabalho. A não-linearidade $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é contínua e tem comportamento assintoticamente linear no infinito. Neste trabalho, seguimos o artigo [21] de R. Lehrer e L. Maia.

Palavras-chave: Equação de Schrodinger, variedade de Pohozaev, existência de solução positiva, sequências de Cerami.

Abstract

In this work we show a result of existence of positive solution for the following Schrodinger equation

$$-\Delta u + \lambda u = a(x)f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

with $N \geq 3$, λ positive, $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ is a $C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ function satisfying suitable conditions that will be presented throughout the work. And the nonlinearity f is a continous function and have a linear asymptotically behavior at infinity. In this work, we follow the article [21] due to R. Lehrer and L. Maia.

Key-Words: Scrodinger equation, Pohozaev manifold, existence of positive solution, Cerami sequence.

Notações

- $\blacksquare$, fim de uma demonstração.
- $B_r(x)$, representa a bola aberta de centro x e raio r.
- Δ, representa o operador Laplaciano.
- $\rightarrow$, representa convergência forte.
- $\rightharpoonup$, representa convergência fraca.
- 2^*, representa o expoente crítico de Sobolev.
- $|\Omega|$, representa a medida de Lebesgue de um conjunto Ω.
- $L^p(\mathbb{R}^N)$, com $1 \leq p \leq +\infty$, denotará o espaço de Lebesgue munido com a norma

$$\|u\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx, \;\; 0 < p < \infty$$

$$\|u\|_\infty = \inf\{C; |u(x)| \leq C, \;\text{ quase sempre em } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\}, \;\text{ se } p = \infty.$$

- $H^1(\mathbb{R}^N)$, denotará o espaço de Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ munido com a norma

$$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |u|^2 dx.$$

- Dada uma função $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ indicará a i_ésima derivada parcial de f no ponto x, quando esta derivada existir.

Sumário

Introdução

Esta dissertação faz um estudo sobre o artigo [21] de R. Lehrer e L. Maia e tem a finalidade de detalhar os cálculos encontrados nesse artigo.

O teorema do Passo da Montanha de A. Ambrosetti e P. Rabinowitz [3] tem sido bastante utilizado na resolução de equações diferenciais parciais. Soluções fracas de uma equação elíptica semi-linear são encontradas em geral como pontos críticos de um funcional não linear associado a equação. A ideia desse resultado consiste em encontrar soluções sobre os níveis minimax do funcional associado (ver [9], [23] e [29]).

Os autores W. Ding e W. M. Ni em [13] e P. Rabinowitz em [25] observaram que, sob hipóteses adequadas incluindo que o termo não linear da equação elíptica é homogêneo e super-quadrático no infinito, o nível minimax do passo da montanha do funcional I, definido em um espaço de Hilbert H e associado a equação, é igual ao mínimo de I restrito a variedade de Nehari, ou seja,

$$\min_{u \in N} I(u) = \min_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) = c,$$

onde $N = \{u \in H \setminus \{0\}; I'(u)u = 0\}$. Muitos problemas foram resolvidos usando essa equivalência.

Em [21] os autores lidaram com um problema elíptico modelado em $\mathbb{R}^N$, com a não linearidade não-homogênea e assintoticamente linear no infinito, então nem todas as funções $u \in H \setminus \{0\}$ pode ser projetada na variedade de Nehari N e por isso a abordagem falha (ver [11]). Para contornar esse problema R. Lehrer e L. Maia em [21] e [22], trabalho o qual estamos seguindo, inspiradas nas recentes obras de L. Jeanjean e K. Tanaka [16] e A. Azzoline e A. Pomponio em [4] que minimizaram o funcional I na variedade de Pohozaev com utilização do nível minimax do passo da montanha. A título de curiosidade a restrição a Pohozaev foi utilizada pela primeira vez para encontrar solução de uma equação por J. Shatah em [28].

Uma das dificuldades aqui encontradas, provem do fato da não-linearidade na equação, ser não-homogênea e não-autônoma. A tarefa central é mostrar que todas as funções em um subconjunto de $H \setminus \{0\}$ pode ser projetada na variedade de Pohozaev P associada ao funcional, e que, a fim de encontrar solução positiva, é suficiente minimizar o funcional em um subconjunto apropriado da variedade P. Definiremos a variedade de Pohozaev P a partir de uma identidade de Pohozaev generalizada devido ao trabalho original de S. Pohozaev [24].

Para usar o Teorema do Passo da Montanha sabemos que é necessário a condição Palais Smale (PS). Relembremos que um funcional I satisfaz a condição (PS) se, para uma sequência (u_n) em H tal que $I(u_n)$ é limitada e $I'(u_n) \to 0$, então existe uma subsequência convergente. Além disso, se o termo não-linear da equação é super-quadrático no infinito, por exemplo se ele satisfaz a condição de Ambrosetti e Rabinowitz em [3], então é possível provar que I satisfaz a condição (PS). Retificamos que em [21] os autores lidaram com o que é assintoticamente linear no infinito e, portanto, não satisfaz a condição de Ambrosetti e Rabinowitz. Quando nos deparamos com tal situação, é natural para substituir essa condição de compacidade pela condição de Cerami que iremos definir no momento oportuno.

Ressaltamos que não faremos uso de condições sobre o comportamento da função $\dfrac{f(s)}{s}$, como crescente ou não-decrescente, geralmente utilizadas em problemas semelhantes, para ser possível fazer uso das propriedades da variedade de Nehari.

Este trabalho está assim estruturado: no Capítulo 1, apresentaremos o seguinte problema

$$-\Delta u + \lambda u = a(x)f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

para $N \geq 3$ e $\lambda > 0$.

Assumiremos que a função a satisfaz as seguintes condições:

(A1) $a \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$, com $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^N} a(x) > 0$;

(A2) $\lim\limits_{|x|\to\infty} a(x) = a_\infty > \lambda$;

(A3) $\nabla a(x)\cdot x \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, sendo que a desigualdade é estrita num conjunto de medida não nula de $\mathbb{R}^N$;

(A4) $a(x) + \dfrac{\nabla a(x)\cdot x}{N} < a_\infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(A5) $\nabla a(x)\cdot x + \dfrac{x\cdot H(x)\cdot x}{N} \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, onde H representa a matriz Hessiana da função a;

Além disso, assumiremos as seguintes hipóteses sobre a função f:

(f1) $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{f(s)}{s} = 0$;

(f2) $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{s} = 1$;

(f3) Se $F(s) := \displaystyle\int_0^s f(t)dt$ e $Q(s) := \dfrac{1}{2} f(s)s - F(s)$, então existe uma constante $D \geq 1$ tal que

$$0 < Q(s) \leq DQ(t),$$

para todo $0 < s \leq t$ e

$$\lim_{s\to\infty} Q(s) = \infty.$$

Discutiremos a necessidade das hipóteses apresentadas e suas implicações.

No Capítulo 2, enunciaremos e faremos a demonstração da identidade de Pohozaev generalizada, bem como faremos a construção da variedade de Pohozaev associada ao nosso problema e mostraremos algumas propriedades da mesma.

No Capítulo 3, mostraremos um resultado de não existência, isto é, mostraremos que $p = \inf\limits_{u\in P} I(u)$ não é um nível crítico para o funcional I.

No Capítulo 4, visto que $p = \inf\limits_{u\in P} I(u)$ não foi atingido, iremos procurar por soluções em níveis mais altos de energia. Utilizaremos um resultado de concentração de compacidade, introduzido por P. L. Lions [23], na versão conhecida como 'Splitting', introduzida por M. Struwe [30] que descreve as sequências de Cerami numa faixa, agora $(c_\infty, 2c_\infty)$.

Como o nível minimax c do Teorema do Passo da Montanha coincide com p, (de fato, ambos coincidem com c_∞) e tal nível não é atingido, faremos uso do teorema de

Linking para obter uma solução positiva para a equação (1). Para construir a estrutura de linking, utilizaremos a variedade de Pohozaev P, juntamente com uma nova restrição, dada pela *função baricentro* similarmente à construção feita em [2], onde foi utilizada a variedade de Nehari.

Capítulo 1

Apresentação do problema

O problema de encontrar solução para a equação mais geral em $\mathbb{R}^N$

$$-\Delta u + V(x)u = K(x)f(u),$$

com $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$, tem sido extensivamente estudado, sob diversas condições sobre o potencial V e o peso K. Em 1983, H. Berestycki e P. Lions em [8] estudaram a equação autônoma $-\Delta u + mu = f(u)$, em $\mathbb{R}^N$. Eles mostraram a existência de uma solução para tal equação, utilizando minimização restrita à vínculo, quando f tem crescimento subcrítico no infinito.

C. Stuart e H. Zhou em [31], mostraram a existência de uma solução radial positiva para a equação $-\Delta u+\lambda u = f(|x|, u(x))u(x)$, onde a não-linearidade f é assintoticamente linear.

Assumindo que V e K são periódicas, citamos os trabalhos de S. Alama e Y. Li [1] e V. Coti-Zelati e P. Rabinowitz [12]. Destacamos também o trabalho de P. Bartolo, V. Benci e D. Fortunato [6], onde problemas não lineares com 'ressonância forte' no infinito foram estudados. Citamos ainda os trabalhos de D. Costa e H. Tehrani [11] e G. Li e H.-S. Zhou, [18] onde a equação $-\Delta u + \lambda u = f(x, u)u$ foi estudada assumindo-se o comportamento assintoticamente linear da função f, além do trabalho [26] de R. Ruviaro e L. Maia, onde foi estudado o problema não autônomo $-\Delta u + V(x)u = K(x)f(u)$ em $\mathbb{R}^N$, com $u(\tau x) = -u(x)$ e $u(x) \to 0$ se $|x| \to \infty$, para $N \geq 3$.

Todos esses problemas e suas variantes tem sido alvo de diversos trabalhos ao longo dos anos.

Nesse trabalho estudaremos o seguinte problema:

$$-\Delta u + \lambda u = a(x)f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

para $N \geq 3$ e $\lambda > 0$.

Assumiremos que a função a satisfaz as seguintes condições:

(A1) $a \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$, com $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} a(x) > 0$;

(A2) $\lim_{|x|\to\infty} a(x) = a_\infty > \lambda$;

(A3) $\nabla a(x) \cdot x \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, sendo que a desigualdade é estrita num conjunto de medida não nula de $\mathbb{R}^N$;

(A4) $a(x) + \dfrac{\nabla a(x) \cdot x}{N} < a_\infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(A5) $\nabla a(x) \cdot x + \dfrac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, onde H representa a matriz Hessiana da função a;

Além disso, assumiremos as seguintes hipóteses sobre a função f:

(f1) $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $\lim_{s\to 0} \dfrac{f(s)}{s} = 0$;

(f2) $\lim_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{s} = 1$;

(f3) Se $F(s) := \int_0^s f(t)dt$ e $Q(s) := \dfrac{1}{2}f(s)s - F(s)$, então existe uma constante $D \geq 1$ tal que

$$0 < Q(s) \leq DQ(t),$$

para todo $0 < s \leq t$ e

$$\lim_{s\to\infty} Q(s) = \infty.$$

Enunciaremos agora o resultado de existência de solução positiva para a equação (1.1), que é o principal resultado desse trabalho.

Teorema 1.1. *Suponha que sejam válidas as condições* $(A1)-(A6)$ *e* $(f1)-(f3)$*. Então a equação* (*1.1*) *possui uma solução positiva.*

A condição $(A6)$ a qual o resultado acima se refere, será incluída mais adiante (Ver Lema 4.11), exigindo que o supremo de $|a_\infty - a(x)|$ não é um valor grande.

Mostraremos também que se retirarmos a condição $(A6)$ o seguinte resultado é verdadeiro.

Teorema 1.2. *Assuma que* $(A1)-(A5)$ *e* $(f1)-(f3)$ *são válidas. Então,* $p = \inf_{u \in P} I(u)$ *não é um nível crítico para o funcional* I*. Em particular, o ínfimo* p *não é atingido.*

Para que não haja confusão por parte do leitor com respeito aos resultados acima, quando formos demonstrar os mesmos, voltaremos a enunciar tanto o Teorema 1.1 como também o Teorema 1.2.

A condição $(A1)$ juntamente com as condições $(f1)-(f2)$ nos fornecerá a geometria do Teorema do Passo da Montanha para o funcional I associado à equação (1.1), e também será utilizada na demonstração da limitação das sequências de Cerami, onde aqui também utilizamos a condição $(f3)$. As condições $(A2)-(A4)$ fornecerão a relação $I_\infty \leq I$ entre o funcional I e o funcional I_∞, associado ao problema no infinito e, juntamente com a condição $(A5)$, aparecerão naturalmente no desenvolvimento da teoria aqui apresentada envolvendo a variedade de Pohozaev associada a equação (1.1).

Observação 1.1. *As condições* $(A2)$, $(A3)$ *e* $(A4)$ *nos dizem que*

$$\nabla a(x) \cdot x \to 0, \quad se \;\; |x| \to \infty. \tag{1.2}$$

Para verificar isto, basta notar que

$$a(x) < a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} < a_\infty.$$

Somando $-a(x)$ *em ambos os membros dessa desigualdade, temos que*

$$0 < \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} < a_\infty - a(x),$$

ou seja,

$$0 < \nabla a(x) \cdot x < N(a_\infty - a(x)).$$

Passando o limite na desigualdade com $|x| \to \infty$ e usando o Teorema do Confronto, segue o resultado.

Note que a condição $(f3)$ é mais geral que a condição comumente assumida de que $\frac{f(s)}{s}$ é uma função crescente para $s > 0$. Em particular, se f é diferenciável, então $\frac{f(s)}{s}$ é crescente se, e somente se, $(f3)$ é válida para $D = 1$.

Com efeito, $\frac{f(s)}{s}$ é crescente se, e somente se,

$$\left(\frac{f(s)}{s}\right)' = \frac{f'(s)s - f(s)}{s^2} > 0,$$

ou seja, se

$$f'(s)s - f(s) > 0, \text{ para todo } s > 0. \tag{1.3}$$

Por outro lado, temos que $(f3)$ é válida com $D = 1$ se, e somente se, $Q(s)$ é crescente, isto é, se

$$Q'(s) = \frac{1}{2}(f'(s)s + f(s)) - f(s) = \frac{1}{2}f'(s)s + \frac{1}{2}f(s) - f(s) = \frac{1}{2}(f'(s)s - f(s)) > 0. \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4), segue-se o resultado.

Um exemplo de uma função f tal que $\frac{f(s)}{s}$ não é crescente mas satisfaz a condição $(f3)$ é

$$f(s) = \frac{s^7 - 1,5s^5 + 2s^3}{1 + s^6},$$

para $s \geq 0$ e $f(s) = 0$ para $s \leq 0$. De fato, considere a função g dada por

$$g(s) = \frac{f(s)}{s} = \frac{s^6 - 1,5s^4 + 2s^2}{1 + s^6}.$$

Temos que $g(1) = \frac{3}{4} = 0,75$ e $g(2) = \frac{48}{65} = 0,73$ e com isso vemos que a função g não é crescente.

Neste trabalho consideraremos a norma $\|u\|_\lambda^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx$, equivalente à norma usual $\|\cdot\|$ de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Uma vez que estamos a procura de soluções positivas, assumiremos que $f(s)$ está definida para todo $s \in \mathbb{R}$ e $f(s) = 0$ se $s \leq 0$. Assim, sabemos que os pontos crítico do funcional

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u)dx$$

associado à equação (1.1) são soluções fracas da equação. Temos que se u é um ponto crítico de I, então

$$0 = I'(u)u^- = \int_{\mathbb{R}^N}[\nabla u \nabla u^- + \lambda u u^-]dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u)u^- dx, \tag{1.5}$$

onde $u^- = min\{u, 0\}$.

Recordemos que

$$u^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad u(x) \geq 0 \\ -u(x) & \text{se} \quad u(x) < 0. \end{cases}$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u)u^- dx = \int_{\{x\in\mathbb{R}^N; u(x)\geq 0\}} a(x)f(u)u^- dx + \int_{\{x\in\mathbb{R}^N; u(x)<0\}} a(x)f(u)u^- dx.$$

Usando a definição da u^-, temos que

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^N; u(x)\geq 0\}} a(x)f(u)u^- dx = 0. \tag{1.6}$$

Por outro lado, como $f(s) = 0$ se $s \leq 0$, então

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^N; u(x)<0\}} a(x)f(u)u^- dx = 0. \tag{1.7}$$

De (1.6) e (1.7), segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u)u^- dx = 0.$$

Logo, podemos reescrever (1.5) como

$$0 = I'(u)u^- = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla u^- + \lambda u u^-]dx. \tag{1.8}$$

Além disso, recordemos ainda que $u = u^+ - u^-$ e, assim $\nabla u = \nabla(u^+ - u^-)$. Daí temos que

$$\begin{aligned} 0 = I'(u)u^- &= \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla u^- + \lambda u u^-]dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla(u^+ - u^-)\nabla u^- + \lambda(u^+ - u^-)u^-]dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u^+ \nabla u^- - \nabla u^- u^- + \lambda u^+ u^- - \lambda u^- u^-]dx. \end{aligned}$$

Como $supp(u^+) \cap supp(u^-) = \emptyset$, vem que

$$0 = I'(u)u^- = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u^- \nabla u^- + \lambda u^- u^-]dx = \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u^-|^2 + \lambda |u^-|^2]dx = \|u^-\|_\lambda^2.$$

Assim, necessariamente temos $u \geq 0$.

Observação 1.2. *As condições $(f1)$ e $(f2)$ implicam que, dado $\varepsilon > 0$ e $2 \leq p \leq 2^*$, então existe uma constante positiva $C = C(\varepsilon, p)$ tal que para todo $s \in \mathbb{R}$*

$$|F(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + C|s|^p. \tag{1.9}$$

Com efeito, da condição $(f1)$ temos que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(s)}{s}\right| = \frac{|f(s)|}{|s|} < \varepsilon \Rightarrow |f(s)| < \varepsilon |s|, \ \ \forall |s| \leq \delta.$$

Integrando, vem que

$$|F(s)| < \frac{\varepsilon}{2}|s|^2, \ \ \forall |s| \leq \delta. \tag{1.10}$$

A condição $(f2)$ nos diz que, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 1$ tal que

$$\left|\frac{f(s)}{s} - 1\right| = \left|\frac{f(s) - s}{s}\right| < \varepsilon \Rightarrow |f(s)| < \varepsilon |s| + |s|, \ \ \forall |s| \geq R.$$

Integrando, obtemos

$$|F(s)| < \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + \frac{1}{2}|s|^2, \ \ \forall |s| \geq R.$$

Para $|s| \geq R$, *a expressão acima nos dá*

$$\begin{aligned}
|F(s)| < \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + \frac{1}{2}|s|^2 &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{R^{p-2}}{R^{p-2}}|s|^2 + \frac{1}{2}\frac{R^{p-2}}{R^{p-2}}|s|^2 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{|s|^{p-2}}{R^{p-2}}|s|^2 + \frac{1}{2}\frac{|s|^{p-2}}{R^{p-2}}|s|^2 \\
&= \frac{\varepsilon}{2R^{p-2}}|s|^p + \frac{1}{2R^{p-2}}|s|^p \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{2R^{p-2}} + \frac{1}{2R^{p-2}}\right)|s|^p \\
&= C_1(\varepsilon, p)|s|^p.
\end{aligned}$$

Além disso, se $\delta \leq s \leq R$, *então*

$$\frac{|F(s)|}{|s|^p} \leq C_2(\varepsilon, p),$$

pois F *é contínua e* $s \in [\delta, R]$ *que é compacto. Isto nos diz que*

$$|F(s)| \leq C_2(\varepsilon, p)|s|^p.$$

Assim, juntando todas estas estimativas, segue que

$$\begin{aligned}
|F(s)| &< \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + C_1(\varepsilon, p)|s|^p + C_2(\varepsilon, p)|s|^p \\
&= \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + \{C_1(\varepsilon, p) + C_2(\varepsilon, p)\}|s|^p \\
&= \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + C(\varepsilon, p)|s|^p.
\end{aligned}$$

Um problema modelo de (1.1) é

$$-\Delta u + \lambda u = a(x)\frac{u^3}{1+u^2},$$

com $a(x) = a_\infty - \dfrac{1}{|x|^2 + K}$, $K > \dfrac{1}{a_\infty}$ e $a_\infty > \lambda > 0$.

Para verificação das condições $(A1) - (A5)$ e $(f1) - (f3)$, veja Apêndice A.

Capítulo 2

Variedade de Pohozaev

Em 1965 S. Pohozaev publicou um artigo [17] em que ele provou resultado de não existência de solução para algumas equações escalares semilineares com crescimento supercrítico em um determinado domínio estrelado. Sua prova é baseada numa identidade, que é hoje em dia bem conhecida como "identidade de Pohozaev".

Em [11] D. Costa e H. Tehrani observaram que, se numa equação como (1.1) tivermos somente que $\dfrac{f(s)}{s}$ é não-decrescente, não temos garantia de que todo caminho $I(tu)$ intersecta uma única vez a variedade de Nehari $N = \{u \in H \setminus \{0\}; I'(u)u = 0\}$. Podemos ter caminhos que não intersectam a variedade e caminhos que a intersectam infinitas vezes. Como não temos tal condição sobre o comportamento da função f, este foi um dos motivos pelos quais no trabalho [21], o qual estamos seguindo, R. Lehrer e L. Maia trabalharam com a variedade de Pohozaev P invés da variedade de Nehari N.

Neste capítulo enunciaremos e faremos a demonstração da identidade de Pohozaev em domínio limitado e não limitado, exibiremos a identidade de Pohozaev associada a equação (1.1), definiremos a variedade de Pohozaev a ela associada, bem como, enunciaremos e faremos a demonstração de algumas propriedades da mesma.

Inicialmente consideremos a seguinte equação

$$-\Delta u = g(x, u), \quad \text{em} \quad \Omega \tag{2.1}$$

onde g é uma função continua e Ω é um domínio regular do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.

Definimos a primitiva de g por:

$$G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds.$$

Proposição 2.1. *Seja $u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ solução da equação (2.1) tal que $G(\cdot, u(\cdot))$ e $x_i G_{x_i}$ pertencem a $L^1(\Omega)$. Então u satisfaz:*

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \eta dS_x = 2N \int_\Omega G(x,u)dx + 2\sum_{i=1}^N \int_\Omega x_i G_{x_i}(x,u)dx - (N-2)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad (2.2)$$

onde η denota o vetor normal unitário exterior de $\partial\Omega$. Além disso, se $\Omega = \mathbb{R}^N$, então

$$2N \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx + 2\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} x_i G_{x_i}(x,u)dx = (N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx. \quad (2.3)$$

Demonstração: Multiplicando a equação $-\Delta u = g(x,u)$ por $x \cdot \nabla u$, temos que

$$-\Delta u x \cdot \nabla u = g(x,u) x \cdot \nabla u. \quad (2.4)$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned} div(\nabla u x \cdot \nabla u) &= div\left(\nabla u \sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^N x_j \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \Delta u x \cdot \nabla u + |\nabla u|^2 + \sum_{i,j=1}^N x_j \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$
\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) &= \frac{1}{2}\nabla\left(|\nabla u|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\nabla\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}\\
&= \sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.
\end{aligned}
$$

Substituindo este ultimo resultado na expressão anterior, obtemos

$$
\Delta u x\cdot\nabla u = div(\nabla u x\cdot\nabla u) - |\nabla u|^2 - x\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right). \tag{2.5}
$$

Notemos ainda que

$$
\begin{aligned}
div\left(x\cdot\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N}x_j\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right)\\
&= \frac{N}{2}|\nabla u|^2 + x\cdot\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Substituindo esta ultima expressão em (2.5), obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta u x\cdot\nabla u &= div\left(\nabla u x\cdot\nabla u - x\cdot\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) + \frac{N}{2}|\nabla u|^2 - |\nabla u|^2\\
&= div\left(\nabla u x\cdot\nabla u - x\cdot\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) + \frac{N-2}{2}|\nabla u|^2.
\end{aligned}
$$

Integrando sobre Ω, temos

$$\int_\Omega \Delta u x \cdot \nabla u dx = \int_\Omega div\left(\nabla u x \cdot \nabla u - x \cdot \frac{|\nabla u|^2}{2}\right) dx + \frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Aplicando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\int_\Omega \Delta u x \cdot \nabla u dx = \int_{\partial\Omega} \left(\nabla u x \cdot \nabla u - x \cdot \frac{|\nabla u|^2}{2}\right) \cdot \eta dS_x + \frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \qquad (2.6)$$

Por outro lado, temos também que

$$\begin{aligned} div(x \cdot G(x,u)) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i G(x,u)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_i} G(x,u) + x_i \frac{\partial}{\partial x_i} G(x,u)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left(G(x,u) + x_i \frac{\partial G(x,u)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial G(x,u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} G(x,u) + \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial G(x,u)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial G(x,u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &= NG(x,u) + \sum_{i=1}^{N} x_i G_{x_i}(x,u) + x \cdot g(x,u) \cdot \nabla u, \end{aligned}$$

ou seja,

$$g(x,u)x \cdot \nabla u = div(xG(x,u)) - NG(x,u) - \sum_{i=1}^{N} x_i G_{x_i}(x,u).$$

Integrando sobre Ω, temos

$$\int_\Omega g(x,u)x \cdot \nabla u dx = \int_\Omega div(xG(x,u))dx - N\int_\Omega G(x,u)dx - \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega x_i G_{x_i}(x,u)dx.$$

Aplicando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\int_\Omega g(x,u)x \cdot \nabla u dx = \int_{\partial\Omega} xG(x,u)\eta dS_x - N\int_\Omega G(x,u)dx - \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega x_i G_{x_i}(x,u)dx. \quad (2.7)$$

Substituindo (2.6) e (2.7) em (2.4), temos que

$$-\int_{\partial\Omega}\left(\nabla u x\cdot\nabla u - x\cdot\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)\cdot\eta dS_x - \frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx =$$

$$\int_{\partial\Omega} xG(x,u)\cdot\eta dS_x - N\int_\Omega G(x,u)dx - \sum_{i=1}^N\int_\Omega x_iG_{x_i}(x,u)dx,$$

ou seja,

$$\int_{\partial\Omega}\left(xG(x,u)+\left(\nabla u x\cdot\nabla u - x\cdot\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)\right)\cdot\eta dS_x =$$

$$N\int_\Omega G(x,u)dx - \frac{N-2}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx + \sum_{i=1}^N\int_\Omega x_iG_{x_i}(x,u)dx.$$

Desde que $u\equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, então $G(x,u)=0$ sobre $\partial\Omega$ e $\nabla u = \nabla u\cdot\eta\eta$, temos então que

$$\left(\nabla u x\cdot\nabla u - x\cdot\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)\cdot\eta = x\cdot\frac{|\nabla u|^2}{2}\cdot\eta.$$

Assim, podemos reescrever a expressão acima como:

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2x\cdot\eta dS_x = N\int_\Omega G(x,u)dx - \frac{N-2}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx + \sum_{i=1}^N\int_\Omega x_iG_{x_i}(x,u)dx,$$

ou equivalentemente,

$$\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2x\cdot\eta dS_x = 2N\int_\Omega G(x,u)dx + 2\sum_{i=1}^N\int_\Omega x_iG_{x_i}(x,u)dx - (N-2)\int_\Omega|\nabla u|^2dx.$$

Agora, consideremos $\Omega = B_R(0)$. Como $|\nabla u|\in L^2(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx &= \int_0^\infty\int_{\partial B_R(0)}|\nabla u(r,\theta)|^2dS_r r^{N-1}dr\\ &= \int_0^\infty r^{N-2}\int_{\partial B_R(0)}|\nabla u(r,\theta)|^2 r dS_r dr\\ &= \int_0^\infty r^{N-2}\int_{\partial B_R(0)}|\nabla u(r,\theta)|^2 x\cdot\eta dS_r dr < \infty.\end{aligned}$$

Mostraremos que existe uma sequência de raios (r_n) tal que $r_n \to \infty$ e

$$r_n \int_{\partial B_{r_n}(0)} |\nabla u(r,\theta)|^2 dS_r \to 0.$$

Suponhamos, por contradição, que tal sequência não exista. Então,

$$\liminf_{r\to\infty} r \int_{\partial B_{r_n}(0)} |\nabla u(r,\theta)|^2 dS_r > \alpha > 0.$$

Mas, $\xi(r) := r \displaystyle\int_{\partial B_r(0)} |\nabla u(r,\theta)|^2 dS_r > 0$. Logo,

$$\int_0^\infty r^{N-2}\xi(r)dr > \int_{R_0}^\infty r^{N-2}\xi(r)dr > \alpha \int_{R_0}^\infty r^{N-2}dr = +\infty,$$

o que é uma contradição com o fato de $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Logo, tal sequência existe.

Além disso, temos que

$$\int_{B_{r_n}(0)} |\nabla u|^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad \int_{B_{r_n}(0)} G(x,u)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx$$

e

$$\sum_{i=1}^N \int_{B_{r_n}(0)} x_i G_{x_i}(x,u)dx \to \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} x_i G_{x_i}(x,u)dx,$$

pois basta escrevermos cada integral acima como a integral em $\mathbb{R}^N$ da função característica da bola $B_{r_n}(0)$ multiplicada pelas respectivas funções e aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Portanto, do que foi exposto acima temos que

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{r_n\to\infty} \int_{\partial B_{r_n}(0)} |\nabla u|^2 x\cdot\eta dS_x &= \lim_{r_n\to\infty} \Big\{ 2N \int_{B_{r_n}(0)} G(x,u)dx \\ &+ 2\textstyle\sum_{i=1}^N \displaystyle\int_{B_{r_n}(0)} x_i G_{x_i}(x,u)dx \\ &- (N-2)\int_{B_{r_n}(0)} |\nabla u|^2 dx \Big\} \\ &= 2N\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx + 2\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} x_i G_{x_i}(x,u)dx \\ &- (N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx = N\int_{\mathbb{R}^N}G(x,u)dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}x_iG_{x_i}(x,u)dx,$$

como queríamos mostrar. ∎

Observemos que a equação (1.1) nos dá

$$-\Delta u = a(x)f(u) - \lambda u,$$

e como

$$G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$$

vem que

$$G(x,u) = a(x)F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}.$$

Além disso, temos que

$$\sum_{i=1}^{N}x_iG_{x_i}(x,u) = \sum_{i=1}^{N}x_i\frac{\partial G(x,u)}{\partial x_i} = \nabla a(x)\cdot xF(u).$$

Assim, a identidade de Pohozaev associada a equação (1.1), pode ser escrita como

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx = N\int_{\mathbb{R}^N}G(x,u)dx + \int_{\mathbb{R}^N}\nabla a(x)\cdot xF(u)dx, \tag{2.8}$$

onde $G(x,u) = a(x)F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}$.

Seja o funcional $J : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx - N\int_{\mathbb{R}^N}G(x,u)dx - \int_{\mathbb{R}^N}\nabla a(x)\cdot xF(u)dx$$

e definamos a variedade de Pohozaev P associada à equação (1.1) por

$$P := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}; J(u) = 0\}.$$

Então temos o seguinte resultado:

Lema 2.1. *Considere o funcional J da definição anterior e a variedade de Pohozaev P.*

Então temos que:

(a) $\{u \equiv 0\}$ *é um ponto isolado de* $J^{-1}(\{0\})$.

(b) P *é um conjunto fechado.*

(c) P *é uma variedade* C^1.

(d) *Existe* $\sigma > 0$ *tal que* $\|u\|_\lambda > \sigma$, *para todo* $u \in P$.

Demonstração: (a) Usando a condição $(A4)$, temos

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\int_{\mathbb{R}^N}\left[\left(a(x) + \frac{\nabla a(x)\cdot x}{N}\right)F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}\right]dx \\
&> \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\int_{\mathbb{R}^N}[a_\infty F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}]dx \\
&= \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + N\int_{\mathbb{R}^N}\lambda\frac{u^2}{2}dx - N\int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u)dx \\
&\geq \frac{N-2}{2}\|u\|_\lambda^2 - N\int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u)dx.
\end{aligned}$$

Pela condição (1.9), vem que

$$\begin{aligned}
J(u) &> \frac{N-2}{2}\|u\|_\lambda^2 - N\int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u)dx \\
&> \frac{N-2}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{N\varepsilon a_\infty}{2\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}\lambda u^2 dx - a_\infty NC(\varepsilon,p)\int_{\mathbb{R}^N} u^p dx.
\end{aligned}$$

Agora, notemos que

$$\|u\|_\lambda^p = \int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^p + \lambda u^p]dx \geq \int_{\mathbb{R}^N}\lambda u^p dx,$$

logo

$$-\|u\|_\lambda^p \leq -\int_{\mathbb{R}^N}\lambda u^p dx.$$

Segue-se da observação acima e por imersão de Sobolev que

$$\begin{aligned}
J(u) &> \frac{N-2}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{N\varepsilon a_\infty}{2\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}\lambda u^2dx - a_\infty NC(\varepsilon,p)\int_{\mathbb{R}^N}u^pdx \\
&\geq \frac{N-2}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{N\varepsilon a_\infty}{2\lambda}\|u\|_\lambda^2 - a_\infty CNC(\varepsilon,p)\|u\|_\lambda^p \\
&= \frac{1}{2}\left(N-2-\frac{N\varepsilon a_\infty}{\lambda}\right)\|u\|_\lambda^2 - a_\infty CNC(\varepsilon,p)\|u\|_\lambda^p \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda(N-2)-N\varepsilon a_\infty}{\lambda}\right)\|u\|_\lambda^2 - a_\infty CNC(\varepsilon,p)\|u\|_\lambda^p.
\end{aligned}$$

Para concluir a demonstração, basta mostrarmos que $J(u) > 0$. Para tanto, tomemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $0 < \rho < 1$ tal que

$$\lambda(N-2) - N\varepsilon a_\infty > 0$$

e

$$\rho^p < \frac{1}{4a_\infty CNC(\varepsilon,p)}\left(N-2-\frac{N\varepsilon a_\infty}{\lambda}\right)\rho^2.$$

Então, se $\|u\|_\lambda = \rho$, temos

$$\begin{aligned}
J(u) &> \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda(N-2)-N\varepsilon a_\infty}{\lambda}\right)\|u\|_\lambda^2 - a_\infty CNC\|u\|_\lambda^p \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda(N-2)-N\varepsilon a_\infty}{\lambda}\right)\rho^2 - a_\infty CNC\rho^p \\
&> \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda(N-2)-N\varepsilon a_\infty}{\lambda}\right)\rho^2 - \frac{1}{4a_\infty CNC}\left(N-2-\frac{N\varepsilon a_\infty}{\lambda}\right)\rho^2 a_\infty CNC \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda(N-2)-N\varepsilon a_\infty}{\lambda}\right)\rho^2
\end{aligned}$$

e assim, $J(u) > 0$ se $0 < \|u\|_\lambda < \rho$.

(b) $J(u)$ é um funcional de classe C^1 (ver Apêndice B). Além disso, note que $P\cup\{0\} = J^{-1}(\{0\})$ é um conjunto fechado, por ser a imagem inversa de um conjunto fechado por um funcional contínuo. Para mostrar que P é fechado, considere uma sequência $(u_n) \subset P$ tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Então $(u_n) \subset P \cup \{0\}$ que é fechado, logo $u \in P \cup \{0\}$. Desde que $\{u \equiv 0\}$ é um ponto isolado de $J^{-1}(\{0\})$, então $u \neq 0$, logo, $u \in P$. Portanto, P é fechado.

(c) Consideremos a derivada do funcional J, aplicado em u:

$$J'(u)u = (N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\int_{\mathbb{R}^N} [a(x)f(u)u - \lambda u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) f(u)udx. \quad (2.9)$$

Como $u \in P$, temos que $J(u) = 0$, logo

$$(N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = 2N\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xF(u)dx. \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) em (2.9), obtemos

$$\begin{aligned}
J'(u)u &= 2N\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xF(u)dx \\
&- N\int_{\mathbb{R}^N} [a(x)f(u)u - \lambda u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xf(u)udx \\
&= 2N\int_{\mathbb{R}^N} [a(x)F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}]dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xF(u)dx \\
&- N\int_{\mathbb{R}^N} [a(x)f(u)u - \lambda u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xf(u)udx \\
&= 2N\int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x)\cdot x}{N}\right) F(u)dx \\
&- N\int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x)\cdot x}{N}\right) f(u)udx \\
&= 2N\int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x)\cdot x}{N}\right)\left(F(u) - \frac{1}{2}f(u)u\right) dx.
\end{aligned}$$

Segue de $(A1)$ e $(A3)$ que

$$\left(a(x) + \frac{\nabla a(x)\cdot x}{N}\right) > 0$$

e, desde que $Q(s) \geq 0$, temos que

$$\left(F(u) - \frac{1}{2}f(u)u\right) < 0,$$

logo,

$$2N\int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x)\cdot x}{N}\right)\left(F(u) - \frac{1}{2}f(u)u\right) dx < 0,$$

ou seja, $J'(u)u < 0$. Portanto, P é uma variedade C^1.

(d) Seja $u \in P$. Então u satisfaz $J(u) = 0$ e assim,

$$\begin{aligned}\frac{(N-2)}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx &= N\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xF(u)dx \\ &= N\int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u)dx - N\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda u^2}{2}dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xF(u)dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \lambda N\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx &= 2N\int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x)\cdot x}{N}\right) F(u)dx \\ &< 2N\int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u)dx.\end{aligned}$$

Da condição (1.6), dado $\varepsilon > 0$ e $2 < p < 2^*$, temos

$$\begin{aligned}(N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \lambda N\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx &< 2N\int_{\mathbb{R}^N} a_\infty \left(\frac{\varepsilon}{2}|u|^2 + C|u|^p\right) dx \\ &= N\int_{\mathbb{R}^N} a_\infty\varepsilon|u|^2 dx + 2Na_\infty\int_{\mathbb{R}^N} C|u|^p dx \\ &= Na_\infty\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx + 2Na_\infty C\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx,\end{aligned}$$

isto é,

$$(N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + (\lambda N - Na_\infty\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx < 2Na_\infty C\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $(N-2)\lambda < N(\lambda - \varepsilon a_\infty)$. Assim,

$$(N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + (N-2)\lambda\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx < 2Na_\infty\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} \lambda|u|^p dx,$$

ou ainda,

$$(N-2)\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx < 2Na_\infty\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} \lambda|u|^p dx,$$

assim, temos que

$$(N-2)\|u\|_\lambda^2 < 2Na_\infty\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} \lambda|u|^p \leq 2Na_\infty\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^p + \lambda|u|^p]dx = 2Na_\infty\frac{C}{\lambda}\|u\|_\lambda^p,$$

ou seja,

$$\frac{(N-2)\lambda}{2Na_\infty C} < \|u\|_\lambda^{p-2},$$

onde as constantes envolvidas não tem dependência de u. Portanto, existe

$$\sigma = \left(\frac{(N-2)\lambda}{2Na_\infty C} \right)^{\frac{1}{p-2}} > 0$$

tal que se $u \in P$, então $\|u\|_\lambda > \sigma$. ∎

Capítulo 3

Resultado de não existência

Iniciaremos esta seção apresentando algumas relações entre a variedade de Pohozaev P, associada à equação (1.1), e a variedade de Pohozaev P_∞, associada ao problema autônomo, ou seja, à equação

$$-\Delta u + \lambda u = a_\infty f(u). \tag{3.1}$$

A variedade de Pohozaev associada à equação (3.1) é dada por

$$P_\infty = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; J_\infty(u) = 0\},$$

onde

$$J_\infty(u) := \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx,$$

com

$$G_\infty(u) := a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2}{2}.$$

O funcional associado ao problema (3.1) é dado por

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u)dx.$$

Além disso, consideremos o conjunto de caminhos

$$\Gamma_\infty = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0,\ I_\infty(\gamma(1)) < 0\},$$

e definamos o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha para o funcional I_∞ por

$$c_\infty = \min_{\gamma \in \Gamma_\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} I_\infty(\gamma(t)).$$

As condição $(A3)$ e $(A4)$ implicam que $I_\infty(u) < I(u)$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$. De fato, note que

$$\begin{aligned}
I_\infty(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u)dx \\
&< \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N}\left(a(x) + \frac{\nabla a(x)\cdot x}{N}\right)F(u)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u)dx - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\nabla a(x)\cdot xF(u)}{N}dx \\
&= I(u) - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\nabla a(x)\cdot xF(u)}{N}dx \\
&\leq I(u).
\end{aligned}$$

Definimos p como sendo o ínfimo de $I(u)$ restrito a variedade de Pohozaev P, ou seja,

$$p := \inf_{u \in P} I(u).$$

Vamos mostrar ao final desta seção que $p = c_\infty$ e que tal nível não é atingido, isto significa que, esse nível não é um nível crítico para o funcional I. Isto nos motiva a procurar por soluções em níveis mais altos de energia.

Lema 3.1. *Suponhamos que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx > 0$. Então existem únicos $\theta_1(u) > 0$ e $\theta_2(u) > 0$ tais que $u(\cdot/\theta_1) \in P$ e $u(\cdot/\theta_2) \in P_\infty$.*

Demonstração: Primeiramente vamos verificar a existência de $\theta_1 > 0$ satisfazendo as hipóteses para o caso de P. Definamos a função

$$\begin{aligned}
\psi(\theta) := I(u(x/\theta)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x/\theta)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u(x/\theta))dx \\
&= \frac{\theta^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u(x/\theta))dx \\
&= \frac{\theta^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} [a(x)F(u(x/\theta)) - \lambda\frac{u^2(x/\theta)}{2}]dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\psi(\theta) = \frac{\theta^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} [a(\theta x)F(u(x)) - \lambda\frac{u^2}{2}]dx.$$

Derivando $\psi(\theta)$, e desde que $N \geq 3$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\psi'(\theta) &= \frac{N-2}{2}\theta^{N-3}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\theta^{N-1}\int_{\mathbb{R}^N} [a(\theta x)F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}]dx \\
&- \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta x)\cdot xF(u)dx \\
&= \theta^{N-3}\left\{\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\theta^2\int_{\mathbb{R}^N} [a(\theta x)F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}]dx\right. \\
&- \left.\theta^2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot(\theta x)F(u)dx\right\}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $u(x/\theta) \in P$ se , e somente se, $\psi'(\theta) = 0$, para algum $\theta > 0$. Pela condição $(A2)$, temos que

$$\lim_{\theta\to\infty} a(\theta x)F(u) = a_\infty F(u)$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{\theta\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} [a(\theta x)F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}]dx = \int_{\mathbb{R}^N} [a_\infty F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}]dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx.$$

Além disso, por (1.2) temos

$$\lim_{\theta\to\infty} \nabla a(\theta x)\cdot(\theta x)F(u) = 0$$

e novamente pelo Teorema da Convergência Dominada de lebesgue, obtemos

$$\lim_{\theta\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta x)\cdot(\theta x)F(u)dx = 0.$$

Portanto, se $\theta > 0$ é suficientemente grande, temos

$$\psi'(\theta) = \theta^{N-3}\left\{\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx - N\theta^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx + o(1)\right)\right\}.$$

Como por hipótese $\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx > 0$, segue-se que $\psi'(\theta) < 0$, para algum $\theta > 0$ suficientemente grande.

Por outro lado, se $\theta > 0$ é suficientemente pequeno, as condições $(A1)$, $(A3)$ e $(A4)$ implicam que

$$0 < a(x) + \frac{\nabla a(x)\cdot x}{N} < a_\infty,$$

logo,

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\left[\left(a(\theta x) + \frac{\nabla a(\theta x)(\theta x)}{N}\right)F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}\right]dx \\ &< \int_{\mathbb{R}^N}[a_\infty F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}]dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx. \end{aligned}$$

Das condições $(f1)$ e $(f2)$, temos que

$$|f(u)| \leq C|u|, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Integrando, obtemos

$$F(u) \leq \frac{C}{2}|u|^2,$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx &= \int_{\mathbb{R}^N}[a_\infty F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}]dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}[\frac{a_\infty C}{2}|u|^2 - \lambda\frac{u^2}{2}]dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\frac{a_\infty C}{2}|u|^2dx \\ &= \frac{a_\infty C}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx \\ &= \frac{a_\infty C}{2}\|u\|_2^2. \end{aligned}$$

Substituindo esta desigualdade na expressão anterior vem que

$$-\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}\left[\left(a(\theta x) + \frac{\nabla a(\theta x)\cdot(\theta x)}{N}\right)F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}\right]dx \leq \frac{a_\infty C}{2}\|u\|_2^2,$$

e isto nos diz que, existem constantes positivas A e B que não dependem de θ tais que

$$-A \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(a(\theta x) + \frac{\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right] dx \leq B.$$

Assim, para $\theta > 0$ suficientemente pequeno obtemos

$$\begin{aligned} \psi'(\theta) &= \theta^{N-3} \left\{ \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(\theta x) + \frac{\nabla a(\theta x)(\theta x)}{N} \right) F(u) dx \right. \\ &- \left. \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \right\} > 0. \end{aligned}$$

Como ψ' é contínuo, existe pelo menos um $\theta_1 = \theta_1(u) > 0$, tal que $\psi'(\theta_1) = 0$, logo, $u(\cdot/\theta_1) \in P$.

Para mostrar a unicidade de θ_1, note que $\psi'(\theta) = 0$ implica

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(a(\theta x) + \frac{\nabla a(\theta x)(\theta x)}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right] dx,$$

com $\theta > 0$, ou ainda

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\theta^2 \varphi(\theta),$$

onde

$$\varphi(\theta) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(a(\theta x) + \frac{\nabla a(\theta x)(\theta x)}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right] dx.$$

Derivando a função φ com relação a θ, vem que

$$\varphi'(\theta) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla a(\theta x) \cdot x + \frac{[x \cdot H(\theta x)] \cdot (\theta x)}{N} + \frac{\nabla a(\theta x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx,$$

o que é equivalente à,

$$\varphi'(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x) + \frac{[(\theta x) \cdot H(\theta x)] \cdot (\theta x)}{N} + \frac{\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} \right) F(u) dx.$$

Pelas condições $(A3)$, $(A5)$ e das condições sobre a função F, segue-se que $\varphi'(\theta) > 0$. Portanto, $\varphi(\theta)$ é uma função crescente, logo existe um único $\theta > 0$ tal que

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\theta^2 \varphi(\theta).$$

Isso verifica a unicidade de θ_1.

Agora iremos provar a existência de $\theta_2 > 0$ para o caso P_∞. Para tanto, consideremos a função

$$
\begin{aligned}
\xi(\theta) := I_\infty(u(x/\theta)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x/\theta)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} [a_\infty F(u(x/\theta)) - \frac{\lambda}{2} u^2(x/\theta)] dx \\
&= \frac{\theta^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dz - \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} [a_\infty F(u) - \frac{\lambda}{2} u^2] dz.
\end{aligned}
$$

Derivando $\xi(\theta)$, vem que

$$
\begin{aligned}
\xi'(\theta) &= \frac{N-2}{2}\theta^{N-3}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dz - N\theta^{N-1}\int_{\mathbb{R}^N} [a_\infty F(u) - \frac{\lambda}{2} u^2] dz \\
&= \theta^{N-3}\left\{\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dz - N\theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} [a_\infty F(u) - \frac{\lambda}{2} u^2] dz\right\} \\
&= \theta^{N-3}\left\{\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dz - N\theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dz\right\}.
\end{aligned}
$$

Assim, temos que $u(x/\theta) \in P_\infty$ se, e somente se, $\xi'(\theta) = 0$, para algum $\theta > 0$. Assim, para $\theta > 0$ suficientemente grande, temos que

$$
\xi'(\theta) = \theta^{N-3}\left\{\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dz - N\theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dz\right\} < 0.
$$

Por outro lado, note que se $\theta = 1$, então

$$
\xi'(\theta) = \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dz - N \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dz = J_\infty(u).
$$

Logo, para $0 < \theta < 1$, obtemos

$$
\xi'(\theta) = \theta^{N-3}\left\{\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dz - N\theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dz\right\} > 0.
$$

Como ξ' é contínua, segue do Teorema do Valor Intermediário, que existe $\theta_2 = \theta_2(u) > 0$ tal que $\xi'(\theta_2) = 0$, logo $u(\cdot/\theta_2) \in P_\infty$.

Mostraremos agora a unicidade de θ_2. Note que $\xi'(\theta) = 0$ implica

$$
\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dz = N\theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dz
$$

para $\theta > 0$, ou ainda

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dz = N\phi(\theta),$$

com

$$\phi(\theta) = \theta^2\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dz.$$

Derivando ϕ com relação a θ, vem que

$$\phi'(\theta) = 2\theta\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dz.$$

Desde que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dz > 0$ e $\theta > 0$, segue que $\phi'(\theta) > 0$. Logo, ϕ é crescente e, portanto, injetora. Assim, existe um único $\theta > 0$ tal que

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dz = N\theta^2\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dz.$$

Isso garante a unicidade de θ_2. ■

Lema 3.2. *Considere o conjunto aberto* $O = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}; \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx > 0\right\}$. *A função* $\theta_1 : O \to \mathbb{R}^+$ *dada por* $u \mapsto \theta_1(u)$, *tal que* $u(\cdot/\theta_1(u)) \in P$ *é contínua.*

Demonstração: Consideremos uma sequência $(u_n) \subset O$ tal que $u_n \to u \in O$. Mostraremos que $\theta_1(u_n) \to \theta_1(u)$. Para tanto, afirmamos que a sequência $\theta_1(u_n)$ é limitada. De fato, considere a expressão $\psi'(\theta) = 0$ do lema anterior, assim teremos que

$$\begin{aligned}\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx &= N\theta_1^2(u)\int_{\mathbb{R}^N}[a(\theta_1(u)x)F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}]dx \\ &+ N\theta_1^2(u)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\nabla a(\theta_1(u)x)\cdot(\theta_1(u)x)}{N}F(u)dx.\end{aligned}$$

Aplicando em u_n e em $\theta_1(u_n)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2dx &= N\theta_1^2(u_n)\int_{\mathbb{R}^N}[a(\theta_1(u_n)x)F(u_n) - \lambda\frac{u_n^2}{2}]dx \\ &+ N\theta_1^2(u_n)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\nabla a(\theta_1(u_n)x)\cdot(\theta_1(u_n)x)}{N}F(u_n)dx.\end{aligned}$$

Como $\theta_1(u_n) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, suponhamos por contradição que $\theta_1(u_n) \to +\infty$.

Pelas condições sobre as funções a e F, temos

$$a(\theta_1(u_n)x)F(u_n) - \lambda\frac{u_n^2}{2} \to a_\infty F(u) - \lambda\frac{u^2}{2},$$

$$\nabla a(\theta_1(u_n)x) \cdot (\theta_1 x)F(u_n) \to 0.$$

Usando as convergências acima e aplicando o Teorema da convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2dx &= N\theta_1^2(u_n)\int_{\mathbb{R}^N}[a(\theta_1(u_n)x)F(u_n) - \lambda\frac{u_n^2}{2}]dx \\ &+ N\theta_1^2(u_n)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\nabla a(\theta_1(u_n)x)\cdot(\theta_1(u_n)x)}{N}F(u_n)dx \to +\infty.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2dx \to \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx.$$

Desde que $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$, vem que

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx < \infty,$$

assim,

$$\begin{aligned}\infty > \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx &= \lim\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2dx \\ &= \lim\Bigg\{N\theta_1^2(u_n)\int_{\mathbb{R}^N}[a(\theta_1(u_n)x)F(u_n) - \lambda\frac{u_n^2}{2}]dx \\ &+ N\theta_1^2(u_n)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\nabla a(\theta_1(u_n)x)\cdot(\theta_1(u_n)x)}{N}F(u_n)dx\Bigg\} = +\infty.\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Portanto, $\theta_1(u_n)$ é limitada, logo existe uma subsequência convergente que ainda denotaremos por $\theta_1(u_n)$ tal que $\theta_1(u_n) \to \bar{\theta}_1$.

Novamente pelas condições sobre as funções a e F e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(\theta_1(u_n)x)F(u_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} a(\bar{\theta}_1 x)F(u)dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla a(\theta_1(u_n)x)\cdot(\theta_1(u_n)x)}{N} F(u_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla a(\bar{\theta_1}x)\cdot(\bar{\theta_1}x)}{N} F(u)dx,$$

e além disso, como $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx.$$

Assim, obtemos que

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\bar{\theta_1}^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(a(\bar{\theta_1}x) + \frac{\nabla a(\bar{\theta_1}x)\cdot(\bar{\theta_1}x)}{N}\right) F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}\right] dx. \quad (3.2)$$

Ora, se (3.2) ocorre, então $\bar{\theta_1}$ é tal que $u(\cdot/\bar{\theta_1}) \in P$. A unicidade de $\bar{\theta_1}$, segue-se da unicidade da projeção em P, logo $\bar{\theta_1} = \theta_1(u)$. Portanto, $\theta_1(u_n) \to \theta_1(u)$ em $\mathbb{R}^+$ como queríamos mostrar. ∎

Lema 3.3. *Se $u \in P_\infty$, então existe $\theta > 0$ tal que $u(\cdot/\theta) \in P$ e $\theta > 1$.*

Demonstração: Como $u \in P_\infty$, então $J_\infty(u) = 0$, logo

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx.$$

Desde que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$, vem que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx = \frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx > 0.$$

Segue do Lema 3.1 que existe $\theta > 0$ tal que $u(\cdot/\theta) \in P$. Assim, resta mostrar que $\theta > 1$. Para tanto, vamos aplicar $u(x/\theta)$ no funcional J, assim teremos que

$$\begin{aligned} 0 = J(u(x/\theta)) &= \frac{N-2}{2}\theta^{N-2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\theta^N \int_{\mathbb{R}^N} [a(\theta x)F(u) - \lambda\frac{u^2(x)}{2}]dx \\ &- \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta x)\cdot(\theta x)F(u)dx \\ &= \theta^{N-2}\left\{\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\theta^2\left(\int_{\mathbb{R}^N} [a(\theta x)F(u) - \lambda\frac{u^2(x)}{2}]dx\right.\right. \\ &+ \left.\left.\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla a(\theta x)\cdot(\theta x)}{N}F(u)dx\right)\right\}, \end{aligned}$$

e como $\theta > 0$, segue-se que

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx = N\theta^2\int_{\mathbb{R}^N}\left[\left(a(\theta x)+\frac{\nabla a(\theta x)\cdot(\theta x)}{N}\right)F(u)-\lambda\frac{u^2}{2}\right]dx.$$

Pela condição $(A4)$, obtemos

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx < N\theta^2\int_{\mathbb{R}^N}[a_\infty F(u)-\lambda\frac{u^2}{2}]dx = N\theta^2\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx,$$

ou seja,

$$\frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx < \theta^2\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx,$$

ou ainda,

$$(2^*)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx < \theta^2\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx. \tag{3.3}$$

Mas, como $u \in P_\infty$ temos

$$(2^*)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx = \int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx.$$

Portanto, a desigualdade (3.3) é verdadeira se, e somente se, $\theta^2 > 1$, ou seja, $\theta > 1$. ■

Lema 3.4. *Se $u \in P$, então existe $\theta > 0$ tal que $u(\cdot/\theta) \in P_\infty$ e $\theta < 1$.*

Demonstração: Com o objetivo de fazer uso do Lema 3.1, mostraremos que $\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx > 0$. Com efeito, seja $u \in P$, então $J(u) = 0$, assim

$$\begin{aligned}\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx &= N\int_{\mathbb{R}^N}\left[\left(a(x)+\frac{\nabla a(x)\cdot x}{N}\right)F(u)-\lambda\frac{u^2}{2}\right]dx\\ &< N\int_{\mathbb{R}^N}[a_\infty F(u)-\lambda\frac{u^2}{2}]dx\\ &= N\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx,\end{aligned}$$

onde usamos a condição $(A4)$ para obter a desigualdade. Desde que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$, temos $\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx > 0$, logo a desigualdade acima nos dá $\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx > 0$. Segue-se do Lema 3.1 que existe $\theta > 0$ tal que $u(\cdot/\theta) \in P_\infty$. Resta mostrar que $\theta < 1$, para tanto, observe que

$$\frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx < \int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx,$$

e como $u(\cdot/\theta) \in P_\infty$, então θ satisfaz

$$\theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx = (2^*)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx < \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx.$$

Assim,

$$\frac{\theta^2 \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx} = \frac{(2^*)^{-1} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx} < \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx},$$

ou seja,

$$\theta^2 = \frac{(2^*)^{-1} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx} < 1.$$

Portanto, $\theta^2 < 1$ o que implica que $\theta < 1$. ■

Observação: Uma consequência imediata dos lemas anteriores é que $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ pode ser projetada em P e em P_∞ se, e somente se, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx > 0$.

Lema 3.5. *Se $u \in P_\infty$, então $u(\cdot - y) \in P_\infty$, para todo $y \in \mathbb{R}^N$. Além disso, existe $\theta_y > 1$ tal que $u\left(\dfrac{\cdot - y}{\theta_y}\right) \in P$ e $\lim\limits_{|y|\to\infty} \theta_y = 1$.*

Demonstração: Se $u \in P_\infty$, então pela invariância por translação do $\mathbb{R}^N$, temos que $u(\cdot - y) \in P_\infty$, para todo $y \in \mathbb{R}^N$. Desde que $u(\cdot - y) \in P_\infty$, então $J_\infty(u) = 0$ e assim teremos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx > 0$, logo pelo Lema 3.3, existe $\theta_y > 0$ tal que $u\left(\dfrac{\cdot - y}{\theta_y}\right) \in P$ e $\theta_y > 1$. Portanto, resta mostrar que $\lim\limits_{|y|\to\infty} \theta_y = 1$. Para tanto, suponhamos, por contradição, que existe uma sequência $y_n \in \mathbb{R}^N$ tal que $|y_n| \to +\infty$ e $\theta_{y_n} \to A > 1$ ou $+\infty$. Definindo

$$K(\theta_{y_n} x + y_n) := \left(a(\theta_{y_n} x + y_n) + \frac{\nabla a(\theta_{y_n} x + y_n) \cdot (\theta_{y_n} x + y_n)}{N} \right),$$

temos a seguinte convergência pontual:

$$K(\theta_{y_n} x + y_n) F(u) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} \to a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} = G_\infty(u(x)).$$

Além disso, da condição $(A4)$, juntamente com a condição sobre a função F, obtemos

$$\begin{aligned} K(\theta_{y_n}x+y_n)F(u)-\lambda\frac{u^2(x)}{2} &< a_\infty F(u)-\lambda\frac{u^2(x)}{2} \\ &\leq a_\infty C u^2(x)\in L^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\lim_{y_n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}[K(\theta_{y_n}x+y_n)F(u)-\lambda\frac{u^2(x)}{2}]dx=\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u(x))dx. \tag{3.4}$$

Por outro lado, para cada y_n, temos que $u\left(\dfrac{\cdot-y_n}{\theta_{y_n}}\right)\in P$ com $\theta_{y_n}>1$, ou seja, temos

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx=N\theta_{y_n}^2\int_{\mathbb{R}^N}[K(\theta_{y_n}x+y_n)F(u)-\lambda\frac{u^2(x)}{2}]dx. \tag{3.5}$$

Pelo limite acima, temos que o lado direito de (3.5) converge à $NA^2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx$, enquanto que o lado esquerdo permanece fixo em $\dfrac{N-2}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx$. Como $u\in P_\infty$, então $u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$, logo $\dfrac{N-2}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx<+\infty$ e desde que $A>1$ ou $+\infty$, segue o absurdo. ■

Lema 3.6. $\displaystyle\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\theta_y=\bar{\theta}<\infty$ *e* $\bar{\theta}>1$.

Demonstração: Como $\displaystyle\lim_{|y|\to\infty}\theta_y=1$, por definição, temos que, dado $\varepsilon>0$, existe $R>0$ tal que $|\theta_y-1|<\varepsilon$, se $|y|>R$. Mostraremos então que existe $M>0$ tal que $\displaystyle\sup_{0\leq|y|\leq R}\theta_y\leq M$. Para tanto, suponhamos, por contradição, que o supremo não exista, ou equivalentemente, que existe uma sequência $y_n\in\mathbb{R}^N$, com $|y_n|\in[0,R]$ tal que $\theta_{y_n}\to\infty$. Agora observemos que

$$\lim_{\theta_{y_n}\to\infty}a(\theta_{y_n}x+y_n)=a_\infty,$$

onde usamos a condição $(A2)$. Além disso, por (1.2), temos que

$$\lim_{\theta_{y_n}\to\infty}\frac{\nabla a(\theta_{y_n}x+y_n)\cdot(\theta_{y_n}x+y_n)}{N}=0.$$

Assim,

$$\lim_{\theta_{y_n}\to\infty}\left\{a(\theta_{y_n}x+y_n)+\frac{\nabla a(\theta_{y_n}x+y_n)\cdot(\theta_{y_n}x+y_n)}{N}\right\}=a_\infty,$$

e portanto,

$$\lim_{\theta_{y_n}\to\infty}\left\{K(\theta_{y_n}x+y_n)F(u)-\lambda\frac{u^2(x)}{2}\right\}=G_\infty(u).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{\theta_{y_n}\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}K(\theta_{y_n}x+y_n)F(u)-\lambda\frac{u^2}{2}dx=\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx.$$

Segue-se de (3.5) que

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx=N\theta_{y_n}^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dx+o_{y_n}(1)\right).$$

Mas, como $\theta_{y_n}\to\infty$ e o lado esquerdo é um número fixado, segue o absurdo. Portanto, o supremo existe. ■

Lema 3.7. *Existe um número real* $\widehat{\sigma}>0$ *tal que* $\inf_{u\in P}\|\nabla u\|_2\geq\widehat{\sigma}$.

Demonstração: Dado $u\in P$, então $J(u)=0$, logo

$$\begin{aligned}\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx &= N\int_{\mathbb{R}^N}\left[\left(a(x)+\frac{\nabla a(x)\cdot x}{N}\right)F(u)-\lambda\frac{u^2}{2}\right]dx\\ &< N\int_{\mathbb{R}^N}[a_\infty F(u)-\lambda\frac{u^2}{2}]dx,\end{aligned}$$

onde usamos a condição $(A4)$ para obter a desigualdade. Por outro lado, da condição (1.9), tomando $p=2^*$ e $\varepsilon=\dfrac{\lambda}{a_\infty}>0$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx &< Na_\infty\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{\lambda}{2}|u|^2+C(2^*)|u|^{2^*}-\lambda\frac{u^2}{2}\right]dx\\ &< Na_\infty C(2^*)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}dx,\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx<a_\infty C(2^*)\int_\infty|u|^{2^*}dx$$

que pode ser escrita como

$$\frac{1}{2^*}\|\nabla u\|_2^2<a_\infty C(2^*)\|u\|_{2^*}^{2^*}.$$

Pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, existe $C > 0$ dependendo somente de N e 2 tal que $\|u\|_{2^*} \leq C\|\nabla u\|_2$, assim

$$\frac{1}{2^*}\|\nabla u\|_2^2 < a_\infty C(2^*)\|u\|_{2^*}^{2^*} \leq a_\infty C(2^*)C^{2^*}\|\nabla u\|_2^{2^*},$$

dividindo por $\|\nabla u\|_2^2$, obtemos

$$\frac{1}{2^*} < \frac{a_\infty C(2^*)\|u\|_{2^*}^{2^*}}{\|\nabla u\|_2^2} \leq a_\infty C(2^*)C^{2^*}\|\nabla u\|_2^{2^*-2},$$

implicando que

$$\|\nabla u\|_2^{2^*-2} \geq \frac{1}{2^* a_\infty C(2^*)C^{2^*}} > 0.$$

Portanto, tomando $\widehat{\sigma} = \left(\frac{1}{2^* a_\infty C(2^*)C^{2^*}}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$, temos que

$$\inf_{u\in P}\|\nabla u\|_2 \geq \widehat{\sigma} > 0$$

como queríamos mostrar. ∎

Lema 3.8. $p =: \inf_{u\in P} I(u) > 0$.

Demonstração: Dado $u \in P$, então u satisfaz

$$\begin{aligned}\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx &= N\int_{\mathbb{R}^N}G(x,u)dx + \int_{\mathbb{R}^N}\nabla a(x)\cdot xF(u)dx\\ &= N\int_{\mathbb{R}^N}[a(x)F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}]dx + \int_{\mathbb{R}^N}\nabla a(x)\cdot xF(u)dx,\end{aligned}$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^N}a(x)F(u)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx - \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla a(x)\cdot xF(u)dx - \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx. \tag{3.6}$$

Por outro lado, temos que

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N}a(x)F(u)dx. \tag{3.7}$$

Assim, se $u \in P$, substituindo (3.6) em (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xF(u)dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right) \\ &\geq \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{N}\widehat{\sigma} > 0, \end{aligned}$$

onde usamos o Lema 3.7 e a condição $(A3)$. Portanto, $p > 0$. ∎

Observação 3.1. *L. Jeanjean e K. Tanaka mostraram em [16] que*

$$\inf_{u\in P_\infty} I_\infty(u) = c_\infty.$$

Observação 3.2. *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx > 0$ e $\theta > 0$ tal que $u(\cdot/\theta) \in P_\infty$. Então, temos que*

$$\begin{aligned} I_\infty(u(x/\theta)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x/\theta)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u(x/\theta))dx \\ &= \frac{\theta^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx \\ &= \theta^{N-2}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \theta^2\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx\right\} \\ &= \theta^{N-2}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right\} \\ &= \theta^{N-2}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right\} \\ &= \frac{\theta^{N-2}}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$I_\infty(u(x/\theta)) = \frac{\theta^{N-2}}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx. \tag{3.8}$$

Note que, o fato de $u(x/\theta) \in P_\infty$ nos diz que

$$\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx.$$

Com efeito, se $u(x/\theta) \in P_\infty$ então

$$\begin{aligned} 0 = J_\infty(u(x/\theta)) &= \theta^{N-2}\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dz - N\theta^N \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dz \\ &= \theta^{N-2}\left\{\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dz - N\theta^2\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dz\right\}. \end{aligned}$$

Como $\theta > 0$, então

$$\theta^{N-2}\left\{\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dz - N\theta^2\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dz\right\} = 0$$

se e somente se

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dz - N\theta^2\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dz = 0.$$

Daí, temos que

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dz = N\theta^2\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dz$$

e portanto,

$$\frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dz = \theta^2\int_{\mathbb{R}^N}G_\infty(u)dz.$$

Esta igualdade foi usada na demonstração da identidade (3.8).

H. Berestycki e P.-L. Lions em [8], mostraram resultado de existência de solução ground estate radial simétrica para problemas do tipo (3.1). Usaremos tal solução na demonstração do próximo resultado, bem como, na definição do operador Π que será apresentado no próximo capítulo.

Lema 3.9. $p = c_\infty$.

Demonstração: Seja $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma solução ground state do problema no infinito (ver [8]), isto é, $w \in P_\infty$ e $I_\infty(w) = c_\infty$. Para cada $y \in \mathbb{R}^N$, definamos $w_y := w(x-y)$. Pela invariância por translação do $\mathbb{R}^N$, obtemos que $w_y \in P_\infty$ e $I_\infty(w_y) = c_\infty$. Segue do Lema 3.5 que, para $y \in \mathbb{R}^N$, existe $\theta_y > 1$ tal que $\tilde{w_y} = w_y(\cdot/\theta_y) \in P$, com $\lim_{|y|\to\infty}\theta_y = 1$. Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
|I(\tilde{w_y}) - c_\infty| &= |I(\tilde{w_y}) - I_\infty(w_y)| \\
&= \left| \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{w_y}|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,\tilde{w_y})dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_y|^2 dx \right. \\
&+ \left. \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(w_y)dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{2}\theta_y^{N-2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_y|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,\tilde{w_y})dx \right. \\
&- \left. \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_y|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(w_y)dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{2}(\theta_y^{N-2} - 1)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_y|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,\tilde{w_y})dx \right. \\
&+ \left. \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(w_y)dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{2}(\theta_y^{N-2} - 1)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_y|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} [a(x)F(\tilde{w_y}) - \lambda\frac{\tilde{w_y}^2}{2}]dx \right. \\
&+ \left. \int_{\mathbb{R}^N} [a_\infty F(w_y) - \lambda\frac{w_y^2}{2}]dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{2}(\theta_y^{N-2} - 1)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx - \theta_y^N\int_{\mathbb{R}^N} [a(x\theta_y + y)F(w) - \lambda\frac{w^2}{2}]dx \right. \\
&+ \left. \int_{\mathbb{R}^N} [a_\infty F(w) - \lambda\frac{w^2}{2}]dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{2}(\theta_y^{N-2} - 1)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx + (\theta_y^N - 1)\int_{\mathbb{R}^N} \lambda\frac{w^2}{2}dx \right. \\
&- \left. \theta_y^N\int_{\mathbb{R}^N} a(x\theta_y + y)F(w)dx + \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(w)dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{2}(\theta_y^{N-2} - 1)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx + (\theta_y^N - 1)\int_{\mathbb{R}^N} \lambda\frac{w^2}{2}dx \right. \\
&+ \left. \int_{\mathbb{R}^N} (a_\infty - \theta_y^N a(x\theta_y + y))F(w)dx \right| \\
&\le \frac{|\theta_y^{N-2} - 1|}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx + |\theta_y^N - 1|\int_{\mathbb{R}^N} \lambda\frac{w^2}{2}dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} |a_\infty - \theta_y^N a(x\theta_y + y)||F(w)|dx.
\end{aligned}
$$

Como $\theta_y \to 1$, quando $|y| \to \infty$, vem que

$$
|I(\tilde{w_y}) - c_\infty| \le o_y(1) + o_y(1) + \int_{\mathbb{R}^N} |a_\infty - a(x+y)||F(w)|dx,
$$

além disso, temos que $a(x+y) \to a_\infty$, se $|y| \to \infty$, logo

$$
\lim_{|y|\to\infty} I(\tilde{w_y}) = c_\infty.
$$

Portanto,

$$p = \inf_{u \in P} I(u) \leq c_\infty. \tag{3.9}$$

Por outro lado, dado $u \in P$, pelo Lema 3.4, existe $0 < \theta < 1$ tal que $u(\cdot/\theta) \in P_\infty$. Além disso, como $u \in P$, então u satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx &= N \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx \\ &= N \int_{\mathbb{R}^N} [a(x)F(u) - \lambda \frac{u^2}{2}] dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} [a(x)F(u) - \lambda \frac{u^2}{2}] dx + \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx.$$

Podemos escrever a expressão acima como

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + \lambda u^2] dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(u) dx = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx \\ &> \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\ &\geq \frac{\theta^{N-2}}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \ \ (\theta < 1) \\ &= I_\infty(u(x/\theta)) \geq c_\infty, \end{aligned}$$

onde usamos (3.8), a Observação 3.1 e a condição $(A3)$. Assim, para todo $u \in P$, temos que $I(u) > c_\infty$, logo

$$p = \inf_{u \in P} I(u) \geq c_\infty. \tag{3.10}$$

Segue-se de (3.9) e (3.10) que $p = c_\infty$, como queríamos mostrar. ∎

Com o que vimos até agora estamos em condições de demonstrar um dos principais resultados desse trabalho.

Teorema 3.1. *Assuma que* $(A1 - A5)$ *e* $(f1 - f3)$ *são válidas. Então,* $p = \inf_{u \in P} I(u)$ *não é um nível crítico para o funcional* I*. Em particular, o ínfimo* p *não é atingido.*

Demonstração: Suponhamos , por contradição, que exista $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, ponto crítico do funcional I no nível p. Em particular, teremos que $u_0 \in P$ e $I(u_0) = p$. Seja $0 < \theta < 1$ tal que $u_0(x/\theta) \in P_\infty$. Então,

$$\begin{aligned} p = I(u_0) &= \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx + \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xF(u_0)dx \\ &\geq \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx \\ &> \frac{\theta^{N-2}}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx \\ &= I_\infty(u_0(x/\theta)) \geq c_\infty, \end{aligned}$$

onde usamos $(A3)$ e (3.8), juntamente com a observação 4.1. Portanto, $p > c_\infty$, o que contradiz o Lema 3.9. ■

Lema 3.10. *Assuma $(A1)$, $(A5)$ e $(f1)$. Se u é ponto crítico do funcional I restrito a variedade P, então u é ponto crítico do funcional I em $H^1(\mathbb{R}^N)$, ou seja, P é uma restrição natural do problema (1.1).*

Demonstração: Seja u um ponto crítico do funcional I restrito a variedade P. Então $\|I'(u)\|_* = 0$. Pelo Corolário C.1 do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange(ver apêndice C), existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|I'(u)\|_* = \min_{\mu\in\mathbb{R}} \|I'(u) - \mu J'(u)\|_{(H^1(\mathbb{R}^N))'}$$

o que é equivalente a

$$I'(u) + \mu J'(u) = 0. \tag{3.11}$$

Nosso objetivo será mostrar que $\mu = 0$. Para tanto, aplicando $u \in P$ em (3.11), vem que

$$I'(u)u + \mu J'(u)u = 0.$$

Usando a definição dos funcionais I e J, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 dx + \lambda u^2] dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u)udx \\ &+ \mu\left((N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(a(x) + \frac{\nabla a(x)\cdot x}{N}\right) f(u)u - \lambda u^2\right] dx\right). \end{aligned}$$

A equação acima está associado à equação

$$-\Delta u+\lambda u-a(x)f(u)+\mu\left(-(N-2)\Delta u+\lambda N u-N\left(a(x)+\frac{\nabla a(x)\cdot x}{N}\right)f(u)\right)=0,$$

que pode ser reescrita como

$$-(1+\mu(N-2))\Delta u+\lambda(1+\mu N)u=[(1+\mu N)a(x)+\mu\nabla a(x)\cdot x]f(u). \tag{3.12}$$

Além disso, se u é uma solução da equação (3.12), então u satisfaz uma identidade de Pohozaev. Assim, a variedade de Pohozaev à ela associada é definida por $\tilde{P}^{-1}(\{0\})$, onde

$$\begin{aligned}\tilde{P}(u) &= (1+\mu(N-2))\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx-N\int_{\mathbb{R}^N}G^*(x,u)dx\\ &- \sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}G^*_{x_i}(x,u)x_i dx,\end{aligned}$$

com

$$G^*(x,u)=((1+\mu N)a(x)+\mu\nabla a(x)\cdot x)F(u)-\lambda\frac{1+\mu N}{2}u^2,$$

e

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}G^*_{x_i}(x,u)x_i dx=\int_{\mathbb{R}^N}((1+\mu N)\nabla a(x)\cdot x+\mu x\cdot H(x)\cdot x)F(u)dx.$$

Portanto, $\tilde{P}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\tilde{P}(u) &= (1+\mu(N-2))\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx\\ &- N\int_{\mathbb{R}^N}[((1+\mu N)a(x)+\mu\nabla a(x)\cdot x)F(u)-\lambda\frac{1+\mu N}{2}u^2]dx\\ &- \int_{\mathbb{R}^N}[((1+\mu N)\nabla a(x)\cdot x+\mu x\cdot H(x)\cdot x)F(u)]dx\\ &= (1+\mu(N-2))\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx\\ &- N(1+\mu N)\int_{\mathbb{R}^N}\left[\left(a(x)+\frac{\nabla a(x)\cdot x}{N}\right)F(u)-\lambda\frac{u^2}{2}\right]dx\\ &- N\mu\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla a(x)\cdot x+\frac{x\cdot H(x)\cdot x}{N}\right)F(u)dx.\end{aligned}$$

Desde que $u \in P$, então $J(u) = 0$, logo

$$N \int_{\mathbb{R}^N} [a(x)F(u) - \lambda \frac{u^2}{2}]dx = \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx,$$

ou seja,

$$N \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right] dx = \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx.$$

Segue-se daí que

$$(1+\mu N)N \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right] dx = \frac{(1+\mu N)(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx.$$

Substituindo essa ultima igualdade na expressão de $\tilde{P}$, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{P}(u) &= \frac{(1+\mu(N-2))(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - (1+\mu N) \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\ &- N\mu \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx \\ &= -\mu(N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\ &- N\mu \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, u é solução da equação (3.12), logo $\tilde{P}(u) = 0$ e assim

$$-\mu(N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\mu \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx.$$

A observação 1.4 juntamente com a condição $(A5)$, nos dizem que, o lado direito da equação é sempre positivo, enquanto que o lado esquerdo é sempre negativo, caso $\mu > 0$ (ou vice-versa, caso $\mu < 0$). Então, necessariamente devemos ter $\mu = 0$. Portanto, a equação

$$I'(u) + \mu J'(u) = 0,$$

com $\mu = 0$, implica em $I'(u) = 0$ e portanto u é um ponto crítico de I e a restrição P é natural. ∎

Capítulo 4

Existência de uma solução positiva

Neste capítulo iremos mostrar a existência de uma solução positiva para a equação (1.1). Mostramos no capítulo anterior que o nível c_∞ não é atingido para o funcional I. Portanto, procuraremos aqui por funções que possuam nível de energia maior que c_∞.

Inicialmente mostraremos que os níveis minimax do Teorema do Passo da Montanha c e c_∞ associado ao funcional I e ao funcional I_∞, respectivamente, coincidem, isto é:

Lema 4.1. $c_\infty = c$.

Demonstração: Sejam

$$c = \min_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$c_\infty = \min_{\gamma \in \Gamma_\infty} \max_{t \in [0,1]} I_\infty(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0, \;\; I(\gamma(1)) < 0\}$$

e

$$\Gamma_\infty = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0, \;\; I_\infty(\gamma(1)) < 0\}.$$

Assim, dado $\gamma \in \Gamma$, temos que $I(\gamma(1)) < 0$. Das condições $(A3)$ e $(A4)$, temos que

$I_\infty(u) < I(u)$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, pois

$$\begin{aligned} I_\infty(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u)dx \\ &< \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x)\cdot x}{N}\right) F(u)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla a(x)\cdot xF(u)}{N}dx \\ &= I(u) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla a(x)\cdot xF(u)}{N}dx \\ &\leq I(u). \end{aligned}$$

Logo, $I_\infty(\gamma(t)) \leq I(\gamma(t))$. Em particular, $I_\infty(\gamma(1)) \leq I(\gamma(1)) < 0$ e, portanto, $\gamma \in \Gamma_\infty$. Como γ foi tomado de modo arbitrário, temos que $\Gamma \subset \Gamma_\infty$. Além disso, se $\gamma \in \Gamma$, então

$$\max_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

assim,

$$\min_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t)) \leq \min_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

e como $\Gamma \subset \Gamma_\infty$, temos

$$c_\infty = \min_{\gamma\in\Gamma_\infty}\max_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t)) \leq \min_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t)) \leq \min_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = c$$

e assim $c_\infty \leq c$.

Mostraremos agora que $c \leq c_\infty$. Pela definição de c_∞, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\gamma \in \Gamma_\infty$ tal que $I_\infty(\gamma(t)) < c_\infty + \varepsilon$. Considere $y \in \mathbb{R}^N$ e façamos a translação

$$\tau_y(\gamma(t)) = \gamma(t)(x) = \gamma(t)(x-y), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Observemos que $\tau_y(\gamma(t)) \in \Gamma$, pois

$$\tau_y(\gamma(0)) = \gamma(0)(x) = \gamma(0)(x-y) = 0(x-y) = 0$$

e além disso, para cada $t \in [0,1]$, da invariância por translação do $\mathbb{R}^N$, vem que

$$\lim_{|y|\to\infty} I(\tau_y(\gamma(t))) = \lim_{|y|\to\infty} I_\infty(\tau_y(\gamma(t))) = I_\infty(\gamma(t)), \tag{4.1}$$

em particular, vale

$$\lim_{|y|\to\infty} I(\tau_y(\gamma(1))) = \lim_{|y|\to\infty} I_\infty(\tau_y(\gamma(1))) = I_\infty(\gamma(1)) < 0,$$

pois $\gamma \in \Gamma_\infty$. Logo, pela conservação do sinal, vem que $I(\tau_y(\gamma(1))) < 0$. Se $t_0 \in [0,1]$ é tal que $I(\tau_y(\gamma(t_0)))$ é o valor máximo no caminho, então de (4.1) segue que $c \leq c_\infty + \varepsilon$, como $\varepsilon > 0$ foi tomado de modo arbitrário, resulta que $c \leq c_\infty$. Isso conclui a demonstração. ■

Lema 4.2. $p = c$.

Demonstração: Definamos $p_\infty = \inf\limits_{u\in P_\infty} I_\infty(u)$. Da Observação 3.1 temos que $c_\infty = \inf\limits_{u\in P_\infty} I_\infty(u)$, logo, $p_\infty = c_\infty$. Mostramos no Lema 4.1 que $c_\infty = c$, além disso, do Lema 3.9 temos que $p = c_\infty$. Portanto, $p = c_\infty = c$. Em particular, temos que $p = p_\infty$. ■

Lema 4.3. *Dado um caminho $\gamma \in \Gamma$, existe $s \in (0,1)$ tal que $\gamma(s)$ intersecta P.*

Demonstração: No Lema 2.1 (a), mostramos a existência de um certo $\rho > 0$ tal que, se $0 < \|u\|_\lambda < \rho$, então $J(u) > 0$. Agora, observemos que

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xF(u)dx \\
&= \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\int_{\mathbb{R}^N}[a(x)F(u) - \lambda\frac{u^2}{2}]dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xF(u)dx \\
&= N\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u)dx\right) - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xF(u)dx \\
&= NI(u) - \|\nabla u\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xF(u)dx
\end{aligned}$$

Da condição $(A3)$, segue-se que

$$J(u) < NI(u).$$

Portanto, se $\gamma \in \Gamma$, temos que $\gamma(0) = 0$, logo $J(\gamma(0)) = 0$. Por outro lado, desde que $\gamma \in \Gamma$, vem que $I(\gamma(1)) < 0$ e assim

$$J(\gamma(1)) < NI(\gamma(1)) < 0.$$

Logo, existe $s \in (0,1)$, com $\|\gamma(s)\|_\lambda > \rho$ tal que $J(\gamma(s)) = 0$. Portanto, $\gamma(s) \in P$. Isto nos diz que, todo caminho $\gamma \in \Gamma$ intersecta P. ■

Apresentaremos agora algumas definições que serão necessárias para uma melhor compreensão dos resultados que virão.

Definição 4.1. *Um funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Cerami (Ce) se toda sequência $(u_n) \subset X$ com $\|u_n\| < M$ e $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|) \to 0$ possui subsequência convergente $u_{n_k} \to u \in X$.*

Definição 4.2. *Um funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Cerami no nível d, $(Ce)_d$ se toda sequência $(u_n) \subset X$ com $I(u_n) \to d$ e $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|) \to 0$ possui subsequência convergente $u_{n_k} \to u \in X$.*

Lema 4.4. *Seja (u_n) uma sequência $(Ce)_d$ com $d > 0$, então (u_n) é uma sequência limitada.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que $\|u_n\|_\lambda \to \infty$. Definamos $\hat{u_n} := \dfrac{u_n}{\|u_n\|_\lambda}$, assim $\hat{u_n}$ é uma sequência limitada e $\|\hat{u_n}\|_\lambda = 1$, logo, a menos de subsequência $\hat{u_n} \rightharpoonup \hat{u}$. Além disso, observe que

$$0 \leq \int_{B_1(y)} |\hat{u_n}|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u_n}|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} [|\hat{u_n}|^2 + \lambda \hat{u_n}^2] dx = \|\hat{u_n}\|_\lambda^2 \leq C.$$

Assim, temos que $\sup \displaystyle\int_{B_1(y)} |\hat{u_n}|^2 dx \geq 0$. Portanto, um dos dois casos ocorre:

(i) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{u_n}|^2 dx > 0;$

(ii) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{u_n}|^2 dx = 0.$

Mostraremos que, tanto (i) como (ii) não podem ocorrer, obtendo para cada um uma contradição. Suponhamos primeiramente que (ii) ocorre e tomemos $L > 1$. Assim,

$$
\begin{aligned}
I\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda}u_n\right) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\left|\nabla\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda}u_n\right)\right|^2 + \lambda\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda}u_n\right)^2\right]dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda}u_n\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{L^2}{\|u_n\|_\lambda^2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2]dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda}u_n\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{L^2}{\|u_n\|_\lambda^2}\|u_n\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda}u_n\right)dx \\
&= \frac{1}{2}L^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda}u_n\right)dx
\end{aligned}
$$

Segue de (1.9) que, dado $\varepsilon > 0$, então

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} a(x)F\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda}u_n\right)dx &< \frac{a_\infty}{2\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon\lambda\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda}u_n\right)^2 dx + a_\infty C(\varepsilon,p)\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda}u_n\right)^p dx \\
&= \frac{\varepsilon a_\infty}{2\lambda}L^2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda\hat{u_n}^2 dx + a_\infty C(\varepsilon,p)L^p\int_{\mathbb{R}^N}\hat{u_n}^p dx
\end{aligned}
$$

Usando o fato de $(\hat{u_n})$ ser limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, juntamente com as hipóteses em (ii) e aplicando o Lema de Lions (ver apêndice C, Lema C.2), temos que $\hat{u_n} \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$, ou seja,

$$
\int_{\mathbb{R}^N}\hat{u_n}^p dx \to 0, \quad \text{para} \quad 2 < p < 2^*.
$$

Além disso, observemos que

$$
\begin{aligned}
\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\hat{u_n}^2 dx &= \lambda\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_\lambda}\right)^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_\lambda}\right)\right|^2 dx + \lambda\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_\lambda}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{\|u_n\|_\lambda^2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2 dx + \lambda\int_{\mathbb{R}^N}u_n^2 dx \\
&= \frac{1}{\|u_n\|_\lambda^2}\|u_n\|_\lambda^2 = 1,
\end{aligned}
$$

e assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)F\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda^2}u_n\right)dx < \frac{\varepsilon a_\infty}{2\lambda}L^2 + o_n(1).$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, podemos tomar $\varepsilon = \dfrac{\lambda}{2a_\infty} > 0$ e assim, teremos que

$$\begin{aligned} I\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda}u_n\right) &= \frac{1}{2}L^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda}u_n\right)dx \\ &> \frac{1}{2}L^2 - \left(\frac{1}{4}L^2 + o_n(1)\right) \\ &= \frac{1}{2}L^2 - \frac{1}{4}L^2 - o_n(1) \\ &= \frac{L^2}{4} - o_n(1). \end{aligned}$$

Desde que $\|u_n\|_\lambda \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, então $\dfrac{L}{\|u_n\|_\lambda} \in (0,1)$.

Para cada u_n fixada, definamos $G : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ como

$$G(t) = I(tu_n), \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad t \in [0,1].$$

Temos que G está bem definida, é contínua pela continuidade do funcional I e além disso, está definida em um compacto. Logo, atinge o máximo. Assim,

$$\max_{t\in[0,1]} I(tu_n) \geq I\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda}u_n\right) > \frac{L^2}{4} - o_n(1).$$

Consideremos $t_n \in (0,1)$ de modo que

$$I(t_nu_n) = \max_{t\in[0,1]} I(tu_n).$$

Então,

$$I(t_nu_n) > \frac{L^2}{4} - o_n(1) \tag{4.2}$$

e

$$0 = G'(t_n) = I'(t_nu_n)u_n,$$

assim,

$$\begin{aligned} 0 = I'(t_n u_n)u_n &= \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla t_n u_n \nabla u_n + \lambda t_n u_n u_n]dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(t_n u_n)u_n dx \\ &= t_n \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(t_n u_n)u_n dx. \end{aligned}$$

Multiplicando essa última igualdade por $\frac{1}{2}t_n$, vem que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}t_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2]dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(t_n u_n)t_n u_n dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla (t_n u_n)|^2 + \lambda (t_n u_n)^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(t_n u_n)(t_n u_n)dx\right) \\ &= \frac{1}{2}I'(t_n u_n)(t_n u_n) \end{aligned}$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned} I(t_n u_n) &= I(t_n u_n) - \frac{1}{2}I'(t_n u_n)(t_n u_n) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla (t_n u_n)|^2 + \lambda (t_n u_n)^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(t_n u_n)dx \\ &- \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla (t_n u_n)|^2 + \lambda (t_n u_n)^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(t_n u_n)(t_n u_n)dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(t_n u_n)(t_n u_n)dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(t_n u_n)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} a(x)\left(\frac{1}{2}f(t_n u_n)(t_n u_n) - F(t_n u_n)\right)dx, \end{aligned}$$

e como $t_n \leq 1$, usando a condição $(f3)$, vem que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)\left(\frac{1}{2}f(t_n u_n)(t_n u_n) - F(t_n u_n)\right)dx &\leq D\int_{\mathbb{R}^N} a(x)\left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right)dx \\ &= D\left(I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n\right) \\ &= Dd + o_n(1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$I(t_n u_n) \leq Dd + o_n(1). \tag{4.3}$$

Segue de (4.2) e (4.3) que

$$\frac{L^2}{4} - o_n(1) < I(t_n u_n) \leq Dd + o_n(1).$$

Tomando $L > o$ suficientemente grande, obtemos uma contradição.

Suponhamos agora que o caso (i) ocorre. Então, podemos supor que existe $\delta > 0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{u_n}|^2 dx = \delta > 0.$$

Se (y_n) é uma sequência tal que $|y_n| \to \infty$ e $\displaystyle\int_{B_1(y_n)} |\hat{u_n}|^2 dx > \frac{\delta}{2}$, como $\hat{u_n}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ vem que $\hat{u_n}$ é limitada em $H^1(B_1(y_n))$ e pela invariância por translação do $\mathbb{R}^N$, temos que $\hat{u_n}(x+y_n)$ também o é. Portanto, por imersão compacta, passando a uma subsequência, se necessário

$$\hat{u_n}(x+y_n) \rightharpoonup \bar{u}(x) \text{ em } H^1(B_1(y_n))$$

e

$$\hat{u_n}(x+y_n) \to \bar{u}(x) \text{ em } L^2(B_1(y_n)).$$

Além disso, pelo Teorema de Vainberg (ver apêndice C, Teorema C.8), temos que

$$\hat{u_n}(x+y_n) \to \bar{u}(x) \text{ q.t.p em } (B_1(y_n))$$

Logo,

$$\int_{B_1(0)} |\hat{u_n}(x+y_n)|^2 dx > \frac{\delta}{2},$$

e assim,

$$\int_{B_1(0)} |\bar{u}(x)|^2 dx \geq \frac{\delta}{2},$$

ou seja, $\bar{u} \neq 0$. Isto nos diz que existe um subconjunto $\Omega \subset B_1(0)$, com $|\Omega| > 0$, tal que

$$0 < |\bar{u}(x)| = \lim_{n\to\infty} |\hat{u_n}(x+y_n)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_n(x+y_n)|}{\|u_n\|_\lambda}, \ \forall x \in \Omega.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} |u_n(x+y_n)| = |\bar{u}(x)| \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_\lambda = +\infty, \ \forall x \in \Omega,$$

pois estamos supondo que $\|u_n\|_\lambda \to \infty$.

Assim, pela condição $(A1)$, e Lema de Fatou (ver apêndice C), tomando $\sigma := \inf_{x\in\mathbb{R}^N} a(x)$, vem que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[a(x)\frac{1}{2} f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n)) \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&\geq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sigma\frac{1}{2} f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n)) \right] dx \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} \left[\sigma\frac{1}{2} f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n)) \right] dx \\
&\geq \int_{\Omega} \liminf_{n\to\infty} \left[\sigma\frac{1}{2} f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n)) \right] dx.
\end{aligned}$$

Pela condição $(f3)$, temos que

$$\int_{\Omega} \liminf_{n\to\infty} \left[\sigma\frac{1}{2} f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n)) \right] dx = +\infty,$$

implicando que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[a(x)\frac{1}{2} f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n)) \right] dx \geq +\infty. \tag{4.4}$$

Por outro lado, como (u_n) é uma sequência de Cerami, temos que

$$|I'(u_n)u_n| \leq \|I'(u_n)\| \|u_n\|_\lambda \leq \|I'(u)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \to 0$$

e assim,

$$I'(u_n)u_n = o_n(1).$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}N} [a(x)\frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n)]dx = I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n)u_n \leq d - o_n(1). \tag{4.5}$$

Segue de (4.4) e (4.5) que

$$+\infty \leq I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n)u_n = d - o_n(1)$$

que é uma contradição.

Se (y_n) for limitada, $|y_n| < R$, com $R > 1$, então

$$\frac{\delta}{2} \leq \int_{B_1(0)} |\hat{u_n}(x + y_n)|^2 dx \leq \int_{B_{2R}(0)} |\hat{u_n}(x + y_n)|^2 dx.$$

Desde que $\hat{u_n}(x + y_n)$ é limitada, por imersão compacta, temos que

$$\hat{u_n}(x + y_n) \rightharpoonup \bar{u}(x) \text{ em } H^1(B_1(0))$$

e

$$\hat{u_n}(x + y_n) \to \bar{u}(x) \text{ em } L^2(B_1(0)).$$

Portanto,

$$\int_{B_1(0)} |\hat{u_n}(x + y_n)|^2 dx \to \int_{B_1(0)} |\bar{u}(x)|^2 dx \geq \frac{\delta}{2}.$$

ou seja, $\bar{u} \neq 0$. Assim, existe $\Omega \subset B_1(0)$, com $|\Omega| > 0$ tal que

$$0 \neq |\bar{u}(x)| = \lim_{n\to\infty} |\hat{u_n}(x + y_n)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_n(x + y_n)}{\|u_n\|_\lambda}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} |u_n(x + y_n)| = |\bar{u}(x)| \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_\lambda = +\infty, \quad \forall x \in \Omega.$$

Argumentando de modo análogo ao que foi feito para o caso de $|y_n| \to \infty$, obtemos que

$$+\infty \leq I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n)u_n = d - o_n(1)$$

o que é uma contradição. Portanto, nem o caso (i), nem o caso (ii) podem ocorrer e isso conclui a demonstração. ■

Mostraremos agora a existência de uma sequência de Cerami para o funcional I no nível c. Para tanto, usaremos o Teorema de Ghoussoub-Preiss (ver apêndice C, Teorema C.14) para garantir a existência de tal sequência.

Lema 4.5. *Seja c o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha (ver defição de c na demostração do Lema 4.1). Então existe uma sequência $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $I(u_n) \to c$ e $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \to 0$.*

Demonstração: Vamos utilizar o Teorema de Groussoub-Preiss com $X = H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\phi = I$. Inicialmente mostraremos que o funcional I satisfaz a segunda geometria do Passo da Montanha. Com efeito, tomemos $w = u\left(\frac{x}{t}\right) \in H^1(\mathbb{R}^N)$, então

$$
\begin{aligned}
I(w) = I\left(u\left(\frac{x}{t}\right)\right) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\left|\nabla u\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 + \lambda u^2\left(\frac{x}{t}\right)\right]dx - \int_{\mathbb{R}^N} a\left(\frac{x}{t}\right)F\left(u\left(\frac{x}{t}\right)\right)dx \\
&= \frac{t^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dz - t^N\int_{\mathbb{R}^N} a(w)F(u)dz.
\end{aligned}
$$

Pela condição $(A1)$, existe $C > 0$ tal que $a(x) \geq C > 0$, logo

$$
I(z) \leq \frac{t^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dz - Ct^N\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dz.
$$

Fazendo $t \to +\infty$ na desigualdade anterior, vem que $I(w) \leq -\infty$. Isto significa que $I(w) < 0$ para algum t suficientemente grande.

Considere $z_0 = 0$ e $z_1 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $I(z_1) < 0$. A existência de tal z_1 é garantida pela geometria do Passo da Montanha do funcional I. Consideremos ainda a variedade de Pohozaev $P = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; J(u) = 0\}$.

Afirmação: P separa z_0 e z_1.

Com efeito, observemos que $z_0 = 0 \notin P$, pela definição de P. Além disso, já vimos na demonstração do Lema 4.3 que $J(z_1) < NI(z_1) < 0$. Segue-se do Lema 2.1 que existe $\rho > 0$ tal que se $0 < \|u\|_\lambda < \rho$, então $J(u) > 0$. Notemos ainda que

$$
H^1(\mathbb{R}^N) \setminus P = \{0\} \cup \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); J(u) > 0\} \cup \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); J(u) < 0\},
$$

pois se $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus P$, então $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $u \notin P$. Daí segue que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $J(u) \neq 0$, ou seja, $J(u) > 0$ ou $J(u) < 0$ e, portanto, $u \in \{0\} \cup \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); J(u) > 0\} \cup \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); J(u) < 0\}$ mostrando a primeira inclusão. Por outro lado, considere $u \in \{0\} \cup \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); J(u) > 0\} \cup \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); J(u) < 0\}$, então ou $u \in \{0\}$ ou $u \in \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); J(u) > 0\}$ ou $u \in \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); J(u) < 0\}$. Se $u \in \{0\}$, então é claro que $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus P$. Se $u \in \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); J(u) > 0\}$, então $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $J(u) > 0$, ou seja, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $u \notin P$. O ultimo caso é análogo ao anterior. Isso mostra a outra inclusão. Portanto, a igualdade entre os conjuntos é verdadeira. Assim, existe uma bola aberta $B_\alpha(0)$, contendo z_0, e existe uma componente conexa C_1 de $\{0\} \cup \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); J(u) > 0\}$ tal que $B_\alpha(0) \subset C_1$. Por outro lado, z_1 pertence a uma componente conexa de $\{u \in H^1(\mathbb{R}^N); J(u) < 0\}$.

Segue do Teorema de Groussoub-Preiss que existe uma sequência $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\delta(x_n, P) \to 0;$$

$$\phi(x_n) \to c;$$

$$\|\phi'(x_n)\|(1 + \|x_n\|_\lambda) \to 0.$$

Donde segue o resultado. ∎

Lema 4.6. *O funcional I satisfaz a condição de Cerami $(Ce)_d$, para qualquer $d \in (c_\infty, 2c_\infty)$.*

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $I(u_n) \to d$ e $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \to 0$. Pelo Lema 4.4, a menos de subsequência (u_n) é limitada. Do Lema de Splitting (ver apêndice C, Lema C.5), passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$u_n - \sum_{i=0}^{k} u^j(x - y_n^j) \to \bar{u}, \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N), \tag{4.6}$$

onde u^j é solução não trivial do problema no infinito, $|y_n^j| \to \infty$ e $\bar{u}$ é uma solução do problema (1.1). Além disso,

$$I(u_n) = I(\bar{u}) + \sum_{j=0}^{k} I_\infty(u^j) + o_n(1). \tag{4.7}$$

De (4.7) e da unicidade do limite, temos que $d = I(\bar{u}) + kc_\infty$ e, desde que $d < 2c_\infty$, resulta que $k < 2$. Se for $k = 1$, temos dois casos a analisar:

1) $\bar{u} \neq 0$, que implica em $I(\bar{u}) \geq c_\infty$, pois $\bar{u} \in P$ e $\inf\limits_{u \in P} I(u) = c_\infty$. Portanto, usando (4.7) segue-se que $I(u_n) \geq 2c_\infty$.

2) $\bar{u} = 0$, que implica que $I(u_n) \to I_\infty(u^1)$.

Em ambos os casos temos uma contradição com o fato de $d \in (c_\infty, 2c_\infty)$. Portanto, $k = 0$ e $u_n \to \bar{u}$. ∎

Lema 4.7. *Se $I(u_n) \to d > 0$ e $(u_n) \subset P$, então a sequência (u_n) é limitada.*

Demonstração: Se $I(u_n) \to d > 0$, então $(I(u_n))$ é limitada em $\mathbb{R}$. Desde que $(u_n) \subset P$ então $J(u_n) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, logo

$$d + 1 \geq I(u_n) \geq \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx,$$

pois

$$NI(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u_n) dx$$

e isso nos dá

$$NI(u_n) \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \Rightarrow I(u_n) \geq \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx.$$

Assim, $\|\nabla u_n\|_2$ é limitada. Pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, existe $C = C(N, 2^*)$ tal que

$$\|u_n\|_{2^*} \leq \|\nabla u_n\|_2.$$

Mostrando que $\|u_n\|_{2^*}$ é limitada.

Usando a condição (1.9) e tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\|a\|_\infty \varepsilon < \lambda$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(u_n) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \left(\frac{\varepsilon}{2} |u_n|^2 + C|u_n|^{2^*} \right) dx \leq \frac{\|a\|_\infty \varepsilon}{2} \|u_n\|_2^2 + \|a\|_\infty C \|u_n\|_{2^*}^{2^*},$$

assim,

$$\begin{aligned} d + 1 \geq I(u_n) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(u_n) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u_n\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|u_n\|_2^2 - \frac{\|a\|_\infty \varepsilon}{2} \|u_n\|_2^2 - C\|a\|_\infty \|u_n\|_{2^*}^{2^*} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u_n\|_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\|a\|_\infty \varepsilon}{2} \right) \|u_n\|_2^2 - C\|a\|_\infty \|u_n\|_{2^*}^{2^*}, \end{aligned}$$

logo, $\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\|a\|_\infty \varepsilon}{2} \right) > 0$. Como $\|u_n\|_{2^*}$ é limitada, se supormos que $\|u_n\|_2 \to \infty$, teriamos que $d + 1 \geq \infty$, o que é uma contradição. Assim, necessáriamente devemos ter

(u_n) limitada. ■

Introduziremos agora o baricentro de uma função $u \neq 0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ do seguinte modo: seja

$$\mu(u)(x) = \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x)} |u(y)| dy,$$

com $\mu(u) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Temos que $\mu(u)$ está bem definida, pois como $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ então $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e como $L^2(\mathbb{R}^N) \subset L^2_{loc}(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, vem que $u \in L^1(K)$ para todo $K \subset\subset \mathbb{R}^N$. Logo,

$$\frac{1}{|B_1|} \int_K |u(y)| dy < \infty.$$

Em particular, temos que

$$\frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x)} |u(y)| dy < \infty.$$

Daí, temos também que $\mu(u) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Afirmamos ainda que $\mu(u)$ é uma função contínua. Com efeito, considere uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$x_n \to x \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e tome $r > 0$ suficientemente grande de modo que $B_1(x_n) \subset B_r(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Devemos mostrar que

$$\mu(u)(x_n) \to \mu(u)(x).$$

Para tanto, escrevamos

$$\mu(u)(x_n) = \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x_n)} |u(y)| dy = \frac{1}{|B_1|} \int_{B_r(x)} \chi_{B_1(x_n)} |u(y)| dy,$$

onde

$$\chi_{B_1(x)} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in B_1(x) \\ 0 & \text{se} \quad x \in B_r(x) \setminus B_1(x). \end{cases}$$

Agora, note que

$$\chi_{B_1(x_n)} |u(y)| \to \chi_{B_1(x)} |u(y)| \quad q.t.p \quad \text{em} \quad B_r(x)$$

e

$$\chi_{B_1(x_n)}|u(y)| \leq |u(y)|,$$

onde $|u(y)| \in L^1(B_r(x))$, pois $H^1(B_r(x))$ está imerso continuamente em $L^1(B_r(x))$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, vem que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mu(u)(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x_n)} |u(y)|dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|B_1|} \int_{B_r(x)} \chi_{B_1(x_n)}|u(y)|dy \\
&= \frac{1}{|B_1|} \int_{B_r(x)} \chi_{B_1(x)}|u(y)|dy \\
&= \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x)} |u(y)|dy \\
&= \mu(u)(x).
\end{aligned}$$

Portanto, $\mu(u)$ é contínua.

Em seguida, façamos

$$\widehat{u}(x) = \left[\mu(u)(x) - \frac{1}{2}\max \mu(u)\right]^+.$$

Temos que $\widehat{u}$ é contínua por contrução, pois é a parte positiva da diferença de funções contínuas. Além disso, como

$$\widehat{u}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se} \quad h(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad h(x) < 0, \end{cases}$$

onde

$$h(x) = \mu(u)(x) - \frac{1}{2}\max \mu(u).$$

Segue-se que

$$\frac{1}{2}\max \mu(u) \leq \mu(u)(x) \leq \max \mu(u),$$

logo

$$0 \leq h(x) \leq \frac{1}{2}\max \mu(u)$$

Portanto,

$$supp(\widehat{u}) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N ; 0 \leq h(x) \leq \frac{1}{2}\max \mu(u)\}}.$$

Dessa forma, temos que $\widehat{u} \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Definimos o baricentro de u por

$$\beta(u) = \frac{1}{|\widehat{u}|_{L^1}} \int_{\mathbb{R}^N} x\widehat{u}(x)dx \in \mathbb{R}^N.$$

Desde que $\widehat{u}$ tem suporte compacto, $\beta(u)$ está bem definida.

A função β satisfaz as seguintes condições:

(a) β é contínua em $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$.

(b) Se u é radial, então $\beta(u) = 0$.

(c) Dado $y \in \mathbb{R}^N$ e definindo $u_y = u(x-y)$, então $\beta(u_y) = \beta(u) + y$.

Demonstração: (a) Seja $\widehat{u_n}(x) \to \widehat{u}(x)$ em $C_0(\mathbb{R}^N)$, então

$$x_j\widehat{u_n}(x) \to x_j\widehat{u}(x) \;\; q.t.p \;\text{ em }\;\; K, \quad \forall j = 1, ..., N$$

e

$$|x_j\widehat{u_n}(x)| \leq C \;\; q.t.p \;\text{ em }\;\; K,$$

pois $\widehat{u_n}$ é contínua e tem suporte compacto. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_K x_j\widehat{u_n}(x)dx \to \int_K x_j\widehat{u}(x)dx, \quad \forall j = 1, ..., N. \tag{4.8}$$

Como uma sequência em $\mathbb{R}^N$ converge se, e somente se, a sequência de suas coordenadas convergirem, então

$$\left(\int_K x_1\widehat{u_n}(x)dx, ..., \int_K x_N\widehat{u_n}(x)dx\right) \to \left(\int_K x_1\widehat{u}(x)dx, ..., \int_K x_N\widehat{u}(x)dx\right)$$

ou seja,

$$\int_K x\widehat{u_n}(x)dx \to \int_K x\widehat{u}(x)dx \tag{4.9}$$

Além disso, pela continuidade da norma, temos que

$$\frac{1}{|\widehat{u_n}|_{L^1}} \to \frac{1}{|\widehat{u}|_{L^1}}. \tag{4.10}$$

Segue de (4.9) e (4.10) que

$$\beta(u_n) = \frac{1}{|\widehat{u_n}|_{L^1}} \int_K x\widehat{u_n}(x)dx \to \frac{1}{|\widehat{u}|_{L^1}} \int_K x\widehat{u}(x)dx = \beta(u).$$

Pontanto, β é contínua em $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$.

(b) Desde que u é uma função radial, temos que $\mu(u)$ e $\dfrac{1}{2}max\mu$ são radiais, logo, por construção, temos que $\widehat{u}$ é radial. Assim, mostraremos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} x\widehat{u}(x)dx = 0$, onde $\widehat{u}(x) = \widehat{u}(|x|)$. Para facilitar nosso trabalho, vamos definir um sistema de coordenadas esféricas de um espaço n_dimensional analogamente ao sistema de coordenadas esféricas definido no espaço euclidiano 3_dimensional, em que as coordenadas consiste de uma coordenada radial r, e $N-1$ coordenadas angulares $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{N-1}$, com φ_{N-1} variando em $[0, 2\pi)$ e $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{N-2}$ variando $[0, \pi]$. Dessa forma, se $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$, em coordenadas esféricas teremos:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1 \\ x_2 = r\text{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ x_3 = r\text{sen}\varphi_1\text{sen}\varphi_2\cos\varphi_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} = r\text{sen}\varphi_1\text{sen}\varphi_2\cdots\text{sen}\varphi_{N-2}\cos\varphi_{N-1} \\ x_N = r\text{sen}\varphi_1\text{sen}\varphi_2\cdots\text{sen}\varphi_{N-2}\text{sen}\varphi_{N-1} \end{cases}$$

O jacobiano de tal mudança de coordenadas é dado por

$$J = \left| det\frac{\partial(x_i)}{\partial(r, \varphi_i)} \right| = r^{N-1}\text{sen}^{N-2}\varphi_1\text{sen}^{N-3}\varphi_2\text{sen}^{N-4}\varphi_3\cdots\text{sen}\varphi_{N-2}.$$

Como $x \in \mathbb{R}^N$, a integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} x\widehat{u}(x)dx$ é uma expressão vetorial, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} x\widehat{u}(x)dx = \left(\int_{\mathbb{R}^N} x_1\widehat{u}(x)dx, \int_{\mathbb{R}^N} x_2\widehat{u}(x)dx, ..., \int_{\mathbb{R}^N} x_N\widehat{u}(x)dx \right).$$

Para concluir a demonstração, é suficiente mostrar que cada uma das entradas desse vetor é nula. Desde que $\widehat{u}(x)$ é radial, ao fazermos a mudança de coordenadas, teremos que

$$\widehat{u}(x) = \widehat{u}(r, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N) = \widehat{u}(r),$$

ou seja, $\widehat{u}$ depende somente da coordenada radial r. Inicialmente consideremos

$$\int_{\mathbb{R}^N} x_1 \widehat{u}(x)dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r \cos\varphi_1 \widehat{u}(r) J dr d\varphi_1 \cdots d\varphi_{N-1}. \tag{4.11}$$

Como estamos supondo $N \geq 3$, para a integral na variável $\varphi - 1$, teremos

$$\int_0^{\pi} \cos\varphi_1 \mathrm{sen}^{N-2}\varphi_1 d\varphi_1 = \left.\frac{\mathrm{sen}^{N-1}\varphi_1}{N-1}\right|_0^{\pi} = 0,$$

assim, toda a expressão em (4.11) se anulará. Para a integral

$$\int_{\mathbb{R}^N} x_2 \widehat{u}(x)dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r \mathrm{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 \widehat{u}(r) J dr d\varphi_1 \cdots d\varphi_{N-1} \tag{4.12}$$

considerando a variável φ_2, obtemos

$$\int_0^{\pi} \cos\varphi_2 \mathrm{sen}^{N-3}\varphi_2 d\varphi_2 = \left.\frac{\mathrm{sen}^{N-2}\varphi_2}{N-2}\right|_0^{\pi} = 0,$$

assim, toda a expressão em (4.12) se anulará. De um modo geral, para $1 \leq j < N-1$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} x_j \widehat{u}(x)dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r \mathrm{sen}\varphi_1 \mathrm{sen}\varphi_2 \cdots \mathrm{sen}\varphi_{j-1} \cos\varphi_j \widehat{u}(r) J dr d\varphi_1 \cdots d\varphi_{N-1}, \tag{4.13}$$

considerando a variável φ_j, obtemos

$$\int_0^{\pi} \cos\varphi_j \mathrm{sen}^{N-(j+1)}\varphi_j d\varphi_j = \left.\frac{\mathrm{sen}^{N-j}\varphi_j}{N-j}\right|_0^{\pi} = 0,$$

assim, toda a expressão em (4.13) se anulará. Finalmente, para

$$\int_0^{\pi} x_N\widehat{u}(x)dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r\text{sen}\varphi_1\text{sen}\varphi_2\cdots\text{sen}\varphi_{N-2}\text{sen}\varphi_{N-1}\widehat{u}(r)Jdrd\varphi_1\cdots d\varphi_{N-1}, \tag{4.14}$$

considerando a variável φ_{N-1}, obtemos

$$\int_0^{2\pi}\text{sen}\varphi_{N-1}d\varphi_{N-1} = -\cos\varphi_{N-1}\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

logo toda a expressão em (4.14) se anulará. Assim, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} x\widehat{u}(x)dx = \left(\int_{\mathbb{R}^N} x_1\widehat{u}(x)dx, \int_{\mathbb{R}^N} x_2\widehat{u}(x)dx, ..., \int_{\mathbb{R}^N} x_N\widehat{u}(x)dx\right) = 0.$$

Portanto, $\beta(u) = 0$, se u é uma função radial.

(c) Afirmamos que

$$\mu(u(\cdot))(x-y) = \mu(u(\cdot - y))(x).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\mu(u(\cdot - y))(x) &= \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1(x)}|u(z-y)|dz \\
&= \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1(x-y)}|u(t)|dt \\
&= \mu(u(\cdot))(x-y).
\end{aligned}$$

Assim, a função $u(x-y)$ gera a função $\widehat{u}(x-y)$. Então,

$$\begin{aligned}
\beta(u_y) &= \beta(u(x-y)) \\
&= \frac{1}{|\widehat{u}(x-y)|_{L^1}}\int_{\mathbb{R}^N} x\widehat{u}(x-y)dx \\
&= \frac{1}{|\widehat{u}|_{L^1}}\int_{\mathbb{R}^N}(x+y)\widehat{u}(x)dx \\
&= \frac{1}{|\widehat{u}|_{L^1}}\int_{\mathbb{R}^N} x\widehat{u}(x)dx + \frac{1}{|\widehat{u}|_{L^1}}\int_{\mathbb{R}^N} y\widehat{u}(x)dx.
\end{aligned}$$

Desde que $\widehat{u}(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ temos que, $\widehat{u}(x) = |\widehat{u}(x)|$. Logo,

$$\frac{1}{|\widehat{u}|_{L^1}}\int_{\mathbb{R}^N} y\widehat{u}(x)dx = \frac{1}{|\widehat{u}|_{L^1}}\int_{\mathbb{R}^N} y|\widehat{u}(x)|dx.$$

Substituindo essa igualdade na expressão anterior vem que

$$\beta(u_y) = \beta(u) + y\frac{|\widehat{u}|_{L^1}}{|\widehat{u}|_{L^1}} = \beta(u) + y.$$

Definimos agora

$$b := \inf\{I(u); u \in P \text{ e } \beta(u) = 0\}.$$

Assim, temos que $b \geq c_\infty$. Além disso, vale o seguinte resultado:

Lema 4.8. *$b > c_\infty$.*

Demonstração: Suponha, por contradição, que $b = c_\infty = c$. Pelo Lema 4.5 existe uma sequência de Cerami $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\delta(u_n, F) \to 0,$$

$$I(u_n) \to c$$

e

$$\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|) \to 0,$$

onde

$$F = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); u \in P, \beta(u) = 0\}.$$

Assim, temos garantida a existência de uma sequência $(\tilde{u_n}) \subset F$ tal que $\delta(u_n, \tilde{u_n}) \to 0$.

Desde que $I(u_n) \to c > 0$ e $(u_n) \subset P$, segue do Lema 4.8 que (u_n) é limitada. Logo existe $M > 0$ tal que $\|u_n\|_\lambda \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $(\tilde{u_n})$ também é limitada. Com efeito, pelas propriedades da métrica geodésica δ (ver apêndice C), temos que

$$\delta(\tilde{u_n}, 0) \leq \delta(\tilde{u_n}, u_n) + \delta(u_n, \tilde{u_n}) \leq 1 + \|u_n\|_\lambda \leq 1 + M,$$

ou seja, $(\tilde{u_n})$ é limitada na métrica δ. Por outro lado, pela definição da métrica δ (ver apêndice C, Definição C.1), temos que

$$\delta(\tilde{u_n}, 0) = \int_0^1 \frac{\|\tilde{u_n}\|_\lambda}{1 + t\|\tilde{u_n}\|_\lambda} dt,$$

e fazendo a mudança de variável $u = 1 + t\|\tilde{u_n}\|_\lambda$, obtemos

$$\int_0^1 \frac{\|\tilde{u_n}\|_\lambda}{1+t\|\tilde{u_n}\|_\lambda}dt = \int_1^{1+\|\tilde{u_n}\|_\lambda} \frac{1}{u}du = \ln u\Big|_1^{1+\|\tilde{u_n}\|_\lambda} = \ln(1+\|\tilde{u_n}\|_\lambda) - \ln 1 = \ln(1+\|\tilde{u_n}\|_\lambda).$$

Portanto,

$$\ln(1+\|\tilde{u_n}\|_\lambda) = \delta(0,\tilde{u_n}) = \delta(\tilde{u_n},0) \leq 1+M,$$

o que implica que $(\tilde{u_n})$ é limitada na norma $\|\cdot\|_\lambda$, isto é, $\|\tilde{u_n}\|_\lambda \leq K$. Seja $R = \max(M,K)$, então (u_n) e $(\tilde{u_n})$ pertencem à bola $B_R(0)$ na norma $\|\cdot\|_\lambda$. Assim, por (C.2) (ver apêndice C), existe $\alpha > 0$ tal que $\delta(u_n,\tilde{u_n}) \geq \alpha\|u_n - \tilde{u_n}\|_\lambda$ o que implica que $\|u_n - \tilde{u_n}\|_\lambda \to 0$, ou seja,

$$u_n(x) = \tilde{u_n}(x) + o_n(1) \tag{4.15}$$

com $\tilde{u_n} \in P$ e $\beta(\tilde{u_n}) = 0$.

Por outro lado, como (u_n) é uma sequência de Cerami no nível $c = c_\infty$ e limitada, segue-se do Corolário C.1 (ver apêndice C) que

$$u_n(x) \to u^1(x - y_n) \tag{4.16}$$

onde u^1 é uma solução do problema (3.1) e $|y_n| \to \infty$.

Temos de (4.15) que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se

$$n \geq n_1 \Rightarrow \|u_n - \tilde{u_n}\|_\lambda < \frac{\varepsilon}{2}.$$

E de (4.16), vem que, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que se

$$n \geq n_2 \Rightarrow \|u_n(x) - u^1(x-y_n)\|_\lambda < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $n_0 > \max\{n_1, n_2\}$, temos que

$$\|\tilde{u_n}(x) - u^1(x-y_n)\|_\lambda \leq \|\tilde{u_n}(x) - u_n(x)\|_\lambda + \|u_n(x) - u^1(x-y_n)\|_\lambda < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Assim,

$$\tilde{u_n}(x) \to u^1(x - y_n).$$

Fazendo uma translação, obtemos que

$$\tilde{u_n}(x + y_n) = u^1(x) + o_n(1).$$

Calculando o baricentro em ambos os lados, obtemos

$$\beta(\tilde{u_n}(x + y_n)) = \beta(\tilde{u_n}) - y_n = -y_n,$$

pois como $(\tilde{u_n}) \in F$, temos que $\beta(\tilde{u_n}) = 0$. Além disso, o membro direito da igualdade nos dá

$$\beta(u^1(x) + o_n(1)) \to \beta(u^1(x))$$

pela continuidade de β, e $\beta(u^1(x))$ é um valor fixo. Como $|y_n| \to \infty$, temos um absurdo. Portanto, $b > c_\infty$. ■

Consideremos agora $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ a solução ground state, radial simétrica, positiva do problema no infinito (3.1) (resaltamos que tal resultado de existência pode ser encontrado em [8]), e definamos o operador $\Pi : \mathbb{R}^N \to P$, por

$$\Pi[y](x) = w\left(\frac{x - y}{\theta_y}\right),$$

onde θ_y é exatamente o θ que projeta $w(\cdot - y)$ na variedade de pohozaev P. Da unicidade de θ_y e do Lema 3.5, temos que o operador Π está bem definido. Além disso, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que Π é contínuo.

Verificaremos agora algumas propriedades do operador Π:

Lema 4.9. $\beta(\Pi[y](x)) = y$.

Demonstração: Consideremos $v(x) = w\left(\dfrac{x-y}{\theta_y}\right)$. Então

$$\begin{aligned}
\mu(v(\cdot))(x) &= \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1(x)} |v(z)|dz \\
&= \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1(x)} \left|w\left(\frac{x-y}{\theta_y}\right)\right| dz \\
&= \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1(x-y)} \left|w\left(\frac{\xi}{\theta_y}\right)\right| d\xi \\
&= \mu\left(w\left(\frac{\cdot}{\theta_y}\right)\right)(x-y).
\end{aligned}$$

Assim, resulta que $\widehat{v}(x) = \widehat{w}\left(\dfrac{\cdot}{\theta_y}\right)(x-y)$. Aplicando em β, vem que

$$\begin{aligned}
\beta(v) &= \frac{1}{\|\widehat{v}\|_1}\int_{\mathbb{R}^N} x\widehat{v}(x)dx \\
&= \frac{1}{\|\widehat{v}\|_1}\int_{\mathbb{R}^N} x\widehat{w}\left(\frac{\cdot}{\theta_y}\right)(x-y)dx \\
&= \frac{1}{\|\widehat{v}\|_1}\int_{\mathbb{R}^N} (z+y)\widehat{w}\left(\frac{\cdot}{\theta_y}\right)(z)dz \\
&= \frac{1}{\|\widehat{v}\|_1}\int_{\mathbb{R}^N} z\widehat{w}\left(\frac{\cdot}{\theta_y}\right)(z)dz + \frac{1}{\|\widehat{v}\|_1}\int_{\mathbb{R}^N} y\widehat{w}\left(\frac{\cdot}{\theta_y}\right)(z)dz \\
&= \beta\left(w\left(\frac{\cdot}{\theta_y}\right)\right) + \frac{y}{\|\widehat{v}\|_1}\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{v}(y+z)dz \\
&= \beta\left(w\left(\frac{\cdot}{\theta_y}\right)\right) + \frac{y}{\|\widehat{v}\|_1}\|\widehat{v}\|_1 \\
&= 0 + y = y,
\end{aligned}$$

pois sendo w radial e simétrica, segue que $\beta(w) = 0$. ∎

Lema 4.10. *$I(\Pi[y]) \to c_\infty$, se $|y| \to \infty$.*

Demonstração: Vimos na demonstração do Lema 3.8 que, se $\Pi[y] \in P$ o funcional I pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
I(\Pi[y]) &= \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Pi[y]|^2 dx + \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xF(\Pi[y])dx \\
&= \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla w\left(\frac{x-y}{\theta_y}\right)\right|^2 dx + \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xF\left(w\left(\frac{x-y}{\theta_y}\right)\right)dx.
\end{aligned}$$

Além disso, como $w \in P_\infty$, temos que $J_\infty(w) = 0$, logo

$$\frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda}{2} w^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(w)dx \tag{4.17}$$

e assim, usando (4.7), vem que

$$\begin{aligned}
I_\infty(w) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^2 + \lambda w^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(w)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^2 + \lambda w^2]dx - \left(\frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda}{2} w^2 dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^2 + \lambda w^2]dx - \left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^2 + \lambda w^2]dx - \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx\right) \\
&= \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
I(\Pi[y]) &= \frac{\theta_y^{N-2}}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dz + \frac{\theta_y^N}{N}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta_y x + y)\cdot(\theta_y x + y)F(w(z))dz \\
&= \theta_y^{N-2} I_\infty(w) + \theta_y^N \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta_y x + y)\cdot(\theta_y x + y)F(w(z))dz
\end{aligned}$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, (1.2) e o fato que $\theta_y \to 1$ se $|y| \to \infty$, obtemos

$$\lim_{|y|\to\infty} \theta_y^N \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta_y x + y)\cdot(\theta_y x + y)F(w(z))dz = 0.$$

Logo, $I(\Pi[y]) \to c_\infty$, se $|y| \to \infty$. ∎

Lema 4.11. *Seja C uma constante positiva tal que $|F(s)| \leq Cs^2$. Assuma*

(A6) $\sup\limits_{\mathbb{R}^N} |a_\infty - a(x)| < \dfrac{c_\infty}{\bar{\theta}^N \|w\|_2^2 C}$,

onde $\bar{\theta} = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^N} \theta_y$. *Então,* $I(\Pi[y]) < 2c_\infty$.

Demonstração: Pela invariância por translação do $\mathbb{R}^N$, temos que

$$I_\infty(\Pi[y]) = I_\infty\left(w\left(\frac{x-y}{\theta_y}\right)\right) = I_\infty(w(x/\theta_y)).$$

Além disso, como w é solução de energia mínima, $I_\infty(w(x)) = c_\infty$ e o máximo da função

$t \mapsto I_\infty(w(\cdot/t))$ é atingido em $t = 1$. Como $\theta_y > 1$, temos que

$$I_\infty(\Pi[y]) < c_\infty. \tag{4.18}$$

Observemos ainda que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(\Pi[y](x))dx = \int_{\mathbb{R}^N} F\left(w\left(\frac{x-y}{\theta_y}\right)\right)dx = \theta_y^N \int_{\mathbb{R}^N} F(w)dz \leq \theta_y^N \int_{\mathbb{R}^N} Cw^2(z)dz. \tag{4.19}$$

Segue de (4.18), (4.19) e $(A6)$ que

$$\begin{aligned}
I(\Pi[y]) &= I_\infty(\Pi[y]) + I(\Pi[y]) - I_\infty(\Pi[y]) \\
&< c_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} (a_\infty - a(x))F(\Pi[y](x))dx \\
&< c_\infty + \frac{c_\infty}{\bar{\theta}^N \|w\|_2^2 C} \theta_y^N \int_{\mathbb{R}^N} Cw^2(z)dz \\
&= c_\infty + \frac{c_\infty}{\bar{\theta}^N \|w\|_2^2 C} \theta_y^N C\|w\|_2^2 \\
&= c_\infty + c_\infty \\
&= 2c_\infty.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $I(\Pi[y]) < 2c_\infty$. ■

O Lema 4.1 juntamente com o Lema 4.2 nos dizem que o nível minimax c do Teorema do Passo da Montanha coincide com p, e ambos coincidem com c_∞. Do Teorema 3.1, temos que tal nível não é atingido, faremos uso do Teorema de Linking (ver apêndice C, Teorema C.1) para obter solução para o problema (1.1). Para construir a estrutura de linking (ver apêndice C, Definição C.4) utilizaremos novamente a variedade de Pohozaev P, juntamente com a restrição, dada pela *função baricentro* (a qual já foi apresentada anteriormente), similarmente à construção feita em [2], onde foi utilizada a variedade de Nehari.

Diante do que foi exposto até aqui, estamos prontos para demonstrarmos o principal resultado desse trabalho.

Teorema 4.1. *Suponha que sejam válidas as condições* $(A1 - A6)$ *e* $(f1 - f3)$. *Então a equação* (*1.1*) *possui uma solução positiva.*

Demonstração: Já mostramos anteriormente que $I_\infty(u) < I(u)$ para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus$

$\{0\}$. Em particular, $I_\infty(\Pi[y]) < I(\Pi[y])$, para qualquer $y \in \mathbb{R}^N$. Pelo Lema 4.10 temos que $I(\Pi[y]) \to c_\infty$ quando $|y| \to \infty$, e pelo Lema 4.8 temos que $b > c_\infty$, logo existe $\bar{\rho} > 0$ tal que para todo $\rho \geq \bar{\rho}$,

$$c_\infty < \max_{|y|=\rho} I(\Pi[y]) < b. \tag{4.20}$$

Com o objetivo de fazer uso do Teorema de Linking, consideremos

$$Q := \Pi(\bar{B}_{\bar{\rho}}(0))$$

e

$$S := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); u \in P, \beta(u) = 0\}.$$

Mostraremos que S e ∂Q "link"(ver apêndice C, Definição C.4). Inicialmente note que $\partial Q \cap S = \emptyset$, pois se $u \in S$, então $\beta(u) = 0$, pela definição de S, e se $u \in \partial Q$, segue do Lema 4.9 que $\beta(u) = y \neq 0$, pois $|y| = \bar{\rho} > 0$. Além disso, temos que $h(Q) \cap S \neq \emptyset$ para qualquer $h \in H$, onde

$$H = \{h \in C(Q, P); h|_{\partial Q} = id\}.$$

Para verificarmos isto, definamos $T : \bar{B}_{\bar{\rho}}(0) \to \mathbb{R}^N$, dada por $y \mapsto T(y) = \beta \circ h \circ \Pi[y]$. T é contínua, pois é composição de funções contínuas e, para qualquer $y \in \bar{B}_{\bar{\rho}}(0)$ com $|y| = \bar{\rho}$, temos que $\Pi[y] \in \partial Q$. Assim, do Lema 4.10 e do fato de $h|_{\partial Q} = id$, resulta que

$$h(\Pi[y]) = \Pi[y] \Rightarrow \beta(h(\Pi[y])) = \beta(\Pi[y]) = y \Rightarrow T(y) = y.$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (Lema Fundamental, ver apêndice C), existe $\tilde{y} \in \bar{B}_{\bar{\rho}}(0)$ tal que $T(\tilde{y}) = 0$, ou seja,

$$\beta(h(\Pi[\tilde{y}])) = T(\tilde{y}) = 0,$$

implicando que $h(\Pi[\tilde{y}]) \in S$. Portanto, temos que $h(Q) \cap S \neq \emptyset$. Mostrando que ∂Q e S "link".

Observe ainda que podemos escrever (4.20) como

$$b = \inf_{S} I > \max_{\partial Q} I.$$

Definimos

$$d = \inf_{h \in H} \max_{u \in Q} I(h(u)).$$

Afirmamos que $d \geq b$. Com efeito, já mostramos que $h(Q) \cap S \neq \emptyset$, para toda $h \in H$. Então, fixando h, temos que existe $w \in S$ tal que w também pertence à $h(Q)$, ou seja, $w = h(v)$ para algum $v \in \Pi(\bar{B}_{\bar{\rho}}(0))$. Assim,

$$I(w) \geq \inf_{u \in S} I(u)$$

e

$$\max_{u \in Q} I(h(u)) \geq I(h(v)).$$

Logo,

$$b = \inf_{u \in S} I(u) \leq I(w) = I(h(v)) \leq \max_{u \in Q} I(h(u)),$$

isto é,

$$b \leq \max_{u \in Q} I(h(u)),$$

e assim,

$$b \leq \inf_{h \in H} \max_{u \in Q} I(h(u)) = d.$$

Em particular, temos que $d > c_\infty$, pois do Lema 4.8, temos que $b > c_\infty$. Por outro lado, se $h = id$, então pelo Lema 4.11

$$d = \inf_{h \in H} \max_{u \in Q} I(h(u)) < \max_{u \in Q} I(u) < 2c_\infty.$$

Segue do Lema 5.6 que a condição de Cerami é satisfeita no nível d. Aplicando o Teorema de Linking, concluímos que d é um valor crítico para o funcional I. Isso garante a existência de uma solução não nula $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ da equação (1.1). Segue das condições sobre a função f, e usando o princípio do máximo que u é positiva. Isso conclui a demonstração do resultado. $\blacksquare$

Apêndice A

Verificação das Condições do Problema Modelo

No inicio deste trabalho apresentamos um problema modelo da equação (1.1). Relembraremos agora tal problema modelo e faremos a verificação das condições sobre a função a e f presentes no mesmo.

Considere o seguinte problema

$$-\Delta u + \lambda u = a(x)\frac{u^3}{1+u^2},$$

onde

$$a(x) = a_\infty - \frac{1}{|x|^2 + K}, \quad K > \frac{1}{a_\infty} \quad \text{e} \quad a_\infty > \lambda > 0,$$

e

$$f(u) = \frac{u^3}{1+u^2}.$$

Verificação de $(A1)$: Claramente $a \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$, pois o problema que poderíamos ter é quando $|x|^2$ se aproxima de zero, mas isso pode ser facilmente contornado usando o fato que $K > \dfrac{1}{a_\infty}$. Para concluir a verificação de $(A1)$, falta provar que $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N} a(x) > 0$. Para tanto, devemos mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que $a(x) > C$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Note que

$$a(x) = a_\infty - \frac{1}{|x|^2 + K} > a_\infty - \frac{1}{K} > 0,$$

pois $a_\infty > \dfrac{1}{K}$. Assim, basta tomar $C = a_\infty - \dfrac{1}{K}$. Daí concluímos que $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^N} a(x) > 0$.

Verificação de $(A2)$: Observemos que

$$\lim_{|x| \to \infty} a(x) = \lim_{|x| \to \infty} \left(a_\infty - \frac{1}{|x|^2 + K} \right) = \lim_{|x| \to \infty} a_\infty - \lim_{|x| \to \infty} \left(\frac{1}{|x|^2 + K} \right) = a_\infty.$$

Verificação de $(A3)$: Temos que

$$\nabla a(x) \cdot x = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_\infty - \frac{1}{|x|^2 + K} \right) x_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{2x_i}{(|x|^2 + k)^2} x_i = \frac{2|x|^2}{(|x|^2 + K)^2} \geq 0.$$

Verificação de $(A4)$: Temos que

$$\begin{aligned} a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} &= a_\infty - \frac{1}{|x|^2 + K} + \frac{2|x|^2}{N(|x|^2 + K)^2} \\ &= a_\infty - \frac{N(|x|^2 + K) - 2|x|^2}{N(|x|^2 + K)^2} \\ &= a_\infty - \frac{N|x|^2 - NK + 2|x|^2}{N(|x|^2 + K)^2} \\ &= a_\infty - \frac{(N-2)|x|^2 + NK}{N(|x|^2 + K)^2} < a_\infty, \end{aligned}$$

pois estamos supondo $N \geq 3$.

Verificação de $(A5)$: Primeiramente, note que

$$\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{2\delta_{ij}(|x|^2 + K)^2 - 8x_i x_j (|x|^2 + K)}{(|x|^2 + K)^4} = \frac{2\delta_{ij}}{(|x|^2 + K)^2} - \frac{8x_i x_j}{(|x|^2 + K)^3},$$

assim, podemos escrever a matriz hessiana H da função a como:

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(|x|^2 + K)^2} - \frac{8x_1^2}{(|x|^2 + k)^3} & -\frac{8x_1 x_2}{(|x|^2 + K)^3} & \cdots & -\frac{8x_1 x_N}{(|x|^2 + K)^3} \\ -\frac{8x_1 x_2}{(|x|^2 + K)^3} & \frac{2}{(|x|^2 + K)^2} - \frac{8x_2^2}{(|x|^2 + K)^3} & \cdots & -\frac{8x_2 x_N}{(|x|^2 + K)^3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{8x_1 x_N}{(|x|^2 + K)^3} & -\frac{8x_2 x_N}{(|x|^2 + K)^3} & \cdots & \frac{2}{(|x|^2 + K)^2} - \frac{8x_N^2}{(|x|^2 + K)^3} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
x\cdot H(x)\cdot x &= \frac{2x_1^2}{(|x|^2+K)^2}-\frac{8x_1^4}{(|x|^2+K)^3}-\frac{8x_1^2x_2^2}{(|x|^2+K)^3}-\cdots-\frac{8x_1^2x_N^2}{(|x|^2+K)^3}\\
&- \frac{8x_1^2x_2^2}{(|x|^2+K)^3}+\frac{2x_2^2}{(|x|^2+K)^2}-\frac{8x_2^4}{(|x|^2+K)^3}-\cdots-\frac{8x_2^2x_N^2}{(|x|^2+K)^3}\\
&- \frac{8x_1^2x_N^2}{(|x|^2+K)^3}-\frac{8x_2^2x_N^2}{(|x|^2+K)^3}-\cdots+\frac{2x_N^2}{(|x|^2+K)^2}-\frac{8x_N^4}{(|x|^2+K)^3},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
x\cdot H(x)\cdot x &= \frac{2}{(|x|^2+K)^2}\sum_{i=1}^N x_i^2-\frac{8x_1^2}{(|x|^2+K)^3}\sum_{i=1}^N x_i^2-\cdots-\frac{8x_N^2}{(|x|^2+K)^3}\sum_{i=1}^N x_i^2\\
&= \frac{2|x|^2}{(|x|^2+K)^2}-\frac{8x_1^2|x|^2}{(|x|^2+K)^3}-\cdots-\frac{8x_N^2|x|^2}{(|x|^2+K)^3}\\
&= \frac{2|x|^2}{(|x|^2+K)^2}-\frac{8|x|^2}{(|x|^2+K)^3}\sum_{i=1}^N x_i^2\\
&= \frac{2|x|^2}{(|x|^2+K)^2}-\frac{8|x|^4}{(|x|^2+K)^3}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\nabla a(x)\cdot x+\frac{x\cdot H(x)\cdot x}{N} &= \frac{2|x|^2}{(|x|^2+K)^2}+\frac{2|x|^2}{N(|x|^2+K)^2}-\frac{8|x|^4}{N(|x|^2+K)^3}\\
&= \frac{2N|x|^2(|x|^2+K)+2|x|^2(|x|^2+K)-8|x|^4}{N(|x|^2+K)^3}\\
&= \frac{2N|x|^4+2NK|x|^2+2|x|^4+2K|x|^2-8|x|^4}{N(|x|^2+K)^3}\\
&= \frac{2N|x|^4-6|x|^4+2NK|x|^2+2K|x|^2}{N(|x|^2+K)^3}\\
&= \frac{2(N-3)|x|^4+2(N+1)K|x|^2}{N(|x|^2+K)^3}.
\end{aligned}
$$

Como estamos supondo $N\geq 3$, segue que

$$
\nabla a(x)\cdot x+\frac{x\cdot H(x)\cdot x}{N}=\frac{2(N-3)|x|^4+2(N+1)K|x|^2}{N(|x|^2+K)^3}\geq 0.
$$

Verificaremos agora se f satisfaz as condições $(f1)-(f3)$.

Claramente $f\in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$, pois o denominador nunca se anula. Além disso, temos que

$$
\frac{f(s)}{s}=\left(\frac{s^3}{s+s^3}\right)=\left(\frac{s^2}{1+s^2}\right)
$$

logo,

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{s}=\lim_{s\to 0}\left(\frac{s^2}{1+s^2}\right)=0,$$

mostrando que f satisfaz a condição $(f1)$. Para verificar a condição $(f2)$, note que

$$\frac{f(s)}{s}=\left(\frac{s^3}{s+s^3}\right)=\left(\frac{1}{\frac{1}{s^2}+1}\right),$$

assim,

$$\lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{s^2}+1}\right)=1.$$

Para $(f3)$, temos que

$$F(s)=\int_0^s f(t)dt=\int_0^s \frac{t^3}{1+t^2}dt=\int_0^s \frac{(1+t^2)t-t}{1+t^2}dt=\int_0^s\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt$$

e

$$\int_0^s\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt=\frac{1}{2}(s^2-ln(1+s^2))$$

portanto,

$$F(s)=\frac{1}{2}\left(s^2-ln(1+s^2)\right)$$

e como $Q(s)=\frac{1}{2}f(s)s-F(s)$, vem que

$$Q(s)=\frac{1}{2}\left\{\frac{s^4}{1+s^2}-(s^2-ln(1+s^2))\right\}.$$

Note que $(f3)$ é válida com $D=1$ se, e somente se, $Q(s)$ é crescente. Portanto, basta verificar que $Q'(s) \geq 0$. Mas,

$$\begin{aligned}
Q'(s) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{4s^3(1+s^2)-2s^5}{(1+s^2)^2} - 2s + \frac{1}{1+s^2}2s\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{4s^3+2s^5}{(1+s^2)^2} - \frac{2s+2s^3-2s}{1+s^2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{4s^3+2s^5}{(1+s^2)^2} - \frac{2s^3}{1+s^2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{4s^3+2s^5-2s^3(1+s^2)}{(1+s^2)^2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{4s^3+2s^5-2s^3-2s^5}{(1+s^2)^2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{2s^3}{(1+s^2)^2}\right\} \geq 0, \quad \forall s \geq 0.
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$Q(s) = \left\{\frac{s^4}{1+s^2} - (s^2 - ln(1+s^2))\right\} = \left\{-\frac{1}{1+\dfrac{1}{s^2}} + ln(1+s^2)\right\}$$

e portanto,

$$\lim_{s\to\infty} Q(s) = \lim_{s\to\infty}\left\{-\frac{1}{1+\dfrac{1}{s^2}} + ln(1+s^2)\right\} = +\infty.$$

Com isso concluímos que (f) satisfaz as hipótese $(f1-f3)$.

Apêndice B

Regularidade do Funcional

Vamos mostrar que o funcional $J : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u)dx - N\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xF(u)dx$$

é de classe C^1.

Para tanto, consideremos

$$J(u) = J_1(u) - J_2(u) - J_3(u) - J_4(u)$$

onde,

$$J_1(u) = \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad J_2(u) = N\int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u)dx, \quad J_3(u) = N\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx$$

e

$$J_4(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x)\cdot xF(u)dx.$$

Mostraremos que o funcionais J pertence à $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. Para tanto, vamos provar:

(a) $J_1 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$;

(b) $J_2 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$;

(c) $J_3 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$;

(d) $J_4 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Para verificarmos (a), vamos inicialmente calcular a derivada de Gateux DJ_1.

$$
\begin{aligned}
\frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} &= \frac{\frac{N-2}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u+tv)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)}{t} \\
&= \frac{\frac{N-2}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u+tv)\nabla(u+tv) dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)}{t} \\
&= \frac{\frac{N-2}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u + 2t\nabla u\nabla v + t^2 \nabla v \nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)}{t} \\
&= \frac{\frac{N-2}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + 2t\nabla u\nabla v + t^2 |\nabla v|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)}{t} \\
&= \frac{N-2}{2t}\left(2t\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx + t^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx\right) \\
&= (N-2)\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla v dx + \displaystyle\frac{(N-2)t}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
DJ_1(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\left((N-2)\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla v dx + \frac{(N-2)t}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx\right) \\
&= (N-2)\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx.
\end{aligned}
$$

Mostraremos agora que o operador DJ_1 é contínuo. Para tanto, seja (u_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\| \leq 1$, temos

$$
\begin{aligned}
|(DJ_1(u_n) - DJ_1(u))v| &= |(N-2)\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla v - \nabla u \nabla v dx| \\
&\leq (N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n \nabla v - \nabla u\nabla v| dx \\
&= (N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u||\nabla v| dx.
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}|(DJ_1(u_n) - DJ_1(u))v| &\leq (N-2)\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (N-2)\|u_n - u\|\|v\| \\ &\leq (N-2)\|u_n - u\|.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|DJ_1(u_n) - DJ_1(u)\|_{-1} = \sup_{\|v\|\leq 1} |(DJ_1(u_n) - DJ_1(u))v| \leq \|u_n - u\|.$$

Do resultado anterior, segue que $DJ_1 = J_1' \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e $J_1'(u)v = (N-2)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v.$

Mostraremos agora o item (b). Novamente iniciaremos calculando a derivada de Gateux DJ_2. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e para cada $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, consideremos a função

$$h : [0,1] \to \mathbb{R},$$

dada por

$$h(s) = a(x)F(u + stv).$$

Observemos que

$$h'(s) = a(x)f(u + stv)tv, \;\; h(1) = a(x)F(u + tv) \;\text{ e }\; h(0) = a(x)F(u).$$

Desde que h é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, do Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que

$$h(1) - h(0) = h'(\gamma),$$

ou seja,

$$|a(x)F(u + tv) - a(x)F(u)| = |a(x)f(u + \gamma tv)||t||v|$$

o que implica em

$$\left|\frac{a(x)F(u + tv) - a(x)F(u)}{t}\right| = |a(x)f(u + \gamma tv)||v|.$$

Das condições $(f1)$ e $(f2)$, obtemos uma constante positiva C tal que

$$|f(u)| \leq C, \ \ \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

logo,

$$\begin{aligned}
|a(x)f(u+\gamma tv)||v| &\leq a(x)C_1|u+\gamma tv||v| \\
&\leq a_\infty C_1|u||v| + a_\infty C_1 \gamma t|v|^2 \\
&= C_1|u||v| + C_2|v|^2 \ \in L^1(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

Além disso, para uma sequência $|t_n| \to 0$, temos que

$$a(x)f(u(x)+\gamma t_n v(x))v(x) \to a(x)f(u(x))v(x)$$

pontualmente.

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, vem que

$$\begin{aligned}
DJ_2(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{J_2(u+tv) - J_2(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\frac{N\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u+tv) - N\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u)}{t} \right) \\
&= \lim_{t\to 0} N \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u+\gamma tv)v \\
&= N\int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u)v.
\end{aligned}$$

Portanto, $DJ_2(u)v = N\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u)v.$

Mostraremos que o operador DJ_2 é contínuo. Seja (u_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to u \ \text{ em } \ H^1(\mathbb{R}^N).$$

Das imersões de Sobolev

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^s(\mathbb{R}^N), \ \ 2 \leq s \leq 2^*, \ \ N \geq 3.$$

Do Teorema de Vainberg, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e uma função $g \in L^s(\mathbb{R}^N)$

tal que

$$u_{n_j}(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$|u_{n_j}(x)| \leq g(x) \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Como f é contínua, temos que

$$|f(u_{n_j}(x)) - f(u(x))|^2 \to 0 \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Das condições $(f1)$ e $(f2)$, vem que

$$\begin{aligned} |f(u_{n_j}) - f(u)|^2 &\leq 4(|f(u_{n_j})|^2 + |f(u)|^2) \\ &\leq 4C_1|u_{n_j}|^2 + 4C_2|u|^2 \\ &\leq C_3 g^2(x) + C_4|u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_{n_j}) - f(u)|^2 = \|f(u_{n_j}) - f(u)\|_2^2 \to 0.$$

Portanto, para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} |(DJ_2(u_n) - DJ_2(u))v| &= \left| N\int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u_{n_j})v - N\int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u)v \right| \\ &\leq \left| N\int_{\mathbb{R}^N} a_\infty f(u_{n_j})v - N\int_{\mathbb{R}^N} a_\infty f(u)v \right| \\ &\leq N a_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_{n_j}) - f(u)||v|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Holder, temos que

$$\begin{aligned} |(DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u))v| &\leq N a_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_{n_j}) - f(u)||v| \\ &\leq N a_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_{n_j}) - f(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= N a_\infty \|f(u_{n_j}) - f(u)\|_2 \|v\|_2. \end{aligned}$$

Por imersão contínua de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned}
|(DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u))v| &\leq Na_\infty \|f(u_{n_j}) - f(u)\|_2 \|v\|_2 \\
&\leq NCa_\infty \|f(u_{n_j}) - f(u)\|_2 \|v\| \\
&\leq NCa_\infty \|f(u_{n_j}) - f(u)\|_2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u)\|_{-1} = \sup_{\|v\|\leq 1} |(DJ_2(u_{n_j}) - DJ_2(u))v| \leq NCa_\infty \|f(u_{n_j}) - f(u)\|_2.$$

Portanto,

$$\lim_{j\to\infty} DJ_2(u_{n_j}) = DJ_2(u).$$

Mostraremos o item (c). Novamente observe que

$$\begin{aligned}
\frac{J_3(u+tv) - J_3(u)}{t} &= \frac{\frac{N\lambda}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} (u+tv)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx\right)}{t} \\
&= \frac{N\lambda}{2t}\left(\int_{\mathbb{R}^N} (u+tv)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx\right) \\
&= \frac{N\lambda}{2}\left(2t\int_{\mathbb{R}^N} uvdx + t^2 \int_{\mathbb{R}^N} v^2 dx\right) \\
&= N\lambda \int_{\mathbb{R}^N} uvdx + \frac{N\lambda t}{2} \int_{\mathbb{R}^N} v^2 dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
DJ_3(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{J_3(u+tv) - J_3(u)}{t} & \\
&= \lim_{t\to 0}\left(N\lambda \int_{\mathbb{R}^N} uvdx + \frac{N\lambda t}{2} \int_{\mathbb{R}^N} v^2 dx\right) \\
&= N\lambda \int_{\mathbb{R}^N} uvdx.
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que o operador DJ_3 é contínuo. Para tanto, considere uma sequência (u_n) em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } \; H^1(\mathbb{R}^N).$$

Por imersão de sobolev, temos que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^N), \quad N \geq 3.$$

Do teorema de Vainber, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e uma função $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_{n_j}(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$|u_{n_j}(x)| \leq g(x) \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Logo,

$$|u_{n_j}(x) - u(x)|^2 \to 0 \ \text{ q.t.p } \ \text{em} \ \mathbb{R}^N.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\|u_{n_j} - u\|_2 \to 0.$$

Portanto, para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\| \leq 1$, vem que

$$\begin{aligned}
|(DJ_3(u_{n_j}) - DJ_3(u))v| &= \left| N\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_{n_j} v - \int_{\mathbb{R}^N} uv \right) \right| \\
&\leq N\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_j} - u||v|.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Holder, temos que

$$\begin{aligned}
|(DJ_3(u_{n_j}) - DJ_3(u))v| &\leq N\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_j} - u||u| \\
&\leq N\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_j} - u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= N\lambda \|u_{n_j} - u\|_2 \|v\|_2.
\end{aligned}$$

Por imersão contínua de Sobolev, vem que

$$|(DJ_3(u_{n_j}) - DJ_3(u))v| \leq CN\lambda \|u_{n_j} - u\|_2 \|v\| \leq CN\lambda \|u_{n_j} - u\|_2.$$

Assim,

$$\|DJ_3(u_{n_j}) - DJ_3(u)\| = \sup_{\|v\|\leq 1} |(DJ_3(u_{n_j}) - DJ_3(u))v| \leq CN\lambda\|u_{n_j} - u\|_2.$$

Portanto,

$$\lim_{j\to\infty} DJ_3(u_{n_j}) = DJ_3(u).$$

Resta provar o item (d). Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e para cada $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, consideremos a função

$$h : [0,1] \to \mathbb{R},$$

que associa a cada $s \in [0,1]$ o elemento $h(s) = \nabla a(x) \cdot xF(u + stv)$ em $\mathbb{R}$. Note que

$$h'(s) = \nabla a(x) \cdot xf(u + stv)tv, \quad h(1) = \nabla a(x) \cdot xF(u + tv)$$

e

$$h(0) = \nabla a(x) \cdot xF(u).$$

Desde que h é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, do Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que

$$h(1) - h(0) = h'(\gamma),$$

isto é,

$$|\nabla a(x) \cdot xF(u + tv) - \nabla a(x) \cdot xF(u)| = |\nabla a(x) \cdot xf(u + \gamma tv)||t||v|$$

implicando em

$$\left|\frac{\nabla a(x) \cdot xF(u + tv) - \nabla a(x) \cdot xF(u)}{t}\right| = |\nabla a(x) \cdot xf(u + \gamma tv)||v|.$$

Das condições $(f1)$ e $(f2)$, obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla a(x) \cdot xf(u + \gamma tv)||v| &\leq \nabla a(x) \cdot xC_1|u + \gamma tv||v| \\ &\leq \nabla a(x) \cdot xC_1|u||v| + \nabla a(x) \cdot xC_2|v|^2 \quad \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Além disso, para uma sequência $|t_n| \to 0$ temos que

$$\nabla a(x) \cdot x f(u(x) + \gamma t_n v(x))v(x) \to \nabla \cdot x f(u(x))v(x) \quad \text{pontualmente.}$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}
DJ_4(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{J_4(u+tv) - J_4(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u+tv) - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u)}{t} \right) \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x f(u + \gamma t v)v \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x f(u)v.
\end{aligned}$$

Para finalizar, mostraremos que o operador DJ_4 é contínuo. Seja (u_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelas imersões de Sobolev

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^s(\mathbb{R}^N), \;\; 2 \leq s \leq 2^*, \quad N \geq 3.$$

Do Teorema de Vainberg, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e uma função $g \in L^s(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_{n_j}(x) \to u(x) \;\; \text{q.t.p} \;\; \text{em} \;\; \mathbb{R}^N$$

e

$$|u_{n_j}(x)| \leq g(x) \;\; \text{q.t.p} \;\; \text{em} \;\; \mathbb{R}^N.$$

Da continuidade da função f, vem que

$$f(u_{n_j}(x)) \to f(u(x)) \;\; \text{pontualmente}$$

e pelas condições $(f1)$ e $(f2)$, segue que

$$|f(u_{n_j}) - f(u)|^2 \to 0 \;\; \text{q.t.p} \;\; \text{em} \;\; \mathbb{R}^N$$

e além disso, observe que

$$\begin{aligned} |f(u_{n_j}) - f(u)|^2 &\leq 4(|f(u_{n_j})|^2 + |f(u)|^2) \\ &\leq C_1|u_{n_j}|^2 + C_2|u|^2 \\ &\leq C_2 g^2(x) + C_3|u|^2 \quad \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\|f(u_{n_j}) - f(u)\|_2 \to 0.$$

Portanto, para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\| \leq 1$, usando Holder e imersão contínua de Sobolev, segue que

$$\begin{aligned} |(DJ_4(u_{n_j}) - DJ_4(u))v| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x f(u_{n_j}) v - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x f(u) v \right| \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_{n_j}) - f(u)||v| \\ &\leq C_1 \|f(u_{n_j}) - f(u)\|_2 \|v\|_2 \\ &\leq C_2 \|f(u_{n_j}) - f(u)\|_2 \|v\| \\ &\leq C_2 \|f(u_{n_j}) - f(u)\|_2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|DJ_4(u_{n_j}) - D_4(u)\| = \sup_{\|v\| \leq 1} |(DJ_4(u_{n_j}) - DJ_4(u))v| \leq C_2 \|f(u_{n_j}) - f(u)\|_2.$$

Portanto,

$$\lim_{j \to \infty} DJ_4(u_{n_j}) = DJ_4(u).$$

Apêndice C

Resultados Auxiliares

Neste apêndice enunciaremos alguns resultados que foram utilizados no decorrer desse trabalho. Iniciaremos enunciando a Regra da Cadeia cuja demonstração pode ser encontrada em [19].

Teorema C.1. *(Ver [19])(Regra da Cadeia) Sejam* $U \subset \mathbb{R}^M$, $V \subset \mathbb{R}^N$ *abertos,* $f : U \to V$ *uma aplicação cujas funções coordenadas* $f_1, ..., f_N$ *possuem derivadas parciais no ponto* $a \in U$ *e* $g : V \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável no ponto* $b = f(a)$. *Então* $g \circ f : U \to \mathbb{R}$ *possui derivadas parciais no ponto* a *e vale*

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \quad i = 1, ..., m,$$

onde as derivadas parciais relativas aos x_i *são calculados no ponto* a *e as relativas aos* y_k *são calculadas no ponto* $b = f(a)$. *Além disso, se* f *e* g *são de classe* C^1 *então* $g \circ f$ *é de classe* C^1.

Teorema C.2. *(Ver [19])(Regra de Leibniz) Dado* $U \in \mathbb{R}^N$ *aberto, seja* $f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua, tal que a i_ésima derivada parcial* $\partial f / \partial x_i(x, t)$ *existe para todo ponto* $(x, t) \in U \times [a, b]$ *e a função* $\partial f / \partial x_i : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$, *assim definida, é contínua. Então a função* $\varphi : U \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x, t)dt,$$

possui a i_ ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt.$$

Em suma: pode-se derivar sobre o sinal da integral desde que o integrando resultante seja uma função contínua.

Teorema C.3. *(Ver [15])(Divergência) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma união finita de curvas suaves. Seja $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ um campo vetorial de classe C^1 em $\overline{\Omega}$. Se η denota o vetor normal exterior a $\partial\Omega$, então*

$$\int_{\overline{\Omega}} \nabla F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \eta ds.$$

Teorema C.4. *(Ver [20])(Valor Intermediário) Seja M um espaço métrico conexo e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f(M)$ é uma intervalo.*

Teorema C.5. *(Ver [7])(Desigualdade de Holder) Seja $f \in L^p$ e $g \in L^q$, onde $p > 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e vale*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Teorema C.6. *(Ver [15])(Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) Assuma que $1 \leq p < n$. Então existe uma constante C, dependendo somente de p e N, tal que*

$$\|u\|_{L^{P^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

para toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

Teorema C.7. *(Ver [7])(Convergência Dominada de Lebesgue) Seja (f_n) uma sequência de funções em L^1 que satisfaz:*

(a) $f_n(x) \to f(x)$ *q.s. em* Ω,

(b) existe uma função $g \in L^1$ tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.s. em Ω.

Então $f \in L^1$ e $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Lema C.1. *(Ver [7])(Lema de Fatou) Seja Ω um conjunto mensurável e (f_n) uma sequência de funções não-negativas e mensuráveis em Ω. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \inf f_n(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

então

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx \geq \int_\Omega f(x)dx.$$

Teorema C.8. *(Ver [9]) Sejam (f_j) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$ tais que*

$$f_j \to f \quad \text{em} \quad L^p(\Omega).$$

Então, existe $(f_{j_k}) \subset (f_j)$ e uma função $g \in L^p(\Omega)$ tal que

$$|f_{j_k}(x)| \leq g(x) \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \Omega$$

e

$$f_{j_k}(x) \to f(x) \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Lema C.2. *(Ver [32])(Lema P.L. Lions, 1984) Seja $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e se*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q \to 0, \quad n \to \infty,$$

então $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < s < 2^*$.

Lema C.3. *(Ver [32]) Seja (u_n) uma sequência $(PS)_{c_\infty}$ para o funcional I_∞ e limitada, então somente uma das alternativas ocorrem:*

(a) *$u_n \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ ou*

(b) *Existem $(y_n) \in \mathbb{R}^N$ e $R, \beta > 0$ tais que*

$$\int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 \geq \beta > 0.$$

Teorema C.9. *(Ver [9])(Teorema de Imersão) Seja $H^1(\mathbb{R}^N)$ o espaço de Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, então as seguintes inclusões são contínuas, chamadas de imersões contínuas de Sobolev:*

$$H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), \ \ \forall q \in [2, 2N/(N-2)], \ \text{ se } \ N > 2$$

$$H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), \ \ \forall q \in [2, \infty], \ \text{ se } \ N = 2.$$

Assim, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_q \leq C\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \ \ \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Teorema C.10. *(Ver [9])(Teorema de Imersão) Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Então as seguintes inclusões são compactas, chamadas de imersões compactas de Sobolev:*

$$H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \ \ \forall q \in [1, 2^*[, \ \text{ se } \ N \geq 3$$

e

$$H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \ \ \forall q \in [1, +\infty[, \ \text{ se } \ N = 2.$$

Dessa forma, se $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ e $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \in H^1(\Omega)$$

e

$$u_{n_j} \to u \in L^q(\Omega).$$

Teorema C.11. *(Ver [33])(Ponto Fixo de Brouwer) Seja $f : \bar{B}_r(x) \to \bar{B}_r(x)$ com $\bar{B}_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ uma função contínua. Então, existe $z \in \bar{B}_r(x)$ tal que $f(z) = z$, ou seja, f admite um ponto fixo $z \in \bar{B}_r(x)$.*

Uma importante consequência do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é o seguinte resultado

Lema C.4. *(Lema Fundamental) Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma função contínua com $\langle f(x), x\rangle \geq 0$, para todo x verificando $|x| = R > 0$. Então, existe $z_0 \in \bar{B}_R(0)$ tal que $f(z_0) = 0$.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \bar{B}_R(0)$, e defina a função $g : \bar{B}_R(0) \to \bar{B}_R(0)$ dada por

$$g(x) = \frac{-R}{|f(x)|} f(x).$$

Note que g verifica $g(\bar{B}_R(0)) \subseteq \bar{B}_R(0)$, pois

$$|g(x)| = \left| \frac{-R}{|f(x)|} f(x) \right| = \frac{R}{|f(x)|} |f(x)| = R,$$

com isso, temos que $g(x) \in \bar{B}_r(0)$. Além disso, g é contínua, pois f é contínua por hipótese. Portanto, pelo Teorema do Ponto fixo de Brouwer, existe $x_0 \in \bar{B}_R(0)$ tal que $g(x_0) = 0$. Assim,

$$|x_0| = |g(x_0)| = R > 0.$$

Por outro lado, temos

$$R^2 = |x_0|^2 = \langle x_0, x_0 \rangle = \langle x_0, g(x_0) \rangle = \left\langle x_0, \frac{-R}{|f(x_0)|} f(x_0) \right\rangle = \frac{-R}{|f(x_0)|} \langle x_0, f(x_0) \rangle.$$

Como, por hipótese

$$\langle x_0, f(x_0) \rangle \geq 0$$

temos que

$$0 < R^2 = \frac{-R}{|f(x_0)|} \langle x_0, f(x_0) \rangle \leq 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, existe $z_0 \in \bar{B}_R(0)$ tal que $g(z_0) = 0$. ■

Teorema C.12. *(Ver [24])(Teorema dos Multiplicadores de Lagrange) Seja X um espaço de Banach, $J, F : X \to \mathbb{R}$ funcionais de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ e*

$$M = \{x \in X; F(x) = 0\} = F^{-1}(\{0\}), \quad \text{com} \quad F'(u) \neq 0, \forall u \in M.$$

Se J é limitado sobre M e existe u_0 em M tal que

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u),$$

então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (multiplicador de Lagrange) tal que

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Corolário C.1. *A derivada de J restrito a M tem norma dada por*

$$\|J'(u)\|_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|J'(u) - \lambda F'(u)\|_{X'}.$$

Teorema C.13. *(Ver [6])(Passo da Montanha) Seja X um espaço de Banach real e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$. Suponha que:*

(H_1) existem $\alpha, \rho > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$,

(H_2) existe $e \in X \setminus \partial\overline{B_\rho}$ tal que $I(e) \leq 0$.

Além disso, considere o conjunto

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad I(\gamma(1)) < 0)\}.$$

Então

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t))$$

é valor crítico de I.

Daremos agora algumas definições necessárias para uma melhor compreensão do próximo resultado.

Definição C.1. *(Comprimento geodésico) Dado um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$, definimos o comprimento geodésico $l(\gamma)$ de uma curva $\gamma \in C^1([0,1]; X)$ por*

$$l(\gamma) := \int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\|}{1 + \|\gamma(t)\|} dt.$$

Definição C.2. *(Distância geodésica) A distância geodésica δ entre dois pontos x_1 e x_2 em X é dada por*

$$\delta(x_1, x_2) := \inf\{l(\gamma) | \gamma \in C^1, \gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2\}.$$

Note que,

$$\delta(x_1, x_2) \leq \|x_1 - x_2\|. \tag{C.1}$$

Reciprocamente, para todo conjunto B limitado na norma em X, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$\delta(x_1, x_x) \geq \alpha\|x_1 - x_2\|, \tag{C.2}$$

sempre que $x_1, x_2 \in B$.

Por simetria radial, quando $x_1 = 0$, o ínfimo deve ser atingido no segmento de reta de 0 à $x_2 = x$. Assim,

$$\delta(0, x) = \int_0^1 \frac{\|x\|}{1 + t\|x\|} dt = \ln(1 + \|x\|).$$

A definição e o teorema a seguir são devidos a Ghoussoub-Preiss. Os mesmos podem ser encontrados em [14], capítulo iv, definição 5 e Teorema 6.

Definição C.3. *Um subconjunto fechado F em um espaço de Banach X, separa dois pontos z_0 e z_1 em X se z_0 e z_1 pertencem a componentes conexas disjuntas em $X \setminus F$.*

Teorema C.14. *(Ver [14])(Ghoussoub-Preiss) Seja X um espaço de Banach e $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional contínuo, tal que $\phi' : X \to X'$ seja contínuo. Tome dois pontos z_0 e z_1 em X e considere o conjunto Γ de todos os caminhos de z_0 para z_1*

$$\Gamma := \{\gamma \in C^0([0, 1]; X) | \gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1\}.$$

Defina um número c por

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} I(\gamma(t)).$$

Assuma que existe um subconjunto fechado F de X tal que $F \cap \phi_c$ separa z_0 e z_1 com

$$\phi_c := \{x \in X | \phi(x) \geq c\}.$$

Então existe uma sequência $\{x_n\}$ em X tal que a distância geodésica δ satisfaz

$$\delta(x_n, F) \to 0;$$

$$\phi(x_n) \to c;$$

$$\|\phi'(x_n)\|(1 + \|x_n\|) \to 0.$$

Lema C.5. *(Ver [23],[30])(Splitting) Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada tal que $I(u_n) \to d > 0$ e $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \to 0$. Substituindo (u_n) por uma subsequência, se necessário, temos que existe uma solução $\bar{u}$ de 1.1, um número $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, k funções $u^1, u^2, ..., u^k$ e k sequências de pontos $(y_n^j) \in \mathbb{R}^N$, $1 \leq j \leq k$, satisfazendo:*

(a) $u_n \to \bar{u}$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *ou*

(b) u^j *são soluções não triviais de* (3.1);

(c) $|y_n^j| \to \infty$ *e* $|y_n^j - y_n^i| \to \infty$, $i \neq j$;

(d) $u_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} u^i(x - y_n^i) \to \bar{u}$;

(e) $I(u_n) \to I(\bar{u}) + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} I_\infty(u^i)$.

Corolário C.1. *Se $I(u_n) \to c_\infty$ e $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \to 0$, então (u_n) é relativamente compacta ou o Lema de Splitting vale com $k = 1$ e $\bar{u} = 0$.*

Definição C.4. *Seja S um subconjunto fechado de um espaço de Banach X, e Q uma subvariedade de X com fronteira ∂Q. Dizemos que S e ∂Q "link"se:*

1) $S \cap \partial Q = \emptyset$;

2) *para qualquer $h \in C^0(X, X)$ tal que $h|_{\partial Q} = id$, vale $h(Q) \cap S \neq \emptyset$.*

Além disso, se S e Q são como acima e B é um subconjunto de $C^0(X, X)$, então S e ∂Q "link"com respeito à B se (1) e (2) vale para qualquer $h \in B$.

Teorema C.1. *(Ver [27], [30])(Linking) Suponha que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ é um funcional satisfazendo a condição (Ce). Considere um subconjunto fechado $S \subset X$ e uma subvariedade $Q \subset X$ com fronteira ∂Q; suponha também que:*

a) *S e ∂Q "link";*

b) $\alpha = \inf\limits_{u \in S} I(u) > \sup\limits_{u \in \partial Q} I(u) = \alpha_0$;

c) $\sup\limits_{u \in Q} I(u) < +\infty$.

Se $B = \{h \in C^0(X, X); h|_{\partial Q} = id\}$, *então o número* $\tau = \inf\limits_{h \in B} \sup\limits_{u \in Q} I(h(u))$ *define um valor crítico de* I, *com* $\tau \geq \alpha$.

Referências Bibliográficas

[1] S. Alama, Y. Y. Li, *On "multi bump"bound state for certain semilinear elliptic equation*, Indiana Univ. Math. J. **41** (1992), 983-1026.

[2] A. Ambrosetti, G. Cerami, D. Ruiz, *Solitons of linearly coupled systems of semilinear non-autonomous equations on* $\mathbb{R}^N$, J. of Func. Anal. **254**, (2008), 1816-2845.

[3] A. Ambrosetti e P. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. of Funct. Anal. **14**, (1973), 349-381.

[4] A. Azzollini, A. Pomponio, *On the Schrodinger equation in* $\mathbb{R}^N$ *under the effect of a general nonlinear term*, Indiana Univ. Math. **J. 58**, no.3, (2009), 1361-1378.

[5] M. Badiale, E. Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*, Springer, London, 2011.

[6] P. Bartolo, V. Benci and Fortunato, *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity*, Nonlinear Anal. **7** (1983), 981-1012.

[7] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue measure*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1985.

[8] H. Berestycki e P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a grund state*, Arch. Rational Mech. Anal. **82**, no. 4, (1983), 313-345.

[9] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[10] J. S. Carcalho, L. Maia, *Soluções antissimétricas para equações de Schrodinger não linear*, tese de doutorado, UNB, Brasília, 2010.

[11] D. G. Costa, H. Tehrani, *On a Class of Asymptotically Linear Elliptic Problems in* $\mathbb{R}^N$, J. Dif. Equations **173**, (2001), 470-494.

[12] V. Coti-Zelati, P. H. Rabinowitz, *Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Pure Appl. Math. **46**, (1992), 1217-1269.

[13] W. Y. Ding and W-M. Ni, *On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **91** (1986), no. 4, 283-308.

[14] I. Ekeland, *Convexity methods in Hamiltonian mechanics*, Springer-Verlagin Berlin, New York, (1990).

[15] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, Volume 19, 1998.

[16] L. Jeanjean, K. Tanaka, *A Remark on Least Solutions in* $\mathbb{R}^N$, Proc. Amer. Math. Soc. **131**, no. 8, (2002), 2399-2408.

[17] O. Kavian, *Introduction á la théorie des points critiques at applications aux problèmes elliptíques*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1993.

[18] G. Li. H.-S. Zhou, *The existence of a positive solution to asymptotically linear scalar field equations*, Proc. R. Soc. Edinb. **130 A**, (2000), 81-105.

[19] E. L. Lima, *Análise Real*, Vol 2, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[20] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1997.

[21] R. Lehrer, L. Maia, *Positive Solutions of Asymptotically Linear Equations via Pohozaev Manifold*, J. of Funct. Anal. **266**, (2014), 213-246.

[22] R. Lehrer, L. Maia, *Sistemas e equações de Schrodinger assintoticamente linear no infinito*, tese de doutorado, UNB, Brasília, 2012.

[23] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case*, Ann. Inst.

[24] S. Pohozaev, *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet. Math. Dokl. **6** (1995), 1408-1411.

[25] P. H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrodinger equations*, Z. Angew. Math. Phys. **43** (1992), no. 2, 270-291.

[26] R. Ruviaro, L. Maia, *Existência de soluções positivas ou nodais para problemas assintoticamente linear*, tese de doutorado, UNB, Brasília, 2010.

[27] M. Schechter, *Linking methods in critical point theory*, Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, (1999).

[28] J. Shatah, *Unstable Ground State of Nonlinear Klein-Gordon Equations*, Trans. Amer. Math. soc. **290**, no. 2, (1985), 701-710.

[29] W. A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Commun. Math. Phys. **55**, (1977), 149-162.

[30] M. Struwe, *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonliarities*, Math. **Z. 187**, no. 4, (1984), 511-517.

[31] C. Stuart e H. Zhou, *Aplying the Mountain Pass Theorem to an Asymptotically linear Elliptic Equation on* $\mathbb{R}^N$, Commum. Partial Diff. Eq. **9-10**, (1999), 1731-1758.

[32] M. Willem, *Minimax Theorems*, Volume 24, Birkhauser, Boston, 1996.

[33] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlage, Heidelberg, 1985.