



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Belém-PA

2013



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ANÁLISE NUMÉRICA EM DIFERENÇAS FINITAS
DA
EQUAÇÃO DE MAXWELL-CATTANEO

Gean Carlos Lopes de Sousa
Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Belém-PA

2013

Sousa, Gean Carlos Lopes

Análise Numérica em diferenças Finitas/(Gean Carlos Lopes de Sousa); orientador, Dilberto da Silva Almeida Júnior. - 2013.

76 f. il. 28 cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará. Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística. Belém, 2013.

1. Análise Numérica. 2. Diferenças Finitas. I. Almeida Júnior, Dilberto da Silva, orient. II. Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. III. Título.

CDD 22. ed. 518.32

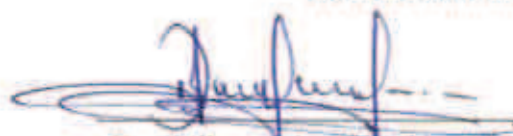
ANÁLISE NUMÉRICA EM DIFERENÇAS FINITAS DA EQUAÇÃO DE MAXWELL-CATTANEO

Gean Carlos Lopes de Sousa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará (PPGME-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior.

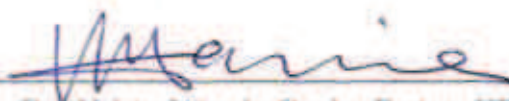
Banca Examinadora



Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (Orientador)



Dr. Mauro de Lima Santos, UFPA



Dr. Valcir João da Cunha Farias, UFPA



Dr. Manoel Silvino Batalha de Araújo, UFPA



Dr. Isaac Pinheiro dos Santos, UFES

Resumo

ANÁLISE NUMÉRICA EM DIFERENÇAS FINITAS DA EQUAÇÃO DE MAXWELL-CATTANEO

Gean Carlos Lopes de Sousa

Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará (PPGME-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Nesta dissertação apresentamos o Método das Diferenças Finitas Não-usuais (NSFD) atribuído à Ronald Mickens [12]. Inicialmente reproduzimos os resultados numéricos de dois de seus trabalhos em colaboração com Jordan [13, 14] aplicados à equação de Maxwell-Cattaneo. Nesses trabalhos, os autores abordam o paradoxo físico de propagação infinita de sinais imposto pela hipótese de Fourier. As hipóteses de Maxwell-Cattaneo corrigem essa discrepância física [4].

Nós efetuamos a análise numérica dos dois métodos não-usuais [13, 14] e mostramos, através de um procedimento algébrico, que os esquemas não-usuais correspondem à perturbações das equações do calor e de ondas. Em seguida, efetuamos a análise numérica das energias numéricas dos esquemas não-usuais. Mostramos as propriedades dissipativas e de decaimento exponencial numérico e, por meio de simulações computacionais realizadas em MATLAB, corroboramos os resultados de Mickens e Jordan.

Palavras-chave: NSFD; Equação de Maxwell-Cattaneo; Energia Numérica; Decaimento Exponencial Numérico;

Belém-Pará

2013

Abstract

NUMERICAL ANALYSIS IN FINITE DIFFERENCE OF THE EQUATION OF MAXWELL-CATTANEO

Gean Carlos Lopes de Sousa

Advisor: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Abstract of Master's Thesis submitted to the Postgraduate Program in Mathematics and Statistics of the Federal University of Pará (UFPA-PPGME) as part of the requirements for obtaining a Master's Degree in Mathematics.

In this work we present the Non-standard Finite Difference Method (NSFD) due to Ronald Mickens [12]. Initially, we reproduce the numerical results of their works in collaboration with com Jordan [13, 14] applied to the Maxwell-Cattaneo equation. In these works, they treat the physical paradox of infinity heat propagation speed of signals due to Fourier hypotheses. The Maxwell-Cattaneo's hypotheses remove this physical discrepancy [4].

We proceed with the numerical analysis of two non-usual methods [13, 14] and we show, by using an algebraic procedure, that the non-usual methods correspond to the perturbations of the wave and heat equations. After, we obtain the numerical energies of the non-usual methods. We show the dissipative property as well as the numerical exponential decay and, by mean of numerical simulations in Matlab, we corroborate the results of Mickens e Jordan .

Keywords:Finite difference unusual, and Maxwell-Cattaneo, energy and exponentially stable.

Belém-Pará

2013

“A meus pais.”

*Ainda que eu falasse as línguas dos homens e dos anjos,
Se não tiver amor, Serei como o bronze que soa
ou como o címbalo que retine.*

I Coríntios 13.1

Agradecimentos

Agradeço

- Antes de tudo ao grante pai, parceiro, irmão, consolador Jeová, que de maneira graciosa tem me abençoado e derramado suas misericórdias, além de me fazer mais que vencedor me dando a mente de Cristo para que eu pudesse ter a capacidade de desenvolver esse trabalho.
- Em especial a meu pai "seu Maroca" (in memorian) que enquanto vivo não mediu esforços para me deixar uma boa educação sendo, antes de tudo, exemplo de vida de amor e de paciência.
- À minha mãe, mulher guerreira, a quem dedico todo meu amor e carinho e que também nunca mediu esforço para me ajudar nessa caminhada.
- Aos meus irmãos Izaias, Francisca, Eunice e Jéssica Karoline por me darem a honra de fazer parte dessa família maravilhosa.
- Ao meu orientador Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior, pela paciência e dedicação no desenvolvimento deste trabalho.
- À minha namorada Suany Campos que sempre me incentivou e mostrou que eu era capaz de chegar até aqui.
- Aos meus amigos que sempre me deram força e mostraram confiança no meu trabalho. Em especial: Edinaldo Alencar, que sempre foi um parceiro desde o primeiro curso de verão quando vimos de Itaituba para Belém, Douglas Almeida e sua contribuição na área da informática, Ana Flávia e sua paciência para me ensinar Latex, Reginaldo e suas aulas de Inferencia e Probabilidade, Walter de Jesus e suas ajudas em Cálculo Avançado, Charlene, Taíse, Mateus, Tiago, Alessandra, Lica 10, Weliton Alan e Moisés .
- Aos meus discipuladores que contribuíram para minha formação ética, moral e religiosa: Nei Fernandes, Luiz Carlos e Nildo.
- Aos bons amigos da turma de 2012: Claudionei, Júlio, Andréia, Wilian, Ítalo, Jorsi, Raimundo, Elaine, Ryan, Tarciana e Cristiane.

- A todos os companheiros do Movimento Esquerda Socialista que sempre estão na luta por uma sociedade mais justa e igualitária. Em especial ao companheiro Pedro Holanda Maia pela hospitalidade que sempre me recebeu nas minhas vindas a Belém e pelo companheirismo constante.
- Em especial aos professores Hugo Diniz e Edilan Quaresma que sempre confiaram no meu potencial.
- À Capes pelo financiamento através de bolsa de estudo.

Sumário

Introdução	9
1 Esquemas Não-Usuais em Diferenças Finitas	11
1.1 Um Exemplo de Aplicação do NSFD	11
2 Lei de Fourier versus Lei de Maxwell-Cattaneo	15
2.1 O Paradoxo da Lei de Fourier e a Lei de Maxwell-Cattaneo	15
2.2 Solução Analítica do Modelo de Maxwell-Cattaneo	18
2.3 A Energia do Sistema de Maxwell-Cattaneo	20
2.4 Decaimento Exponencial das Soluções	22
3 Diferenças Finitas Não-Usuais	24
3.1 O Esquema Usual	24
3.2 O esquema NSFD-1	27
3.3 Análise de Consistência NSFD-1	28
3.4 Uma Sutil Diferença	29
3.5 Resultados Numéricos	32
3.6 O esquema NSFD-2	34
3.7 Análise da Estabilidade do esquema NSFD-2	36
3.8 Resultados numéricos	37
4 Análise das Diferenças Finitas Não-usuais através de suas Energias	44
4.1 Energia Numérica do Esquema de Diferença Finita Usual	44
4.2 Energia Numérica do Esquema NSFD-1	46
4.3 Decaimento Exponencial Numérico	48
4.4 Energia Numérica do Esquema NSFD-2	50

4.5	Conclusões sobre os NSFD's a partir das Energias Numéricas	51
5	Conclusões e Perspectivas Futuras	54

Introdução

Nas últimas décadas a Análise Numérica e Computacional se consolidou como uma importante área da Matemática. Significativos avanços em Análise de Elementos Finitos e de Diferenças Finitas surgiram da necessidade de um melhor entendimento de resultados numéricos computacionais e, por outro lado, a construção de novos métodos numéricos para superar problemas oriundos de metodologias usuais proporcionaram grandes contribuições na área de Análise Numérica. Num contexto bem mais amplo, é inegável a importância da Análise Numérica e Computacional em áreas tais como Engenharias, a Biologia, a Física e a Química. Em geral, os problemas tratados nessas áreas podem ser interpretados por meio de resultados numéricos computacionais.

No contexto da construção de novas metodologias numéricas para superar limitações impostas pelos esquemas tidos como usuais, surgem as metodologias não-usuais. Por exemplo, os esquemas em diferenças finitas conhecidos como 'non-standards' (Non-standard Finite Difference Methods - NSFD) desenvolvidos por Mickens [12] surgem nesse contexto de regularização numérica. Em geral, esses esquemas são construídos para compensar deficiências dos esquemas usuais de diferenças finitas em representar algumas propriedades do modelo contínuo. Por exemplo, problemas de instabilidades numéricas podem ser resolvidas com o uso desses métodos.

Propriedades como positividade de soluções, limitações de soluções e monotonicidade de soluções quando analisadas no contexto dos NSFD's possuem uma melhor performance que os esquemas clássicos. Isto ocorre devido a flexibilidade que os NSFD tem de preservar certas propriedades que são obedecidas pelo modelo matemático original. Essas vantagens têm sido observadas em diversas aplicações. Dentre elas, podemos destacar a aplicação dos NSFD para resolver problemas de dinâmica populacional em modelos biológicos e problemas de difusão-reação com a finalidade de gerar soluções numéricas que sejam positivas e limitadas.

Nesta dissertação, inicialmente fazemos a interpretação de dois importantes resultados sobre o uso dos NSFDs a partir dos trabalhos de Mickens e Jordan [13, 14]. A finalidade desses trabalhos consiste em construir esquemas do tipo NSFD que possam reproduzir com consistência física soluções do tipo ondas de calor e de corrigir um Paradoxo Físico imposto pela hipótese de Fourier em termoelasticidade linear. No que segue passamos a descrever a estrutura desta dissertação.

No Capítulo 1, abordamos brevemente e sem muito rigor matemático o uso dos esquemas NSFD. Fazemos isso por meio de uma situação peculiar para uma equação de reação-difusão não linear conhecida como Equação de Fisher. No Capítulo 2, tratamos dos aspectos da modelagem da Lei de Fourier, de seu respectivo Paradoxo Físico e da hipótese de Maxwell-Cattaneo abordadas nos trabalhos de Mickens e Jordan [13, 14]. Em seguida, mostramos como as soluções do modelo de Maxwell-Cattaneo possuem a propriedade de decaimento exponencial. No capítulo 3, apresentamos os dois esquemas do tipo NSFD apresentados por Mickens e Jordan [13, 14]. Reproduzimos os seus resultados numéricos e mostramos por meio dos esquemas NSFD, usando simples procedimentos algébricos, quais as reais equações que são discretizadas ao nível do contínuo. No capítulo 4 consta nossa principal contribuição aos trabalhos de Mickens e Jordan. Nele abordamos os aspectos numéricos teóricos e computacionais das energias numéricas associadas aos esquemas NSFD. Simulando numericamente as energias, corroboramos os resultados dos autores sobre a importância do uso dos NSFD. No Capítulo 5, finalizamos nosso trabalho com as conclusões e trabalhos futuros.

Capítulo 1

Esquemas Não-Usuais em Diferenças Finitas

Os esquemas em diferenças finitas conhecidos como Não-Usuais (Non-standard Finite Difference Methods - NSFD) são originalmente atribuídos à R. E. Mickens [12] em seu livro publicado em 1994. Posteriormente, importantes aplicações e contribuições às equações diferenciais têm sido realizadas no âmbito da análise numérica teórica e computacional com o uso desses métodos.

Esses esquemas são construídos para compensar uma determinada deficiência dos esquemas usuais de diferenças finitas na representação das soluções numéricas. Na seção seguinte, ilustramos brevemente a importância do uso de um esquema NSFD aplicado a uma equação de difusão não-linear em comparação com o esquema usual de diferenças finitas.

1.1 Um Exemplo de Aplicação do NSFD

Nesta seção exemplificamos o uso de NSFD aplicado a um problema de reação-difusão não-linear estudado por Mickens [15]. Para termos uma idéia clara sobre o NSFD, discorreremos inicialmente sobre um problema numérico muito comum na maioria dos livros textos de análise numérica.

Consideremos o sistema parabólico conhecido como Equação do Calor, dado por

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty); \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0; \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, 1). \quad (1.3)$$

No sistema acima a função $u(x, t)$ representa a temperatura absoluta e portanto uma solução matemática e fisicamente aceitável deve satisfazer $0 < u(x, t) < 1$ para todo x e todo t . Nesse sentido, para um dado inicial limitado, ou seja, para $0 < f(x) < 1$ a respectiva solução deve também ser positiva e limitada. Portanto, qualquer metodologia numérica aplicada ao sistema (1.1)–(1.3) deve gerar soluções numéricas com essa propriedade. Estamos aqui falando de uma consistência física. Por exemplo, o clássico esquema numérico do tipo explícito em diferenças finitas dado por

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}, \quad (1.4)$$

gera soluções numéricas computadas a partir do cálculo

$$u_j^{n+1} = \left(1 - 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n), \quad (1.5)$$

onde Δt e Δx^2 são as divisões temporais e espaciais na malha computacional e $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$ onde u resolve o sistema (1.1)–(1.3).

Para esse caso, é bem conhecido que as soluções numéricas u_j^n convergem para $u(x_j, t_n)$ em uma dada norma se, e somente se, são estáveis no sentido do Critério de Estabilidade Numérica de Von Neumann [5]. Isto ocorre desde que satisfeita a restrição dada por

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2}. \quad (1.6)$$

O requerimento de positividade (que definiremos nos próximos capítulos) das soluções numéricas pode ser determinado por uma simples inspeção da equação (1.5). De fato, a fim de que $u_j^{n+1} > 0$ se $u_j^n > 0$ para todo n , devemos ter precisamente obedecido o critério (1.6). Neste caso, portanto, a positividade das soluções numéricas é uma consequência do critério de estabilidade numérica.

Por outro lado, a condição de positividade numérica não se configura tão simples para casos não-lineares. A título de exemplo, consideremos uma importante equação de reação-difusão não linear conhecida como Equação de Fisher ou Equação de Fisher-Kolmogorov. Ela é expressa por

$$u_t - u_{xx} - \lambda u(1 - u) = 0, \quad (1.7)$$

onde $\lambda > 0$ e a função u descreve, originalmente, a propagação de um vírus mutante em um habitat infinitamente longo [18].

R. E. Mickens em [15] analisou a equação de Fisher sob o ponto de vista dos esquemas Não-usuais em diferenças finitas. Uma das motivações do estudo de Mickens foi a discretização usual em diferenças finitas aplicada à equação (1.7), dada por

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \lambda u_j^n (1 - u_j^n). \quad (1.8)$$

Explicitamente temos

$$u_j^{n+1} = \left(1 + \lambda \Delta t - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \lambda \Delta t (u_j^n)^2, \quad (1.9)$$

e, portanto, o esquema acima não sugere como o parâmetro Δt deva estar restrito uma vez que Δx for selecionado. Para superar essa limitação numérica imposto pelo esquema usual (1.8), Mickens sugere o esquema Não-usual dado por

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \lambda u_j^n - \lambda \frac{u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n}{3} u_j^{n+1}. \quad (1.10)$$

Notemos que o termo não-linear u^2 é substituído por uma discretização que é não-local sobre o domínio computacional, ou seja,

$$u^2 \rightarrow \frac{u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n}{3} u_j^{n+1}, \quad (1.11)$$

e isto corresponde ao que Mickens denomina como Não-usual. Evidentemente, existem procedimentos matemáticos para se construir os esquemas em diferenças finitas conhecidos como não-usuais. Além disso, ele mostra que se

$$0 \leq 1 + \lambda \Delta t - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < 1, \quad (1.12)$$

e então o esquema Não-usual (1.10) pertence a uma classe de métodos explícitos que preserva a positividade para a Equação de Fisher. A seguir reproduzimos alguns experimentos numéricos construídos com o esquema usual (1.8) e um outro NSFD análogo à (1.10) de acordo com o trabalho de R. Anguelov *et al.* [16]. Nos dois primeiros casos (figuras 1.1 e 1.2), foram usados a condição inicial $u(x, 0) = 0.5 + 0.5 \sin(2x)$ e $\lambda = 25$. Nos outros dois casos seguintes foram usados a condição inicial $u(x, 0) = \cos^2(\pi x)$. Notemos a eficiência do NSFD na eliminação das oscilações presentes na solução limite $u \rightarrow 1$.

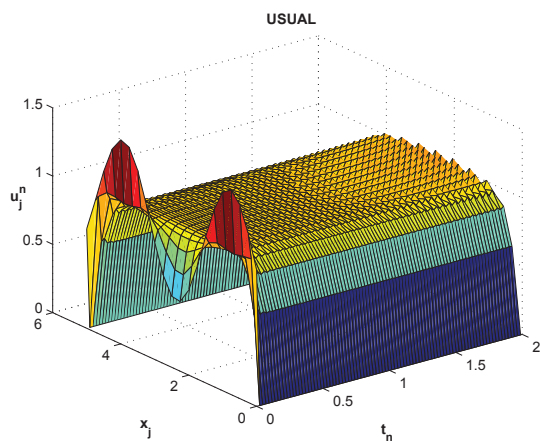


Figura 1.1: Esquema Usual

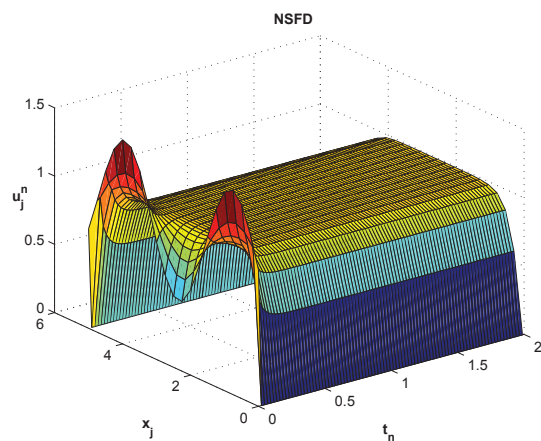


Figura 1.2: Esquema NSFD

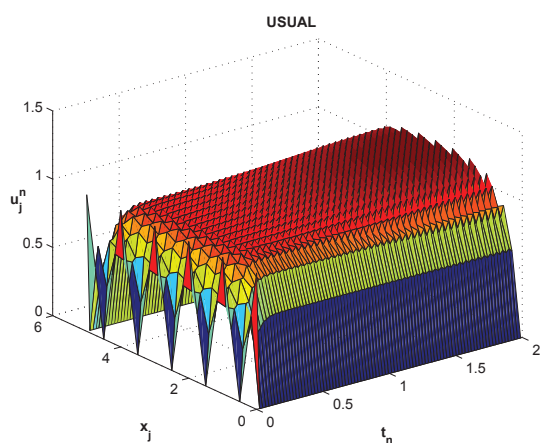


Figura 1.3: Esquema Usual

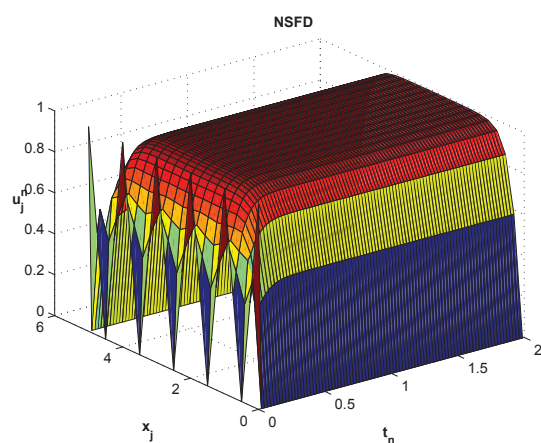


Figura 1.4: Esquema NSFD

Capítulo 2

Lei de Fourier versus Lei de Maxwell-Cattaneo

Neste capítulo introduziremos, de forma bem sucinta, dois modelos matemáticos baseados na lei de Fourier e na lei de Maxwell-Cattaneo. Essas hipóteses são comumente utilizadas na literatura para representar o problema físico da condução de calor em meio homogêneos e isotrópicos. Esses modelos combinados com a lei de balanço de energia culminam nas chamadas equação do calor e na equação de onda com amortecimento, respectivamente.

2.1 O Paradoxo da Lei de Fourier e a Lei de Maxwell-Cattaneo

A condução de calor em um meio homogêneo e isotrópico é dada, segundo a hipótese de Fourier, pela lei constitutiva

$$q(\chi, \tau) = -k\nabla\theta(\chi, \tau), \quad (2.1)$$

onde $\theta(\chi, \tau)$ descreve a temperatura absoluta, q o fluxo de calor através de uma secção do meio, num instante τ e k é a constante de condutividade. Consideremos ainda a lei de balanço de energia que é dada por

$$\rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \nabla q = 0, \quad (2.2)$$

onde ρ é a massa específica e c_p o calor específico.

Combinando a equação (2.1) com a equação (2.2) obtemos o que é conhecida como equação do calor, que é uma Equação Diferencial Parcial do tipo parabólica dada por

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \kappa \nabla^2 \theta = 0, \quad \kappa = \frac{k}{\rho c_p}. \quad (2.3)$$

De acordo com Mickens e Jordan [13, 14] e nas referências nele contidas, a lei de Fourier implica no fato de que uma perturbação térmica em qualquer ponto de um corpo será instantaneamente sentida, mas de forma desigual em todos os outros pontos do corpo. Em outras palavras, a lei de Fourier prevê que os sinais térmicos se propagam com velocidade infinita, o que na prática não acontece, configurando assim o que é conhecido como paradoxo da lei de Fourier.

Várias modificações da equação da lei de Fourier tem sido propostas afim de "corrigir" o paradoxo citado, como por exemplo o núcleo de relaxamento do tipo Jeffreys proposto por Joseph e Preziosi [3] e a lei de Maxwell-Cattaneo, que passaremos a descrever a seguir.

Consideremos um tempo de relaxamento térmico suficientemente pequeno, λ_0 positivo, de tal forma que

$$q(\chi, \tau + \lambda_0) = -k \nabla \theta, \quad (2.4)$$

e em seguida expandimos em série de Taylor a função $q(\chi, \tau + \lambda_0)$ em torno de λ_0 ,

$$q(\chi, \tau + \lambda_0) = q(\chi, \tau) + q'(\chi, \tau) \lambda_0 + \frac{q''(\chi, \tau) \lambda_0^2}{2!} + \dots = -k \nabla \theta. \quad (2.5)$$

Considerando os dois primeiros termos da expansão, chegamos ao que é definido como hipótese de Maxwell-Cattaneo

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial \tau}\right) q = -k \nabla \theta. \quad (2.6)$$

Notemos que se $\lambda_0 \rightarrow 0$ então a equação (2.4) se reduz a equação (2.1). Por outro lado, observemos que se aplicarmos o operador Gradiente em ambos os lados de (2.6) obtemos

$$\nabla q + \lambda_0 \frac{\partial \nabla q}{\partial \tau} = -k \nabla^2 \theta. \quad (2.7)$$

Considerando a lei de balanço de energia, podemos reescrever a equação (2.7) da seguinte forma

$$-\rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \lambda_0 \frac{\partial (-\rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial \tau})}{\partial \tau} = -k \nabla^2 \theta. \quad (2.8)$$

Isolando todos os termos da equação no primeiro membro temos

$$\rho c_p \theta_\tau + \lambda_0 \rho c_p \theta_{\tau\tau} - k \nabla^2 \theta = 0. \quad (2.9)$$

Dividindo a equação (2.9) por ρc_p temos

$$\theta_\tau + \lambda_0 \theta_{\tau\tau} - \kappa \nabla^2 \theta = 0, \quad \kappa = \frac{k}{\rho c_p}. \quad (2.10)$$

Observemos que a equação (2.10) é uma EDP do tipo hiperbólica. Segundo Mickens e Jordan [12], se considerarmos o modelo matemático (2.10) construído a partir da equação de Maxwell-Cattaneo, teremos que a condução de calor através de ondas térmicas tem velocidade finita $c = \sqrt{\frac{\kappa}{\lambda_0}}$, o que de fato ocorre, pois as equações de ondas possuem velocidade de propagação finita. Isso corrige o paradoxo imposto pela lei de Fourier. Esse fato é muito importante, pois a equação (2.10) é uma equação hiperbólica de propagação de ondas com amortecimento. Ela representa a propagação de ondas de calor e, portanto, suas soluções devem ser positivas e limitadas para dados iniciais positivos e limitados. Nessa direção, qualquer metodologia numérica aplicada a tal equação deve necessariamente gerar soluções numéricas que sejam positivas.

2.2 Solução Analítica do Modelo de Maxwell-Cattaneo

Assumindo que a condução de calor é governada pela lei Maxwell-Cattaneo, o modelo matemático do sistema físico é dado por

$$\lambda_0 \theta_{\tau\tau} - \kappa \theta_{\chi\chi} + \theta_\tau = 0, \quad (\chi, \tau) \in (0, l) \times (0, \infty); \quad (2.11)$$

$$\theta(0, \tau) = \theta(l, \tau) = 0, \quad \tau > 0; \quad (2.12)$$

$$\theta(\chi, 0) = \theta_0 \sin[\pi\chi/l]; \quad \theta_\tau(\chi, 0) = 0, \quad \chi \in (0, l). \quad (2.13)$$

Adimensionalizando o problema (2.11)-(2.13) definimos as variáveis

$$u = \theta/\theta_0, \quad x = \chi/l, \quad t = \tau(\kappa/l^2). \quad (2.14)$$

Usando a regra da cadeia temos:

$$\theta_\tau = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} \implies \theta_\tau = u_t \frac{\kappa}{l^2}, \quad (2.15)$$

e conseqüentemente,

$$\theta_{\tau\tau} = \frac{\partial u_t}{\partial t} \frac{\kappa}{l^2} \frac{\partial t}{\partial \tau} \implies \theta_{\tau\tau} = u_{tt} \frac{\kappa^2}{l^4}. \quad (2.16)$$

Analogamente

$$\theta_\chi = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \chi} \implies \theta_\chi = u_x \frac{1}{l}, \quad (2.17)$$

e também

$$\theta_{\chi\chi} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{1}{l} \frac{\partial x}{\partial \chi} \implies \theta_{\chi\chi} = u_{xx} \frac{1}{l^2}. \quad (2.18)$$

Portanto, substituindo as equações (2.15) - (2.18) em (2.11) obtemos

$$\lambda_0 u_{tt} \frac{\kappa^2}{l^4} - u_{xx} \frac{\kappa}{l^2} + u_t \frac{\kappa}{l^2} = 0. \quad (2.19)$$

Dividindo a última equação por $\frac{\kappa}{l^2}$,

$$\lambda_0 u_{tt} \frac{\kappa}{l^2} - u_{xx} + u_t = 0. \quad (2.20)$$

Tomando $\tau_0 = \lambda_0 \frac{\kappa}{l^2}$ chegamos ao sistema hiperbólico dado por

$$u_t - u_{xx} + \tau_0 u_{tt} = 0, \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty); \quad (2.21)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0; \quad (2.22)$$

$$u(x, 0) = \sin[\pi x], \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (2.23)$$

Usando o método de separação de variáveis (veja o livro de Djairo [2]) obtemos a seguinte solução para o problema (2.21) - (2.23):

$$u(x, t) = e^{\frac{-t}{2\tau_0}} \sin(\pi x) \begin{cases} \cosh[\omega t] + \frac{\sinh[\omega t]}{\sqrt{\Delta}}; \tau_0 < \tau_c \\ 1 + \frac{t}{2\tau_0}; \tau_0 = \tau_c \\ \cosh[\omega t] + \frac{\sinh[\omega t]}{\sqrt{|\Delta|}}; \tau_0 > \tau_c \end{cases}$$

onde $\omega = (2\tau_0)^{-1} \sqrt{|\Delta|}$, $\Delta = 1 - 4\pi^2\tau_0$ e $\tau_c = (2\pi)^{-2}$. Veja o trabalho de Mickens e Jordan [13].

2.3 A Energia do Sistema de Maxwell-Cattaneo

É bem conhecido que a energia das soluções do sistema de equações de ondas (2.21) - (2.23) é dada por

$$E(t) := \frac{\tau_0}{2} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2 dx, \quad (2.24)$$

correspondendo à soma das energias potencial e cinética, respectivamente. A proposição dada a seguir mostra como construir a energia $E(t)$ e, para o sistema sob consideração, que a mesma é dissipada ao longo do tempo t .

Proposition 2.3.1 (Dissipação de Energia) *O funcional $E(t)$ em (2.24) satisfaz*

$$E(t) \leq E(0) \quad \forall t \geq 0. \quad (2.25)$$

Prova: Inicialmente consideremos a equação (2.21), onde multiplicamos por u_t e integramos em $(0, 1)$. Segue que,

$$\int_0^1 u_t u_t dx + \tau_0 \int_0^1 u_{tt} u_t dx - \int_0^1 u_{xx} u_t dx = 0. \quad (2.26)$$

Aplicando integração por partes na última parcela obtemos

$$\int_0^1 u_t u_t dx + \tau_0 \int_0^1 u_{tt} u_t dx - u_x u_t \Big|_0^1 + \int_0^1 u_{xt} u_x dx = 0. \quad (2.27)$$

Usando a regra da cadeia temos

$$\frac{du_t^2}{dt} = 2u_t u_{tt} \Rightarrow u_t u_{tt} = \frac{1}{2} \frac{du_t^2}{dt}, \quad (2.28)$$

$$\frac{du_x^2}{dt} = 2u_x u_{xt} \Rightarrow u_x u_{xt} = \frac{1}{2} \frac{du_x^2}{dt}. \quad (2.29)$$

Substituindo (2.28) e (2.29) em (2.27) obtemos:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\tau_0}{2} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2 dx \right] - u_x u_t \Big|_0^1 + \int_0^1 u_t^2 dx = 0. \quad (2.30)$$

Considerando as condições de contorno de Dirichlet temos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\tau_0}{2} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2 dx \right] = - \int_0^1 u_t^2 dx, \quad (2.31)$$

de onde obtemos

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^1 u_t^2 dx. \quad (2.32)$$

Como a derivada de $E(t)$ é sempre negativa, significa que a função $E(t)$ é decrescente e portanto concluímos que

$$E(t) \leq E(0) \quad \forall t \geq 0. \quad (2.33)$$

■

Além da propriedade de decrescimento de $E(t)$, um outro aspecto de interesse em análise matemática é sobre o seu decaimento para zero no decorrer do tempo t . Na próxima seção estabelecemos a propriedade de decaimento exponencial para as soluções explícitas do problema hiperbólico.

2.4 Decaimento Exponencial das Soluções

O decaimento exponencial da energia de sistemas dissipativos é uma propriedade muito importante e procurado em análise matemática. Alguns métodos matemáticos são muito úteis para essa finalidade. Podemos destacar a teoria de semigrupo de operadores lineares e o método da energia [6]. Esse último consiste no uso das conhecidas técnicas multiplicativas. Nesta seção, usaremos simplesmente as soluções explícitas do problema hiperbólico calculado diretamente na energia $E(t)$.

A seguir faremos o cálculo da energia para cada uma das soluções do sistema (2.21)-(2.23).

- Primeiro Caso: $\tau_0 < \tau_c$.

$$u(x, t) = e^{\frac{-t}{2\tau_0}} \sin(\pi x) \left(\cosh(\omega t) + \frac{\sinh(\omega t)}{\sqrt{\Delta}} \right). \quad (2.34)$$

Derivando $u(x, t)$ em relação a variável t temos o seguinte:

$$u_t = -\frac{1}{2\tau_0} e^{\frac{-t}{2\tau_0}} \left[(\cosh(\omega t) + \sinh(\omega t)/\sqrt{\Delta}) + (\omega \sinh(\omega t) + \omega \cosh(\omega t)/\sqrt{\Delta}) \right] \sin(\pi x). \quad (2.35)$$

Definindo $A(t)$ por

$$A(t) := -\frac{1}{2\tau_0} e^{\frac{-t}{2\tau_0}} (\cosh(\omega t) + \omega \cosh(\omega t)/\sqrt{\Delta} + \sinh(\omega t)/\sqrt{\Delta} + \omega \sinh(\omega t)), \quad (2.36)$$

escrevemos $u_t = A(t) \sin(\pi x)$ e substituindo esse resultado em $\frac{\tau_0}{2} \int_0^1 u_t^2 dx$ obtemos

$$\frac{\tau_0}{2} \int_0^1 u_t^2 dx = \frac{\tau_0}{2} A(t)^2 \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx \Rightarrow \frac{\tau_0}{2} \int_0^1 u_t^2 dx = \frac{\tau_0}{4} A^2(t). \quad (2.37)$$

Por outro lado, derivando $u(x, t)$ em relação a variável x temos o seguinte:

$$u_x = \pi \sin(\pi x) e^{\frac{-t}{2\tau_0}} (\cosh(\omega t) + \sinh(\omega t)/\sqrt{\Delta}). \quad (2.38)$$

Definimos $B(t)$ como

$$B(t) := e^{\frac{-t}{2\tau_0}} (\cosh(\omega t) + \sinh(\omega t)/\sqrt{\Delta}), \quad (2.39)$$

e um cálculo direto nos fornece

$$\frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2 dx = \frac{1}{2} B^2(t) \pi^2 \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2 dx = \frac{1}{4} \pi^2 B^2(t). \quad (2.40)$$

Substituindo (2.37) e (2.40) em (2.24) obtemos a energia da solução do sistema (2.21) – (2.23) no caso em que $\tau_0 < \tau_c$:

$$E(t) = \frac{\tau_0}{4} A^2(t) + \frac{1}{4} \pi^2 B^2(t). \quad (2.41)$$

Notemos que tanto $A(t)$ quanto $B(t)$ são funções de $e^{-\frac{t}{2\tau_0}}$, daí podemos, sem perda de generalidade, concluir a respeito do decaimento exponencial das soluções.

- Segundo caso: $\tau_0 > \tau_c$.

Procedendo de modo análogo ao que foi feito no primeiro caso, obtemos

$$E(t) = \frac{\tau_0}{4} C^2(t) + \frac{1}{4} \pi^2 D^2(t), \quad (2.42)$$

onde

$$\begin{aligned} C(t) &= e^{-\frac{t}{2\tau_0}} (\omega \cosh(\omega t) / \sqrt{|\Delta|} - \cosh(\omega t) / 2\tau_0 - \sinh(\omega t) / 2\tau_0 \sqrt{|\Delta|} - \omega \sinh(\omega t)) \\ D(t) &= e^{-\frac{t}{2\tau_0}} (\cosh(\omega t) + \sinh(\omega t) / \sqrt{|\Delta|}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

- Terceiro caso: $\tau_0 = \tau_c$.

Neste caso, chegamos a seguinte expressão

$$E(t) = \frac{1}{4} e^{-\frac{t}{\tau_0}} \left[\pi^2 \left(1 + \frac{t}{2\tau_0} \right)^2 + \frac{t^4}{8\tau_0^3} \right]. \quad (2.45)$$

É possível certificar graficamente que nos três casos $E(t)$ decresce exponencialmente para todo $t > 0$.

Capítulo 3

Diferenças Finitas Não-Usuais

Neste capítulo apresentaremos três discretizações em diferenças finitas aplicadas ao sistema (2.21)-(2.23) construídas e analisadas por Mickens e Jordan [13]: uma usual e duas não-usuais.

Aqui, analisamos a consistência desses métodos de diferenças finitas não-usuais, que doravante chamaremos de NSFD-1 (Nonstandard Finite Difference Scheme -1) e NSFD-2 (Nonstandard Finite Difference Scheme - 2). Destacamos as diferenças existentes entre os métodos apresentados por Mickens e Jordan [13] e as vantagens do uso dos esquemas NSFD.

3.1 O Esquema Usual

É bem conhecido que o esquema de Diferenças finitas que chamaremos de "Usual" é construído a partir da série de Taylor aplicada nas variáveis temporal e espacial do sistema (2.21) - (2.23), considerando um erro de truncamento da ordem $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)$.

De fato, para nossos propósitos de construção de soluções numéricas por diferenças finitas para problemas de valor inicial e de contorno, precisamos definir uma discretização apropriada para o domínio $[0, L] \times [0, T]$. Para tanto, devemos construir o que denominamos de malha numérica ou malha computacional.

Definimos então $\Delta x = \frac{L}{J}$, $\Delta t = \frac{T}{N}$ e uma malha de pontos (x_j, t_n) com $x_j = j\Delta x$ e $t_n = n\Delta t$ tais que $j = 0, 1, 2, \dots, J$ e $n = 0, 1, 2, \dots, N$, com J e N números inteiros positivos que correspondem à divisão do espaço e tempo, respectivamente. Consideramos também os seguintes

operadores de diferenças finitas (usuais) no espaço e no tempo:

- **Esquema de Euler Avançado (primeira ordem):**

$$\partial_x u_j^n := \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, \quad \partial_t u_j^n := \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

- **Esquema de Euler Atrasado (primeira ordem):**

$$\bar{\partial}_x u_j^n := \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \quad \bar{\partial}_t u_j^n := \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}$$

- **Diferença Central (segunda ordem) :**

$$\frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}$$

- **Esquema diferença centrada (segunda ordem):**

$$\bar{\partial}_x \partial_x u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}, \quad \bar{\partial}_t \partial_t u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2}$$

Em todos os casos acima, u_j^n corresponde à solução numérica nos pontos (x_j, t_n) da discretização. A definição desses operadores é proveniente do desenvolvimento em Série de Taylor que, por questões didáticas, descrevemos abaixo.

Teorema 3.1.1 (Teorema de Taylor) *Seja u uma função derivável até ordem $n + 1$ em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo x . Então, para cada $x + h$ em I existe um número real $\xi \in [x, x + h]$ tal que*

$$u(x + h) = u(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial x} h + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 u(x)}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} + \dots + \frac{\partial^n u(x)}{\partial x^n} \frac{h^n}{n!} + R_n(x + h),$$

com

$$R_n(x + h) = \frac{\partial^{n+1} u(\xi)}{\partial x^{n+1}} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \xi \in (x, x + h).$$

Devemos fazer uma distinção em termos de aproximações numéricas realizadas sobre equações diferenciais parciais: por u_j^n devemos entender a solução numérica obtida pela aplicação de determinado método numérico sobre uma equação diferencial parcial, e por $u(x_j, t_n)$, a solução exata da equação diferencial calculada nos pontos (x_j, t_n) da discretização. Nessa direção, devemos ter

$$u_j^n \rightarrow u(x_j, t_n)$$

quando os parâmetros de discretização tendem a zero. Podemos então construir aproximações para as derivadas com relação ao espaço e ao tempo da função $u(x_j, t_n)$. Relacionamos as seguintes aproximações com seus respectivos erros de aproximação:

$$\begin{aligned}\partial_x u(x_j, t_n) &:= \frac{u(x_j + \Delta x, t_n) - u(x_j, t_n)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta x) \\ \bar{\partial}_x u(x_j, t_n) &:= \frac{u(x_j, t_n) - u(x_j - \Delta x, t_n)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta x) \\ \frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} u(x_j, t_n) &:= \frac{u(x_j + \Delta x, t_n) - u(x_j - \Delta x, t_n)}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ \bar{\partial}_x \partial_x u(x_j, t_n) &:= \frac{u(x_j + \Delta x, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j - \Delta x, t_n)}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) \\ &+ \mathcal{O}(\Delta x^2)\end{aligned}$$

A expressão $\partial_x u(x_j, t_n)$ é uma notação que indica uma aproximação realizada para a derivada $\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n)$ da função u calculada nos pontos (x_j, t_n) com um erro que é de $\mathcal{O}(\Delta x)$ ('ordem de Δx '). Analogamente, temos as seguintes aproximações para a variável temporal:

$$\begin{aligned}\partial_t u(x_j, t_n) &:= \frac{u(x_j, t_n + \Delta t) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t) \\ \bar{\partial}_t u(x_j, t_n) &:= \frac{u(x_j, t_n) - u(x_j, t_n - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t) \\ \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} u(x_j, t_n) &:= \frac{u(x_j, t_n + \Delta t) - u(x_j, t_n - \Delta t)}{2\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ \bar{\partial}_t \partial_t u(x_j, t_n) &:= \frac{u(x_j, t_n + \Delta t) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j, t_n - \Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) \\ &+ \mathcal{O}(\Delta t^2).\end{aligned}$$

Baseado nessas aproximações em diferenças finitas, Mickens e Jordan [13] adotam o seguinte esquema usual para a equação (2.21):

$$\frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} u_j^n + \tau_0 \partial_t \bar{\partial}_t u_j^n = \partial_x \bar{\partial}_x u_j^n, \quad (3.1)$$

ou, explicitamente,

$$u_j^{n+1} = \frac{R\Delta t(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \tau_0 2u_j^n - u_j^{n-1} + (\Delta t/2)u_j^{n-1}}{\tau_0 + \Delta t/2}, \quad (3.2)$$

onde $R = \Delta t/(\Delta x)^2$.

Observando o esquema acima percebemos que é necessário fazer uma aproximação conveniente para u_j^1 , pois u_j^{n+1} depende de u_j^{n-1} , assim para $n = 0$ precisamos de u_j^{-1} . Para corrigir esse problema usamos

$$u_j^{-1} \approx u_j^1 - 2\Delta t u_t(x_j, 0), \quad (3.3)$$

onde

$$u_j^1 \approx u_j^0 - \frac{(\pi\Delta t)^2}{2\tau_0} \sin(\pi j(\Delta x)) \quad ; \quad (j = 1, 2, 3, \dots, J-1). \quad (3.4)$$

Observações: Esse método usual é bem conhecido na literatura de análise numérica. Ele é consistente e estável para a restrição $\Delta t \leq \Delta x$ (ver [5]). Taxas de convergência numéricas são, de fato, da ordem de $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$. No entanto, como analisado e ressaltado fortemente por Mickens e Jordan [13] e que também concordamos, o esquema (3.2) não gera soluções numéricas que sempre sejam positivas. Nesse sentido, por mais que o esquema usual seja numericamente eficiente em termos de aproximação numérica, ele não representa adequadamente a propriedade de soluções positivas que representem a propagação de ondas de calor governadas pela hipótese de Maxwell-Cattaneo. Mais ainda, nenhum dos esquemas usuais aplicados à equação (2.21) possui essa propriedade (ver [13] e demais referências). Daí surge a necessidade de se construir novas metodologias numéricas que assegurem a positividade das soluções.

Na seção seguinte, introduzimos o primeiro esquema NSFD analisado em [13]. Dentre as propriedades inerentes a ele ressaltamos: sua consistência, casos particulares e simulações numéricas destacando sua eficiência em comparação com o esquema usual.

3.2 O esquema NSFD-1

Os Métodos de diferenças finitas Não-Usuais (NSFD) se iniciaram em um artigo de Mickens [17] publicado em 1989. As regras básicas para a construção de tais sistemas e sua aplicação para equações não-lineares aparecem em uma variedade de publicações.

O esquema NSFD-1 que apresentamos a seguir difere do usual apenas na aproximação da primeira derivada no tempo, pois aqui aproximamos u_t da seguinte forma:

$$u_t(x_j, t_n) \approx (1 - 2\epsilon)\bar{\partial}_t u_j^n + 2\epsilon \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} u_j^n. \quad (3.5)$$

Assim obtemos o seguinte esquema numérico para a equação (2.21):

$$(1 - 2\epsilon) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + 2\epsilon \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \tau_0 \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (3.6)$$

Notemos que para $\epsilon = 1/2$ resulta no esquema usual (3.1). De acordo com Mickens e Jordan [13], escolhendo $\epsilon = \tau_0/\Delta t$ resulta em

$$u_j^{n+1} = R(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (1 - 2R)u_j^n, \quad (3.7)$$

em que $R = \Delta t/(\Delta x)^2$. Em particular para $R = \frac{1}{4}$ obtemos o que Mickens e Jordan definem como um primeiro esquema NSFD (Nonstandard Finite Difference Scheme) aplicado à equação de Maxwell-Cattaneo (2.21). Tem-se portanto

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + 2u_j^n + u_{j-1}^n}{4}. \quad (3.8)$$

É bem sabido que o esquema (3.15) é estável para $R \leq \frac{1}{2}$, para tanto é suficiente usar o critério de estabilidade de von Neumann [5]. Assim, o esquema NSFD-1 (3.16) é estável para $R = \frac{1}{4}$. Na próxima seção analisamos a propriedade de consistência numérica do esquema geral (3.14).

3.3 Análise de Consistência NSFD-1

A propriedade de consistência numérica (ou condição de compatibilidade) de uma dada aproximação numérica em diferenças finitas, certifica se a solução exata da equação satisfaz o esquema de diferenças nos pontos da discretização, a menos de erro de truncamento local oriundo da aproximação por série de Taylor. Dessa forma, com base na aproximação (3.14)

temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
& (1 - 2\epsilon) \frac{u(x_j, t_n + \Delta t) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} + 2\epsilon \frac{u(x_j, t_n + \Delta t) - u(x_j, t_n - \Delta t)}{2\Delta t} \\
& + \tau_0 \frac{u(x_j, t_n + \Delta t) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j, t_n - \Delta t)}{\Delta t^2} \\
& - \frac{u(x_j + \Delta x, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j - \Delta x, t_n)}{\Delta x^2} = \\
& = (1 - 2\epsilon)(u_t(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t)) + 2\epsilon(u_t(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2)) + \tau_0(u_{tt}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\
& - (u_{xx}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta x^2))
\end{aligned}$$

Nesse ponto, notemos que para qualquer valor positivo e suficientemente pequeno do parâmetro ϵ , temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
& (1 - 2\epsilon) \frac{u(x_j, t_n + \Delta t) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} + 2\epsilon \frac{u(x_j, t_n + \Delta t) - u(x_j, t_n - \Delta t)}{2\Delta t} \\
& + \tau_0 \frac{u(x_j, t_n + \Delta t) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j, t_n - \Delta t)}{\Delta t^2} \\
& - \frac{u(x_j + \Delta x, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j - \Delta x, t_n)}{\Delta x^2} = \\
& = \underbrace{u_t(x_j, t_n) + \tau_0 u_{tt}(x_j, t_n) - u_{xx}(x_j, t_n)}_{=0} + 2\epsilon[\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta t^2)] + \tau_0 \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta t) - \mathcal{O}(\Delta x^2).
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos a equação de consistência numérica expressa por

$$(1 - 2\epsilon)\partial_t u(x_j, t_n) + 2\epsilon\partial_t u(x_j, t_n) + \tau_0\bar{\partial}_t\partial_t u(x_j, t_n) - \bar{\partial}_x\partial_x u(x_j, t_n) = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2).$$

3.4 Uma Sutil Diferença

Em Mickens e Jordan [13] é mencionado o conceito de positividade para equações de difusão como é o caso da conhecida equação do calor, como sendo a exigência de que dados iniciais não

negativos dão origem a soluções que são também não-negativas, isto é,

$$u(x, 0) \geq 0 \Rightarrow u(x, t) \geq 0, \quad \forall t > 0. \quad (3.9)$$

Portanto, positividade é uma exigência física para o modelo de difusão. Nessa direção, tal exigência deve necessariamente ser preservada por qualquer metodologia numérica aplicada à problemas como (2.21).

Portanto, observamos que a condição de estabilidade $1 - 2R \geq 0$ garante também a positividade do esquema (3.15) e consequentemente do NSFD-1 (3.16), ou seja,

$$u_j^n \geq 0 \Rightarrow u_j^{n+1} \geq 0, \quad \forall n > 0. \quad (3.10)$$

Uma observação importante que analisamos é que o esquema NSFD-1 (3.16) é uma aproximação para uma perturbação da equação de difusão dada por

$$4\Delta t u_t(x, t) - (\Delta x)^2 u_{xx}(x, t) = 0. \quad (3.11)$$

De fato, escrevemos o seguinte:

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + 2u_j^n + u_{j-1}^n}{4}, \quad (3.12)$$

consequentemente

$$4u_j^{n+1} - 2u_j^n = u_{j+1}^n + u_{j-1}^n. \quad (3.13)$$

Somando $-2u_j^n$ em ambos os lados da igualdade obtemos

$$4u_j^{n+1} - 2u_j^n - 2u_j^n = u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n, \quad (3.14)$$

e ainda

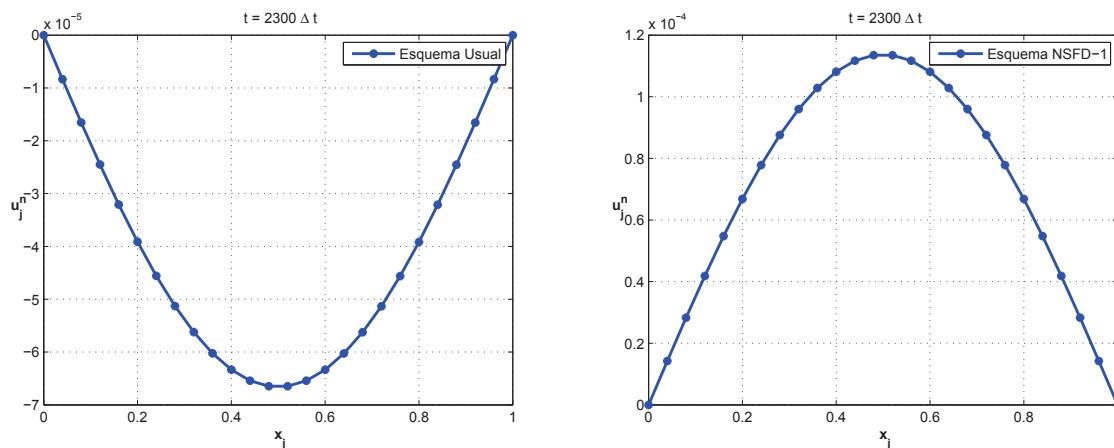
$$4u_j^{n+1} - 4u_j^n = u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n. \quad (3.15)$$

Portanto, a equação acima pode ser escrita da seguinte forma

$$4\Delta t \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - (\Delta x)^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0, \quad (3.16)$$

e assumindo $u_t(x_j, t_n) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$ e $u_{xx}(x_j, t_n) \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$, então o esquema que anteriormente foi chamado de NSFD-1 é uma aproximação para a equação (ligeiramente perturbada) de difusão (3.19).

Para exemplificarmos uma importante diferença entre o esquema usual (3.2) e o esquema NSFD (3.16), ilustramos numericamente duas simulações com os mesmos dados iniciais para ambos os esquemas. O esquema NSFD é capaz de produzir soluções numéricas compatíveis com a propriedade de positividade das soluções.



Destacamos as conclusões gerais a respeito do esquema NSFD-1 que foram destacadas no artigo de Mickens e Jordan [13]:

- O esquema NSFD-1 preserva a positividade de soluções numéricas para a equação de Maxwell-Cattaneo, em contra-posição com o esquema usual;
- O esquema NSFD-1 envolve os dois níveis de tempo t_n e t_{n+1} , ao invés dos três níveis de tempo t_{n-1} , t_n e t_{n+1} como é de se esperar em aproximações numéricas para problemas hiperbólicos;
- O esquema NSFD-1 é independente de τ_0 ;

A segunda conclusão acima é corroborada com a observação que fizemos nesta seção. Mais precisamente, a de que a escolha de $\epsilon = \tau_0/\Delta t$ aproxima a equação ("perturbada") do calor (3.19).

3.5 Resultados Numéricos

Nesta seção reproduzimos, através de simulações em MATLAB dos esquemas usual e NSFD-1, os resultados numéricos apresentados por Mickens e Jordan [13]. Soluções obtidas através dos esquemas de diferenças finitas são comparadas com soluções exatas para a equação de onda com amortecimento variando-se o valor de τ_0 para diferentes faixas de tempo.

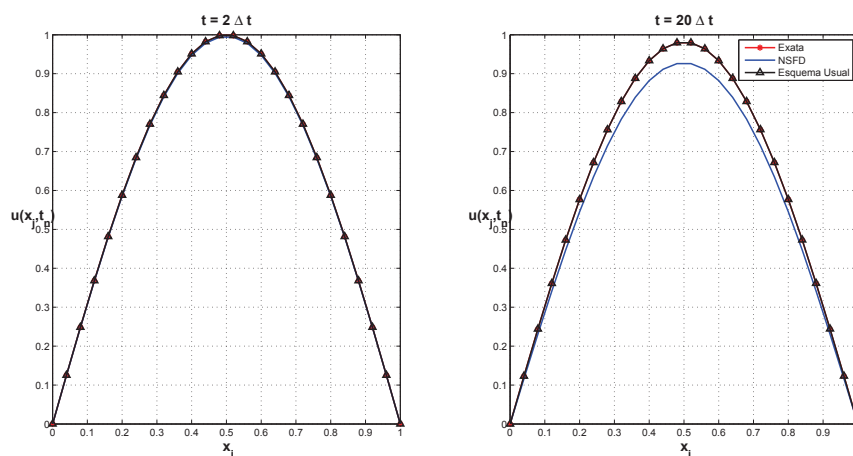


Figura 3.1: $t = k(\Delta t)$; $k = 2, 20$; $\Delta t = 0.0004$; $\Delta x = 0.04$; $\tau_0 = \tau_c/2$

Na figura (3.1), percebemos que os dois métodos não possuem diferenças gráficas consideráveis em relação a solução exata, porém para $t = 20\Delta t$ o NSFD-1 começa a se diferenciar decrescendo lentamente.

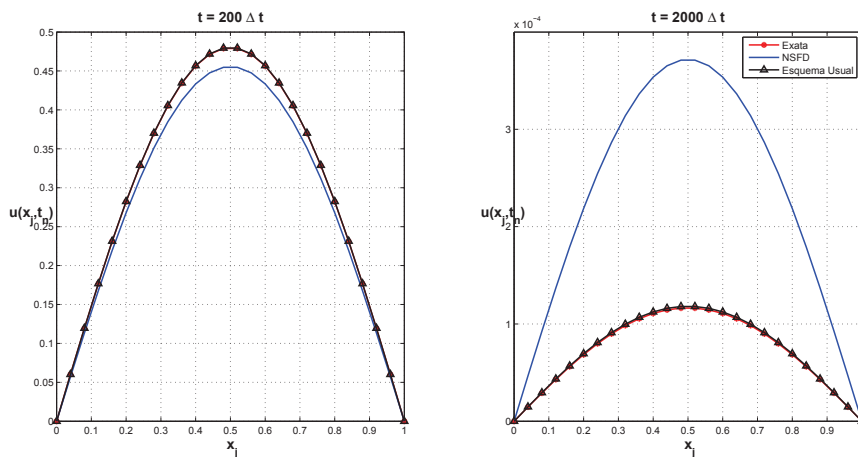


Figura 3.2: $t = k(\Delta t)$; $k = 200, 2000$; $\Delta t = 0.0004$; $\Delta x = 0.04$; $\tau_0 = \tau_c/2$

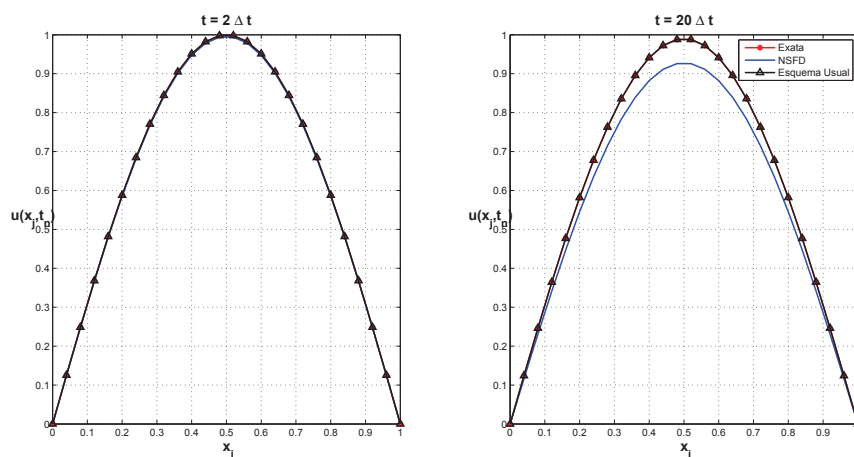


Figura 3.3: $t = k(\Delta t)$; $k = 2, 200$; $\Delta t = 0.0004$; $\Delta x = 0.04$; $\tau_0 = \tau_c$

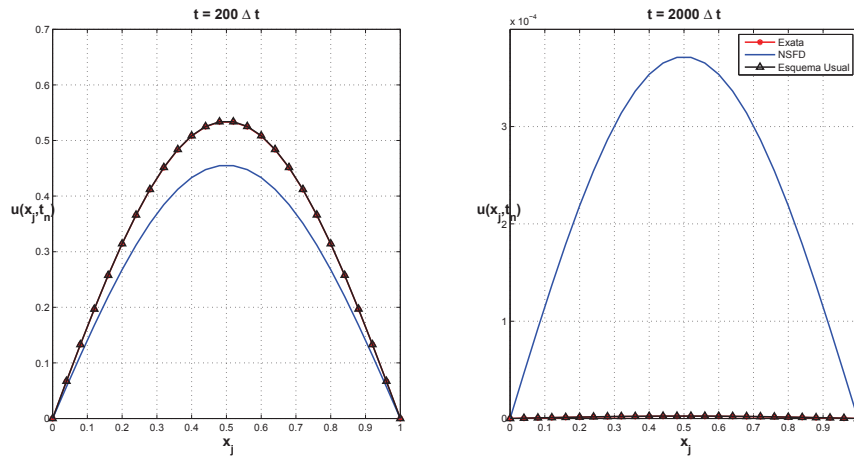


Figura 3.4: $t = k(\Delta t)$; $k = 1000, 2000$; $\Delta t = 0.0004$; $\Delta x = 0.04$; $\tau_0 = \tau_c$

De um modo geral, as conclusões de Mickens e Jordan são de que os resultados produzidos pelo esquema NSFD-1 produzem soluções numéricas que possuem propriedades qualitativas corretas. Em particular, elas decrescem monotonicamente para zero quando o tempo t aumenta.

3.6 O esquema NSFD-2

O esquema NSFD-2 que apresentamos a seguir difere dos esquemas anteriores na aproximação da primeira derivada no tempo e principalmente na segunda derivada no espaço, pois aqui aproximamos u_t da seguinte forma:

$$u_t(x_j, t_n) \approx (1 - \epsilon) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \epsilon \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (3.17)$$

e para segunda derivada no espaço usamos a seguinte aproximação

$$u_{xx}(x_j, t_n) \approx \frac{u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (3.18)$$

De acordo com as aproximações acima escrevemos a equação (3.21) da seguinte forma

$$(1 - \epsilon) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \epsilon \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \tau_0 \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (3.19)$$

Como definido no esquema NSFD-1 anteriormente tomamos $R = (\Delta t)/(\Delta x)^2$, $\beta = (\Delta t)/\tau_0$ e reorganizamos (3.19) como

$$u_j^{n+1}(1 - \alpha/2 + R + \beta^{-1}) = u_j^{n-1}(\alpha/2 - R - \beta^{-1}) + u_j^n(1 - \alpha + 2\beta^{-1}) + R(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n). \quad (3.20)$$

De acordo com Mickens e Jordan [14], para garantir a positividade forçaremos o coeficiente de u_j^{n-1} se igualar a R o que determina α em função de R e β , ou seja,

$$\alpha = 2(2R + \beta^{-1}). \quad (3.21)$$

Substituindo α na equação (3.20) chegamos a seguinte expressão de cálculo computacional:

$$u_j^{n+1} = \frac{Ru_j^{n-1} + (1 - 4R)u_j^n + R(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{1 - R}. \quad (3.22)$$

Assim como no NSFD-1 fixamos $R=1/4$, e portanto, a equação (3.22) se reduz ao que Mickens e Jordan [14] chamam de "Nonstandard Finite Difference Scheme" e que chamamos no início do capítulo de NSFD-2. Assim,

$$u_j^{n+1} = \frac{u_j^{n-1} + (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{3}. \quad (3.23)$$

Verificamos, que assim como no esquema Usual, o valor de u_j^{n+1} depende diretamente de u_j^{n-1} . Para calcular o valor de u_j^{-1} usaremos novamente a aproximação dada por

$$u_j^1 \approx u_j^0 - \frac{\pi^2 \beta (\Delta t)}{2} \sin[\pi j (\Delta x)] \quad ; \quad (j = 1, 2, 3, \dots, J - 1), \quad (3.24)$$

Uma característica importante é que o esquema NSFD-2 além de depender diretamente de u_j^{n-1} também está em função de τ_0 , pois $\beta = \Delta t / \tau_0$, o que não ocorre com o NSFD-1 apresentado na seção anterior. Isso sugere que o esquema (3.23) seja uma aproximação para uma equação de ondas. Para verificar esse fato vamos proceder da seguinte forma:

$$u_j^{n+1} = \frac{u_j^{n-1} + (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{3} \Rightarrow 3u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) \quad (3.25)$$

$$2u_j^{n+1} + u_j^{n+1} - u_j^{n-1} - 2u_j^n = (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (3.26)$$

Somando e subtraindo u_j^{n-1} , obtemos

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} + 2u_j^{n+1} - u_j^{n-1} - u_j^{n-1} = (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (3.27)$$

Logo,

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} + 2(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) = (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (3.28)$$

Portanto, a equação acima pode ser escrita da seguinte maneira

$$\Delta t^2 \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} + 2(2\Delta t) \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \Delta x^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad (3.29)$$

Assim, se $u_t(x_j, t_n) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}$, $u_{tt}(x_j, t_n) \approx \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2}$ bem com

$$u_{xx}(x_j, t_n) \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2},$$

então o esquema que anteriormente foi chamado de NSFD-2 é uma aproximação para a seguinte equação perturbada de propagação de ondas

$$(\Delta t)^2 u_{tt}(x_j, t_n) - (\Delta x)^2 u_{xx}(x_j, t_n) + 4(\Delta t)u_t(x_j, t_n) = 0. \quad (3.30)$$

3.7 Análise da Estabilidade do esquema NSFD-2

O esquema NSFD-2 é estável e para mostrar a estabilidade vamos supor uma solução do tipo $u_j^n = C_n e^{ij\theta}$. Substituindo essa solução no esquema NSFD-2 temos

$$3C_{n+1}e^{ij\theta} = C_{n-1}e^{ij\theta} + (C_n e^{ij\theta} e^{i\theta} + C_n e^{ij\theta} e^{-i\theta}). \quad (3.31)$$

Dividindo a expressão acima por $e^{ij\theta}$ chegamos a

$$3C_{n+1} = C_{n-1} + (C_n e^{i\theta} + C_n e^{-i\theta}), \quad (3.32)$$

e conseqüentemente

$$3C_{n+1} - 2C_n \cos(\theta) - C_{n-1} = 0, \quad (3.33)$$

cuja equação característica é dada por

$$3r^2 - 2r \cos(\theta) - 1 = 0. \quad (3.34)$$

Segue que as relações entre as raízes r_1 e r_2 são dadas por

$$r_1 + r_2 = \frac{2}{3} \cos(\theta), \quad ; \quad r_1 r_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow r_2 = -\frac{1}{3r_1}. \quad (3.35)$$

Como $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$

$$-1 \leq \frac{2}{3}(r_1 + r_2) \leq 1. \quad (3.36)$$

Substituindo $r_2 = -1/3r_1$ na relação anterior, obtemos

$$-1 \leq \frac{2}{3}\left(r_1 - \frac{1}{3r_1}\right) \leq 1 \Rightarrow -2r_1 \leq 3r_1^2 - 1 \leq 2r_1. \quad (3.37)$$

Analisando a desigualdade anterior verificamos que $\frac{1}{3} \leq r_1 \leq 1$, o que se encaixa dentro do critério de Von Neumann. Procedendo de maneira análoga com r_2 verifica-se que $-1 \leq r_1 \leq -\frac{1}{3}$, o que também está dentro do critério de Neumann. Portanto, mostramos que o esquema NSFD-2 é estável.

É importante mencionar que segundo Mickens e Jordan [14] as relações abaixo também devem ser satisfeitas

$$\tau_0 \ll 1, \quad 0 < \tau_0 \ll \tau_c \ll 1, \quad \beta \ll 1. \quad (3.38)$$

3.8 Resultados numéricos

Nas figuras 3.5 - 3.10, os NSFD's são comparados com a solução exata da equação de Maxwell-Cattaneo apresentada no primeiro capítulo. Observando as figuras 3.5 - 3.8 onde $\tau_0 = \tau_c$ e $\tau_0 = 0.01(\tau_c)$, percebemos que os NSFD's apresentam praticamente os mesmos comportamentos [14].

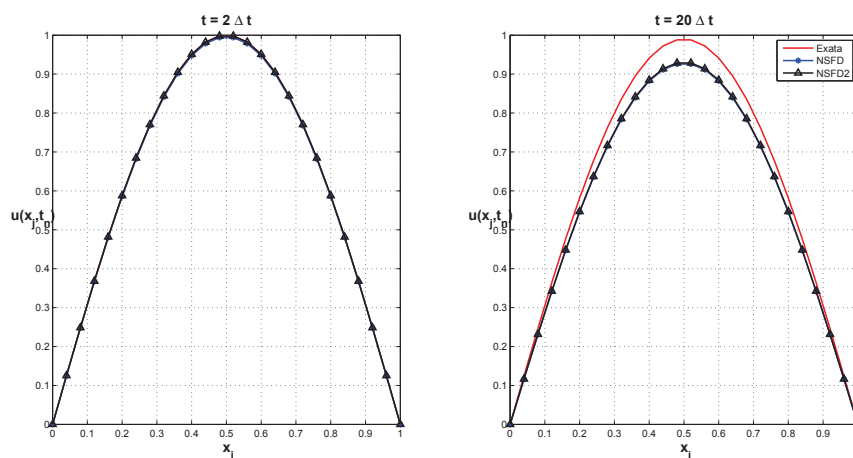


Figura 3.5: $t = k(\Delta t)$; $k = 2, 20$; $\Delta t = 0.0004$; $\Delta x = 0.04$; $\tau_0 = \tau_c$

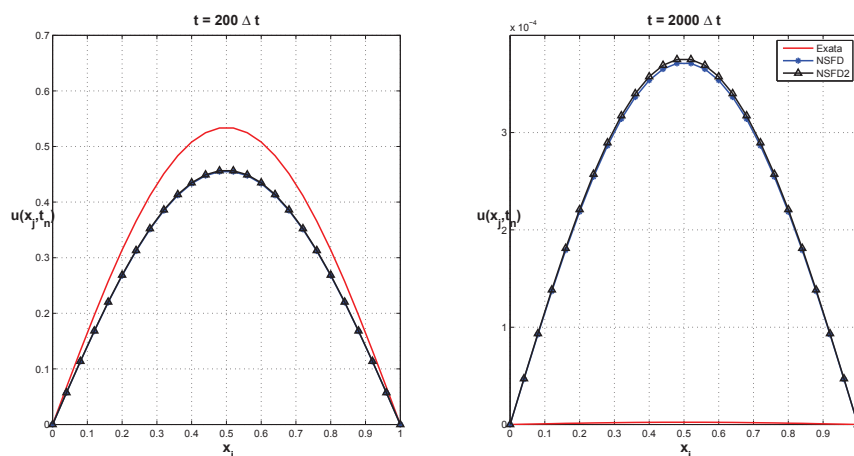


Figura 3.6: $t = k(\Delta t)$; $k = 200, 2000$; $\Delta t = 0.0004$; $\Delta x = 0.04$; $\tau_0 = \tau_c$

Quando reduzimos o valor de τ_0 e permanecemos com $\beta < 1$ nas figuras 3.7 e 3.8, percebemos uma melhora na precisão de nossas soluções numéricas [14].

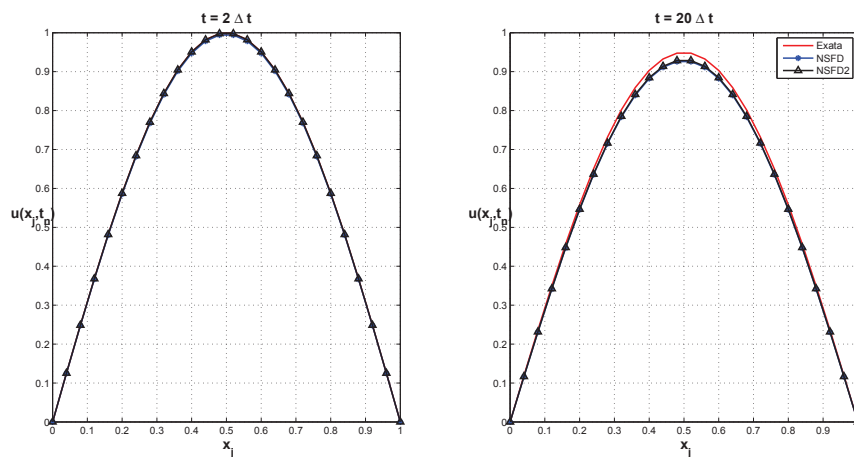


Figura 3.7: $t = k(\Delta t)$; $k = 2, 20$; $\Delta t = 0.0004$; $\Delta x = 0.04$; $\tau_0 = (0.1)\tau_c$

Para plotarmos os gráficos das figuras 3.9 e 3.10 mudamos os valores de Δt e Δx de modo que R permaneça igual a $1/4$ e a interpretação feita anteriormente de que os NSFD's apresentam visualmente os mesmos resultados permanece .

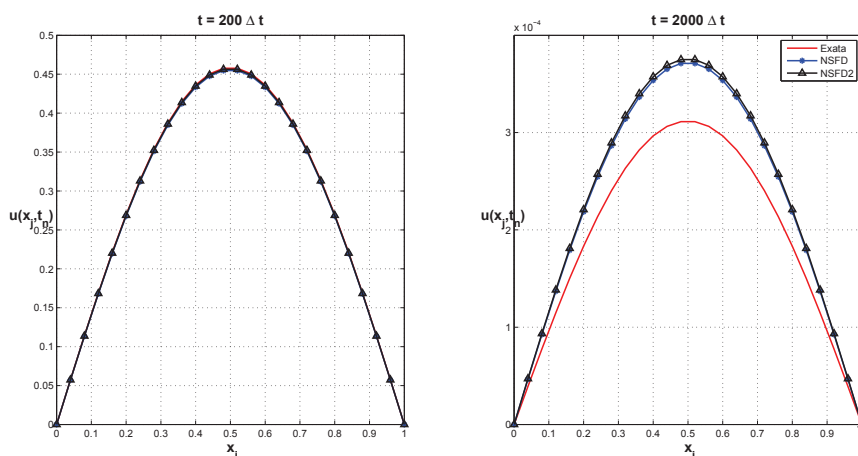


Figura 3.8: $t = k(\Delta t)$; $k = 200, 2000$; $\Delta t = 0.0004$; $\Delta x = 0.04$; $\tau_0 = (0.1) \cdot \tau_c$

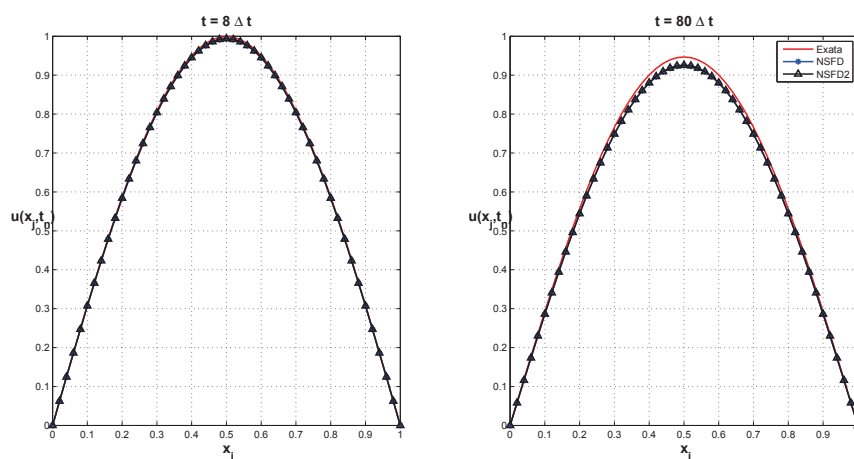


Figura 3.9: $t = k(\Delta t)$; $k = 8, 80$; $\Delta t = 0.0001$; $\Delta x = 0.02$; $\tau_0 = (0.1) \cdot \tau_c$

Nas figuras 3.11 - 3.14 , onde $\tau_0 = 0.0001\tau_c$ os dois métodos são comparados com o caso exato da equação do calor e o esquema NSFD-1 se destaca sendo uma ótima aproximação para a solução exata , o que já era de se esperar pois ambos independem de τ_0 , porém mostraremos no início do capítulo seguinte mais um motivo para essa boa aproximação que é o fato do esquema NSFD-1 ser uma aproximação para uma Equação Diferencial Parabólica muito semelhante a equação do calor, enquanto que o NSFD-2 é uma aproximação para uma Equação

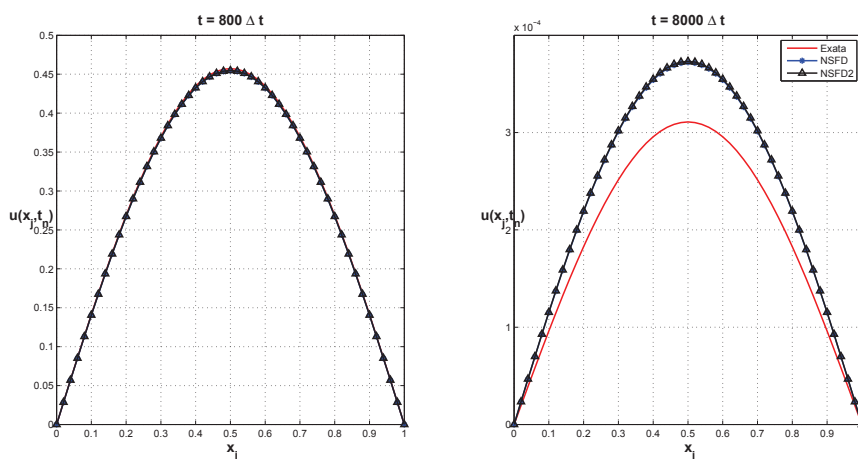


Figura 3.10: $t = k(\Delta t)$; $k = 800, 8000$; $\Delta t = 0.0001$; $\Delta x = 0.02$; $\tau_0 = (0.1) \cdot \tau_c$

Diferencial Parcial Hiperbólica o que contribui para o fato do esquema NSFD-2 divergir bastante da solução exata, além do fato mencionado por Mickens e Jordan [14] de que a desigualdade (3.65) $\beta < 1$ ter sido severamente violada .

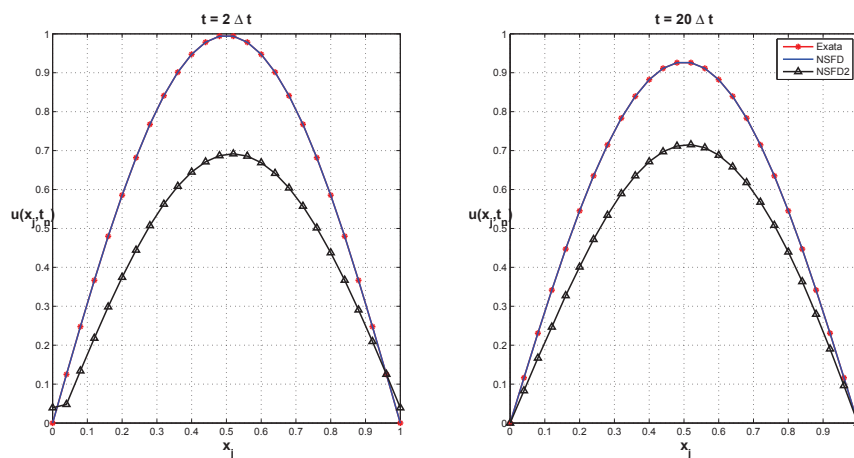


Figura 3.11: $u t = k(\Delta t)$; $k = 2, 20$; $\Delta t = 0.0004$; $\Delta x = 0.04$; $\tau_0 = (0.0001) \cdot \tau_c$

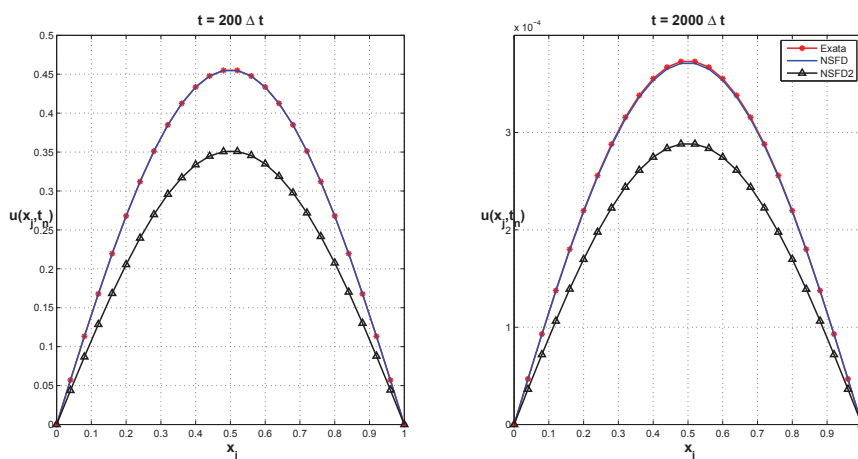


Figura 3.12: $t = k(\Delta t)$; $k = 200, 2000$; $\Delta t = 0.0004$; $\Delta x = 0.04$; $\tau_0 = (0.0001) \cdot \tau_c$

É importante salientar que nas figuras 3.13 e 3.14 fizemos uma redução de $\beta \approx 157,914$ para $\beta \approx 39,478$, mantendo τ_0 fixo ($\tau_0 = 0,0001$) τ_c e obtivemos uma melhora significativa na precisão do NSFD-2 .

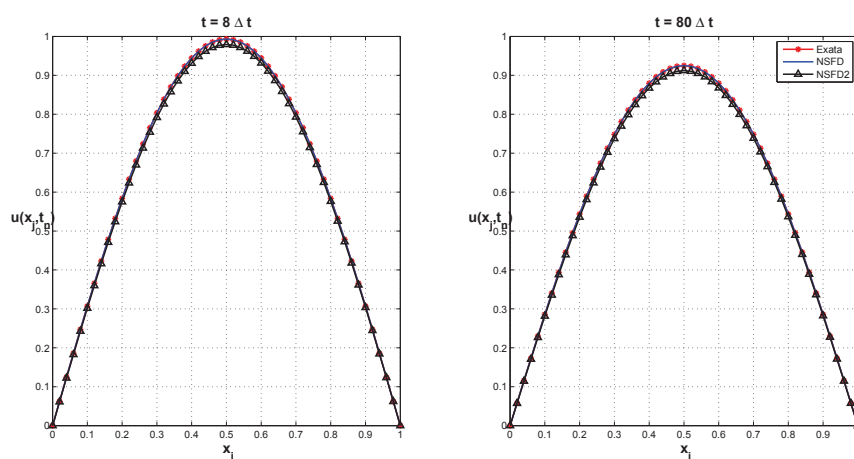


Figura 3.13: $t = k(\Delta t)$; $k = 8, 80$; $\Delta t = 0.0001$; $\Delta x = 0.02$; $\tau_0 = (0.0001) \cdot \tau_c$

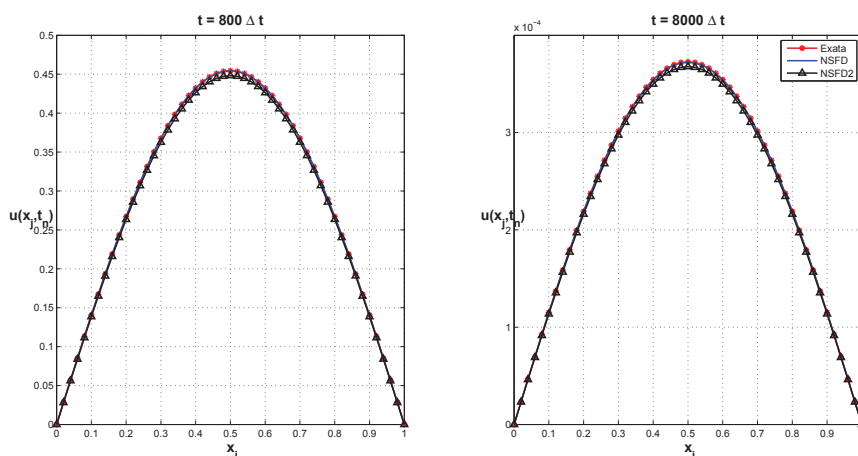


Figura 3.14: $t = k(\Delta t)$; $k = 800, 8000$; $\Delta t = 0.0001$; $\Delta x = 0.02$; $\tau_0 = (0.0001) \cdot \tau_c$

Notemos por fim , que nas figuras 3.15 e 3.16 temos as melhores aproximações, apesar da condição $\beta < 1$ ser claramente violada, porém o valor de τ_0 continua muito pequeno satisfazendo a desigualdade $0 < \tau_0 < \tau_c < 1$ o que nos faz concluir que a condição $\tau_0 < 1$ é mais importante em termos de precisão do que $\beta < 1$.

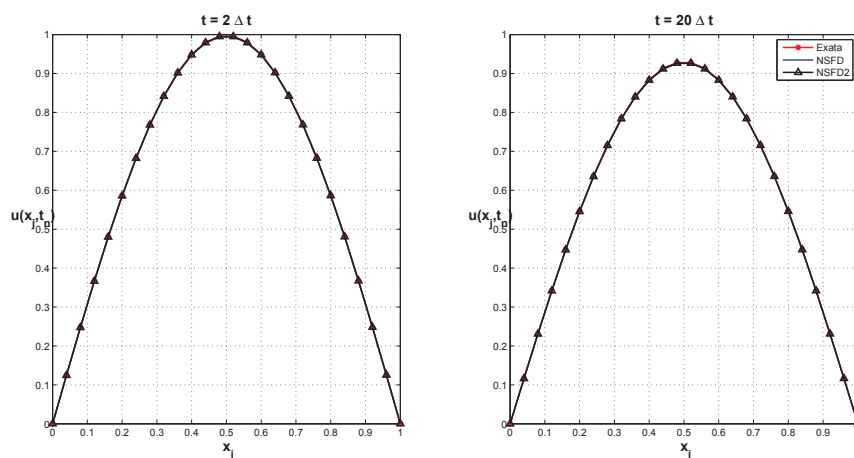


Figura 3.15: $t = k(\Delta t)$; $k = 200, 2000$; $\Delta t = 0.0004$; $\Delta x = 0.04$; $\tau_0 = (0.0001) \cdot \tau_c$

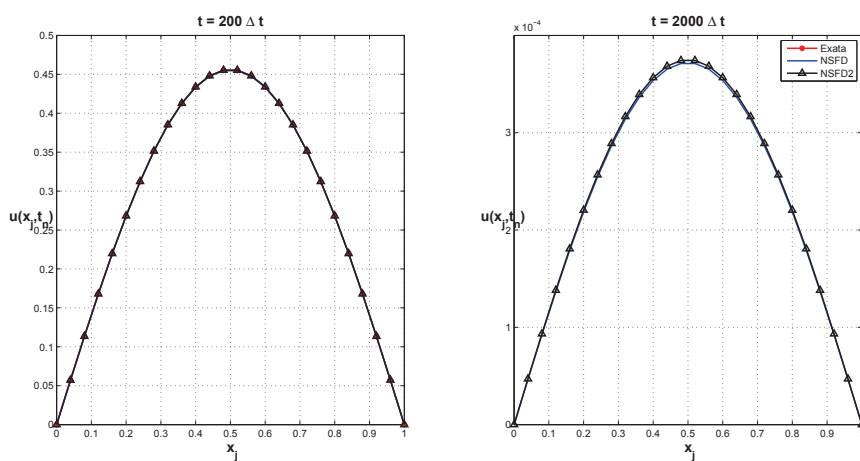


Figura 3.16: $t = k(\Delta t)$; $k = 200, 2000$; $\Delta t = 0.0004$; $\Delta x = 0.04$; $\tau_0 = (0.0001) \cdot \tau_c$

Capítulo 4

Análise das Diferenças Finitas

Não-usuais através de suas Energias

4.1 Energia Numérica do Esquema de Diferença Finita Usual

Tomando como base a energia da solução analítica apresentada no primeiro capítulo, definimos a energia do esquema (3.1) como:

$$E_{usual}^n := \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left[\tau_0 \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right]. \quad (4.1)$$

Proposition 4.1.1 *Para todos Δt e Δx e energia E_{usual}^n é tal que*

$$E_{usual}^n \leq E_{usual}^0, \quad \forall n > 0. \quad (4.2)$$

Prova: De fato, o esquema (3.1) é dado por

$$\tau_0 \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (4.3)$$

Multiplicamos (4.3) por $u_j^{n+1} - u_j^{n-1}$ e somamos para $j = 1, \dots, J$. Segue que

$$\begin{aligned} \frac{\tau_0}{(\Delta t)^2} \sum_{j=1}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 - \frac{\tau_0}{(\Delta t)^2} \sum_{j=1}^J (u_j^n - u_j^{n-1})^2 - \sum_{j=1}^J \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \\ = - \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Observando agora apenas a parcela dada por

$$\sum_{j=1}^J \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}), \quad (4.5)$$

procedemos com a seguinte distribuição:

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{j=1}^J [(u_{j+1}^n - u_j^n) + (u_{j-1}^n - u_j^n)] [-(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) + (u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}) + (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n-1})] \quad (4.6)$$

Fazendo as distribuições no produto acima e substituindo na equação (4.4), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \tau_0 \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \sum_{j=1}^J \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1})(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x} - \sum_{j=1}^J \tau_0 \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\ + \sum_{j=1}^J \frac{(u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1})(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x} + \frac{S}{(\Delta x)^2} \leq 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde

$$S = \sum_{j=1}^J [u_j^n u_j^{n+1} - u_j^n u_j^{n-1} + u_j^{n-1} u_{j-1}^n - u_j^{n+1} u_{j-1}^n - u_{j+1}^{n+1} u_{j+1}^n + u_{j+1}^{n+1} u_j^n + u_{j+1}^n u_{j+1}^{n-1} - u_{j+1}^{n-1} u_j^n]. \quad (4.8)$$

Usando a identidade dada por

$$\sum_{j=1}^J u_{j+1}^{n+1} u_{j+1}^n = \sum_{j=1}^J (u_j^{n+1} u_j^n) + u_{J+1}^{n+1} u_{J+1}^n - u_1^{n+1} u_1^n, \quad (4.9)$$

e considerando as condições de contorno de Dirichlet $u_0^n = u_{J+1}^n = 0$, $\forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, N, N+1$, podemos reescrever S como

$$S = u_1^{n+1} u_1^n - u_1^n u_1^{n-1} = (u_1^{n+1} - u_0^{n+1})(u_1^n - u_0^n) - (u_1^n - u_0^n)(u_1^{n-1} - u_0^{n-1}). \quad (4.10)$$

Substituindo S em (4.7), obtemos o resultado desejado, isto é,

$$E_{usual}^n - E_{usual}^{n-1} \leq 0 \Rightarrow E_{usual}^n \leq E_{usual}^0, \quad \forall n \geq 0. \quad (4.11)$$

■

4.2 Energia Numérica do Esquema NSFD-1

No capítulo 2, verificamos que o esquema NSFD-1 é uma aproximação para a equação

$$4\Delta t u_t(x, t) - (\Delta x)^2 u_{xx}(x, t) = 0. \quad (4.12)$$

Definimos então a energia ao nível do contínuo como

$$E_{NSFD-1}(t) := 2\Delta t \int_0^1 u^2(x, t) dx. \quad (4.13)$$

Proposition 4.2.1 (Dissipação de Energia) *O funcional $E_{NSFD-1}(t)$ em (4.13) satisfaz*

$$E_{NSFD-1}(t) \leq E_{NSFD-1}(0) \quad \forall t > 0; \quad (4.14)$$

Prova: A prova é imediata. Multiplicamos (4.12) por $u(x, t)$ e integramos no intervalo $[0, 1]$, resultando em

$$\frac{d}{dt} \left(2\Delta t \int_0^1 u^2(x, t) dx \right) = -(\Delta x)^2 \int_0^1 u_x^2(x, t), \quad (4.15)$$

de onde obtemos o resultado.

Definimos agora a energia numérica do esquema NSFD-1 como

$$E_{NSFD-1}^n := 2\Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J (u_j^n)^2, \quad (4.16)$$

e estabelecemos o seguinte resultado:

Proposition 4.2.2 (Dissipação de Energia) *Para todos Δt e Δx , a energia E_{NSFD-1}^n é decrescente, isto é,*

$$E_{NSFD-1}^{n+1} \leq E_{NSFD-1}^n \quad \forall n \geq 0. \quad (4.17)$$

Prova: Inicialmente temos

$$E_{NSFD-1}^{n+1} - E_{NSFD-1}^n = 2\Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J \left[(u_j^{n+1})^2 - (u_j^n)^2 \right], \quad (4.18)$$

e então

$$E_{NSFD-1}^{n+1} - E_{NSFD-1}^n = 2\Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} + u_j^n)(u_j^{n+1} - u_j^n). \quad (4.19)$$

Pela equação (3.23), segue que

$$E_{NSFD-1}^{n+1} - E_{NSFD-1}^n = 2\Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} + u_j^n)(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \frac{1}{4}, \quad (4.20)$$

e então

$$E_{NSFD-1}^{n+1} - E_{NSFD-1}^n = \frac{1}{2} \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J u_j^n (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + u_j^{n+1} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - 2u_j^{n+1} u_j^n. \quad (4.21)$$

Vamos simplificar cada parcela da soma acima. Considerando as condições de contorno homogêneas de Dirichlet, temos a seguinte igualdade para a primeira parcela:

$$\frac{1}{2} \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J u_j^n (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = -\frac{1}{2} \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J (u_{j+1}^n - u_j^n)^2. \quad (4.22)$$

Por outro lado, tendo em vista a desigualdade ($ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$) obtemos

$$\frac{1}{2} \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J u_j^{n+1} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) \leq \frac{1}{2} \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1})^2 + (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)^2 \quad (4.23)$$

$$\leq \frac{1}{2} \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1})^2 + (u_j^n)^2 \quad (4.24)$$

Para a última parcela, consideramos novamente a equação (3.23) para obter o seguinte resultado:

$$\Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J u_j^{n+1} u_j^n = \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J u_j^n (u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j-1}^n) \frac{1}{4} + (u_j^n)^2 \quad (4.25)$$

$$= -\Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J (u_{j+1}^n - u_j^n)^2 \frac{1}{4} + \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J (u_j^n)^2. \quad (4.26)$$

Portanto, usando as simplificações anteriores, segue que

$$E_{NSFD-1}^{n+1} - E_{NSFD-1}^n \leq -\frac{1}{2} \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J (u_{j+1}^n - u_j^n)^2 + \frac{1}{2} \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1})^2 + (u_j^n)^2 \quad (4.27)$$

$$+ \frac{1}{4} \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J (u_{j+1}^n - u_j^n)^2 - \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J (u_j^n)^2. \quad (4.28)$$

Pela definição de energia numérica do esquema NSFD-1, temos

$$E_{NSFD-1}^{n+1} - E_{NSFD-1}^n \leq -\frac{1}{4} \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J (u_{j+1}^n - u_j^n)^2 + \frac{1}{4} E_{NSFD-1}^{n+1} - \frac{1}{4} E_{NSFD-1}^n, \quad (4.29)$$

e portanto,

$$(1 - \frac{1}{4}) E_{NSFD-1}^{n+1} \leq (1 - \frac{1}{4}) E_{NSFD-1}^n \Rightarrow E_{NSFD-1}^{n+1} \leq E_{NSFD-1}^n, \quad \forall n \geq 0. \quad (4.30)$$

■

4.3 Decaimento Exponencial Numérico

Para mostrar que a energia numérica E_{NSFD-1}^n é exponencialmente estável é necessário inicialmente obtermos uma família de soluções. Já vimos anteriormente que o esquema NSFD-1 é equivalente com o esquema dado por

$$4\Delta t \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = (\Delta x)^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}, \quad (4.31)$$

Estabelecemos a seguinte assertiva:

Proposition 4.3.1 *A expressão*

$$u_j^n = (1 - \mu_k)^n \cdot \sin(k\pi x_j), \quad (4.32)$$

é uma família de soluções para a equação (4.31) em que $\mu_k = \sin^2\left(k\pi \frac{\Delta x}{2}\right)$, $k = 1, \dots, J$.

Prova: Para provar a proposição, vamos supor que a dependência do espaço e do tempo podem ser separados da seguinte forma

$$u_j^n = X_j T_n. \quad (4.33)$$

Substituindo (4.33) em (4.32), obtemos:

$$4\Delta t \frac{X_j T_{n+1} - X_j T_n}{\Delta t} = (\Delta x)^2 \frac{X_{j-1} T_n - 2X_j T_n + X_{j+1} T_n}{(\Delta x)^2}. \quad (4.34)$$

Como nosso interesse é obtermos apenas as soluções diferentes não-nulas, é razoável supor que $X_j \cdot T_n \neq 0$ e assim teremos a seguinte identidade:

$$\frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} = (\Delta x)^2 \frac{X_{j-1} - 2X_j + X_{j+1}}{4(\Delta x)^2 X_j}. \quad (4.35)$$

Na expressão acima o lado esquerdo depende apenas de n enquanto que o lado direito apenas de j , logo supomos que ambas as expressões são iguais a uma constante comum $-\mu$, e temos as seguintes equações desacopladas

$$(\Delta x)^2 \frac{X_{j-1} - 2X_j + X_{j+1}}{4(\Delta x)^2} = -\mu \cdot X_j \quad (4.36)$$

$$T_{n+1} - T_n = -\mu T_n. \quad (4.37)$$

Consequentemente,

$$\frac{X_{j-1} - 2X_j + X_{j+1}}{(\Delta x)^2} = -\frac{4\mu}{(\Delta x)^2} \cdot X_j \quad (4.38)$$

$$T_{n+1} - T_n = -\mu T_n. \quad (4.39)$$

Notemos que

$$T_{n+1} = (1 - \mu)T_n = (1 - \mu)^2 T_{n-1} = (1 - \mu)^3 T_{n-2} = \dots, \quad (4.40)$$

e da sequência de igualdades acima é possível verificar (ver [1]) que

$$T_n = (1 - \mu)^n, \quad \forall n. \quad (4.41)$$

Além disso, temos que

$$\frac{X_{j-1} - 2X_j + X_{j+1}}{(\Delta x)^2} = -\lambda X_j, \quad \lambda = \frac{4\mu}{(\Delta x)^2}. \quad (4.42)$$

De acordo com Tveito e Winther [1], os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, são da forma:

$$\lambda_k = \frac{4}{(\Delta x)^2} \sin^2 \left(k\pi \frac{\Delta x}{2} \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (4.43)$$

e seus correspondente autovetores (ou auto-funções) $X_k = (X_{k,1}, X_{k,2}, X_{k,3}, \dots, X_{k,n}) \in R^n$, tem componentes dadas por:

$$X_{k,j} = \sin(k\pi x_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (4.44)$$

Portanto,

$$u_j^n = (1 - \mu_k)^n \sin(k\pi x_j), \quad (4.45)$$

é uma família de soluções para a equação (4.31) onde

$$\mu_k = \sin^2 \left(k\pi \frac{\Delta x}{2} \right), \quad k = 1, \dots, J. \quad (4.46)$$

■

Segue nosso resultado sobre decaimento exponencial.

Teorema 4.1 *Se $u_j^n = (1 - \mu_k)^n \sin(k\pi x_j)$ é solução do NSFD-1 e E_{NSFD-1}^n sua respectiva energia, então E_{NSFD-1}^n é exponencialmente estável.*

Prova: De fato, temos que:

$$E_{NSFD-1}^n = 2\Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J (1 - \mu_k)^{2n} \sin^2(k\pi x_j), \quad (4.47)$$

e como $(1 - \mu_k)^{2n}$ não depende de j podemos escrever E_{NSFD-1}^n da seguinte forma:

$$E_{NSFD-1}^n = 2\Delta t \Delta x (1 - \mu_k)^{2n} \sum_{j=0}^J \sin^2[k\pi x_j]. \quad (4.48)$$

Para $n = 0$ a equação acima se reduz a

$$E_{NSFD-1}^0 = 2\Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J \sin^2(k\pi x_j), \quad (4.49)$$

e conseqüentemente ,

$$E^n = E^0(1 - \mu_k)^{2n}. \quad (4.50)$$

Observemos ainda que como $\mu_k = \sin^2(k\pi \frac{\Delta x}{2})$, então $\mu_1 \leq \mu_n$ para todo $n = 1, 2, \dots, k$, e portanto:

$$E^n \leq E^0(1 - \mu_1)^{2n}. \quad (4.51)$$

Tomando a aproximação $1 - \mu_1 \approx e^{-\mu_1}$ concluímos que o decaimento é do tipo exponencial, isto é,

$$E^n \leq E^0 e^{-2n\mu_1}. \quad (4.52)$$

■

4.4 Energia Numérica do Esquema NSFD-2

De maneira análoga ao que fizemos com o esquema NSFD-1, consideremos a equação

$$(\Delta t)^2 u_{tt}(x, t) - (\Delta x)^2 u_{xx}(x, t) + 4\Delta t u_t(x, t) = 0, \quad (4.53)$$

de onde extraímos a energia dada por

$$E_{NSFD-2}(t) := \frac{\Delta t^2}{2} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\Delta x^2}{2} \int_0^1 u_x^2 dx. \quad (4.54)$$

Como a equação (4.53) possui um termo de amortecimento, sua energia é tal que

$$E_{NSFD-2}(t) \leq E_{NSFD-2}(0), \quad \forall t > 0. \quad (4.55)$$

Para o esquema numérico NSFD-2 definimos a seguinte energia numérica:

$$E_{NSFD-2}^n := \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \Delta t^2 \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \Delta x^2 \left[\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right] \quad (4.56)$$

Proposition 4.4.1 (Dissipação de Energia) *Para todos Δt e Δx e energia E_{NSFD-2}^n é tal que*

$$E_{NSFD-2}^n \leq E_{NSFD-2}^0, \quad \forall n > 0. \quad (4.57)$$

Prova: A prova é análoga ao que foi feito na Proposição 4.1.1.

4.5 Conclusões sobre os NSFD's a partir das Energias Numéricas

Nesta seção faremos uma análise das conclusões de Mickens e Jordan [13] e [14] a respeito dos métodos de diferenças finitas não-usuais a partir dos gráficos das energias numéricas. Primeiramente comparamos as energias do esquema usual, da solução exata e do NSFD-1. Para obtermos uma melhor comparação fizemos uma normalização com os valores das energias da seguinte forma:

$$E^n = E^n / E^0 \quad \forall n > 0; \quad (4.58)$$

Segundo a análise feita por Mickens e Jordan [13] para t "grande" o NSFD tem um decaimento mais lento que o Esquema Usual, o que é confirmado quando analisamos em termos de energia. Se observarmos a figura (4.1) não perceberemos a diferença no decaimento das energias, porém esse gráfico é importante pois mostra que as energias analisadas de fato decrescem com um comportamento exponencial.

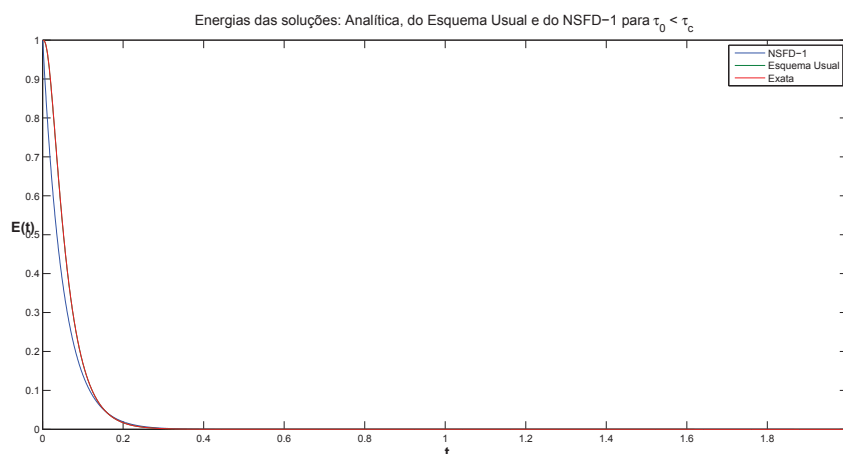


Figura 4.1: Comparação entre as energias com $\Delta t = 0.0004$; $\Delta x = 0.04$; $\tau_0 = \tau_c/2$

Para melhor visualização vamos na figura 4.2, aproximar ao ponto onde a mudança no comportamento do decaimento acontece, e aqui percebemos claramente que em um determinado

ponto o NSFD-1 passa a decair mais lento como afirmou Mickens e Jordan [13]

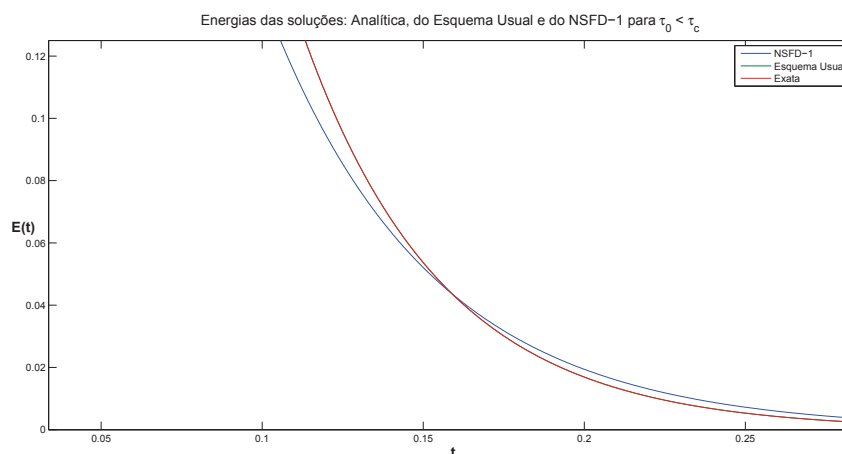


Figura 4.2: Comparação entre as energias com $\Delta t = 0.0004$; $\Delta x = 0.04$; $\tau_0 = \tau_c/2$

Segue abaixo uma tabela com os valores das energias nos pontos onde há a inversão no comportamento das energias, é importante verificarmos que Mickens [1] faz uma análise "saltando" de um $k = 200$ para um $k = 2000$ quando conclui sobre o comportamento do decaimento dos métodos e na tabela abaixo verifica-se com uma melhor precisão onde, em termos de energia, a inversão no decaimento ocorre (para k próximo de 400).

Energia / $t = k\Delta t$	k=394	k=395	k=396	k=397	k=398	k=399	k=400	k=401
Analítica	0.0450	0.0446	0.0442	0.0438	0.0434	0.0430	0.0426	0.0422
Usual	0.0450	0.0446	0.0442	0.0438	0.0434	0.0430	0.0426	0.0422
NSFD-1	0.0448	0.0445	0.0441	0.0438	0.0434	0.0431	0.0427	0.0424

A mesma conclusão é confirmada quando modificamos o valor de τ_0 .

Na figura (4.3) acima apesar do esquema usual se distanciar um pouco da solução exata ainda assim o esquema NSFD-1 no início possui um decaimento mais rápido e depois passa a ser mais lento que as demais energias. Nos números da tabela a seguir percebemos que para k

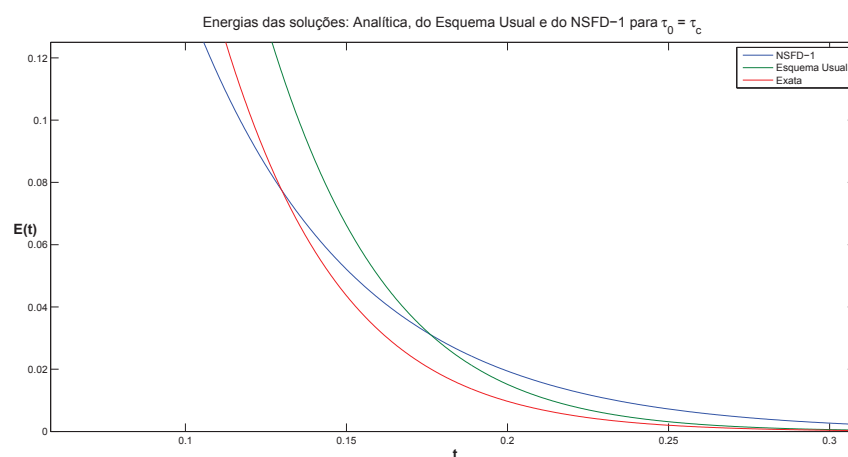


Figura 4.3: Comparação entre as energias com $\Delta t = 0.0004$; $\Delta x = 0.04$; $\tau_0 = \tau_c$

próximo de 325 o NSFD-1 passa ter decaimento mais lento que a solução exata, porém ainda decai mais rápido do que o esquema usual.

Energia / $t = k\Delta t$	k=323	k=324	k=325	k=326	k=327
Analítica	0.0790	0.0781	0.0773	0.0764	0.0755
Usual	0.1175	0.1162	0.1150	0.1137	0.1125
NSFD-1	0.0785	0.0779	0.0773	0.0767	0.0761

Percebemos numericamente através das tabelas que se $325 \leq k \leq 440$ o NSFD-1 tem um decaimento, em termos de energia, mais rápido do que o esquema usual e mais lento que a solução exata e observando a tabela abaixo verificamos que para um $k > 440$ o esquema NSFD-1 passa de vez a ter um decaimento mais lento do que as duas outras soluções.

Energia / $t = k\Delta t$	k=438	k=439	k=440	k=441	k=442
Analítica	0.0207	0.0204	0.0202	0.0199	0.0197
Usual	0.0319	0.0316	0.0312	0.0308	0.0305
NSFD-1	0.0317	0.0314	0.0312	0.0309	0.0307

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas Futuras

Esquemas numéricos em diferenças finitas constituem uma importante ferramenta para a análise de propriedades qualitativas de equações diferenciais parciais. É bem sabido também que é imprescindível o uso de métodos numéricos em equações que não possuem soluções analíticas.

Neste trabalho analisamos esquemas numéricos em diferenças finitas conhecidos como Não-usuais aplicados à equação de propagação de ondas de calor conhecida como equação de Maxwell-Cattaneo, em conformidade com os trabalhos de Mickens e Jordan [13, 14]. Tal equação corrige o paradoxo de propagação infinita de sinais imposto pela hipótese de Fourier em termoelasticidade linear. Além disso, uma solução para esta equação que seja fisicamente aceitável deve ser necessariamente positiva. Nessa direção, a relevância dos esquemas não-usuais reside no fato de que eles geram soluções positivas e limitadas.

Além da análise numérica dos resultados de Mickens e Jordan [13, 14], realizamos uma importante contribuição no que diz respeito a análise numérica das energias numéricas derivadas de tais esquemas. Identificamos precisamente as equação ao nível da dinâmica do contínuo que os esquemas NSFD representam, o que nos possibilitou construir as energias associadas. Nessa direção, nos foi possível corroborar os resultados apresentados por Mickens e Jordan [13] no que tange à importância dos esquemas NSFD.

Como continuidade de nossas investigações científicas, objetivamos aplicar os resultados deste trabalho aos conhecidos sistemas de Timoshenko [19]. Trata-se de um modelo acoplado de duas equações diferenciais parciais que governam a propagação de ondas em uma única estrutura do tipo vigas e placas. Em geral, no caso uni-dimensional, ele é descrito por

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + F_1 &= 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + F_2 &= 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T),\end{aligned}$$

onde ρ_1, ρ_2, κ e b são constantes positivas. Por F_1 e F_2 denotamos forças externas que podem ser representadas por mecanismos dissipativos tais como o atrito com o meio no qual a estrutura está imersa. Por exemplo, podemos considerar $F_1 = \gamma_1\varphi_t$ e $F_2 = \gamma_2\psi_t$ com $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Nesses casos, resulta na Lei de Dissipação de energia dada por

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\gamma_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx - \gamma_2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx, \quad (5.1)$$

onde $E(t)$ corresponde a energia dada por

$$E(t) := \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx.$$

Além das dissipações do tipo atrito, podemos considerar também hipóteses constitutivas de termoelasticidade linear bem como o conhecido efeito de memória. Um importante e conhecido resultado associado a sistemas dissipativos do tipo Timoshenko versa sobre o decaimento exponencial e polinomial da energia associada, no caso em que se considera o mínimo de dissipação. Nesse sentido, o decaimento exponencial da energia é obtido se, e somente se, vale a seguinte relação entre as velocidades de propagações de ondas:

$$\frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} = 0.$$

Resultados dessa natureza, é válido para o sistema de Timoshenko dado por

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x &= 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_3\theta_t - k\theta_{xx} + \delta\psi_{xt} &= 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T),\end{aligned}$$

onde foi considerado a hipótese de Fourier para condução de calor. Para outros resultados, veja os trabalhos de Rivera e Racke [7, 8, 9].

Portanto, o sistema hiperbólico-parabólico acima esta representando a condução de calor em uma estrutura do tipo Timoshenko com base na Lei de Fourier. Nesse sentido, para superar o paradoxo físico de propagação infinita de sinais, um modelo mais realístico surge com a hipótese de Maxwell-Cattaneo. Temos então o modelo hiperbólico dado por

$$\begin{aligned}\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \quad \text{in }]0, l[\times]0, \infty[, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x &= 0 \quad \text{in }]0, l[\times]0, \infty[, \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} &= 0 \quad \text{in }]0, l[\times]0, \infty[, \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x &= 0 \quad \text{in }]0, l[\times]0, \infty[, \end{aligned}$$

Recentemente, Santos *et al.* [11] provaram que o sistema acima é exponencialmente estável se, e somente se, vale a relação dada por:

$$\chi_0 := \left(\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 \kappa} \right) \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right) - \frac{\tau\rho_1\delta^2}{\rho_3\kappa}.$$

Soluções fisicamente aceitáveis para condução de calor θ , em ambos os casos supra citados, devem satisfazer $\theta(x, t) \geq 0$ para dados iniciais $\theta(x, 0) \geq 0$. Portanto, um grande número de problemas podem ser analisados do ponto de vista da análise numérica e computacional. Destacamos os seguintes:

- Construir esquemas numéricos em diferenças que evitem o conhecido fenômeno de *trancamento numérico* (do inglês "locking on shear force") [10];
- Construir esquemas numéricos que sejam consistentes no sentido de preservar o decaimento exponencial para os sistemas dissipativos de Timoshenko em termoelasticidade linear, considerando a relação entre as velocidades de propagação de ondas;
- Construir esquemas numéricos em diferenças finitas usuais e não usuais para analisar as questões de positividade de soluções para a condução de calor θ .

Referências Bibliográficas

- [1] A. Tveito and R. Winther, **Introduction to Partial Differential Equations: A Computational Approach**, Springer, 1998 2007.
- [2] Djairo Guedes de Figueiredo, **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**, 4ª Edição. Rio de Janeiro, IMPA (2005).
- [3] D. D. Joseph and L. Preziosi, **Heat Waves**, Reviews of Modern Physics, 1989.
- [4] D. D. Joseph and L. Preziosi, **Heat Waves**, Rev. Mod. Phys. 61, 41–73, 1989.
- [5] J. D. Smith, **Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods**, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, 1984.
- [6] J. E. Muñoz Rivera, **Estabilização de Semigrupos e Aplicações**, LNCC, Petrópolis 2007.
- [7] J.E. Muñoz Rivera e R. Racke, **Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems - global existence and exponential stability**, J. Math. Anal. Appl., 276 (2002), 248–278.
- [8] J.E. Muñoz Rivera e R. Racke, **Global stability for damped Timoshenko systems**, Discr. Cont. Dyn. Sys. B, 9 (2003), 1625–1639.
- [9] J.E. Muñoz Rivera e R. Racke, **Timoshenko systems with indefinite damping**, J. Math. Anal. Appl., 341 (2008), 1068-1083.
- [10] T. R. Hughes, R. Taylor e L. Kanoknukulchai, **A simple and efficient finite element method for plate bending**, Internat. J. Numer. Methods Engrg., Vol 11(1977), 1529–1543;

-
- [11] M. L. Santos, D. S. Almeida Júnior e J. E. Munõz Rivera, **The stability number of the Timoshenko system with second sound**, Journal of Differential Equations, 253 (2012) 27152733.
- [12] R. E. Mickens, **Nonstandard finite difference models of differential equations**, World Scientific Publishing, Singapore, 1994.
- [13] R. E. Mickens and P. M. Jordan, **A Positivity-Preserving Nonstandard Finite Difference Scheme for the Damped Wave Equation**, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Volume 20 (2004), Issue 5, 639-649.
- [14] R. E. Mickens and P. M. Jordan, **A new positivity-preserving nonstandard finite difference scheme for the DWE**, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Volume 21 (2005), Issue 5, 976-985.
- [15] R. E. Mickens, **Relation between the time and space step-sizes in nonstandard finite-difference schemes for the Fisher equation**, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Volume 13 (1997), 51.
- [16] R. Anguelov, P. Kama, J.M.-S. Lubuma, **On non-standard finite difference models of reaction-diffusion equations**, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 175 (2005), 11-29
- [17] R. E. Mickens, **Exact solutions to a finite-difference model of a nonlinear reaction-advection equation: Implications for numerical analysis**, Numerical Methods for partial Diferencial Equations 5 (1989),
- [18] R. A. Fisher, **Ann. Eugenics** 7, 355 (1937).
- [19] S. P. Timoshenko, **On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars**. Philosophical Magazine, 6(1921), 744-746;