

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E
ESTATÍSTICA

Mirelson Martins Freitas

Análise matemática de alguns problemas variacionais
generalizados

BELÉM- PA

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E
ESTATÍSTICA

Mirelson Martins Freitas

**Análise matemática de alguns problemas variacionais
generalizados**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME) da Universidade Federal do Pará- UFPA para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz.

BELEM - PA

2013

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

Mirelson Martins Freitas

Análise matemática de alguns problemas variacionais generalizados

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME) da Universidade Federal do Pará- UFPA para obtenção de título de Mestre em Matemática:

Prof^a. Dr^a. Cristina Lúcia Dias Vaz - UFPA - Orientadora

Prof. Dr. Anderson L. A. Araújo - UFV

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva - UFPA

Profa. Dra. Rúbia G. Nascimento - UFPA

DATA DA AVALIAÇÃO: 18 / 02 /2013

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por dar-me forças para realizar este trabalho.

À minha mãe, Maria Justina da Silva, pelo apoio incondicional nas horas difíceis e por sua contribuição durante a minha jornada acadêmica.

À professora Cristina Vaz, minha orientadora e amiga. Pela orientação eficiente, mas especialmente pelo interesse, dedicação, apoio e valiosas sugestões em todas as fases de preparação deste trabalho.

Aos amigos, pelo companheirismo nos bons e maus momentos.

Aos colegas do curso de Mestrado, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME.

Resumo

Neste trabalho investigaremos métodos indiretos para resolver problemas variacionais clássicos e caracterizamos a condição necessária para mínimos de funcionais integrais, conhecida como equação de Euler-Lagrange. Em seguida, aplicamos métodos diretos para minimização de funcionais integrais definidos na classe das funções absolutamente contínuas e provaremos o importante Teorema de existência de Tonelli. Também provaremos o Teorema de regularidade parcial de mínimos de funcionais para lagrangeanos que satisfazem uma certa condição de crescimento. Aplicaremos estes resultados no Problema de Sturm-Liouville.

Palavras-chave: Equação de Euler-Lagrange, Cálculo Variacional, Teorema de existência e regularidade de Tonelli.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Notações e espaços funcionais	5
1.1.1 Funções contínuas e Hölder contínuas	5
1.1.2 Elementos da Análise Funcional	7
1.1.3 Elementos de Medida e Integração	9
1.1.4 Os espaços L^p	9
1.1.5 Convolução e regularização	13
2 Método Indireto	14
2.1 n -ésima variação de um funcional	14
2.2 Equação de Euler-Lagrange	17
2.2.1 Caso $N = 1$	17
2.2.2 Caso $N > 1$	22
2.3 O problema da Braquistócrona	28
3 Espaços de Sobolev	30
3.1 O princípio de Dirichlet	30
3.2 Os espaços $H^{1,p}(I)$ e $H_0^{1,p}(I)$	32
3.2.1 O espaço $H_0^{1,p}(I)$	39
3.2.2 Compacidade fraca em $H^{1,1}(I)$	49

3.2.3	Os espaços $H^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ e $H_0^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$	51
3.3	Funções absolutamente contínuas	51
4	Resultados de existência	57
4.1	Condições para semicontinuidade	57
4.2	Resultados de Existência	62
4.2.1	As ideias de Tonelli	62
4.2.2	O Teorema de Tonelli	64
4.2.3	Aplicações do Teorema de Tonelli	66
5	Resultados de regularidade	72
5.1	O caso regular	72
5.2	Regularidade parcial de Tonelli	78
6	Aplicações	85
6.1	Problema de valor de fronteira	85
6.2	O problema de Sturm-Liouville	87
	Referências Bibliográficas	96

Introdução

Resolver um problema de otimização significa, como o próprio nome diz, buscar um resultado ótimo, de acordo com algum critério. Em Matemática, os problemas de otimização são representados por problemas de máximos e mínimos sendo frequentes os termos: lucro máximo, custo mínimo, tempo mínimo, tamanho ótimo e caminho mais curto. Uma área da Matemática que trata de problemas de otimização é conhecida como Cálculo Variacional, que generaliza a teoria de máximos e mínimos do Cálculo Diferencial.

Segundo a lenda, foi a Rainha Dido de Cartago a primeira pessoa a tratar brilhantemente um desses problemas. Foi prometido a Dido a extensão de terra que ela pudesse cercar com o couro de um boi. Ela preparou uma extensa correia com o couro do boi e cercou um terreno semi-circular, beirando o Mar Mediterrâneo. Essa é a lendária história da fundação de Cartago contada por Virgílio no livro Eneida.

Embora o Cálculo Variacional tenha seu início na Grécia antiga, foi a partir do século XVII, na Europa Ocidental, que um progresso substancial foi feito. Em 1696, I. Newton (1642-1727) usou princípios variacionais para determinar a forma de um corpo que se move no ar com menor resistência possível.

Os irmãos Jacob Bernoulli (1654-1705) e Jean Bernoulli (1667-1748) são frequentemente considerados os inventores do Cálculo Variacional. Jean Bernoulli por ter resolvido, em 1696, o problema da braquistócrona: encontrar a curva que minimiza o tempo de queda de um corpo, entre dois pontos num plano vertical, liberado de um ponto inicial e sujeito apenas a força da gravidade. E Jacob Bernoulli por tratar problemas isoperimétricos: caminhos planos fechados de perímetro fixo que delimitam uma área máxima. O problema de Dido é um exemplo de problema isoperimétrico.

Outros importantes problemas do Cálculo Variacional foram tratados no século XVII

tais como o trabalho de Fermat em ótica geométrica (1662); o problema de I. Newton (1685) em movimento de corpos em fluidos. Porém, um importante avanço foi feito pelos matemáticos L. Euler (1701-1783) e J. L. Lagrange (1736-1813) quando encontraram um método sistemático para tratar tais problemas, hoje conhecido como *Equação de Euler-Lagrange*.

No século XIX, provavelmente um dos problemas mais famosos do Cálculo Variacional foi o *Problema de Dirichlet*. Este problema apareceu em 1857 quando B. Riemann assumiu, sem provar, um princípio que utilizou como base da sua teoria sobre as funções complexas, por ele chamado *Princípio de Dirichlet*. O princípio garante a existência de mínimo para um problema bidimensional e sua importância é devido a sua relação com a equação de Laplace.

Muitas contribuições foram feitas para resolução deste problema por Dirichlet, Gauss, K. Weierstrass, Thompson, B. Riemann, entre outros, mas foi D. Hilbert, no início do século XX, quem resolveu o problema de Dirichlet e, posteriormente, também H. Lebesgue e L. Tonelli. O método proposto por Hilbert foi, essencialmente, o que hoje é conhecido como *Método Direto*.

Destacamos que o problema de Dirichlet foi importante no desenvolvimento da Análise em geral, em particular da Análise Funcional, da Teoria de Medida, da Teoria das distribuições, dos Espaços de Sobolev e das Equações Diferenciais Parciais.

Outro problema importante do Cálculo Variacional é o *problema de superfícies mínimas*, formulado por J.L. Lagrange em 1762. O problema consiste em encontrar a superfície de menor área para um fronteira dada. Uma variante deste problema é conhecido como *problema de Plateau*.

Muitos matemáticos tentaram resolver este problema, entre eles destacamos Haar, Legendre, K. Weierstrass, B. Riemann, H.A. Schwarz. Em 1930, J. Douglas e T. Rado, independentemente um do outro, apresentam a primeira resolução completa do problema e em 1936, Douglas recebeu a medalha Field por este trabalho. Posteriormente muitas contribuições foram feitas por R. Courant, Leray, Mc Shane, Morrey, Morse, L. Tonelli, entre outros.

A principal ideia do método indireto do Cálculo Variacional é determinar uma *condição*

necessária de minimização. Por exemplo, se um funcional $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em u para u em alguma classe de funções \mathcal{C} então a derivada $\mathcal{F}'(u)$ de \mathcal{F} deve se anular em u . Se \mathcal{F} é um *funcional integral* então a condição necessária $\mathcal{F}'(u) = 0$ de minimização é, usualmente, uma equação diferencial, chamada equação de Euler-Lagrange. Como esta condição é apenas necessária, precisamos primeiro garantir que a solução do problema existe. Esta é uma questão bastante complicada. Por exemplo, não é evidente que um candidato a mínimo de classe C^1 pertence necessariamente a classe C^2 , ou seja, é solução da equação de Euler-Lagrange. Para garantirmos a regularidade C^2 devemos provar *resultados de regularidade*, o que, usualmente, exigem condições de elipcidade.

Outra dificuldade é que nem sempre uma dada equação de Euler-Lagrange tem uma solução clássica que satisfaz as condições de fronteira do problema de minimização e mesmo quando tal solução existe pode não ser única. Portanto, precisamos de condições suficientes para garantirmos a existência e unicidade da solução.

Por outro lado, a abordagem por método indireto para o caso multidimensional é bastante complicada, pois o problema diferencial pode ser tão complexo quanto o variacional.

Todas as dificuldades apresentadas pelo método indireto impulsionaram a busca por novos métodos, entre eles, o *Método Direto*. Tal método tem como principal característica construir uma sequência minimizante convergente de funcionais semicontínuos e limitados inferiormente e mostrar que a função limite desta sequência é a solução do problema variacional.

O conceito de semicontinuidade para funções de uma variável real foi introduzido por Baire, quem provou que, em compactos, funções reais semicontínuas assumem seus ínfimos. Tonelli usou o teorema de compacidade de Arzelá-Ascoli, o conceito de semicontinuidade de Baire e o método direto como ferramentas para provar a existência de de mínimos para problemas variacionais integrais unidimensionais.

Tonelli tratou problemas variacionais integrais do tipo

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx, \quad [a, b] \subset \mathbb{R}$$

com o lagrangiano $F(x, u, p)$ satisfazendo as seguintes condições:

$$F_{pp}(x, u, p) \geq 0, \quad F(x, u, p) \geq c_0|p|^m - c_1,$$

para algumas constantes $m > 1$, $c_0 > 0$ e $c_1 \geq 0$.

Tonelli trabalhou na classe das funções *absolutamente contínuas* com convergência uniforme. Ele formalizou, investigou e popularizou a ideia do método direto numa série de artigos, nos primeiros 30 anos do século XX.

O principal objetivo desta dissertação é apresentar suas ideias e principais resultados para uma classe de problemas variacionais unidimensionais, bem como alguns recentes desenvolvimentos destas ideias.

O trabalho está organizado do seguinte modo:

No Capítulo 1, apresentaremos as notações, definições e resultados auxiliares que serão usados na dissertação.

No Capítulo 2, apresentaremos o “método indireto” clássico baseado nas condições necessárias de otimalidade e ilustraremos a aplicação deste método em alguns exemplos clássicos do Cálculo Variacional.

No Capítulo 3, introduzimos os espaços de funções que são necessários para aplicarmos o método direto do Cálculo Variacional: a classe das funções absolutamente contínuas ou o espaço de Sobolev $H^{1,p}(I)$. Investigaremos as principais propriedades destes espaços.

No Capítulo 4, obteremos as condições necessárias para funcionais integrais serem sequencialmente semicontínuos inferiormente e provaremos o resultado de existência obtido por Tonelli.

No Capítulo 5, essencialmente provaremos o Teorema de regularidade parcial de Tonelli.

No Capítulo 6, aplicaremos os resultados obtidos nos Capítulos 4 e 5, especialmente no Problema de Sturm-Liouville.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas notações, definições, espaços funcionais e resultados auxiliares que serão usados na dissertação.

1.1 Notações e espaços funcionais

\mathbb{R}^N representará espaço euclidiano N -dimensional.

$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^N u_i^2 \right)^{1/2}$ é norma euclidiana de $u \in \mathbb{R}^N$.

$I = (a, b)$ representará um intervalo limitado de \mathbb{R} e \bar{I} o seu fecho.

$F(x, z, p)$ representará o integrando do funcional $\mathcal{F}(u) = \int_I F(x, u, u') dx$.

As derivadas parciais de F serão representadas por $F_z = \frac{\partial F}{\partial z}$, $F_p = \frac{\partial F}{\partial p}$ e $F_{pp} = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$.

1.1.1 Funções contínuas e Hölder contínuas

$C(I)$ é o espaço de Banach das funções $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas. $C^0(I, \mathbb{R}^N)$ é o espaço das funções $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ contínuas.

$C^0(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ é o espaço de Banach das funções $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ contínuas que podem ser continuamente estendidas à \bar{I} .

O suporte de uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in I; f(x) \neq 0\}}.$$

$C_0(I)$ é o espaço das funções $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas com $\text{supp } u \subset I$ compacto.

O suporte de uma função $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ é definido por

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in I; u_i(x) \neq 0, 1 \leq i \leq N\}}.$$

$C_0(I, \mathbb{R}^N)$ é o espaço das funções de $C(I, \mathbb{R}^N)$ com suporte compacto em I .

A norma de $C^0(\bar{I})$ e $C^0(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ são dadas, respectivamente, por

$$\|f\|_{C(\bar{I})} = \sup_{x \in \bar{I}} |f(x)|, \quad \|u\|_{C(\bar{I}; \mathbb{R}^N)} = \sup_{x \in \bar{I}} \|u(x)\|.$$

$C^m(I)$ é o espaço das funções $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas até a ordem m contínuas em I com $m \geq 0$ um inteiro. $C^m(\bar{I})$ é o espaço das funções $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas até a ordem m contínuas que podem ser estendidas continuamente à \bar{I} .

$$C_0^m(I) = C^m(I) \cap C_0(I); \quad C^\infty(I) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(I);$$

$$C^\infty(\bar{I}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\bar{I}); \quad C_0^\infty(I) = C^\infty(I) \cap C_0(I).$$

$C^m(I, \mathbb{R}^N)$ é o espaço das funções $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ com derivadas até a ordem m contínuas em I com $m \geq 0$ inteiro. $C^m(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ é o espaço das funções $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ com derivadas até a ordem m contínuas que podem ser continuamente estendidas à \bar{I}

De modo análogo, definimos $C_0^m(I, \mathbb{R}^N)$; $C^\infty(I, \mathbb{R}^N)$, $C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$, etc.

A norma de $C^m(\bar{I})$ e $C^m(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^m(\bar{I})} &= \max_{1 \leq i \leq m} \sup_{x \in \bar{I}} |D^i u(x)|, \\ \|u\|_{C^m(\bar{I}; \mathbb{R}^N)} &= \max_{1 \leq i \leq m} \sup_{x \in \bar{I}} \|D^i u(x)\|. \end{aligned}$$

$C^1 = C^1(I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é o espaço das funções $F : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas com derivadas parciais contínuas em $I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

$Lip(I, \mathbb{R}^N)$ é o espaço de Banach das funções $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ que satisfazem a condição de Lipschitz, isto é, existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\|u(x) - u(y)\| \leq k |x - y|, \quad \forall x, y \in I.$$

Seja $0 < \alpha \leq 1$. $C^{0,\alpha}(I, \mathbb{R}^N)$ é o espaço das funções Hölder contínuas $u \in C^0(I, \mathbb{R}^N)$ com a seguinte norma finita

$$|u|^\alpha = \|u\|_{C(I, \mathbb{R}^N)} + \sup_{\substack{x, y \in I \\ x \neq y}} \left\{ \frac{\|u(x) - u(y)\|}{|x - y|^\alpha} \right\}.$$

Temos que $Lip(I, \mathbb{R}^N) = C^{0,1}(I, \mathbb{R}^N)$.

1.1.2 Elementos da Análise Funcional

Teorema 1.1 (Teorema de Hahn-Banach). *Sejam X um espaço normado e V um subespaço de X . Se $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que $|L(v)| \leq k\|v\|_X$ para $k \geq 0$ e $\forall v \in V$. Então L pode ser estendido a um funcional linear $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|\mathcal{F}(x)| \leq k\|x\|_X$, $\forall x \in X$.*

Teorema 1.2. *Se $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço normado. Então existe um espaço normado $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$, chamado **completamento** de X , tal que:*

- (i) $X \subset \tilde{X}$
- (ii) X é denso em \tilde{X}
- (iii) *O completamento é único no sentido que se \tilde{X}_1 e \tilde{X}_2 satisfazem as condições (i) e (ii) acima, então existe uma única isometria $\Psi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$.*

Definição 1.1. *Seja X um espaço normado e $W \subset X$.*

(i) *Dizemos que W é **sequencial relativamente compacto** se, e somente se, cada seqüência $(x_n) \in W$ tem uma subseqüência (x_{n_k}) convergente (não necessariamente em W).*

(ii) *Dizemos que W é **sequencialmente compacto** se, e somente se, cada seqüência $(x_n) \in M$ tem uma subseqüência (x_{n_k}) convergente em W .*

(iii) *Dizemos que W é **limitado** se, e somente se, existe um número real $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$, $\forall x \in W$.*

Observação 1.1. *Por simplicidade vamos abreviar a terminologia e usar “relativamente compacto” e “compacto” em vez de “sequencialmente relativamente compacto” e “sequencialmente compacto”, respectivamente.*

Definição 1.1. *Sejam X um espaço de Banach e $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que T é **fracamente sequencialmente semicontínuo inferior** no ponto $x_0 \in X$ se para qualquer sequência $\{x_n\}$ em X tal que $x_n \rightharpoonup x_0$ tem-se*

$$T(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} T(x_n).$$

Proposição 1.1. **(i)** *Um subconjunto W de um espaço normado X é compacto se, e somente se, é relativamente compacto e fechado.*

(ii) *Todo conjunto relativamente compacto é limitado.*

Teorema 1.3 (Riesz). *Um espaço de Banach X tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária é compacta.*

Este famoso resultado mostra que em espaço de Banach de dimensão infinita existem sequências limitadas que não têm subsequência convergente. Esta “perda de compacidade” em espaços de Banach de dimensão infinita é responsável por muitas dificuldades encontradas no Cálculo Variacional e na Teoria das equações diferenciais parciais. O seguinte resultado é fundamental na obtenção de teoremas de existência do Cálculo Variacional:

Teorema 1.4 (Eberlein). *Toda sequência limitada num espaço de Banach reflexivo tem subsequência fracamente convergente.*

Teorema 1.5 (Teorema de Arzelá-Ascoli). *Seja $K \subset \mathbb{R}$ compacto e $\{u_k\}$ uma família de funções em $C(K, \mathbb{R}^N)$. Se $\{u_k\}$ são pontualmente limitadas e equicontínuas em K então*

(i) $\{u_k\}$ são uniformemente limitadas;

(ii) existe uma subsequência $\{u_{k_j}\}$ de $\{u_k\}$ que converge uniformemente.

1.1.3 Elementos de Medida e Integração

Proposição 1.1. *Seja $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável não-negativa, então a função $\lambda(E)$ dada por*

$$\lambda(E) = \int_E f \mu$$

é uma medida absolutamente contínua com relação a medida μ no sentido que se $E \subset X$ e $\mu(E) = 0$, então $\lambda(E) = 0$.

Teorema 1.6 (Egorov). *Sejam E um conjunto mensurável, f uma função mensurável e $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis e . Se $f_n \rightarrow f$ q.s em E então $\{f_n\}$ converge uniformemente para f em E .*

Teorema 1.7 (Luzin). *Sejam $[a, b]$ compacto e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. f é μ -mensurável se, e somente se, $\forall \epsilon > 0$ existe uma função contínua $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\mu(\{x; f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon.$$

1.1.4 Os espaços L^p

$L^p(I)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis (no sentido de Lebesgue) e p -integráveis ($p \geq 1$) com as seguintes normas finitas:

$$\|u\|_{L^p(I)} = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|u\|_{L^\infty(I)} = \text{ess sup}_I |f(x)|.$$

$L^2(I)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(f, g) = \int_I f(x) g(x) dx.$$

$L^p_{loc}(I)$ é o espaço das funções $f \in L^p(A)$ para A um conjunto aberto contido compactamente em I , ou seja, $\overline{A} \subset I$ e \overline{A} é compacto.

$L^p(I, \mathbb{R}^N)$ é o espaço de Banach das funções $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ cujas componentes $u_i \in L^p(I)$ para $1 \leq i \leq N$.

Proposição 1.2 (Desigualdades de Young e Hölder).

Desigualdade de Young : Se $a, b \geq 0$ e p, q tais que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ com $1 < p < \infty$ então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Desigualdade de Hölder : Se $u \in L^p(I)$ e $v \in L^q(I)$ tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ para $1 \leq p < \infty$ então

$$\int_I |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(I)} \|v\|_{L^q(I)}.$$

Teorema 1.8 (Teorema de Riesz). O dual de L^p , representado por $(L^p)'$, pode ser identificado com L^q para $p^{-1} + q^{-1} = 1$ e $1 \leq p < \infty$. Equivalentemente, para $1 \leq p < \infty$, se $\varphi \in (L^p)'$ então existe um único $v \in L^q$ tal que

$$\varphi(u) = \int_I v(x) u(x) dx, \quad \forall u \in L^p \quad \text{e} \quad \|\varphi\|_{(L^p)'} = \|v\|_{L^q}.$$

Proposição 1.3. Para $1 \leq p < \infty$, os espaços L^p são separáveis. Para $1 < p < \infty$, os espaços L^p são reflexivos, ou seja, o bidual de L^p , representado por $(L^p)''$, pode ser identificado com L^p .

Proposição 1.4. Para $1 \leq p < \infty$, o espaço $C_0^\infty(I)$ é denso em $L^p(I)$, ou seja, $\forall \epsilon > 0$, se $f \in L^p(I)$ então existe $g \in C_0^\infty(I)$ tal que $\|f - g\|_{L^p(I)} < \epsilon$.

Definição 1.2. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Convergência forte: Dizemos que a sequência $\{u_n\}$ de L^p converge (forte) para u em L^p , e representamos por $u_n \rightarrow u$ em L^p , se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^p} = 0.$$

Convergência fraca: Dizemos que a sequência $\{u_n\}$ de L^p converge fracamente para u em L^p , e representamos por $u_n \rightharpoonup u$ em L^p , se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I (u_n(x) - u(x)) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in L^q(I).$$

Convergência fraca-*: Para $p = \infty$, dizemos que a sequência $\{u_n\}$ de L^∞ converge fraca-* para $u \in L^\infty$, e representamos por $u_n \xrightarrow{*} u$, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I (u_n(x) - u(x)) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in L^1(I).$$

Teorema 1.9.

- (i) Para $1 \leq p < \infty$, se $u_n \xrightarrow{*} u$ em L^∞ então $u_n \rightarrow u$ em L^p ;
- (ii) Para $1 \leq p \leq \infty$, se $u_n \rightarrow u$ em L^p então $\|u_n\|_{L^p} \rightarrow \|u\|_{L^p}$;
- (ii) Para $1 \leq p < \infty$, se $u_n \rightarrow u$ em L^p então $\{u_n\}$ é limitada e $\|u\|_{L^p} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^p}$. O resultado também é válido para $p = \infty$ e $u_n \xrightarrow{*} u$;
- (iii) Para $1 \leq p \leq \infty$, se $u_n \rightarrow u$ em L^p então existem uma subsequência $\{u_k\}$ de $\{u_n\}$ e uma função $v \in L^p$ tais que $u_k \rightarrow u$ q.s e $\|u_k\| \leq g$;
- (iv) Para I um intervalo aberto e limitado e $p > q \geq 1$, $L^p(I) \hookrightarrow L^q(I)$ é uma imersão contínua, ou seja, se $u_n \rightarrow u$ em $L^p(I)$ então $u_n \rightarrow u$ em $L^q(I)$.

Teorema 1.10 (Compacidade fraca). Para $1 < p < \infty$, se $\{u_n\}$ é limitada então existe uma subsequência $\{u_k\}$ de $\{u_n\}$ tal que $u_k \rightarrow u$ em L^p .

Definição 1.3. Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ está **compactamente imerso** no conjunto aberto Ω se $\bar{A} \subseteq \Omega$ e \bar{A} é um compacto de \mathbb{R}^N . Representamos $A \subset\subset \Omega$.

Não é complicado verificar que $A \subset\subset \Omega$ se, e somente, se A é limitado e A está “longe” da fronteira de Ω , ou seja, $\text{dist}(A, \partial\Omega) > 0$.

O seguinte resultado é uma importante caracterização dos conjuntos compactos de L^p :

Teorema 1.11 (Compacidade forte). Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $\mathcal{B} \subset L^p(\Omega)$, $p \geq 1$. \mathcal{B} é **relativamente compacto** em $L^p(\Omega)$, se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) \mathcal{B} é limitado em $L^p(\Omega)$, isto é, $\sup_{u \in \mathcal{B}} \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty$;

(ii) as funções de \mathcal{B} são equicontínuas na média, isto é, $\forall u \in \mathcal{B}, \forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, $\forall h \in \mathbb{R}^N$,

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \int_{\Omega} |u(x+h) - u(x)|^p < \epsilon^p$$

para toda u estendida por zero fora de Ω .

O seguinte resultado, conhecido como *Teorema de Dunford-Pettis* e provado pela primeira vez por Lebesgue, caracteriza os conjuntos limitados de $L^1(a, b)$, que são sequencialmente fracamente compactos.

Teorema 1.12. *Sejam Ω um aberto limitado \mathbb{R}^N e $\{u_n\}$ uma sequência em $L^1(\Omega)$. Se*

- (i) $\{u_n\}$ é limitada, ou seja, $\sup_n \|u_n\|_{L^1(\Omega)} < \infty$;
- (ii) o conjunto das funções $E \mapsto \int_E |u_n| dx$ com $E \subset \Omega$ é equiabsolutamente contínuo, ou seja, $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, $\forall n$,

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |u_n| dx < \epsilon.$$

Então, existe um subsequência $\{u_k\}$ de $\{u_n\}$ que converge fracamente em $L^1(\Omega)$.

Além disso, se $\{u_n\}$ converge fracamente em $L^1(\Omega)$ então as condições (i) e (ii) são verdadeiras.

A hipótese de “limitação” do Teorema 1.12 pode ser substituída por uma condição de “uniformemente integrável”:

Teorema 1.13. *Seja \mathcal{E} um subconjunto de $L^1(\Omega)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) \mathcal{E} é sequencialmente fracamente compacto em $L^1(\Omega)$;
- (ii) as funções $u \in \mathcal{E}$ são uniformemente limitadas em $L^1(\Omega)$ e o conjunto das funções $E \mapsto \int_E |u_n| dx$ com $E \subset \Omega$ e $u \in \mathcal{E}$ é equiabsolutamente contínuo;
- (iii) as funções $u \in \mathcal{E}$ são uniformemente integráveis, ou seja,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\{x \in \Omega; |u(x)| > c\}} |u(x)| dx = 0 \text{ uniformemente em } \mathcal{E}.$$

(iv) existe uma função $\Theta : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (que pode ser considerada convexa e crescente) tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Theta(t)}{t} = \infty, \quad \sup_{u \in \mathcal{E}} \int_{\Omega} \Theta(|u|) dx < \infty.$$

1.1.5 Convolução e regularização

Teorema 1.14. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então, para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, a função $y \mapsto f(x-y)g(y)$ é integrável em \mathbb{R}^N e definimos*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y) dy.$$

*Além disso, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.*

Definição 1.4. *Uma sequência regularizante (ρ_ϵ) é qualquer sequência de funções em \mathbb{R}^N tal que*

$$\rho_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \text{supp } \rho_\epsilon \subset \overline{B(0, 1/\epsilon)}, \quad \int \rho_\epsilon = 1, \quad \rho_\epsilon \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Obteremos uma sequência regularizante fazendo $\rho_\epsilon(x) = C \epsilon^N \rho(x/\epsilon)$ com $C = \frac{1}{\int \rho}$ para

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{1/(|x|^2-1)} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Considere o seguinte operador:

$$S_\epsilon f(x) = (\rho_\epsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\epsilon(x-y) f(y) dy. \quad (1.1)$$

Teorema 1.15 (Operador regularizante). *Sejam $N \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto não vazio e $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ tal que $f(x) = 0$ em $\mathbb{R}^N - \Omega$. Então*

- (i) $S_\epsilon f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\|S_\epsilon f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}$, $\forall \epsilon > 0$;
- (ii) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} S_\epsilon f = f$ em $L^p(\Omega)$;
- (iii) Se $\text{supp } f \subset \Omega$ compacto, então $S_\epsilon f \in C_0^\infty(\Omega)$ para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$ com $\epsilon_0 = \text{dist}(\partial\Omega, \text{supp } f)$;
- (iv) Se $K \subset \Omega$ compacto e $f \in C(K)$ então $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} S_\epsilon f = f$ uniformemente em K ;
- (v) Se $p = \infty$, então (i) é válida e $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} S_\epsilon f(x) = f(x)$ q.s em Ω .

Capítulo 2

Método Indireto

Neste capítulo descrevemos a abordagem *clássica indireta* para resolver problemas variacionais. O método consiste em buscar condições necessárias e suficientes para mínimo de um funcional.

A principal condição necessária é que a primeira variação do funcional se anule em alguma função. Como consequência disso, qualquer função candidata regular deve satisfazer a equação de Euler-Lagrange. Para problemas variacionais unidimensional esta equação é uma equação diferencial quasilinear de segunda ordem.

2.1 n -ésima variação de um funcional

Seja X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_X$ e $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional.

Definição 2.1. Uma δ -vizinhança de $x_0 \in X$ é o subconjunto $V_\delta(x_0)$ de X definido por $V_\delta(x_0) = \{x \in X ; \|x - x_0\|_X < \delta\}$.

Observe que, para $h \in X$ e $x = x_0 + h$ tem-se então $V_\delta(x_0) = \{h \in X ; \|h\| < \delta\}$.

Definição 2.2. Sejam X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_X$ e $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que \mathcal{F} tem mínimo local em x_0 se, e somente se, existe uma δ -vizinhança $V_\delta(x_0)$ de x_0 talque $\mathcal{F}(x) \geq \mathcal{F}(x_0)$, $\forall x \in V_\delta(x_0)$.

Sejam $A \subseteq X$ um subconjunto aberto tal que, $x_0 \in A$ e $\mathcal{F} : A \rightarrow \mathbb{R}$. Para $h \in X$ fixo,

considere a função

$$\Phi(\epsilon) = \mathcal{F}(x_0 + \epsilon h),$$

com $\epsilon \in \mathbb{R}$ um parâmetro na vizinhança de $\epsilon = 0$. Se x_0 é mínimo de \mathcal{F} em A então $\phi'(0) = 0$ e temos a seguinte definição:

Definição 2.1. A 1ª variação do funcional $\mathcal{F}(x)$ em x_0 na direção de h , representada por $\delta\mathcal{F}(x_0, h)$, é definida por

$$\delta\mathcal{F}(x_0, h) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}(x_0 + \epsilon h) \right|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(x_0 + \epsilon h) - \mathcal{F}(x_0)}{\epsilon} \quad (2.1)$$

quando este limite existe para todo $h \in X$ e $\epsilon \in \mathbb{R}$.

Logo, a 1ª variação do funcional \mathcal{F} é $\delta\mathcal{F}(x_0, h) = \Phi'(0)$. Deste modo, podemos definir a n -ésima variação de \mathcal{F} como segue:

Definição 2.2. Definimos a n -ésima variação do funcional \mathcal{F} no ponto x_0 na direção de h por

$$\delta^n \mathcal{F}(x_0, h) = \Phi^{(n)}(0), \quad n = 1, 2, \dots$$

Definição 2.3. Dizemos que o funcional \mathcal{F} tem ponto estacionário ou crítico em x_0 se $\delta\mathcal{F}(x_0, h) = 0, \forall h \in X$.

Podemos definir derivada de um funcional num sentido “mais forte” do que a 1ª variação.

Definição 2.3. O funcional $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tem “derivada de Gâteaux” no ponto x_0 , se e somente se existe a 1ª variação $\delta\mathcal{F}(x_0, h)$ para todo $h \in X$ e existe um funcional linear e contínuo $\mathcal{F}'(x_0) : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{F}'(x_0)(h) = \delta\mathcal{F}(x_0, h), \quad \forall h \in X.$$

Representaremos a derivada de Gâteaux por $\mathcal{F}'(x_0)$.

A derivada de Gâteaux $\mathcal{F}'(y_0)$ é chamada “derivada de Fréchet” se, e somente se,

$$\mathcal{F}(x_0 + h) - \mathcal{F}(x_0) = \mathcal{F}'(x_0)(h) + E(h)\|h\|$$

para todo $h \in X$ numa vizinhança de $h = 0$ e $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} E(h) = 0$.

Um funcional $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$ é chamado de “classe C^1 ” se, e somente se, a derivada de Fréchet $\mathcal{F}'(x)$ existe para todo $x \in X$ e o operador $\mathcal{F}' : X \rightarrow X'$ é contínuo.

Quando X é um *espaço de Hilbert* temos o seguinte resultado:

Exemplo 2.1. *Se $\mathcal{F} : H \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional diferenciável em x_0 então $\mathcal{F}'(x_0)$ é um funcional linear e contínuo. Pelo Teorema de Representação de Riesz, existe um único $\ell \in H$ tal que $\mathcal{F}'(x_0)(h) = (\ell, h)$, $\forall h \in H$. Usando a notação $\ell = \nabla\mathcal{F}(x_0)$, podemos escrever $\mathcal{F}'(x_0) \equiv \nabla\mathcal{F}(x_0)$. Chamamos $\nabla\mathcal{F}(x_0)$ de gradiente de \mathcal{F} em x_0 .*

No seguinte apresentaremos condições necessárias e suficientes para extremo local.

Teorema 2.1. *Sejam X um espaço normado, $A \subseteq X$ um aberto tal que $x_0 \in A$ e $\mathcal{F} : A \rightarrow \mathbb{R}$.*

(i) Condição necessária: *Se x_0 é um mínimo local de \mathcal{F} , então x_0 é ponto crítico de \mathcal{F} , isto é, se existe $\delta\mathcal{F}(x_0, h)$ para cada $h \in X$ então*

$$\delta\mathcal{F}(x_0, h) = 0, \quad \forall h \in X. \quad (2.2)$$

(ii) Condição suficiente: *Se x_0 é um mínimo local de \mathcal{F} então:*

(a) *A condição necessária é satisfeita;*

(b) *Existe a 2ª variação $\delta^2\mathcal{F}(x, h)$ para todo $x \in V(x_0)$ e todo $h \in X$ e existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\delta^2\mathcal{F}(x, h) \geq C\|h\|^2, \quad \forall h \in X.$$

(c) *Dado $\epsilon_1 > 0$, existe $\eta(\epsilon_1) > 0$ tal que, $\forall x, h \in X$,*

$$\|x - x_0\| < \eta \Rightarrow |\delta^2\mathcal{F}(x, h) - \delta^2\mathcal{F}(x_0, h)| \leq \epsilon_1\|h\|^2.$$

Demonstração: **(i)** Seja $\Phi(\epsilon) = \mathcal{F}(x_0 + \epsilon h)$ com $\epsilon \in \mathbb{R}$ um parâmetro na vizinhança de $\epsilon = 0$. Então a função real Φ tem mínimo em $\epsilon = 0$, ou seja, $\Phi'(0) = 0$ e temos a condição (2.2).

(ii) Como $\Phi'(0) = 0$, pelo Teorema de Taylor clássico, temos

$$\mathcal{F}(x_0 + h) - \mathcal{F}(x_0) = \phi(1) - \phi(0) = \frac{1}{2}\phi''(\theta) = \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{F}(x_0 + \theta h, h).$$

com $0 < \theta < 1$ e $\forall h \in X$. Usando que

$$\delta^2 \mathcal{F}(x_0 + \theta h, h) = \delta^2 \mathcal{F}(x_0, h) + (\delta^2 \mathcal{F}(x_0 + \theta h, h) - \delta^2 \mathcal{F}(x_0, h)).$$

tem-se

$$\mathcal{F}(x_0 + h) - \mathcal{F}(x_0) \geq \frac{1}{2} \left(C - \frac{C}{2} \right) \|h\|^2 \geq \frac{C}{4} \|h\|^2,$$

para todo $h \in X$ tal que $\|h\| < \frac{\eta C}{2}$. ■

2.2 Equação de Euler-Lagrange

Nesta seção caracterizaremos a condição necessária dada em (2.2) para mínimo de funcionais integrais.

Especificamente, para $F \in C^1(\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ queremos minimizar o seguinte funcional:

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx. \quad (2.3)$$

Observe que o integrando em (2.3) é a composição da função $F(x, z, p)$ com a aplicação $x \mapsto (x, u(x), u'(x))$. A função $F(x, z, p)$ é usualmente chamada **Lagrangiano** do funcional \mathcal{F} definido por (2.3). Como $F \in C^1$ e $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ temos que (2.3) está bem definido.

2.2.1 Caso $N = 1$

Por simplicidade vamos considerar primeiro o caso $N = 1$. Assim, queremos obter uma função $u \in C^1(\bar{I})$ que satisfaz as condições de fronteira $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$ e minimize o funcional

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx \quad (2.4)$$

com $F(x, u, p)$ uma função com derivadas parciais até 2ª ordem contínuas.

Seja $K(\alpha, \beta) = \{u \in C^1(I); u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$. Vamos calcular a 1ª variação de \mathcal{F} . Para isto, seja $u \in K(\alpha, \beta)$ o mínimo local de \mathcal{F} . Então

$$\mathcal{F}(u + \epsilon h) = \int_a^b F(x, u + \epsilon h, u' + \epsilon h') dx, \quad (2.5)$$

para toda $h \in C_0^\infty(I)$. Logo,

$$\delta\mathcal{F}(u, h) = \frac{d}{d\epsilon} \left(\int_a^b F(x, u + \epsilon h, u' + \epsilon h') dx, \right) \Big|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial u'} \frac{du'}{d\epsilon} \right) dx.$$

Note que para efetuar os cálculos acima usamos a continuidade de F . Assim,

$$\delta\mathcal{F}(u, h) = \int_a^b F_u(x, u, u')h(x) + F_{u'}(x, u, u')h'(x) dx.$$

E a condição necessária $\delta\mathcal{F}(u, h) = 0$ torna-se

$$\int_a^b F_u(x, u, u')h(x) + F_{u'}(x, u, u')h'(x) dx = 0. \quad (2.6)$$

Note que até agora as exigências de regularidade do mínimo $u(x)$ é que pertença a classe $C^1(\bar{I})$. Por esta razão, a formulação (2.6) é chamada *formulação fraca* e $u \in C^1(\bar{I})$ satisfazendo (2.6) chamado **extremal fraco** de \mathcal{F} .

Considere $\eta(x) = \int_a^x F_u(s, u(s), u'(s)) ds$ e observe que $\eta \in C^1(\bar{I})$, pois $u \in C^1(\bar{I})$. Efetuando a seguinte integração por partes no primeiro termo de (2.6) obtemos

$$\int_a^b F_u h(x) dx = h(x)\eta(x) \Big|_b^a - \int_a^b \eta(x) h'(x) dx.$$

Como $h(a) = h(b) = 0$ e $\eta(x)$ é contínua tem-se $h(x)\eta(x) \Big|_b^a = 0$ e (2.6) torna-se

$$\int_a^b (F_{u'}(x, u, u') - \eta(x))h'(x) dx = 0. \quad (2.7)$$

para toda $h \in C_0^\infty(I)$.

Para finalizar vamos usar o seguinte Lema, chamado *Lema de Dubois-Raymund*.

Lema 2.1 (Lema de Dubois-Raymund). *Sejam $\psi \in C(\bar{I})$ e $h \in C_0^1(I)$. Se*

$$\int_a^b \psi(x) h'(x) dx = 0, \quad \forall h.$$

Então, existe uma constante c tal que $\psi(x) = c$ para todo $x \in \bar{I}$.

Demonstração: Para $c = \frac{1}{b-a} \int_a^b \psi(x) dx$ tem-se

$$\int_a^b (c - \psi(x)) dx = 0. \quad (2.8)$$

Escolhendo $h(x) = \int_a^x (c - \psi(s)) ds$ obtemos $h \in C_0^1(I)$. Usando a hipótese e esta particular h temos

$$\int_a^b \psi(x) h'(x) dx = \int_a^b \psi(x) (c - \psi(x)) dx = 0. \quad (2.9)$$

Multiplicando (2.8) por c e (2.9) por (-1) e somando o resultado obtemos

$$c \int_a^b (c - \psi(x)) dx - \int_a^b \psi(x)(c - \psi(x)) dx = 0.$$

o que implica

$$\int_a^b (c - \psi(x))^2 dx = 0.$$

Como $(c - \psi(x))^2 \geq 0$ em $[a, b]$, segue que $\psi(x) = c$ em $[a, b]$ ■

Aplicando o Lema 2.1 em (2.7) concluímos que

$$F_{u'} - \eta(x) = c \Rightarrow F_{u'} = \int_a^x F_u(s, u(s), u'(s)) ds + c$$

o que resulta na seguinte equação diferencial de $2a$ ordem

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0. \quad (2.10)$$

Em resumo,

Teorema 2.2. *Seja $F(x, u, p)$ uma função contínua com derivadas parciais de 1^a e 2^a ordens contínuas. Seja $u = u(x)$ uma função de classe $C^1(\bar{I})$ tal que $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$. Se $u(x)$ é um mínimo do funcional*

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx,$$

então $u(x)$ satisfaz a formulação (2.6) para toda $h \in C_0^\infty(I)$ e a equação diferencial (2.10).

A equação (2.10) é chamada **equação de Euler-Lagrange** em homenagem ao matemático suíco Leonard Euler (1707-1783) e ao matemático frances Josep Louis Lagrange (1736-1813). Foi obtida pela primeira vez por Euler em 1744 por um processo de aproximação. Em 1755, aos 19 anos, Lagrange obteve a mesma equação por um método que é essencialmente o mesmo método apresentado acima.

Em geral, a equação de Euler-Lagrange é uma equação diferencial ordinária quasi-linear de 2ª ordem, mas nem sempre o extremo é uma função de classe $C^2(\bar{I})$. De fato, considere o seguinte exemplo:

Exemplo 2.2. *Considere o problema de minimizar o funcional*

$$\mathcal{F}(u) = \int_{-1}^1 u'^2(2x - u')^2 dx$$

sujeito as condições de fronteira $u(-1) = 0$ e $u(1) = 1$.

Observe que $\mathcal{F}(u) \geq 0$, e logo, seu valor mínimo é 0. Além disso, a função

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

é o mínimo do funcional \mathcal{F} em $K(1, -1) = \{u \in C^1([-1, 1]); u(-1) = 0, u(1) = 1\}$. De fato, u satisfaz a equação de Euler-Lagrange de \mathcal{F} , pois $F_u(x, u, u') = 0$ e $F_{u'}(x, u, u') = 0$.

Além disso,

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 4x^2(2x - 2x)^2 dx = 0.$$

Mas, não existe $u''(0)$, e logo, $u \notin C^2([-1, 1])$. ■

Para apresentarmos o argumento de Lagrange, efetuaremos uma integração por partes no segundo termo de (2.6). Assim,

$$\int_a^b F_{u'} h'(x) dx = h(x) F_{u'} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{u'} h(x) dx$$

usando que $h(a) = h(b) = 0$ e a continuidade de $F_{u'}$, obtemos

$$\int_a^b F_{u'} h'(x) dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{u'} h(x) dx$$

e (2.6) torna-se

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right) h(x) dx = 0 \tag{2.11}$$

para toda $h \in C_0^\infty(I)$.

Para concluirmos vamos aplicar o seguinte resultado, conhecido como *Lema Fundamental com Cálculo Variacional*:

Lema 2.2 (Lema fundamental). *Sejam $\psi \in C(\bar{I})$ e $h \in C_0^1(I)$. Se*

$$\int_a^b \psi(x) h(x) dx = 0, \quad \forall h.$$

Então, $\psi(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração: Suponha, por contradição, que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $\psi(x_0) \neq 0$. Então podemos assumir sem perda de generalidade que $\psi(x_0) > 0$. Como $\psi(x)$ é contínua em $[a, b]$ pelo Teorema da conservação do sinal temos que existe uma δ -vizinhança $V_\delta(x_0)$ de x_0 tal que $\psi(x) > 0, \forall x \in V_\delta(x_0)$. Seja

$$h(x) = \begin{cases} (x - x_0 - \delta)^2 (x - x_0 + \delta)^2 & \text{se } x \in V_\delta(x_0) \\ 0 & \text{se } x \notin V_\delta(x_0) \end{cases}$$

Então, $h \in C^1[a, b]$ tal que $h(a) = h(b) = 0$. Para esta escolha de $h(x)$ temos que

$$\int_a^b \psi(x) h(x) dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \psi(x) (x - x_0 - \delta)^2 (x - x_0 + \delta)^2 dx > 0,$$

o que contradiz a hipótese. Portanto, $\psi(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. ■

Portanto, para aplicarmos o Lema fundamental do Cálculo Variacional em (2.11) devemos garantir a continuidade da função

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right).$$

Para isto, observe que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u'} + \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial u} u' + \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2} u''. \quad (2.12)$$

Deste modo, assumindo que as derivadas parciais da F são contínuas e $u' \in C([a, b])$ então para garantirmos a continuidade do termo dado em (2.12) devemos exigir que u'' exista e seja contínua em $[a, b]$. Portanto, $u(x)$ deve ser uma função de classe $C^2([a, b])$. Por esta razão, a formulação (2.11) é chamada *formulação variacional* (forte).

Exemplo 2.3. Existem casos particulares em que a equação (2.10) é uma EDO de 1ª ordem. Por exemplo, quando F depende apenas de u e u' . De fato, se $F = F(u, u')$ então

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial u} u' - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial u'} u''. \quad (2.13)$$

Multiplicado (2.13) por u' obtemos

$$u' \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial u} u'^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial u'} u' u'' = \frac{d}{dx} \left(F - u' \frac{\partial F}{\partial u'} \right).$$

Portanto, neste caso, a equação de Euler-Lagrange tem solução geral dada por

$$F - u' \frac{\partial F}{\partial u'} = C$$

com C uma constante. ■

Euler foi criticado por Lagrange pela “falta” de rigor do seu método. Porém, a dedução de Lagrange também foi incompleta, pois ele usou sem provar o Lema fundamental do Cálculo Variacional. Em sua resposta a Lagrange, Euler argumentou que tal afirmação não era óbvia e precisava ser demonstrada. Esta prova foi dada por Dubois-Raymond, e por esta razão o Lema 2.2 também é conhecido como *Lema de Dubois-Raymond*.

Exemplo 2.4. Considere o seguinte problema variacional:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= \int_0^{\pi/2} (u'^2 - u^2) dx \\ u(0) &= 0, \quad u(\pi/2) = 1. \end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange do problema acima é dada por

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -2u, \quad \frac{\partial F}{\partial u'} = 2u' \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = u'' + u = 0.$$

Sabemos que a solução geral da equação diferencial ordinária de 2ª ordem $u'' + u = 0$ é $u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Usando as condições de fronteira obtemos $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$ e, logo, a função candidata a extremo de \mathcal{F} é $u(x) = \sin x$.

Observe que $\frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}(x, y) = 2 \neq 0$ e $u \in C^2([0, \pi/2])$. ■

2.2.2 Caso $N > 1$

Nesta seção buscaremos solução $u(x)$ na classe $C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$. Em algumas situações, vamos considerar F somente numa vizinhança de u . Nestes casos, basta assumir que $F \in C^1(\mathcal{U})$ com \mathcal{U} um conjunto aberto em $\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ tal que $\mathcal{U} \subset G_u$ com $G_u =$

$\{(x, u(x), u'(x)); x \in \bar{I}\}$. Chamaremos \mathcal{U} uma *vizinhança* de $G_u = \{(x, u(x), u'(x)); x \in \bar{I}\}$. Deste modo, $\mathcal{F}(v)$ está bem definido em $V_\delta(u) = \{v \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N); \|u - v\|_{C^1(I, \mathbb{R}^N)} < \delta\}$. Portanto, para $\varphi \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ e $|\epsilon| < \epsilon_0$ com $\epsilon_0 = \delta/\|\varphi\|_{C^1(I, \mathbb{R}^N)}$, a função

$$\Phi(\epsilon) = \mathcal{F}(u + \epsilon\varphi) \quad (2.14)$$

está bem definida, é de classe $C^1(-\epsilon_0, \epsilon_0)$ e $\Phi'(0)$ é dada por

$$\Phi'(0) = \int_a^b F_u(x, u, u') \cdot \varphi + F_{u'}(x, u, u') \cdot \varphi' dx. \quad (2.15)$$

Definição 2.4. Dizemos que $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ é um **mínimo fraco** de \mathcal{F} se existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N); \|\varphi\|_{C^1(I, \mathbb{R}^N)} < \delta. \quad (2.16)$$

Definição 2.5. Dizemos que a função $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ é um **extremal fraco** do funcional \mathcal{F} se

$$\int_a^b F_u(x, u, u') \cdot \varphi + F_{u'}(x, u, u') \cdot \varphi' dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N). \quad (2.17)$$

Se u é um extremal em $C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ então (2.17) é equivalente a $\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$.

Em outras palavras, extremais fracos de \mathcal{F} na classe $C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ são pontos estacionários de \mathcal{F} em todas as direções regulares $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$.

Em resumo,

Proposição 2.1. Se $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ é um mínimo fraco de \mathcal{F} então u é um extremal fraco de \mathcal{F} .

Note que

$$\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = \int_a^b \left[F_u(x, u, u') \cdot \varphi + F_{u'}(x, u, u') \cdot \varphi' \right] dx \quad (2.18)$$

é um funcional linear com relação a φ para $\varphi \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$.

Além disso, observe que extremais (soluções da equação de Euler-Lagrange) não são necessariamente mínimos de funcionais. Por exemplo, mínimos locais e pontos de sela também podem ser soluções.

Como no caso $N = 1$, podemos mostrar que extremais fracos de classe $C^2(I, \mathbb{R}^N)$ satisfazem a equação de Euler-Lagrange. Para isto, vamos considerar a seguinte versão mais regular do Lema fundamental:

Lema 2.3 (Lema fundamental). *Se $f \in C(I)$ satisfaz*

$$\int_I f(x)\eta(x) dx = 0, \quad \forall \eta \in C_0^\infty(I). \quad (2.19)$$

Então $f(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Demonstração: Sejam $\delta > 0$ e χ_0 a função carecterística de algum intervalo $I_0 = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$. Como $C_0^\infty(I)$ é denso em $L^2(I)$ e $\chi_0 \in L^2(I)$, existe uma sequência $\chi_n \in C^\infty(I)$ tal que, $\chi_n \rightarrow \chi_0$ em $L^2(I)$. Por (2.19) temos

$$\int_I f(x)\chi_n(x) dx = 0,$$

o que implica $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f(x)\chi_n(x) dx = \int_I f(x)\chi_0(x) dx$.

Portanto, $\int_{I_0} f(x) dx = \int_I f(x)\chi_0(x) dx = 0$. Logo,

$$\frac{1}{2\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx = 0.$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0^+$ obtemos $f(x_0) = 0$ para todo $x_0 \in I$. ■

O Lema 2.3 vale sob condições menos regulares de f , com mostra o seguinte resultado:

Lema 2.4. *Se $f \in L^1(I)$ e satisfaz (2.19) então $f(x) = 0$ q.s. em I .*

Proposição 2.2. *Sejam \mathcal{U} uma vizinhança de G_u e $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$. Suponha que u é um extremal fraco de \mathcal{F} e $F \in C^2(\mathcal{U})$. Se $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$ então u satisfaz*

$$\frac{d}{dx} F_{u'}(x, u(x), u'(x)) - F_u(x, u(x), u'(x)) = 0 \text{ em } I. \quad (2.20)$$

Demonstração: Integrando por partes (2.17) obtemos

$$\int_a^b \left[F_u(x, u, u') - \frac{d}{dx} F_{u'}(x, u, u') \right] \cdot \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N).$$

Escolhendo $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^N)$, com $\varphi^k = 0$ se $k \neq i$, $\varphi^i = \eta$ com $\eta \in C_0^\infty(I)$, obtemos

$$\int_a^b \left[F_{u_i}(x, u, u') - \frac{d}{dx} F_{u'_i}(x, u, u') \right] \eta(x) dx = 0, \quad \forall \eta \in C_0^\infty(I).$$

Aplicando o Lema fundamental 2.3 temos que

$$F_{u_i}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} F_{u'_i}(x, u(x), u'(x)) = 0 \text{ em } I, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.21)$$

■

Deste modo, a Proposição 2.2 garante que qualquer extremal fraco de classe $C^2(I, \mathbb{R}^N)$ de \mathcal{F} com um lagrangeano de classe C^2 necessariamente satisfaz a equação de Euler-Lagrange.

Observe que o sistema (2.21) é satisfeito para qualquer extremal $u = (u_1, \dots, u_N)$ de classe $C^2(I, \mathbb{R}^N)$ e é um sistema de N equações quasilineares de 2^a ordem.

Podemos combinar as Proposições 2.1 e 2.2 para obter

Proposição 2.3. *Suponha que $F \in C^2$, u é um mínimo fraco de \mathcal{F} e $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N) \cap C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$. Então u satisfaz a equação de Euler-Lagrange (2.20).*

Definição 2.6. *Toda solução $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$ da equação de Euler-Lagrange é chamado extremal de \mathcal{F} .*

Para ilustrar apresentaremos alguns exemplos.

Exemplo 2.1. Considere $N = 1$, o lagrangeano $F(x, z, p) = \omega(x, z)\sqrt{1 + p^2}$ com $\omega(x, z) > 0$ e o seguinte funcional integral

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b \omega(x, u)\sqrt{1 + u'^2} dx.$$

Então,

$$F_{u'}(x, u, u') = \omega(x, u)\frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}}, \quad F_u(x, u, u') = \omega_u(x, u)\sqrt{1 + u'^2}$$

e a equação de Euler-Lagrange correspondente é dada por

$$\frac{d}{dx} \left[\omega(x, u)\frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}} \right] - \omega_u(x, u)\sqrt{1 + u'^2} = 0$$

ou na forma $k\omega\sqrt{1 + u'^2} = \omega_u - u'\omega_x$ com $k = \frac{d}{dx} \left(\frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}} \right)$ a curvatura do gráfico de $u(x)$.

Exemplo 2.2. Considere $N = 3$, $m > 0$ uma constante, $V(x)$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$, o lagrangeano $F(x, v) = \frac{m}{2}\|v\|^2 - V(x)$ e o funcional integral

$$\mathcal{F}(x) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2}\|\dot{x}\|^2 - V(x) \right] dx.$$

Na mecânica $\mathcal{F}(x)$ representa a *ação* do movimento $x = x(t)$, para $t \in [t_1, t_2]$, de uma partícula de massa m num *campo de forças conservativo* $-V_x$ com V a *energia potencial* e $T = \frac{m}{2}\dot{x}^2$ a *energia cinética* do movimento $x(t)$. A equação de Euler-Lagrange da ação \mathcal{F} é a equação de Newton

$$m\ddot{x} = -V_x(x).$$

Pela Proposição 2.3, mínimos fracos de \mathcal{F} com lagrangeano F de classe C^2 são extremais de \mathcal{F} se são de classe $C^2(I, \mathbb{R}^N)$. Note que um mínimo fraco de \mathcal{F} de classe $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ não pertence necessariamente a classe $C^2(I, \mathbb{R}^N)$, como ilustra o seguinte exemplo.

Exemplo 2.3. Considere $N = 1$, $I = (-1, 1)$, $F(x, z, p) = z^2(2x - p)^2$ e o seguinte funcional

$$\mathcal{F}(u) = \int_{-1}^1 u^2(x)(2x - u'(x))^2 dx.$$

Então, a função $u \in C^1(\bar{I})$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ x^2 & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

é um mínimo de \mathcal{F} em $\mathcal{C} = \{v \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}); v(-1) = 0, v(1) = 1\}$. Mas $u''(0)$ não existe, e, logo, $u \notin C^2(I, \mathbb{R})$.

Trataremos mais detalhadamente a questão de regularidade para extremais fracos e mínimos no Capítulo 5.

Embora um extremal fraco de \mathcal{F} não seja necessariamente de classe $C^2(I, \mathbb{R}^N)$, podemos mostrar, como no caso $N = 1$, que a equação de Euler-Lagrange é satisfeita quando $F_p(x, z, p)$ é apenas contínua. Para isto, precisamos da seguinte versão do Lema de DuBois-Reymond:

Lema 2.5 (Lema de DuBois-Reymond). *Se $f \in L^1(I)$ e satisfas*

$$\int_I f(x)\eta'(x) dx = 0, \quad \forall \eta \in C_0^\infty(I). \quad (2.22)$$

Então existe uma contante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$ q.s. em I .

Proposição 2.4. Se $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ um extremal fraco de \mathcal{F} . Então existe um vetor constante $c \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$F_{u'}(x, u(x), u'(x)) = c + \int_a^x F_u(t, u(t), u'(t)) dt, \quad \forall x \in I. \quad (2.23)$$

Demonstração: Integrando por partes (2.17) tem-se

$$\int_a^b F_u(x, u, u') \cdot \varphi(x) dx = - \int_a^b \left(\int_a^x F_u(t, u(t), u'(t)) dt \right) \cdot \varphi'(x) dx$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$. Logo,

$$\int_I \left[F_{u'}(x, u(x), u'(x)) - \int_a^x F_u(t, u(t), u'(t)) dt \right] \cdot \varphi'(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N). \quad (2.24)$$

Aplicando o Lema 2.5 em (2.24) obtemos (2.23). ■

Note que a função

$$\psi(x) = c + \int_a^x F_u(t, u(t), u'(t)) dt \quad (2.25)$$

é de classe $C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$, o que implica $F_{u'}(\cdot, u(x), u'(x)) \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$. Derivando (2.23) com relação a x obtemos (2.20). Em resumo,

Corolário 2.1. Qualquer extremal fraco u de \mathcal{F} tal que $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ satisfaz

$$\frac{d}{dx} F_{u'}(x, u(x), u'(x)) - F_u(x, u(x), u'(x)) = 0 \quad \text{q.s. } I.$$

Observe que não podemos aplicar a regra da cadeia para derivar $F_{u'}(x, u, u')$ em relação a x , pois u é apenas de classe $C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$.

A equação (2.23) é conhecida como *equação de DuBois-Reymond* ou *equação de Euler-Lagrange na forma integral*.

Usando os mesmos argumentos podemos mostrar o seguinte resultado:

Proposição 2.5. Se $u \in Lip(I, \mathbb{R}^N)$ é um extremal de \mathcal{F} então existe um vetor constante $c \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$F_{u'}(x, u(x), u'(x)) = c + \int_a^x F_u(t, u(t), u'(t)) dt, \quad \text{q.s. em } I.$$

Além disso,

$$\frac{d}{dx} F_{u'}(x, u(x), u'(x)) - F_u(x, u(x), u'(x)) = 0, \quad \text{q.s. em } I.$$

2.3 O problema da Braquistócrona

O problema da Braquistócrona consiste em achar a trajetória de uma partícula que desliza, a partir do repouso, sem atrito, e acelerada unicamente pela gravidade, de um ponto (num plano vertical) no menor tempo possível. Este problema variacional foi formulado, em 1638, por Galileu que, erroneamente, deu como solução um círculo. Em 1696, Johann Bernoulli apresentou o problema da Braquistócrona como um desafio lançado aos maiores matemáticos do seu tempo. Cinco deles resolveram o problema: Newton, Jacob Bernoulli (irmão de Johann), Leibnitz, L'Hôpital, além do próprio Johann Bernoulli.

Vamos supor que a partícula de massa m parta do repouso, do ponto inicial $A = (0, 0)$, e deslize sem atrito pela curva $u(x)$ até o ponto $B = (x_1, u_1)$.

Seja $x = s(t)$ o deslocamento da partícula. Fazendo $F(x, t) = s(t) - x$ e observando que $\frac{\partial F}{\partial t} = s'(t) \neq 0$, podemos concluir, pelo Teorema da Função Implícita, que $t = u(x) = u(s(t))$. Este tempo é chamado “tempo invertido”. Assim, derivando o tempo invertido obtemos

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{v(t)},$$

o que implica

$$t = u(x) = \int_0^x \frac{du}{ds} ds = \int_0^x \frac{ds}{v(u)} ds$$

para $0 \leq x \leq x_1$. Mas ds é comprimento de arco e, logo, é dado por $\sqrt{1 + u'^2}$, então

$$t = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + u'^2}}{v(u)} dx \quad (2.26)$$

Para escrevermos a velocidade $v(x)$ como função de $u(x)$ usaremos conservação de energia. Para isto, considere que o eixo y tem sentido positivo para baixo e pela conservação de energia tem-se

$$\frac{mv^2}{2} - mgu = 0,$$

o que implica $v = \sqrt{2gu}$. Substituindo em (2.26), obtemos o seguinte funcional

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + u'^2}{2gu}} dx. \quad (2.27)$$

Portanto, o problema da Braquistócrona consiste em minimizar o funcional (2.27) tal que $u(0) = 0, u(x_1) = u_1$. Logo, u deve satisfazer a equação de Euler-Lagrange (2.20),

ou seja,

$$u(1 + u'^2) = c_1 \quad (2.28)$$

com c_1 uma constante. Para resolvermos a equação diferencial (2.28) faremos a mudança de variáveis $u'(x) = \cotgz$. Deste modo, (2.28) torna-se

$$u(x(z)) = \frac{c_1}{1 + u'^2} = \frac{c_1}{1 + \cotg^2z} = \frac{c_1}{2}(1 - \cos 2z).$$

Usando a regra da cadeia tem-se

$$\frac{du}{dx} \frac{dx}{dz} = \frac{d}{dz}(c_1 \text{sen}^2 z) \Rightarrow \frac{dx}{dz} = \frac{c_1}{\cotgz} \frac{d}{dz}(\text{sen}^2 z).$$

Logo,

$$\frac{dx}{dz} = \frac{c_1 \text{sen} z}{\cos z} (2 \text{sen} z \cos z) \Rightarrow \frac{dx}{dz} = 2c_1 \text{sen}^2 z = c_1(1 - \cos 2z).$$

Integrando obtemos

$$x(z) = c_1 \left(z - \frac{\text{sen} 2z}{2} \right) + c_2 = \frac{c_1}{2}(2z - \text{sen} 2z) + c_2.$$

Poranto, as equações paramétricas da curva são dadas por

$$\begin{aligned} x(z) - c_2 &= \frac{c_1}{2}(2z - \text{sen} 2z), \\ u(z) &= \frac{c_1}{2}(1 - \cos 2z). \end{aligned}$$

Fazendo $\theta = 2z$ obtemos

$$\begin{aligned} x - c_2 &= \frac{c_1}{2}(\theta - \text{sen} \theta), \\ u &= \frac{c_1}{2}(1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Portanto, a Braquistócrona é dada pelas equações paramétricas acima que representam uma **ciclóide**.

Capítulo 3

Espaços de Sobolev

Neste capítulo, trataremos do espaço das funções *absolutamente contínuas*. Existem dois modos de introduzirmos este espaço: a abordagem clássica devido a Vitali e Tonelli e em termos dos chamados *espaços de Sobolev*. Neste trabalho trataremos dos espaços de Sobolev $H^{1,p}(I)$, $p \geq 1$ unidimensionais.

Um estudo detalhado dos espaços de Sobolev para o caso N -dimensional pode ser encontrado em [1]. Relacionaremos estes espaços com as funções absolutamente contínuas introduzidas por Vitali.

3.1 O princípio de Dirichlet

Nesta seção apresentaremos o problema que motivou o aparecimento dos espaços de Sobolev.

Em 1857, B. Riemann assumiu, sem provar, um princípio que utilizou como base da sua teoria sobre as funções complexas, por ele chamado *Princípio de Dirichlet*. Este princípio afirma que o problema:

$$\text{Minimizar } \iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 - 2gu) dx dy \quad (3.1)$$

tem sempre solução no espaço $\mathcal{C} = \{u \in C^1(\bar{\Omega}); u = u_{\Gamma} \text{ em } \partial\Omega\}$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Podemos mostrar (consulte [7]) que a equação de Euler-Lagrange deste problema variacional é a equação de Laplace $\Delta u = 0$.

Estudando o trabalho de Riemann, Weierstrass percebeu uma incoerência no princípio de Dirichlet. Em 1870, ele construiu um contra-exemplo mostrando que a existência de solução de problemas variacionais não é trivial.

Weierstrass considerou o seguinte problema variacional:

Exemplo 3.1. Minimizar o funcional

$$\mathcal{F}(u) = \int_{-1}^1 (x u'(x))^2 dx, \quad u \in \mathcal{C} \quad (3.2)$$

com $\mathcal{C} = \{u \in C^1([-1, 1]); u(-1) = 0, u(1) = 1\}$.

Seja $u_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{\arctg(nx)}{2 \arctg(n)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Então, $u_n(-1) = 0$ e $u_n(1) = 1$ e, logo, $u_n \in \mathcal{C}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_n) &= \frac{1}{2n^2 \arctg(n)} \int_{-1}^1 \frac{n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2n^2 \arctg(n)} \int_{-n}^n \frac{s^2}{(1 + s^2)^2} ds \\ &\leq \frac{1}{2n^2 \arctg(n)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2}{(1 + s^2)^2} ds. \end{aligned}$$

Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_n) \rightarrow 0$ e, logo $\mathcal{F}(u) \geq 0$ para toda $u \in \mathcal{C}$, o que implica

$$\inf_{u \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(u) = 0,$$

isto é, (u_n) é uma seqüência minimizante.

Suponha que u_* é uma solução do problema (3.2), então $\mathcal{F}(u_*) = 0$ e $u_* \in \mathcal{C}$ e, logo $x u'_*(x) = 0$, para todo $x \in [-1, 1]$, o que implica $u'_*(x) = 0$ em $[-1, 1]$, ou seja, $u_*(x)$ é constante. Mas, isso contradiz o fato da solução satisfazer $u(-1) = 0$ e $u(1) = 1$. ■

Portanto, Weierstrass mostrou que, em geral, o problema variacional (3.3) *não* tem solução no sentido clássico, isto é, em $\mathcal{C} = \{u \in C^1(\bar{\Omega}); u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$. Este fato causou enorme espanto nos matemáticos do século XIX.

Muitos matemáticos tentaram “salvar o trabalho de Riemann”, desenvolvendo métodos especiais para resolução da equação de Laplace, sem usar do princípio de Dirichlet. Entre eles, citamos Schwarz, Neumann e Poincaré.

Para melhor compreensão, considere o caso unidimensional do problema (3.1) com $g = 0$ e o espaço \mathcal{C} munido da seguinte norma

$$\|u\|_2 = \left(\int_0^1 |u|^2 + |u'|^2 dx \right)^{1/2},$$

ou da norma equivalente

$$\mathcal{D}(u) = \left(\int_0^1 |u'|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Deste modo, podemos interpretar o problema (3.1) do seguinte modo:

$$\text{Minimizar } \mathcal{D}(u), \quad u \in \mathcal{C} \tag{3.3}$$

com $\mathcal{C} = \{u \in C^1([0, 1]), \|\cdot\|_2; u(0) = \alpha, u(1) = \beta\}$.

Claramente, $0 \leq \inf_{u \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(u) < +\infty$.

Seja $\{u_k\}$ é uma sequência minimizante, ou seja, $u_k \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{D}(u_k) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(u)$.

Como o espaço $(C^1([0, 1]), \|\cdot\|_2)$ não é completo, em geral, (u_n) não converge em \mathcal{C} , portanto, o problema (3.3) não possui solução em \mathcal{C} . Porém, se considerarmos o completamento de $(C^1([a, b]), \|\cdot\|_2)$, representado por $H^{1,2}(a, b)$ e chamado *espaço de Sobolev*, podemos provar que o problema variacional generalizado

$$\text{Minimizar } \mathcal{D}(u), \quad u \in \mathcal{C}$$

tem uma única solução u em $\mathcal{C} = \{u \in H^{1,2}(a, b); u(0) = \alpha, u(1) = \beta\}$.

3.2 Os espaços $H^{1,p}(I)$ e $H_0^{1,p}(I)$

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. Considere $C^1(I)$ munido com a norma finita

$$\|u\|_{H^{1,p}(I)} = \left(\int_a^b (|u|^p + |u'|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.4}$$

O espaço $(C^1(I), \|\cdot\|_{H^{1,p}(I)})$ não é completo, então pelo Teorema do completamento 1.2 temos a seguinte definição.

Definição 3.1. *O espaço de Sobolev $H^{1,p}(I)$ é o completamento de $(C^1(I), \|\cdot\|_{H^{1,p}(I)})$.*

Por definição, espaços de Sobolev são espaços de Banach com a norma (3.4). Seus elementos são classes de equivalência de seqüência de Cauchy em $C^1(I)$.

Claramente $H^{1,2}(I)$ é um espaço de Hilbert, pois neste caso a norma (3.4) é induzida pelo produto interno

$$(u, v)_{H^{1,2}(I)} = \int_a^b u v \, dx + \int_a^b u' v' \, dx.$$

Como consequência da definição de $H^{1,p}(I)$, temos o seguinte resultado

Proposição 3.1. *$C^1(I)$ é denso em $H^{1,p}(I)$, isto é, se $u \in H^{1,p}(I)$ então existe uma seqüência (u_n) em $C^1(I)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{H^{1,p}(I)} = 0$ e $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_{H^{1,p}(I)} = 0$*

Como $\|u'_n - u'_m\|_{L^p(I)} \leq \|u_n - u_m\|_{H^{1,p}(I)}$ temos que (u'_n) é uma seqüência de Cauchy em $L^p(I)$. Mas $L^p(I)$ é um espaço normado completo, e logo, existe $g \in L^p(I)$ tal que $u'_n \rightarrow g$ em $L^p(I)$.

Deste modo, podemos caracterizar $H^{1,p}(I)$ como o conjunto das funções $u \in L^p(I)$ tais que existem $g \in L^p(I)$ e uma seqüência (u_n) em $C^1(I)$ satisfazendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^p(I)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u'_n - g\|_{L^p(I)} = 0. \quad (3.5)$$

Observe que não podemos afirmar que $g = u'$, pois $u \in H^{1,p}(I)$ e não sabemos qual é o sentido de “derivada” em $H^{1,p}(I)$. Porém, se $u \in H^{1,p}(I) \cap C^1(I)$, ou seja, u tem derivada no sentido clássico, então g é a derivada clássica de u . De fato, como $u_n \rightarrow u$ em $H^{1,p}(I)$ e $\|u'_n - u'\|_{L^p(I)} \leq \|u_n - u\|_{H^{1,p}}$, e logo, $u'_n \rightarrow u'$ em $L^p(I)$ e pela unicidade do limite $g = u'$.

Isso motiva entendermos a função g dada em (3.5) como uma certa generalização do conceito de derivada para funções de $H^{1,p}(I)$.

Definição 3.2. *Seja $u \in L^p(I)$, $p \geq 1$. Dizemos que a função $g \in L^p(I)$ é a **derivada generalizada** (ou derivada no sentido forte) de u se existe uma seqüência $\{u_n\}$ em $C^1(\bar{I})$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^p(I)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u'_n - g\|_{L^p(I)} = 0. \quad (3.6)$$

Proposição 3.2. *O limite g é unicamente determinado por u e independe da escolha da seqüência $u_n \in C^1(\bar{I})$.*

Demonstração: A definição de g independe da sequência $\{u_n\}$, pois duas sequências de Cauchy determinam o mesmo limite. Suponha, por contradição, que exista outra derivada generalizada $w \in L^p(I)$ de u tal que $g \neq w$. Então, existem sequências $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ em $C^1(I)$ tais que $u'_n \rightarrow g$ e $v'_n \rightarrow w$. Fazendo $z_n = u_n - v_n$ e $z'_n = u'_n - v'_n$, tem-se que $z_n \rightarrow 0$, e $z'_n \rightarrow g - w$.

Usando integração por partes obtemos

$$\int_a^b z_n \varphi' dx = - \int_a^b z'_n \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I). \quad (3.7)$$

Tomando o limite em (3.7) e usando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b z_n \varphi' dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b z'_n \varphi dx = \int_a^b (g - w) \varphi dx.$$

obtemos

$$\int_a^b (g - w) \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Aplicando o Lema 2.3 concluímos que $g = w$ q.s. ■

Podemos introduzir uma outra noção de derivada conhecida como *derivada fraca*.

Definição 3.3. *Seja $u \in L^p(I)$, $p \geq 1$. Dizemos que a função $g \in L^p(I)$ é a **derivada fraca** de u se g satisfaz*

$$\int_a^b u \varphi' dx = - \int_a^b g \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I). \quad (3.8)$$

Definição 3.4. *O espaço $W^{1,p}(I)$, $p \geq 1$, é o espaço das funções $u \in L^p(I)$ tal que existe a derivada fraca g de u e $g \in L^p(I)$.*

Pelos argumentos da prova da Proposição 3.2 temos que se g é a derivada generalizada de u então g é a derivada fraca de u . A pergunta natural é se a recíproca também é verdadeira. A resposta é sim, como mostraremos no próximo teorema, e logo, as duas definições são equivalentes. Para provarmos este resultado precisamos do seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Sejam I um intervalo aberto e limitado e $f \in L^p_{loc}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$. Se a derivada generalizada f' existe e $f' \in L^p_{loc}(I)$ então*

$$(i) \quad \forall \epsilon > 0 \text{ e } \forall x \in I \text{ tal que } |x - a| > \epsilon \text{ e } |x - b| > \epsilon \text{ tem-se } (S_\epsilon f)'(x) = S_\epsilon f'(x);$$

(ii) Se $A \subset I$ mensurável então $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|(S_\epsilon f)' - f'\|_{L^p(A)} = 0$;

(iii) Se $K \subset I$ é compacto e $f' \in C(I)$ então $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|(S_\epsilon f)' - f'\|_{L^p(A)} = 0$ uniformemente em K .

Teorema 3.2. Sejam I um intervalo limitado de \mathbb{R} e $u \in W^{1,p}(I)$. Então

(i) Existe uma função $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ tal que $v = u$ em (a, b) ;

(ii) $u \in H^{1,p}(I)$.

Demonstração: (i) Sejam a' e b' tais que $a < a' < b' < b$, e seja $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ tal que, $0 \leq \eta \leq 1$

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (-\infty, a') \\ 0 & \text{se } x \in (b', \infty) \end{cases}$$

Para $u \in W^{1,p}(I)$ escrevemos $u = \eta u + (1 - \eta)u$.

Observemos que $\eta u \in L^p(a, \infty)$ e $(1 - \eta)u \in L^p(-\infty, b)$, assim como suas respectivas derivadas fraca. De fato, para toda $\varphi \in C_0^\infty(a, \infty)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \eta u \varphi' dx &= \int_a^b \eta u \varphi' dx = \int_a^b u \left((\eta \varphi)' - \eta' \varphi \right) dx \\ &= \int_a^b u (\eta \varphi)' - \int_a^b u \eta' \varphi dx = - \int_a^b u' \eta \varphi - \int_a^b u \eta' \varphi dx \\ &= - \int_a^\infty (u' \eta - u \eta') \varphi dx. \end{aligned}$$

Portanto, $(\eta u)' = u' \eta + u \eta' \in L^p(a, \infty)$.

Analogamente, tem-se que $(1 - \eta)u \in L^p(-\infty, b)$.

Agora, estendemos por zero a função ηu à (a, ∞) e depois à \mathbb{R} por reflexão (em a). Deste modo, obtemos uma função $v_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|v_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{L^p(I)}, \quad \|v_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Do mesmo modo, estendemos por zero a função $(1 - \eta)u$ à $(-\infty, b)$ e depois à \mathbb{R} por reflexão (em b). Deste modo, obtemos uma função $v_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|v_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{L^p(I)}, \quad \|v_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Então $v = v_1 + v_2$ satisfaz as condições desejadas.

(ii) Consideremos a convolução $\rho_n * v$. Então, $\rho_n * v \rightarrow v$ em $H^{1,p}(I)$. Logo, $v \in H^{1,p}(I)$, e conseqüentemente $u \in H^{1,p}(I)$. ■

Exemplo 3.1. Considere a função $u : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $|x|$. Então, a derivada fraca de u é a função $w(x)$ dada por

$$w(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 < x < 0, \\ c & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

com c uma constante qualquer.

De fato, integrando por partes, para $\forall \varphi \in C_0^\infty(-1, 1)$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u \varphi' dx &= \int_{-1}^0 u \varphi' dx + \int_0^1 u \varphi' dx \\ &= - \int_{-1}^0 u' \varphi dx - \int_0^1 u' \varphi dx - u(-1)\varphi(-1) + u(1)\varphi(1) \\ &= - \int_{-1}^1 w \varphi dx, \end{aligned}$$

pois $\varphi(\pm 1) = 0$. ■

No seguinte resultado, mostraremos que as funções de $H^{1,p}(I)$ são funções contínuas. Mais precisamente, a classe de equivalência $u \in H^{1,p}(I)$ tem um representante contínuo.

Teorema 3.3. (i) *Toda função em $H^{1,1}(I)$ é uniformemente contínua em I . Em particular $H^{1,1}(I) \subset C(\bar{I})$ e tem-se*

$$\sup_{x \in \bar{I}} |u| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |u| dx + \int_a^b |u'| dx. \quad (3.9)$$

Além disso, Teorema Fundamental do Cálculo é válido, ou seja,

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t) dt, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

(ii) *Se $u \in H^{1,p}(I)$, $p > 1$, então $u \in C^{0,\alpha}(I)$ com $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$ e tem-se*

$$\sup_{x \in \bar{I}} |u| \leq \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |u'|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^\alpha. \quad (3.10)$$

Além disso, para todo $x, y \in \bar{I}$ temos

$$|u(x) - u(y)| \leq \left(\int_I |u'|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |x - y|^\alpha.$$

Demonstração: Sejam $u \in H^{1,p}(I)$ e $x, y \in \bar{I}$. Então existe uma sequência de Cauchy (u_n) em $C^1(I)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $H^{1,p}(I)$. Queremos aplicar o Teorema de Arzelà-Ascoli 1.5. Para isto, vamos provar que (u_n) é equicontínua e uniformemente limitada em $C(\bar{I})$.

Como $u_n \in C^1(I)$, $\forall n$, tem-se

$$u_n(x) - u_n(y) = \int_y^x u'_n(t) dt \quad (3.11)$$

o que implica

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \left| \int_y^x |u'_n(t)| dt \right|, \quad (3.12)$$

$$|u_n(x)| \leq |u_n(y)| + \int_a^b |u'_n(t)| dt. \quad (3.13)$$

Integrando (3.13) com relação a y em I tem-se

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |u_n| dt + \int_a^b |u'_n| dt. \quad (3.14)$$

Portanto, devemos mostrar que, para $E \subset I$, a família de funções

$$E \mapsto \int_E |u'_n| dx$$

é equiabsolutamente contínua, ou seja, $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |u'_n| dx < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.15)$$

De fato, usando (3.15) em (3.12) temos que (u_n) é equicontínua em $C(\bar{I})$. Além disso, como $u_n \rightarrow u$ em $L^p(I)$, logo, é uma sequência limitada na norma $\|\cdot\|_{L^p(I)}$. Este resultado combinado com (3.15) e (3.14) mostram que (u_n) é uniformemente limitada $C(\bar{I})$.

Para provarmos (3.15), usaremos a propriedade continuidade absoluta da integral de Lebesgue (veja Proposição 1.1), ou seja, $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\mu(E) < \delta_0 \Rightarrow \int_E |u'| dx < \frac{\epsilon}{4}. \quad (3.16)$$

Da convergência $u_n \rightarrow u$ em $H^{1,p}(I)$ temos que existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|u_n - u\|_{H^{1,p}(I)} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Mas $\|u'_n - u'\|_{L^1(I)} \leq \|u_n - u\|_{H^{1,1}(I)}$, o que implica

$$n > n_0 \Rightarrow \int_a^b |u'_n - u'| dx < \frac{\epsilon}{4}.$$

Logo,

$$n > n_0 \Rightarrow \int_E |u'_n - u'| dx \leq \int_a^b |u'_n - u'| dx < \frac{\epsilon}{4}. \quad (3.17)$$

Mas,

$$\int_E |u'_n| dx \leq \int_E |u'_n - u'| dx + \int_E |u'| dx. \quad (3.18)$$

Combinando (3.16), (3.17) e (3.18) obtemos

$$\mu(E) < \delta_0, \quad n > n_0 \Rightarrow \int_E |u'_n| dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.19)$$

Usando novamente a propriedade (3.16) da integral de Lebesgue temos que existem $\delta_n > 0$ tais que, para $\delta^* = \min(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_0})$,

$$\mu(E) < \delta^* \Rightarrow \int_E |u'_n| dx < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n = 1, 2, \dots, n_0. \quad (3.20)$$

Escolhendo $\delta = \min(\delta_0, \delta^*)$ e combinando (3.19) e (3.20) obtemos

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |u'_n| dx < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que prova (3.15).

Portanto, podemos aplicar o Teorema de Arzelá-Ascoli 1.5 e obter uma subsequência (u_k) de (u_n) uniformemente convergente, ou seja, existe $w \in C(\bar{I})$ tal que $u_k \rightarrow w$ em $C(\bar{I})$ o que implica $u = w$ q.s.

Agora, passando o limite em (3.11) e (3.14) para $k \rightarrow \infty$, obtemos o Teorema fundamental do Cálculo e a estimativa (3.9). E a prova de **(i)** está completa.

Para provarmos **(ii)** aplicamos a desigualdade de Hölder em (3.12) e (3.14) para obter

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq \left| \int_y^x |u'| dt \right| \leq \left(\int_y^x |u'|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} |x - y|^{1 - \frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_a^b |u'|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} |x - y|^{1 - \frac{1}{p}} \\ \sup_{x \in \bar{I}} |u| &\leq \frac{1}{b - a} \left(\int_a^b |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} (b - a)^{1 - \frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |u'|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} (b - a)^{1 - \frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\frac{1}{b - a} \int_I |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |u'|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} (b - a)^{1 - \frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

■

Observe que o Teorema 3.3 garante que existe uma função contínua em \bar{I} que pertence a classe de equivalência $[u]$, ou seja, se $u \in [u]$ então u é contínua quase sempre. Portanto,

para $I = (a, b)$ e $u \in H^{1,p}(I)$ podemos definir $u(a)$ e $u(b)$ do seguinte modo:

$$u(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} u(x), \quad u(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} u(x).$$

3.2.1 O espaço $H_0^{1,p}(I)$

Definição 3.5. $H_0^{1,p}(I)$ é fecho de $C_0^1(I)$ em $H^{1,p}(I)$ com relação a norma (3.4) .

Claramente $H_0^{1,p}(I)$ é subespaço fechado de $H^{1,p}(I)$. O seguinte resultado caracteriza as funções de $H_0^{1,p}(I)$:

Proposição 3.1. $H_0^{1,p}(I) \cong \{u \in H^{1,p}(I); u(a) = u(b) = 0\}$.

Demonstração: Seja $u \in H^{1,p}(\alpha, \beta)$ com $(\alpha, \beta) \subset I$ então a função

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{em } (\alpha, \beta), \\ 0 & \text{em } I - (\alpha, \beta). \end{cases}$$

pertence a $H_0^{1,p}(I)$. Por outro lado, se $\tilde{I} \subset I$, $u \in H^{1,p}(I)$, $v \in H^{1,p}(\tilde{I})$ e $u - v \in H_0^{1,p}(\tilde{I})$ então a função

$$U(x) = \begin{cases} v(x) & \text{em } \tilde{I}, \\ u(x) & \text{em } I - \tilde{I}. \end{cases}$$

pertence a $H^{1,p}(I)$. Além disso, $U - u \in H_0^{1,p}(I)$ e $U' = v'$ em \tilde{I} e $U' = u'$ em $I - \tilde{I}$. ■

Exemplo 3.2. Considere $[a, b]$ um intervalo compacto e $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com derivada clássica contínua por partes. Então,

(a) Se w é a derivada fraca de u , então $w = u'$ com u' a derivada clássica de u em (a, b) ;

(b) $u \in H^{1,2}(a, b)$

(c) $u \in H_0^{1,2}(a, b)$ se, e somente se, $u(a) = u(b) = 0$.

Demonstração: Para mostrarmos (a), subdividimos o intervalo $[a, b]$ nos intervalos $[x_j, x_{j+1}]$ com x_j os pontos de descontinuidade da derivada clássica de u e integramos por parte em cada um destes subintervalos do mesmo modo como no Exemplo 3.1.

(b) Como u é contínua e $w = u'$ é contínua por partes e limitada tem-se

$$\int_a^b u^2 dx < \infty, \quad \int_a^b u'^2 dx < \infty.$$

Logo, $u \in H^{1,2}(a, b)$.

(c) Se $u \in H_0^{1,2}(a, b)$ então $u(a) = u(b) = 0$, pela Proposição 3.1. Reciprocamente, seja $u(a) = u(b) = 0$. Pela regularidade de u em $x = a$ e $x = b$ vamos construir uma função $v \in C^1([a, b])$ que se anula numa vizinhança dos pontos de fronteira $x = a$ e $x = b$ e tal que

$$\|u - v\|_{H^{1,2}(a,b)} < \eta^2$$

para algum $\eta > 0$. Para isto, considere o operador regularizante

$$v_\epsilon = \int_a^b \rho_\epsilon(x - y) v(y) dy.$$

Logo, $v_\epsilon \in C_0^\infty(a, b)$ e $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} v_\epsilon = v$ em $L^2(a, b)$. Diferenciando e integrando por partes obtemos

$$v'_\epsilon = \int_a^b \rho'_\epsilon(x - y) v(y) dy = \int_a^b \rho_\epsilon(x - y) v'(y) dy.$$

Portanto, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} v'_\epsilon = v'$ em $L^2(a, b)$. Em resumo, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $v_\epsilon \in C_0^\infty(a, b)$ tem-se

$$\|u - v_\epsilon\|_{H^{1,2}(a,b)} \leq \|u - v\|_{H^{1,2}(a,b)} + \|v - v_\epsilon\|_{H^{1,2}(a,b)} < \eta.$$

Fazendo $\epsilon = 1/n$ e $u_n = v_\epsilon$ temos que $u_n \rightarrow u$ em $H^{1,2}(a, b)$ com $u_n \in C_0^\infty(a, b)$, $\forall n$. Logo, $u \in H_0^{1,2}(a, b)$. ■

Precisamos do seguinte lema para provarmos o próximo teorema:

Lema 3.1. Se $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ e $v \in H^{1,p}(\mathbb{R})$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $\rho * v \in H^{1,p}(\mathbb{R})$ e $(\rho * v)' = \rho * v'$.

Teorema 3.4. $H_0^{1,p}(\mathbb{R}) = H^{1,p}(\mathbb{R})$ para $p \geq 1$.

Demonstração: Vamos mostrar que $C_0^\infty(\mathbb{R})$ é denso em $H^{1,p}(\mathbb{R})$, e logo, $H_0^{1,p}(\mathbb{R}) = H^{1,p}(\mathbb{R})$. Para isto, usaremos “a técnica de convolução” (que torna as funções C^∞) e a “técnica de corte” (que torna seus suportes compactos).

Fixemos a função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ em \mathbb{R} e satisfaz

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 2. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, considere a sequência

$$\xi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$$

Como $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tem-se $\xi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\xi_n(x) = 1 \text{ em } (-n, n), \text{ supp } \xi_n \subset (-2n, 2n) \text{ e } 0 \leq \xi_n \leq 1. \quad (3.21)$$

Observe que, se $v \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, então $\xi_n v \rightarrow v$ em $L^p(\mathbb{R})$. De fato, por (3.21) temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |\xi_n(x)v(x) - v(x)|^p dx = 0 \quad \text{q.s em } \mathbb{R}.$$

Logo,

$$|\xi_n(x)v(x) - v(x)|^p \leq |v(x)|^p |\xi_n(x) - 1|^p \leq |v(x)|^p.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |\xi_n(x)v(x) - v(x)|^p dx = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n v - v\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0. \quad (3.22)$$

Agora sejam $u \in H^{1,p}(\mathbb{R})$ e (ρ_n) uma sequência regularizante. Afirmamos que a sequência $u_n = \xi_n(\rho_n * u)$ converge para u em $H^{1,p}(\mathbb{R})$. De fato, escrevendo

$$u_n - u = \xi_n(\rho_n * u - u) + (\xi_n u - u)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|\xi_n(\rho_n * u - u)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|(\xi_n u - u)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \|\rho_n * u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\rho_n u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Usando o Teorema 1.14 e (3.22) tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

Aplicando o Lema 3.1 obtemos

$$u'_n = \xi'_n(\rho_n * u) + \xi_n(\rho_n * u'),$$

e usando que $\xi'_n = \varphi'/n$ tem-se

$$\|u'_n - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{n} \|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\rho_n * u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\xi_n(\rho_n * u' - u')\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\xi_n u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Usando que $\|\rho_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\|\rho_n * u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|\rho_n\|_{L^1(\mathbb{R})} \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}$ tem-se

$$\|u'_n - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{n} \|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\rho_n * u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\xi_n u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$, e portanto, $u_n \rightarrow u$ em $H^{1,p}(\mathbb{R})$. ■

Corolário 3.1. *Se $u \in H^{1,p}(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0.$$

Demonstração: Sejam $H^{1,p}(\mathbb{R})$ e (u_n) uma sequência em $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_n \rightarrow u$. Então a função $|u_n|^{p-1}u_n \in C_0^1(\mathbb{R})$ e $(|u_n|^{p-1}u_n)' = p|u_n|^{p-1}u'_n$. Portanto, para $x \in \mathbb{R}$ temos

$$|u(x)|^{p-1}u(x) = \int_{-\infty}^x p|u_n(t)|^{p-1}u'_n(t) dt.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} |u_n(x)|^p &= \left| \int_{-\infty}^x p|u_n(t)|^{p-1}u'_n(t) dt \right| \leq p \int_{-\infty}^x |u_n(t)|^{p-1}|u'_n(t)| dt \\ &\leq p \int_{\mathbb{R}} |u_n|^{p-1}|u'_n| dx \leq p \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1} \|u'_n\|_{L^p(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Assim,

$$|u_n(x)|^p \leq p \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1} \|u'_n\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.23)$$

Aplicando a desigualdade de Young com $a = \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1}$ e $b = \|u'_n\|_{L^p(\mathbb{R})}$ tem-se

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1} \|u'_n\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \frac{p-1}{p} \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}^p + \frac{1}{p} \|u'_n\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \\ &\leq \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}^p + \|u'_n\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \|u_n\|_{H^{1,p}(\mathbb{R})}^p. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Usando (3.24) em (3.23) obtemos

$$|u_n(x)| \leq p^{\frac{1}{p}} \|u_n\|_{H^{1,p}(\mathbb{R})}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

o que implica

$$\sup_{\mathbb{R}} |u_n(x)| \leq p^{\frac{1}{p}} \|u_n\|_{H^{1,p}(\mathbb{R})}. \quad (3.25)$$

Portanto, (3.25) vale para toda $u \in H^{1,p}(\mathbb{R})$. Mas $\|u_n - u\|_{H^{1,p}(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ e, logo, $\forall \epsilon > 0$ podemos escolher n suficientemente grande tal que $\sup_{\mathbb{R}} |u_n(x) - u(x)| < \epsilon$.

Por outro lado, $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, e logo, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_n(x) = 0$, portanto existe $A > 0$ tal que

$$|x| > A \Rightarrow |u(x)| \leq \sup_{\mathbb{R}} |u_n(x) - u(x)| < \epsilon.$$

■

No que segue, vamos tratar de duas importantes propriedades dos espaços de Sobolev: separabilidade e reflexividade.

Teorema 3.5. *O espaço $H^{1,p}(I)$ é separável para $1 \leq p < \infty$ e reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Demonstração: Seja $X = L^p(I) \times L^p(I)$ e consideremos a aplicação $T : H^{1,p}(I) \rightarrow X$, dada por $Tu = (u, u')$. Definimos a seguinte norma em X

$$\|w\|_X = \left(\|w_1\|_{L^p(I)}^p + \|w_2\|_{L^p(I)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad w = (w_1, w_2) \in X$$

T é claramente linear e $\forall u \in H^{1,p}(I)$ tem-se

$$\|Tu\|_X = \left(\|u\|_{L^p(I)}^p + \|u'\|_{L^p(I)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{H^{1,p}(I)}.$$

Logo, T é uma isometria, ou seja, $H^{1,p}(I)$ e $W = T(H^{1,p}(I))$ são isometricamente isomórfos e podemos identificar $H^{1,p}(I)$ e W .

Como $H^{1,p}(I)$ completo temos que W é um subespaço fechado em X . Mas, X é separável para $1 \leq p < \infty$ e reflexivo para $1 < p < \infty$ pois é produto cartesiano de dois espaços separáveis e reflexivos, e logo, sabemos que as propriedades de separabilidade e reflexividade são propriedades herdadas por subespaços fechados de espaços de Banach. Logo W é separável e reflexivo. Portanto $H^{1,p}(I)$ também é separável e reflexivo. ■

Uma consequência de $H^{1,p}(I)$ ser separável para $1 \leq p < \infty$ é que podemos encontrar uma sequência de subconjuntos V_k de $H^{1,p}(I)$ tal que qualquer $u \in H^{1,p}(I)$ pode ser escrita na forma $u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k$ com $\alpha_k \in \mathbb{R}$ e $\psi_k \in V_k$.

Teorema 3.6 (Desigualdade de Poincaré). *Sejam $I = (a, b)$ um intervalo limitado e $u \in H_0^{1,p}(I)$. Então*

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq (b - a) \|u'\|_{L^p(I)}.$$

Em particular,

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_a^b |u'|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma em $H_0^{1,p}(I)$ equivalente a $\|\cdot\|_{H^{1,p}}$.

Demonstração: Se $u \in H_0^{1,p}(I)$, então

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u' dx \right| \leq \int_I |u'| dx.$$

Pela desigualdade de Hölder tem-se

$$|u(x)| \leq (b-a)^{1-\frac{1}{p}} \|u'\|_{L^p(I)},$$

e logo,

$$|u(x)|^p \leq (b-a)^{p-1} \|u'\|_{L^p(I)}^p. \quad (3.26)$$

Integrando (3.26) com relação a x obtemos o resultado desejado. ■

Teorema 3.7. *Se I é um intervalo limitado, então a seguinte imersão é compacta:*

$$H^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I}), \quad 1 < p \leq \infty.$$

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência limitada em $H^{1,p}(I)$, isto é, existe $M > 0$ tal que $\|u_n\|_{H^{1,p}(I)} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 3.3 tem-se

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \left(\int_I |u_n'|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |x - y|^{1-\frac{1}{p}}, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

Logo,

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq M|x - y|^{1-\frac{1}{p}}, \quad \forall x, y \in \bar{I}$$

o que implica ser (u_n) equicontínua. Então, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli 1.5 existe uma subsequência (u_k) de (u_n) que converge uniformemente em $C(\bar{I})$. ■

Teorema 3.8. *Seja I um intervalo limitado. Então a seguinte imersão é compacta:*

$$H^{1,1}(I) \hookrightarrow L^q(I), \quad 1 \leq q < \infty.$$

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência limitada em $H^{1,1}(I)$, isto é, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|u_n\|_{H^{1,1}(I)} \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostraremos que (u_n) tem uma subsequência que converge forte em $L^q(I)$. Para isto, lembremos que um subconjunto E de um espaço métrico completo X é relativamente compacto se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto finito de pontos $\{x_1^{(\epsilon)}, \dots, x_s^{(\epsilon)}\}$ tais que $E \subset \bigcup_{i=1}^s B_\epsilon(x_i^{(\epsilon)})$. Vamos um conjunto finito de pontos satisfazendo estas condições.

Seja $\ell(I) = b - a$ a medida do intervalo I . Para $\epsilon > 0$ fixo, considere uma subdivisão de I dada por uma família de subintervalos I_1, \dots, I_s tal que

$$\ell(I_j) = \sigma < \left(\frac{\epsilon}{4c}\right)^q \quad \text{para } 1 \leq j \leq s$$

e $\text{int}(I_j) \cap \text{int}(I_n) = \emptyset$ para $j \neq n$.

Seja

$$u_{n,I_j} = \frac{1}{\sigma} \int_{I_j} u_n dx, \quad \forall n, \quad \forall j.$$

Então,

$$\begin{aligned} |u_{n,I_j}| &\leq \frac{1}{\sigma} \int_{I_j} |u_n| dx \leq \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^s \int_{I_j} |u_n| dx \\ &\leq \frac{1}{\sigma} \int_I |u_n| dx \leq \frac{1}{\sigma} \|u_n\|_{H^{1,1}(I)} \leq \frac{c}{\sigma}. \end{aligned}$$

Considere a família \mathcal{G} de funções simples do tipo

$$g(x) = n_1 \epsilon \chi_1 + \dots + n_s \epsilon \chi_s$$

com n_1, \dots, n_s , inteiros em $(-M, M)$, $M > \frac{c}{\epsilon \sigma}$ e χ_j a função característica de I_j .

Mostraremos que existe $g \in \mathcal{G}$ tal que

$$\|u_n - g\|_{L^p(I)} < \epsilon.$$

Para isto, definimos a função

$$u_n^* = \sum_{j=1}^s u_{n,I_j} \chi_j.$$

Pela desigualdade de Poincaré e pela relação (3.9) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_I |u_n - u_n^*|^q dx &\leq \sum_{j=1}^s \int_{I_j} |u_n - u_n^*|^q dx \\
&= \sum_{j=1}^s \int_{I_j} |u_n - u_{n,I_j}|^q dx \\
&\leq \sum_{j=1}^s \left(\sup_{I_j} |u_n - u_{n,I_j}| \right)^{q-1} \int_{I_j} |u_n - u_{n,I_j}| dx \\
&\leq \sum_{j=1}^s \left(\frac{1}{\sigma} \int_{I_j} |u_n - u_{n,I_j}| dx + \int_{I_j} |u'_n| dx \right)^{q-1} \sigma \int_{I_j} |u'_n| dx \\
&\leq \sum_{j=1}^s \left(\frac{1}{\sigma} \sigma \int_{I_j} |u'_n| dx + \int_{I_j} |u'_n| dx \right)^{q-1} \sigma \int_{I_j} |u'_n| dx \\
&\leq \sum_{j=1}^s \left(2 \int_{I_j} |u'_n| dx \right)^{q-1} \sigma \int_{I_j} |u'_n| dx \\
&\leq \sigma 2^{q-1} \sum_{j=1}^s \left(\int_{I_j} |u'_n| dx \right)^q \\
&\leq \sigma 2^{q-1} \left(\int_I |u'_n| dx \right)^q \leq \sigma 2^{q-1} c^q.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela definição de \mathcal{G} encontramos $g \in \mathcal{G}$ tal que

$$|g(x) - u_n^*(x)| \leq \frac{\epsilon}{2l^{\frac{1}{q}}} \quad \forall x \in I.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|u_n - g\|_{L^q(I)} &\leq \|u_n - u_n^*\|_{L^q(I)} + \|u_n^* - g\|_{L^q(I)} \\
&\leq (2^{q-1} c^q \sigma)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_I \left(\frac{\epsilon}{2l^{\frac{1}{q}}} \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 2c\sigma^{\frac{1}{q}} + \frac{\epsilon}{2l^{\frac{1}{q}}} \left(\int_I dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 2c \left(\left[\frac{\epsilon}{4c} \right]^{\frac{1}{q}} \right)^q + \frac{\epsilon}{2l^{\frac{1}{q}}} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

■

Veremos agora uma outra caracterização dos espaços de Sobolev.

Teorema 3.9. *Seja $p > 1$ e $u \in L^p(I)$. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $u \in H^{1,p}(I)$;

(ii) *Existe uma constante c tal que*

$$\left| \int_I u \varphi' dx \right| \leq c \|\varphi\|_{L^q(I)}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I), \quad q = \frac{p}{p-1};$$

(iii) *Existe uma constante c tal que para todo intervalo aberto $J \subset \bar{J} \subset I$ com \bar{J} compacto e todo $h \in \mathbb{R}$ com $|h| < \text{dist}(J, I^c)$, $I^c = \mathbb{R} - I$, tem-se*

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{L^p(\bar{J})} \leq c|h|.$$

Além disso, podemos tomar $c = \|u'\|_{L^p(\bar{J})}$.

Demonstração: (i) \Rightarrow (ii) Se $u \in H^{1,p}(I)$ então $u' \in L^p(I)$ e satisfaz

$$\int_I u \varphi' dx = - \int_I u' \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Como $\varphi \in L^q(I)$, pela desigualdade de Hölder, tem-se

$$\left| \int_I u \varphi' dx \right| = \left| \int_I u' \varphi dx \right| \leq \int_I |u' \varphi| dx \leq c \|\varphi\|_{L^q(I)},$$

com $c = \|u'\|_{L^p(I)}$.

(ii) \Rightarrow (i) Considere o funcional linear $f : C_0^\infty \subset L^q(I) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f(\varphi) = \int_I u \varphi' dx.$$

De (ii) segue-se que $|f(\varphi)| \leq c \|\varphi\|_{L^q(I)}$, logo f é contínuo.

Pelo Teorema de Hahn-Banach 1.1, o funcional f pode ser estendido a um funcional linear contínuo F definido em $L^q(I)$, e pelo Teorema da representação de Riesz 1.8 existe $g \in L^p(I)$ tal que

$$F(\varphi) = \int_I g \varphi dx.$$

Em particular,

$$\int_I u \varphi' dx = \int_I g \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I),$$

Portanto, pelo Teorema 3.2 temos que $u \in H^{1,p}(I)$.

(i) \Rightarrow (iii) Para todo $x \in \tilde{I}$ tem-se

$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t) dt = h \int_0^1 u'(x+sh) ds.$$

Pela desigualdade se Hölder obtemos

$$|u(x+h) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds$$

e integrando sobre \tilde{I} tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{I}} |u(x+h) - u(x)|^p dx &\leq |h|^p \int_{\tilde{I}} dx \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds \\ &\leq |h|^p \int_0^1 ds \int_{\tilde{I}} |u'(x+sh)|^p dx. \end{aligned}$$

Para $0 < s < 1$ tem-se

$$\int_{\tilde{I}} |u'(x+sh)|^p dx = \int_{\tilde{I}+sh} |u'(y)|^p dy \leq \int_I |u'(y)|^p dy,$$

e, logo,

$$\int_{\tilde{I}} |u(x+h) - u(x)|^p dx \leq |h|^p \left(\int_I |u'(y)|^p dy \right).$$

Portanto,

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{L^p(I)} \leq c|h|$$

com $c = \|u'\|_{L^p(I)}$.

(iii) \Rightarrow (ii) Sejam $\varphi \in C_0^\infty(I)$ e $J \subset \bar{J} \subset I$ com \bar{J} compacto tal que $\text{supp } u \subset J$. Para $h \in \mathbb{R}$ com $|h| < \text{dist}(J, I^c)$ tem-se

$$\int_I u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)] dx = \int_I [u(x+h) - u(x)]\varphi(x) dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\left| \int_I u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)] dx \right| \leq \|u(x+h) - u(x)\|_{L^p(I)} \|\varphi\|_{L^q(I)}$$

e portanto,

$$\left| \int_I [\varphi(x-h) - \varphi(x)]u(x) dx \right| \leq c|h| \|\varphi\|_{L^q(I)}.$$

Fazendo $h \rightarrow 0$ obtemos

$$\left| \int_I u\varphi' dx \right| \leq c\|\varphi\|_{L^q(I)}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I).$$

e a prova está completa. ■

3.2.2 Compacidade fraca em $H^{1,1}(I)$

Uma consequência da reflexividade de $H^{1,p}(I)$ para $1 < p < \infty$ e do Teorema 1.4 é que toda sequência limitada em $H^{1,p}(I)$ tem subsequência fracamente convergente. Como $H^{1,1}(I)$ não é reflexivo, a pergunta natural é: existe um critério de compacidade fraca para $H^{1,1}(a, b)$? Para respondermos precisamos dos resultados de compacidade fraca em $L^1(a, b)$, dado no Teorema 1.13.

Teorema 3.10. *Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H^{1,1}(a, b)$. Suponha que:*

(i) $\{u_n\}$ é uniformemente limitada, ou seja, $\sup_n \|u_n\|_{H^{1,1}(a,b)} < \infty$.

(ii) o conjunto das funções $E \mapsto \int_E |u'_n(x)| dx$, $E \subset (a, b)$, é equiabsolutamente contínuo.

Então, existe um subsequência $\{u_k\}$ de $\{u_n\}$ fracamente convergente em $H^{1,1}(a, b)$. Reciprocamente, se $\{u_n\}$ converge fraco em $H^{1,1}(a, b)$ então as condições (i) e (ii) são satisfeitas.

Além disso, as condições (i) e (ii) são satisfeitas se, e somente se, $\{u_n\}$ é uniformemente limitada em $L^1(a, b)$ e existe uma função $\Theta : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Theta(t)}{t} = \infty, \quad \sup_n \int_{\Omega} \Theta(|u'_n(x)|) dx < \infty.$$

Demonstração: Por (i) e o Teorema 3.3 concluímos que $\{u_n\}$ (passando para uma subsequência se necessário) converge forte em $L^1(a, b)$ para alguma $u \in L^1(a, b)$. De fato, usando que a imersão compacta

$$H^{1,1}(a, b) \hookrightarrow L^1(a, b)$$

temos por (i) (passando a subsequência se necessário) que (u_n) converge forte em $L^1(a, b)$, isto é, existe $u \in L^1(a, b)$ tal que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } L^1(a, b).$$

Por (ii), $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $E \subset (a, b)$

$$m(E) < \delta \Rightarrow \int_E |u'_n| dx < \epsilon. \quad (3.27)$$

Note que $\forall x, y \in [a, b]$, tem-se

$$u_n(y) - u_n(x) = \int_x^y u'_n dx.$$

Portanto

$$|u_n(y) - u_n(x)| = \left| \int_x^y u'_n dx \right| \leq \int_x^y |u'_n| dx.$$

Usando (3.27) obtemos que

$$|y - x| < \delta \Rightarrow |u_n(y) - u_n(x)| \leq \int_x^y |u'_n| dx < \epsilon.$$

Logo (u_n) é equicontínua. Pelo teorema de Arzelá-Ascoli 1.5, (u_n) tem uma subsequência que converge uniformemente para u . Pelo Teorema 1.12 (passando a subsequência se necessário) existe $w \in L^1(a, b)$, tal que

$$u'_n \rightharpoonup w \text{ em } L^1(a, b).$$

Por outro lado, para $\varphi \in C_0^1(a, b)$ tem-se

$$\int_a^b u_n \varphi' dx = - \int_a^b u'_n \varphi dx.$$

Como

$$\int_a^b u'_n \varphi dx \rightarrow \int_a^b w \varphi dx$$

obtemos

$$\int_a^b u_n \varphi' dx \rightarrow - \int_a^b w \varphi dx.$$

Mas,

$$\int_a^b u_n \varphi' dx \rightarrow \int_a^b u \varphi' dx$$

e pela unicidade do limite obtemos

$$\int_a^b u \varphi' dx = - \int_a^b w \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1(a, b).$$

Assim $u' = w$ no sentido fraco, e portanto, $u_n \rightharpoonup u$ em $H^{1,1}(a, b)$.

As outras afirmações são consequências do Teorema de compacidade fraca em $L^1(a, b)$ e a prova está completa. ■

3.2.3 Os espaços $H^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ e $H_0^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$

De modo análogo, definimos os espaços de Sobolev $H^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ e $H_0^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ como segue:

$$\begin{aligned} H^{1,p}(I, \mathbb{R}^N) &= \{u = (u_1, \dots, u_N); u_i \in H^{1,p}(I), i = 1, \dots, N\} = (H^{1,p}(I))^N, \\ H_0^{1,p}(I, \mathbb{R}^N) &= \{u = (u_1, \dots, u_N); u_i \in H_0^{1,p}(I), i = 1, \dots, N\} = (H_0^{1,p}(I))^N. \end{aligned}$$

Deste modo, os resultados obtidos para os espaços $H^{1,p}(I)$ podem ser provados para $H^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ considerando as componentes da função $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$.

3.3 Funções absolutamente contínuas

Como foi visto nas seções anteriores, a ideia fundamental na definição dos espaços de Sobolev é a noção de derivada fraca. Para funções regulares, a derivada fraca e a derivada clássica coincidem, mas para funções que não são regulares, como por exemplo, as funções que são deriváveis quase sempre no sentido clássico, estas duas derivadas são diferentes.

O principal objetivo desta Seção é investigar a relação entre derivada clássica q.s. e derivada fraca. Isso será feito através das **funções absolutamente contínuas**, um conceito introduzido por Vitalli e muito usado por Tonelli no Cálculo Variacional.

Seja $u \in H^{1,1}(a, b)$. Sabemos que, para todo $x, y \in [a, b]$

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t) dt$$

e logo,

$$\frac{u(x+h) - u(y)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} u'(t) dt. \quad (3.28)$$

Aplicando o teorema da diferenciação de Lebesgue em (3.28) concluímos que u é diferenciável q.s em $[a, b]$ no sentido clássico, ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(y)}{h} = u'(x) \quad \text{q.s em } [a, b]$$

Em resumo,

Teorema 3.11. *Se $u \in H^{1,1}(a, b)$, então u é uma função de classe $C([a, b])$, diferenciável q.s no sentido clássico e sua derivada clássica u' coincide q.s. com sua derivada fraca $w \in L^1(a, b)$. Além disso, vale o Teorema Fundamental do Cálculo*

$$u(x) - u(y) = \int_y^x w(t) dt, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Agora vamos caracterizar as funções de $H^{1,1}(I)$ sem usar derivada fraca.

Definição 3.6 (Funções absolutamente contínuas). *Dizemos que a função $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon \quad (3.29)$$

para (a_i, b_i) , $1 \leq i \leq n$, intervalos disjuntos de (a, b) . Representaremos o conjunto das funções absolutamente contínuas por $AC(a, b)$.

Claramente, toda função $u \in AC(a, b)$ é uniformemente contínua em (a, b) , e logo, podemos estender u como uma função contínua ao fecho de (a, b) .

É claro também que toda função u que é Lipschitz-contínua em (a, b) pertence a $AC(a, b)$. De fato, se

$$|u(x) - u(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall x, y \in (a, b)$$

então (3.29) é satisfeita para $\delta = \epsilon/k$.

Definição 3.7. *Definimos a variação total de uma função $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$V_a^b(u) = \sup \sum_{i=1}^m |u(x_i) - u(x_{i-1})| \quad (3.30)$$

com o supremo tomado para todo m e todas as escolhas de $\{x_i\}$ tais que

$$a < x_0 < x_1 < \cdots < x_m < b.$$

Proposição 3.2. *Se $u \in AC(a, b)$ então $V_a^b(u) < \infty$.*

Demonstração: Como $u \in AC(a, b)$ temos que (3.29) é satisfeita. Tomemos $\epsilon = 1$ e $\delta > 0$. Sejam $y_0 < y_1 < \cdots < y_k$ pontos de (a, b) tais que $y_0 = a$, $y_k = b$ e $y_i - y_{i-1} < \delta$. Se $\{x_j\}_{j=1}^m$ são pontos de (a, b) tais que

$$a < x_0 < x_1 < \cdots < x_m < b,$$

represente por $\{t_l\}_{l=1}^n$ a família finita de pontos de (a, b) obtida adicionando os pontos $\{x_j\}_{j=1}^m$ aos pontos $\{y_i\}_{i=1}^{k-1}$. Então, $n \leq m + k - 1$ e a família $\{t_l\}_{l=1}^n$ forma k grupos de intervalos consecutivos com cada grupo cobrindo um intervalo de comprimento menor ou igual a δ , Portanto, (3.29) implica

$$\sum_{i=1}^m |u(x_i) - u(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n |u(x_i) - u(x_{i-1})| \leq k.$$

Escolhendo $k \leq 1 + (b - a)/\delta$ e tomando o supremo sob todas as famílias $\{x_j\}$, obtemos

$$V_a^b(u) \leq 1 + \frac{b - a}{\delta} < \infty$$

e a prova está completa. ■

Lema 3.2. *Se $u \in C^1(a, b)$, então $V_a^b(u) < \infty$ se, e somente se,*

$$\int_a^b |u'| dx < \infty.$$

Neste caso, temos

$$V_a^b(u) = \int_a^b |u'| dx.$$

Demonstração: Seja $\{x_j\}$ uma família em (a, b) , com $a < x_0 < x_1 < \dots < x_N < b$. Então para todo $j = 1, \dots, N$, temos

$$|u(x_j) - u(x_{j-1})| = \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} u'(x) dx \right| \leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} |u'(x)| dx.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^N |u(x_j) - u(x_{j-1})| \leq \sum_{i=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} |u'| dx = \int_{x_0}^{x_N} |u'| dx \leq \int_a^b |u'| dx$$

Tomando o supremo sobre todas as famílias $\{x_j\}$, obtemos por definição de variação total,

$$V_a^b(u) \leq \int_a^b |u'| dx.$$

Agora vamos provar a desigualdade oposta. Fixemos $a' > a$ e $b' < b$. Como $u \in C^1(a, b)$, então u' é uniformemente contínua em $[a', b']$, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |u'(x) - u'(y)| < \epsilon, \quad \forall x, y \in [a', b'].$$

Sejam $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ pontos em $[a', b']$ tais que $x_j - x_{j-1} < \delta$, para todo $j = 1, \dots, N$, então para todo $x \in [x_{j-1}, x_j]$ temos

$$u(x_j) - u(x_{j-1}) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} u'(y) dy = \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u'(y) - u'(x)) dy + (x_j - x_{j-1})u'(x).$$

daí

$$u'(x) = \frac{u(x_j) - u(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} + \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u'(x) - u'(y)) dy$$

Logo,

$$\begin{aligned} |u'(x)| &\leq \frac{|u(x_j) - u(x_{j-1})|}{x_j - x_{j-1}} + \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} |u'(x) - u'(y)| dy \\ &\leq \frac{|u(x_j) - u(x_{j-1})|}{x_j - x_{j-1}} + \epsilon. \end{aligned}$$

Integrando sobre $[x_{j-1}, x_j]$ obtemos

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} |u'| dx \leq |u(x_j) - u(x_{j-1})| + \epsilon(x_j - x_{j-1}).$$

Tomando o somatório para $j = 1, \dots, N$, temos

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_N} |u'| dx &\leq \sum_{j=1}^N |u(x_j) - u(x_{j-1})| + \epsilon(b - a). \\ &\leq V_a^b(u) + \epsilon(b - a). \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre todas as famílias $\{x_j\}$ em $[a', b']$, temos

$$\int_{a'}^{b'} |u'| dx \leq V_a^b(u) + \epsilon(b - a).$$

Agora tomando o supremo sobre todos $a' > a$ e $b' > b$, obtemos

$$\int_a^b |u'| dx \leq V_a^b(u) + \epsilon(b - a) \quad \forall \epsilon > 0,$$

e portanto,

$$\int_a^b |u'| dx \leq V_a^b(u).$$

■

Lema 3.3. *Seja $u \in C^1(a, b)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $u \in AC(a, b)$;

(ii) $V_a^b(u) < \infty$;

(iii) $\int_a^b |u'| dx < \infty$;

(iv) o conjunto das funções $E \mapsto \int_E |u'| dx$ com $E \subseteq (a, b)$ mensurável, é absolutamente contínuo, ou seja, $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |u'| dx < \epsilon.$$

Demonstração: As implicações (i) \Rightarrow (ii) e (ii) \Rightarrow (iii), seguem da Proposição 3.2 e do Lema 3.2. (iii) \Rightarrow (iv) Suponhamos que

$$\int_a^b |u'| dx < \infty.$$

Então $u' \in L^1(a, b)$, e pela continuidade absoluta da integral de Lebesgue, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $E \subseteq (a, b)$ mensurável,

$$m(E) < \delta \Rightarrow \int_a^b |u'| dx < \epsilon.$$

(iv) \Rightarrow (i) Suponhamos que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todo $E \subseteq (a, b)$ mensurável

$$m(E) < \delta \Rightarrow \int_a^b |u'| dx < \epsilon.$$

Seja $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^N$ uma família de segmentos disjuntos em (a, b) , então

$$\sum_{i=1}^N |u(b_i) - u(a_i)| = \sum_{i=1}^N \left| \int_{a_i}^{b_i} u' dx \right| \leq \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} |u'| dx = \int_{\bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i)} |u'| dx$$

Se $\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta$, então definimos $E = \bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i)$, e logo,

$$\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) = m(E) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^N |u(b_i) - u(a_i)| \leq \int_E |u'| dx < \epsilon.$$

■

Definição 3.8. Uma família de funções absolutamente contínuas é chamada **equiabsolutamente contínua** se, $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que (3.29) é satisfeita para todos os elementos da família.

Lema 3.4. Se $u \in AC(a, b)$ então existe uma sequência de funções $\{u_n\}$ em $C^1(a, b) \cap AC(a, b)$ que são equiabsolutamente contínuas e convergem uniformemente para u . Além disso, a sequência $\{u'_n\}$ converge fracamente para u' em $L^1(a, b)$.

Demonstração: Como $AC(a, b) \subset C(a, b)$ e $C^1(a, b)$ é denso em $C(a, b)$ com relação a norma do supremo. Então se $u \in AC(a, b)$ existe uma sequência $(u_n) \subset C^1(a, b)$ tal que $u_n \rightarrow u$ uniformemente. E pelo Lema 3.3, (u_n) é equiabsolutamente contínua. ■

No próximo resultado, caracterizaremos as funções de $H^{1,1}(a, b)$ usando as funções absolutamente contínuas.

Teorema 3.12.

$$AC(a, b) = H^{1,1}(a, b).$$

Demonstração: Se $u \in H^{1,1}(a, b)$ então pelo Teorema 3.3 tem-se

$$u(b_i) - u(a_i) = \int_{a_i}^{b_i} u'(t) dt$$

para toda família $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^N$ de segmentos disjuntos em (a, b) . Logo

$$|u(b_i) - u(a_i)| \leq \int_{a_i}^{b_i} |u'(t)| dt.$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^N |u(b_i) - u(a_i)| \leq \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} |u'| dt = \int_{\cup_{i=1}^N (a_i, b_i)} |u'| dx.$$

Seja $E = \bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i)$. Como, $u' \in L^1(a, b)$ então pela continuidade absoluta da integral de Lebesgue, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$m(E) = \sum_{i=1}^N |b_i - a_i| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^N |u(b_i) - u(a_i)| \leq \int_E |u'| dx < \epsilon.$$

mostrando que $u \in AC(a, b)$, e assim, $H^{1,1}(a, b) \subset AC(a, b)$.

Reciprocamente, se $u \in AC(a, b)$ então pelo Lema 3.4, $u \in H^{1,1}(a, b)$, e portanto, $AC(a, b) \subset H^{1,1}(a, b)$. ■

Capítulo 4

Resultados de existência

Neste capítulo aplicaremos o método direto para encontrar o mínimo de funcionais integrais no espaço de Sobolev $H^{1,1}(a, b)$ ou na classe das funções absolutamente contínuas.

Primeiro, investigaremos quais condições o lagrangeano F deve satisfazer para tornar o funcional integral \mathcal{F} fracamente sequencialmente semicontínuo inferior e com tais resultados e adequadas hipóteses de coercividade provaremos alguns resultados de existência, em particular o Teorema de existência de Tonelli, usando o método direto.

4.1 Condições para semicontinuidade

Considere o funcional integral

$$\mathcal{F}(u) = \int_I F(x, u(x), u'(x)) dx \quad (4.1)$$

com $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado e $F : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

A primeira pergunta é: \mathcal{F} está bem definido para $u \in H^{1,p}(a, b)$, $p \geq 1$ e $F \in C$? Para respondermos esta pergunta, provaremos o seguinte resultado:

Lema 4.1. *Seja $h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que*

- (i) $x \mapsto h(x, y)$ é mensurável, $\forall y \in \mathbb{R}^k$;
- (ii) $y \mapsto h(x, y)$ é contínua para $x \in \mathbb{R}^N$ q.s.

Se $w : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma função mensurável então $x \mapsto h(x, w(x))$ é uma função mensurável.

Demonstração: Como w é mensurável existe uma sequência (φ_j) de funções simples tal que $w(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j(x)$ q.s. em \mathbb{R}^n . Como (φ_j) são funções simples então são da forma

$$\varphi_j(x) = \sum_{i=1}^{l_j} \lambda_i \chi_{A_i} \text{ para } A_1, \dots, A_{l_j} \text{ conjuntos mensuráveis disjuntos.}$$

Como $\forall s \in \mathbb{R}$ temos

$$\{x \in \mathbb{R}^n; h(x, \varphi_j(x)) > s\} = \bigcup_{i=1}^{l_j} \left(\{x \in \mathbb{R}^n; h(x, \lambda_j) > s\} \cap A_i \right)$$

concluimos que $h(x, \varphi_j(x))$ é mensurável e pela continuidade de $h(x, y)$ em y obtemos

$$h(x, \varphi_j(x)) \rightarrow h(x, w(x)) \text{ q.s. em } \mathbb{R}^n.$$

Logo, $h(x, w(x))$ é mensurável. ■

Como consequência do Lema 4.1 temos

Proposição 4.1. *Seja F não-negativa ou limitada inferiormente por uma função em L^1 . Se $u \in H^{1,p}(I), p \geq 1$ então o funcional integral $\mathcal{F}(u)$ dado em (4.1) está bem definido.*

A Proposição 4.1 também é válida quando $F(x, u, p)$ é mensurável em x e contínua em (u, p) para quase todo $x \in I$. Além disso, \mathcal{F} pode ser ilimitado, ou seja, $\mathcal{F}(u) = \infty$.

Agora, podemos investigar a principal questão desta seção:

(P): *Quais condições o lagrangeano $F(x, u, p)$ deve satisfazer para garantirmos que o funcional \mathcal{F} seja sequencialmente semicontínuo inferior com relação a convergência fraca em $H^{1,p}(I), p \geq 1$?*

Para compreendermos melhor o problema vamos considerar o caso simples $\mathcal{F} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com $[a, b]$ compacto e \mathcal{F} contínua. Então, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $\mathcal{F}(x_0) = \min_{x \in [a, b]} \mathcal{F}(x)$. De fato, seja $\{x_n\}$ uma *sequência minimizante* de \mathcal{F} em $[a, b]$, ou seja,

$$\inf_{x \in [a, b]} \mathcal{F}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(x_n). \quad (4.2)$$

Observe que para conjuntos mais gerais \mathcal{M} pode acontecer $\inf_{\mathcal{M}} \mathcal{F}(x) = -\infty$ se \mathcal{M} não for inferiormente limitado.

Pela compacidade de $[a, b]$ temos que existe uma subsequência $\{x_k\}$ de $\{x_n\}$ e $x_0 \in [a, b]$ tais que $x_k \rightarrow x_0$. Usando a continuidade de \mathcal{F} obtemos $\mathcal{F}(x_k) \rightarrow \mathcal{F}(x_0)$ e por (4.2)

tem-se

$$\mathcal{F}(x_0) = \inf_{x \in [a, b]} \mathcal{F}(x). \quad (4.3)$$

Ressaltamos que, na discussão acima, a seguinte propriedade, “mais fraca” do que a continuidade de \mathcal{F} , é suficiente para obtermos o resultado desejado:

$$\mathcal{F}(x_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(x_k). \quad (4.4)$$

De fato, combinando (4.2) e (4.4) obtemos (4.3). A propriedade (4.4) é chamada *semicontinuidade inferior*.

Alem disso, x_0 é também um mínimo local de \mathcal{F} se

$$\mathcal{F}(a) > \inf_{x \in (a, b)} \mathcal{F}(x), \quad \mathcal{F}(b) > \inf_{x \in (a, b)} \mathcal{F}(x). \quad (4.5)$$

Agora, considere X um espaço de Banach e $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. É natural indagarmos se um procedimento similar ao acima é válido se substituirmos $[a, b]$ por um conjunto \mathcal{M} *fechado e limitado* de X e (4.5) por

$$\inf_{u \in \partial \mathcal{M}} \mathcal{F}(u) > \inf_{u \in \mathcal{M}} \mathcal{F}(u).$$

Infelizmente a resposta, em geral, é *não* e a razão é que a compacidade de $[a, b]$ é a propriedade essencial. É fato que poderíamos fazer uma prova similar e obter o seguinte resultado:

(A): *Se \mathcal{F} é um funcional semicontínuo inferior no espaço compacto $\mathcal{K} \subset X$ então \mathcal{F} tem um mínimo em \mathcal{K} .*

Porém, este resultado é muito restrito, pois a bola unitária fechada de X não é compacta. Por esta razão, devemos considerar outra topologia em X em vez da induzida pela norma. Uma topologia na qual qualquer conjunto limitado $\mathcal{M} \subset X$ seja relativamente compacto. Portanto, com a semicontinuidade inferior do funcional \mathcal{F} com relação a esta topologia provaremos a afirmação (A) acima substituindo \mathcal{K} por um conjunto fechado e limitado com relação a esta topologia. A topologia adequada é a da *convergência fraca*.

Ressaltamos que, trataremos de *semicontinuidade sequencialmente fraca* de funcionais e não de *semicontinuidade fraca* (que são conceitos diferentes). A razão é essencialmente prática, pois nas aplicações semicontinuidade sequencialmente fraca é a propriedade mais facilmente obtida.

Retornando a pergunta (P), observe que se $\{u_n\}$ é uma sequência de funções Lipschitz com constantes de Lipschitz equi-limitadas que converge uniformemente para a função u então $\{u_n\}$ é fracamente convergente para u em $H^{1,p}(I)$, $p \geq 1$. Como consequência deste resultado obtemos a seguinte condição necessária para o funcional $\mathcal{F}(u)$ dado em (4.1) ser semicontínuo inferior, cuja prova pode ser encontrada em [5, Teorema 3.3, p. 105]:

Teorema 4.1. *Se $\mathcal{F}(u)$ é sequencialmente semicontínuo inferior com relação a convergência uniforme de funções equi-lipschitz, ou seja,*

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_n)$$

para toda u_n com $\sup_n \|u_n\|_{Lip} < \infty$ e $u_n \rightarrow u$ uniformemente.

Então,

$$\int_I F(x_0, u_0, p_0 + \varphi'(x)) dx \geq (b - a) F(x_0, u_0, p_0)$$

para todo $x_0 \in I$, $u_0 \in \mathbb{R}^N$, $p_0 \in \mathbb{R}^N$ e para toda $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$.

Em particular, $F(x, u, p)$ é convexo em p para todo $x \in I$ fixo e $u \in \mathbb{R}^N$.

O próximo resultado mostra que a convexidade de F em p é uma condição suficiente para semicontinuidade de $\mathcal{F}(u)$.

Teorema 4.2 (Teorema de semicontinuidade de Tonelli). *Sejam I um intervalo aberto e limitado de \mathbb{R} e $F(x, u, p)$ um lagrangeano satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) F e F_p são contínuas em (x, u, p) ;
- (ii) F é não-negativa ou limitada inferiormente por uma função L^1 ;
- (iii) F é convexo em p .

Então, o funcional $\mathcal{F}(u)$ dado em (4.1) é sequencialmente fracamente semicontínuo inferior em $H^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, $p \geq 1$, ou seja, se $u_n \rightharpoonup u$ em $H^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$ então

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_n). \quad (4.6)$$

Equivalentemente, se $u_n \rightarrow u$ uniformemente e $\{u'_n\}$ é uniformemente limitada em $L^1(I)$ então (4.6) é satisfeita.

Demonstração: É suficiente provar somente o caso $p = 1$, pois para I limitado temos que se $\{u_n\}$ converge fracamente para u em $H^{1,1}(I, \mathbb{R}^N)$, então convergirá fracamente para u em $H^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, para $p > 1$.

Seja $u_n \rightharpoonup u$ em $H^{1,1}(I, \mathbb{R}^N)$. Como a imersão $H^{1,1}(I, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(I, \mathbb{R}^N)$, $1 \leq q < \infty$, é compacta existe uma subsequência de (u_k) , que representaremos novamente por (u_n) , tal que $u_n \rightarrow u$ em $L^q(I, \mathbb{R}^N)$. Logo, $u_n(x) \rightarrow u(x)$ q.s. em I .

Suponhamos que $\mathcal{F}(u) < \infty$, isto é, $F(x, u, u') \in L^1(I)$. Para qualquer $\epsilon > 0$ podemos encontrar um subconjunto compacto $K \subset I$, com $\mu(I - K) < \epsilon$, tal que $u_n \rightarrow u$ uniformemente em K , pelo Teorema Egorov e u, u' são contínuas em K , pelo Teorema de Luzin (veja Teoremas 1.6 e 1.7).

Além disso, como $F(x, u, u') \in L^1(I)$ então, pela continuidade absoluta da integral de Lebesgue, tem-se $\int_{I-K} F(x, u, u') dx \leq \epsilon$, o que implica

$$\int_K F(x, u, u') dx \geq \int_I F(x, u, u') dx - \epsilon. \quad (4.7)$$

Por outro lado, pela não negatividade e convexidade de F em p obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_n) &\geq \int_K F(x, u_n, u'_n) dx \\ &\geq \int_K F(x, u_n, u') dx + \int_K F_p(x, u_n, u')(u'_n - u') dx \\ &\geq \int_K F(x, u_n, u') dx + \int_K F_p(x, u, u')(u'_n - u') dx \\ &+ \int [F_p(x, u_n, u') - F_p(x, u, u)](u'_n - u') dx. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como $u_n \rightarrow u$ uniformemente em K e $F(x, u, u')$ é uniformemente contínua em K então $F(x, u_n, u'_n) \rightarrow F(x, u, u')$ uniformemente em K , e logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K F(x, u_n, u') = \int_K F(x, u, u'). \quad (4.9)$$

Como $F_p(x, u, u')$ é limitada em K e $u'_n - u' \rightharpoonup 0$ em $L^1(I)$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K F_p(x, u, u')(u'_n - u') = 0. \quad (4.10)$$

Além disso, como $F_p(x, u, u')$ é uniformemente contínua em K então $F(x, u_n, u') \rightarrow F_p(x, u, u')$ uniformemente em K . Assim, usando que $(u'_n - u')$ é limitada em $L^1(I)$ obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K [F_p(x, u_n, u') - F_p(x, u, u)](u'_n - u') = 0. \quad (4.11)$$

Portanto, combinando (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) e (4.11) concluímos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_n) \geq \int_K F(x, u, u') dx \geq \int_I F(x, u, u') dx - \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$

e logo

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_n) \geq \mathcal{F}(u).$$

Por outro lado, se $\mathcal{F}(u) = \infty$ podemos assumir que $\mathcal{F}(u) > \frac{1}{\epsilon}$ em K . Portanto,

$$\int_K F(x, u, u') dx > \frac{1}{\epsilon}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Assim,

$$\mathcal{F}(u) \geq \int_I F(x, u, u') dx \geq \int_K F(x, u, u') dx > \frac{1}{\epsilon}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Logo,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_n) \geq \infty = \mathcal{F}(u).$$

E a prova está completa. ■

As hipóteses do Teorema 4.2 podem ser “enfraquecidas”. Um resultado com $F(x, u, p)$ convexo em p e semicontínuo inferiormente em (u, p) pode ser encontrada em [5, Teorema 3.6, p. 101] e um resultado que considera $F(x, u, p)$ um função de Carathéodory (F mensurável em x , para (u, p) fixos e contínua em (u, p) para quase todo x fixo) foi provado por E. De Giorgi em 1968 em [9]. Em 1977, A. D. Ioffe e C. Olech [10, 12], independentemente um do outro, generalizaram do Teorema 4.2 para o caso somente semicontínuo inferiormente em (u, p) .

4.2 Resultados de Existência

Nesta seção apresentaremos o **Teorema de Tonelli** para existência para mínimo de funcionais integrais. Devido a importância, tanto matemática quando histórica do resultado, faremos um breve resumo histórico do trabalho de Tonelli.

4.2.1 As ideias de Tonelli

As ideias de D. Hilbert para justificar o princípio de Dirchlet foram bastante desenvolvidas pela matemático italiano Leonida Tonelli (1885-1946). O procedimento de

construir uma sequência minimizante e mostrar que existe subsequência convergente é a essência do trabalho de Tonelli.

Em 1900, D. Hilbert apresentou uma prova direta da existência de mínimo para a integral de Dirichlet, mas nesta prova ele usou propriedades “específicas” das funções harmônicas. Em 1905, Baire introduziu o conceito de semicontinuidade para funções reais e provou que, em domínios compactos, funções semicontínuas inferiormente atingem mínimo absoluto.

Tonelli entendeu que os *argumentos de compacidade* do Teorema de Arzelà-Ascoli e a propriedade de *semitcontinuidade* de Baire eram as ferramentas necessárias para uma prova direta de existência de mínimos dos funcionais do Cálculo variacional. Isso significa que para provar a existência de mínimo absoluto de um funcional $\mathcal{F}(u)$ definido na classe \mathcal{C} deve-se

(i) mostrar que \mathcal{F} é limitado inferiormente em \mathcal{C} , e portanto, tem ínfimo finito;

(ii) mostrar que o funcional \mathcal{F} é sequencialmente semicontínuo inferior com relação a algum tipo de convergência, para a qual é sequencialmente compacto. Em outras palavras, prova-se que existem em \mathcal{C} uma sequência minimizante $\{u_k\}$ convergindo para $u_0 \in \mathcal{C}$ e deste modo tem-se

$$\inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \leq \mathcal{F}(u_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_k) \leq \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F},$$

o que implicará $\mathcal{F}(u_0) = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$.

O tipo de convergência não foi especificada, mas por muitos anos a convergência usada foi a convergência uniforme.

Em 1911, ainda muito jovem, Tonelli provou a existência de mínimo absoluto para integrais regulares positivas (e gerais) do Cálculo variacional em curvas retificáveis, parametrizáveis e contínuas do \mathbb{R}^2 . A regularidade era uma forma forte de *convexidade* e esta hipótese implicava na *semitcontinuidade inferior* com relação a convergência uniforme. Hoje em dia, estas condições são dadas pela continuidade e convexidade.

Em 1914-15, Tonelli provou existência de mínimo para curvas não parametrizáveis do \mathbb{R}^2 . Para este caso, atualmente, as condições de Tonelli são obtidas das condições de continuidade, convexidade e coersividade.

Em 1921-23, depois da primeira guerra mundial, Tonelli publicou uma completa teoria

sobre existência de mínimo de funcionais numa monografia [13] de 1150 páginas.

4.2.2 O Teorema de Tonelli

Definição 4.1. *Sejam $I = (a, b)$ um intervalo limitado e uma função $F : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que F tem **crescimento superlinear** se existe uma função $\theta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$(i) \quad F(x, u, p) \geq \theta(p), \quad \forall (x, u, p) \in I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N;$$

$$(ii) \quad \lim_{\|p\| \rightarrow \infty} \frac{\theta(p)}{\|p\|} = \infty.$$

Definição 4.2. *Dizemos que a função $F : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tem **crescimento polinomial** m se existem constantes positivas c_0, c_1, c_2 e uma constante $m \geq 1$ tais que*

$$c_0 \|p\|^m \leq F(x, u, p) \leq c_1 \|p\|^m + c_2, \quad \forall (x, y, p) \in I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N. \quad (4.12)$$

Observe que, se F tem crescimento polinomial com $m > 1$ então F tem crescimento superlinear.

O seguinte resultado é uma consequência imediata do Teorema 4.2 e do critério de compacidade fraca em $H^{1,1}(a, b)$ dado no Teorema 3.10:

Teorema 4.3 (teorema de existência de Tonelli). *Suponha que o lagrangeano $F(x, u, p)$ satisfaz as seguintes condições:*

(i) $F(x, u, p)$ e $F_p(x, u, p)$ são contínuas em (x, u, p) ;

(ii) $F(x, u, p)$ é convexo em p ;

(iii) $F(x, u, p)$ tem crescimento superlinear.

Então existe um mínimo do funcional $\mathcal{F}(u)$ dado em (4.1) na classe

$$\mathcal{C}(\alpha, \beta) = \{u \in H^{1,1}((a, b), \mathbb{R}^N); u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$$

com α, β vetores fixos em \mathbb{R}^N .

Demonstração: Por (i), (ii) e (iii) temos que as hipóteses do Teorema 4.2 são satisfeitas, e portanto, \mathcal{F} é limitado inferiormente e sequencialmente fracamente contínuo inferior em $H^{1,1}(a, b)$. Logo, $\inf_{u \in H^{1,1}(a, b)} \mathcal{F}(u) > -\infty$.

Seja (u_n) uma seqüência minimizante em $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_n) = \inf_{u \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)} \mathcal{F}(u).$$

Queremos mostrar que existe uma subsequência de (u_n) fracamente convergente em $H^{1,1}(a, b)$. Para isto, aplicaremos o Teorema 3.10.

Como F tem crescimento superlinear temos que

$$\int_I \theta(u'_n) dx \leq \int_I F(x, u_n, u'_n) dx = \mathcal{F}(u_n) \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

para alguma $C > 0$. Logo,

$$\sup_n \int_I \theta(u'_n) dx < \infty. \quad (4.13)$$

Usando novamente que F tem crescimento superlinear temos que

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u) > \|u'\|_{L^1} \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\theta(u')}{\|u'\|_{L^1}} dx \rightarrow \infty$$

com $\|u\| = \|u\|_{H^{1,1}(a,b)}$. Logo, existe $R > 0$ tal que, para $v \in H^{1,1}(a, b)$ fixa,

$$\|u\|_{H^{1,1}(a,b)} > R \Rightarrow \mathcal{F}(u) > \mathcal{F}(v), \quad \forall u \in H^{1,1}(a, b). \quad (4.14)$$

Considere o conjunto não vazio $\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{C}; \|u\|_{H^{1,1}(a,b)} \leq R\}$. Então, por (4.14), cada solução u do problema modificado

$$\min_{u \in \mathcal{B}} \mathcal{F}(u)$$

também é solução do problema

$$\min_{u \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(u).$$

Observe que \mathcal{B} é fechado, limitado e convexo. Seja $\{u_n\}$ uma seqüência minimizante em \mathcal{B} . Logo, $\{u_n\}$ é limitada. Combinando este resultado e (4.13) temos que as hipóteses do Teorema 3.10 são satisfeitas. Portanto, existem $u_0 \in H^{1,1}(I, \mathbb{R}^N)$ e uma subsequência (u_k) de (u_n) tais que $u_0(a) = \alpha$, $u_0(b) = \beta$ e

$$u_k \rightarrow u_0 \text{ em } H^{1,1}(I, \mathbb{R}^N),$$

$$u_k \rightarrow u_0 \text{ uniformemente em } \bar{I}.$$

Logo $u_n \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ e pelo Teorema 4.2 tem-se

$$\mathcal{F}(u_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_k).$$

Portanto,

$$\inf_{u \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)} \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_k) = \inf_{u \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)} \mathcal{F}(u).$$

E a prova está completa. ■

Note que se F tem crescimento polinomial $m > 1$, então o mínimo obtido no Teorema 4.3 é de classe $H^{1,m}(I, \mathbb{R}^N)$. Assim, $u_0 \in \mathcal{C}$ é um mínimo de \mathcal{F} se, e somente se, u_0 é um mínimo de \mathcal{F} em

$$\mathcal{C}_m(\alpha, \beta) = \{u \in H^{1,m}(I, \mathbb{R}^N); u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}.$$

Observe também que provar a existência de um mínimo na classe $\mathcal{C}_m(\alpha, \beta)$, e logo em $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$, é mais fácil devido a propriedade de reflexividade dos espaços $H^{1,m}(I)$, $m > 1$. De fato, neste caso basta provarmos que a sequência minimizante é limitada e não precisamos aplicar o critério de compacidade fraca de $H^{1,1}(I, \mathbb{R}^N)$.

4.2.3 Aplicações do Teorema de Tonelli

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos para ilustrar a aplicabilidade do Teorema de existência de Tonelli.

Exemplo 4.1. Considere o funcional $\mathcal{F}_{\alpha,p} : H^{1,1}(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{F}_{\alpha,p}(u) = \int_0^1 x^\alpha |u'|^p dx, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } p > 1.$$

Buscaremos o mínimo de $\mathcal{F}_{\alpha,p}$ na classe

$$\mathcal{C} = \{u \in H^{1,1}(0,1); u(0) = a, u(1) = b\} \tag{4.15}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq b$.

Weierstrass observou que para $\alpha = p = 2$ o problema (4.15) não admite solução sempre que $a \neq b$. De fato, tomando a sequência de funções

$$u_n(x) = a + (b - a) \frac{\arctan(nx)}{\arctan(n)}$$

tem-se que $u_n(0) = a$ e $u_n(1) = b$.

Além disso,

$$\mathcal{F}_{2,2}(u) = \frac{(b-a)^2}{2n \arctan^2(n)} \left(\arctan(n) - \frac{n}{1+n^2} \right).$$

Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{2,2}(u_n) = 0$, e portanto, $\inf_{u \in \mathcal{C}} \mathcal{F}_{2,2}(u) = 0$.

Por outro lado, não existe função $u \in H^{1,1}(0,1)$ com $u(0) \neq u(1)$ de modo que $\mathcal{F}_{2,2}(u) = 0$, pois isto implicaria que $u' = 0$ q.s. em $(0,1)$, e portanto, $u(0) = u(1)$.

No que segue, consideraremos o caso geral $\mathcal{F}_{\alpha,p}$ com $\alpha \geq 0$.

Primeiro, note que o lagrangeano $F(x, z)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 4.3, portanto o problema de minimizar $\mathcal{F}_{\alpha,p}$ na classe (4.15) tem solução $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Além disso, esta solução é única, pois o funcional $\mathcal{F}_{\alpha,p}$ é estritamente convexo.

A equação de Euler-Lagrange de $\mathcal{F}_{\alpha,p}$ é dada por

$$\frac{d}{dx} F_{u'}(x, u') = 0.$$

Como $F_{u'}(x, u') = px^\alpha |u'|^{p-1}$ tem-se $x^\alpha |u'|^{p-1} = c$ com c uma constante. Logo, a solução é dada por

$$u(x) = a + (b-a)x^{\frac{p-1-\alpha}{p-1}}.$$

E para $\alpha > 0$, $\mathcal{F}_{\alpha,p}$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferior fraco em $H^{1,1}(0,1)$, mas o integrando $F(x, z) = x^\alpha |z|^p$, não verifica a condição (iii) do Teorema 4.3. De fato, se isso ocorresse teríamos

$$x^\alpha |z|^p \geq \frac{\theta(z)}{|z|} \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad |z| \rightarrow \infty,$$

mas fazendo $x \rightarrow 0$ tem-se $x^\alpha \rightarrow 0$, pois $\alpha > 0$, e logo

$$0 \geq \frac{\theta(z)}{|z|} \rightarrow \infty, \quad \text{quando} \quad |z| \rightarrow \infty$$

o que é uma contradição.

Veremos que para certos valores de α e p podemos garantir a existência de soluções na classe (4.15). Mais precisamente, a solução existe se, e somente se, $p > \alpha + 1$. De

fato, seja $q \in \mathbb{R}$, $1 < q < \frac{p}{\alpha+1}$ então pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |u'|^q dx &= \int_0^1 \left(|u'|^q x^{\frac{\alpha q}{p}} \right) x^{-\frac{\alpha q}{p}} dx \\
&\leq \left(\int_0^1 \left[|u'|^q x^{\frac{\alpha q}{p}} \right]^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_0^1 \left[x^{-\frac{\alpha q}{p}} \right]^{\frac{p}{p-q}} dx \right)^{\frac{p-q}{p}} \\
&= \left(\int_0^1 x^\alpha |u'|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_0^1 x^{-\frac{\alpha q}{p-q}} dx \right)^{\frac{p-q}{p}} \\
&= (\mathcal{F}_{\alpha,p}(u))^{\frac{q}{p}} \left(\frac{p-q}{p-(\alpha+1)} \right)^{\frac{p-q}{p}}
\end{aligned}$$

Portanto, se para alguma sequência (u_n) temos que $(\mathcal{F}_{\alpha,p}(u_n))$ é limitado então esta sequência será limitada em $H^{1,q}(0,1)$, e logo, (u_n) tem subsequência (u_k) que converge fracamente em $H^{1,p}(0,1)$. Como $\mathcal{F}_{\alpha,p}$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferior existe solução na classe (4.15). Além disso, a solução é única e dada por

$$u(x) = a + (b-a)x^{\frac{p-1-\alpha}{p-1}}.$$

Por outro lado, para $p \leq \alpha+1$ temos, como no caso do problema de Weierstrass, que

$$\inf_{u \in \mathcal{C}} \mathcal{F}_{\alpha,b} = 0. \quad (4.16)$$

e assim, pelos mesmos argumentos usados anteriormente, o problema não admite solução na classe (4.15) para $a \neq b$. De fato, como $\mathcal{F}_{\alpha,\beta} \geq \mathcal{F}_{\beta,p}$ sempre que $\alpha \leq \beta$ é suficiente mostrar (4.16) para o caso $p = \alpha+1$. Para isto, dado $\epsilon > 0$, consideremos a função

$$u_\epsilon(x) = a + (b-a) \frac{\log\left(1 + \frac{x}{\epsilon}\right)}{\log\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)}.$$

Note que $u_\epsilon \in H^{1,1}(0,1)$ e satisfaz as condições de fronteira $u_\epsilon(0) = a$ e $u_\epsilon(1) = b$. Além disso,

$$u'_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon+x} \frac{b-a}{\log\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\alpha,p}(u_\epsilon) &= \frac{|b-a|^p}{\left|\log\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)\right|^p} \int_0^1 \left(\frac{x}{x+\epsilon} \right)^{p-1} \frac{1}{x+\epsilon} dx \\
&\leq \frac{|b-a|^p}{\left|\log\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)\right|^p} \int_0^1 \frac{1}{x+\epsilon} dx = \frac{|b-a|^p}{\left|\log\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)\right|^{p-1}}.
\end{aligned}$$

Logo $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_{\alpha,p}(u_\epsilon) = 0$. ■

Exemplo 4.2. A hipótese (ii) do Teorema 4.3 não pode ser eliminada. De fato, considere o funcional

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 \left((1 - |u'|^2)^2 + u^2 \right) dx.$$

Observe que o integrando $F(u, p) = \left((1 - |p|^2)^2 + u^2 \right)$ crescimento superlinear com $\theta(p) = p^4 - 2p^2$. Assim, F satisfaz as hipóteses do Teorema 4.3, exceto a convexidade em p .

Afirmamos que o problema de minimização

$$\min_{u \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(u). \quad (4.17)$$

com $\mathcal{C} = \{u \in H^{1,1}(0, 1); u(0) = u(1) = 0\}$, não tem solução.

De fato, seja $\varphi(x)$ a função $\frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|$ em $[0, 1]$ estendida periodicamente em todo \mathbb{R} então a sequência de funções

$$u_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(nx), \quad n \in \mathbb{N}$$

pertence a $H^{1,1}(0, 1)$ e $u_n(0) = u_n(1) = 0$. Além disso, como $|u'_n| = 1$ q.s.

Portanto,

$$\mathcal{F}(u_n) = \int_0^1 \left((1 - |u'_n(x)|^2)^2 + u_n^2(x) \right) dx = \frac{1}{n^2} \int_0^1 \varphi^2(x) dx = \frac{1}{12n^2}$$

o que implica $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_n) = 0$, e logo, $\inf_{u \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(u) = 0$

Agora, suponha que u_0 é solução do problema (4.17) então $\mathcal{F}(u_0) = 0$ e isso implica que

$$\int_0^1 u_0^2 dx = 0 \Rightarrow u_0 = 0 \text{ q.s. em } (0, 1).$$

Logo,

$$\mathcal{F}(u_0) = \int_0^1 \left((1 - |u_0'|^2)^2 + u_0^2 \right) dx = \int_0^1 dx = 1,$$

mas isso contradiz a hipótese. Portanto, o problema (4.17) não tem solução. ■

Exemplo 4.3. Considere

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 \left((1 - |u'|^2)^2 + u \right) dx.$$

Neste caso mostraremos que o problema de mínimo

$$\min_{u \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(u). \quad (4.18)$$

com $\mathcal{C} = \{u \in H^{1,1}(0, 1); u(0) = a, u(1) = b\}$, admite solução $\forall a, b \in \mathbb{R}$, mas o integrando $F(u, p) = (1 - |p|^2)^2 + u$ não é convexo em p .

De fato, considere o funcional

$$\mathcal{G}(u) = \int_0^1 (\varphi(u') + u) dx$$

com a função φ definida por

$$\varphi(p) = \begin{cases} (1 - |p|^2)^2 & \text{se } |p| \geq 1, \\ 0 & \text{se } |p| < 1. \end{cases}$$

Note que, $G(u, p) = \varphi(p) + u$ é convexo em p .

De fato, como φ é convexa tem-se, $\forall t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} G(u, tp + (1-t)\bar{p}) &= \varphi(tp + (1-t)\bar{p}) + u \\ &\leq t\varphi(p) + (1-t)\varphi(\bar{p}) + u \\ &\leq t(\varphi(p) + u) + (1-t)(\varphi(\bar{p}) + u) \\ &\leq tG(u, p) + (1-t)G(u, \bar{p}). \end{aligned}$$

Além disso, \mathcal{G} satisfaz as outras hipóteses do Teorema de existência, e logo, existe uma solução u_0 do problema de mínimo

$$\min_{u \in \mathcal{C}} \mathcal{G} \quad (4.19)$$

Por outro lado, pela equação de Euler-Lagrange de \mathcal{G} temos

$$\frac{d}{dx} G_{u'_0}(u_0, u'_0) = G_{u_0}(u_0, u'_0) \quad \text{q.s. em } (0, 1).$$

Logo, $\varphi(u'_0) = x + C$ q.s. em $(0, 1)$ com C uma constante. Como $\varphi'(p) = 0 \forall p \in (0, 1)$ obtemos que $|u'_0| \geq 1$ q.s. em $(0, 1)$, e portanto,

$$\varphi(u'_0) = (1 - |u'_0|^2)^2 \quad \text{q.s. em } (0, 1).$$

Deste modo, $\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{G}(u_0)$, e portanto, $\inf \mathcal{F} \leq \mathcal{F}(u_0) = \mathcal{G}(u_0) = \min \mathcal{G} \leq \inf \mathcal{F}$ e isto mostra prova que u_0 é solução do problema (4.18).

Além disso, a u_0 solução é única. De fato, basta provarmos que \mathcal{G} é convexo.

Para isto, sejam $u_1, u_2 \in H^{1,1}(0, 1)$ e $t \in [0, 1]$ então

$$\mathcal{G}(tu_1 + (1-t)u_2) = \int_0^1 (\varphi(tu_1' + (1-t)u_2') + tu_1 + (1-t)u_2) dx.$$

Como φ é convexa obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(tu_1 + (1-t)u_2) &\leq \int_0^1 (t\varphi(u_1') + (1-t)\varphi(u_2') + tu_1 + (1-t)u_2) dx \\ &\leq t \int_0^1 (\varphi(u_1') + u_1) dx + (1-t) \int_0^1 (\varphi(u_2') + u_2) dx \\ &\leq t\mathcal{G}(u_1) + (1-t)\mathcal{G}(u_2), \end{aligned}$$

o que prova a convexidade de \mathcal{G} e logo, u_0 é única solução do problema (4.18). ■

Capítulo 5

Resultados de regularidade

Neste capítulo vamos investigar condições sobre o lagrangeano para as quais os minimizantes de funcionais integrais são mais regulares. Primeiro trataremos o caso que o lagrangeano tem crescimento polinomial e mostraremos que os minimizantes são tão regular quanto o lagrangeano. Em particular, pertencerão a classe C^∞ se o lagrangeano também pertencer a esta classe.

Em seguida, provaremos o *Teorema de regularidade parcial de Tonelli* que descreve a regularidade dos minimizantes da classe das funções absolutamente contínuas.

5.1 O caso regular

Nesta seção trataremos de funcionais integrais $\mathcal{F}(u)$ cujos Lagrangeanos têm crescimento polinomial de ordem $m > 1$.

Teorema 5.1. *Sejam $I = (a, b)$ um intervalo limitado de \mathbb{R} e $F(x, z, p)$ um lagrangeano de classe C^2 definido em $\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, satisfazendo as seguintes condições:*

(i) *Existem constantes $C_0, C_1 \geq 0$, tais que $\forall (x, y, z) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$*

$$C_0 \|p\|^m \leq F(x, z, p) \leq C_1(1 + \|p\|^m); \quad (5.1)$$

(ii) *Existe uma função $M(R) > 0$ tal que*

$$\|F_z(x, z, p)\| + \|F_p(x, z, p)\| \leq M(R)(1 + \|p\|^m) \quad (5.2)$$

$\forall (x, z, p) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ tal que $x^2 + \|z\|^2 \leq R$;

(ii) $\forall (x, z, p) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ e $\forall \xi \in \mathbb{R}^N - \{0\}$ tem-se

$$\frac{\partial^{i+k} F}{\partial p^i \partial p^k}(x, z, p) \xi^i \xi^k > 0. \quad (5.3)$$

Seja $\mathcal{C} = \{v \in H^{1,m}(I, \mathbb{R}^N); v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}$ e suponha que u é um mínimo local do seguinte problema:

$$\min_{u \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx.$$

Então $u \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ e satisfaz a equação de Euler-Lagrange.

Além disso, se F é de classe $C^k, 2 \leq k \leq \infty$, então $u \in C^k(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$. Se F é uma função analítica então u é uma função analítica.

Na demonstração do Teorema 5.1 precisaremos dos seguintes Lemas auxiliares:

Lema 5.1. Se $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ um extremal fraco de \mathcal{F} , $F_p \in C^1(U)$ em alguma vizinhança adequada U da curva $(x, u(x), u'(x))$ e $F_{pp}(x, u(x), u'(x))$ é inversível para todo $x \in \bar{I}$. Então $u \in C^2(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Como $F_{pp}(x, u(x), u'(x))$ é inversível, $\forall x \in \bar{I}$, podemos considerar uma vizinhança U de $\{(x, u(x), u'(x)); x \in \bar{I}\}$ tal que $F_{pp}(x, z, p)$ é inversível $\forall (x, z, p) \in U$.

Por outro lado, pela Proposição 2.4 da Seção 2.2 do Capítulo 2 existe um vetor constante $c \in \mathbb{R}^N$ tal que $F_p(x, u(x), u'(x)) = \psi(x), \forall x \in I$ com

$$\psi(x) = \int_a^x F_z(t, u(t), u'(t)) dt + c.$$

Por hipótese tem-se que $F \in C^2(\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ e $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$, o que implica ser a aplicação $G : \bar{I} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ dada por $G(x, p) = F_p(x, u(x), p) - \psi(x)$ de classe $C^1(\bar{I} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Além disso,

$$G_p(x, u'(x)) = F_{pp}(x, u(x), u'(x)), \quad \forall x \in \bar{I}.$$

Como $F_p(x, u(x), u'(x))$ é inversível, $\forall x \in \bar{I}$, temos que

$$\det G_p(x, u'(x)) \neq 0, \quad \forall x \in I.$$

Por construção da função $G(\cdot, \cdot)$ temos que $p = u'(x)$ é solução da equação $G(x, p) = 0$. Logo, pelo Teorema da Função Implícita tem-se que $u' \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^n)$. ■

Se o lagrangeano F é mais regular, então pelo Teorema da Função Implícita, temos que u será mais regular. Em resumo,

Lema 5.2. *Seja $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ um extremal fraco de \mathcal{F} . Se F é de classe C^k , $2 \leq k \leq \infty$, numa vizinhança U de $\{(x, u(x), u'(x)); x \in \bar{I}\}$ e $\det F_{pp}(x, z, p) \neq 0$, $\forall (x, z, p) \in U$. Então $u \in C^k(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$, $2 \leq k \leq \infty$. Além disso, se F é uma função analítica em U então u é uma função analítica em U .*

No que segue, queremos obter o resultado dado Lema 5.1 para um extremal fraco que é uma função Lipschitz. Para isto, precisamos da hipótese de F_{pp} ser *positiva definida*, pois na prova precisaremos da inversa global da aplicação $(x, z, p) \rightarrow (x, z, y)$ com $y = F_p(x, z, p)$. Esta hipótese é necessária por que, neste caso, $u'(x)$ não é contínua, e logo, não podemos operar numa vizinhança de $p_0 = u'(x_0)$, $\forall x_0 \in \bar{I}$.

Lema 5.3. *Seja $u \in Lip(I, \mathbb{R}^N)$ um extremal fraco de \mathcal{F} , F_p é de classe C^1 em $\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ e $F_{pp}(x, z, p)$ é positiva definida em $\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Então $u \in C^2(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Considere a aplicação $\Psi : \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ definida por

$$\Psi(x, z, p) = (x, z, F_p(x, z, p)).$$

Como F é positiva definida então, pelo Teorema da Aplicação Inversa, Ψ é um C^1 -difeomorfismo de $\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ em sua imagem $\mathcal{V} = \Psi(\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Assim, pela Proposição 2.5 da Seção 2.2 do Capítulo 2, existe um vetor constante $c \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$F_p(x, u(x), u'(x)) = \psi(x) \text{ q.s em } I \tag{5.4}$$

com

$$\psi(x) = \int_a^x F_z(t, u(t), u'(t)) dt + c.$$

Note que $\psi \in AC(I, \mathbb{R}^N)$, $\psi(x) = F_z(x, u(x), u'(x))$ q.s. em I e $\psi' = F_z(\cdot, u, u') \in L^\infty(I, \mathbb{R}^N)$.

Agora, vamos considerar as seguintes funções auxiliares:

$$\sigma(x) = (x, u(x), u'(x)), \quad e(x) = (x, u(x), \pi(x)).$$

Observe que, $\sigma(x)$ está definida q.s. em I e $e(x)$ está definida $\forall x \in \bar{I}$. E por (5.4) tem-se

$$\Psi(\sigma(x)) = e(x) \text{ q.s. em } I. \quad (5.5)$$

Queremos mostrar que $\Psi^{-1}(x, u(x), \pi(x)) = \Psi^{-1}(e(x))$ está bem definido $\forall x \in \bar{I}$. Para isto, devemos provar que $e(x) \in \mathcal{V}$, $\forall x \in \bar{I}$. Isso não é tão evidente, pois por (5.5) temos $e(x) \in \mathcal{V}$ q.s. em I .

Como $u \in Lip(I, \mathbb{R}^N)$ existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\|u(x) - u(\xi)\| \leq k|x - \xi|, \quad \forall x, \xi \in \bar{I}.$$

Logo,

$$\|u'(x)\| \leq k \text{ q.s. em } I. \quad (5.6)$$

Considere o conjunto $\mathcal{K} = \{\Psi(x, u(x), p); (x, u(x)) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^N, \|p\| \leq K\}$. Observe que, \mathcal{K} é um subconjunto compacto de \mathcal{V} , pois é fechado e limitado em $\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Agora, por (5.5) e (5.6) temos $e(x) \in \mathcal{K}$ q.s. em I . Como $e(x)$ é contínua em \bar{I} temos que $e(x) \in \mathcal{K} \subset \mathcal{V}$, $\forall x \in \bar{I}$. Portanto, a função

$$(x, u(x), v(x)) = \Psi^{-1}(e(x)), \quad x \in \bar{I}$$

está bem definida e é contínua. Mas, por (5.5) tem-se

$$(x, u(x), u'(x)) = \sigma(x) = \Psi^{-1}(e(x)) = (x, u(x), v(x)) \text{ q.s. em } I,$$

e logo, $u'(x) = v(x)$ q.s. em I . Então,

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t) dt = u(a) + \int_a^x v(t) dt,$$

o que implica $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$, e pela Proposição 5.1 obtemos $u \in C^2(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$. ■

Agora, podemos provar o Teorema 5.1.

Demonstração do Teorema 5.1:

Primeiro, observe que o funcional integral $\mathcal{F}(v)$ está bem definido em \mathcal{C} . De fato, para $v \in \mathcal{C}$ e por (5.1) temos

$$\int_I F(x, v(x), v'(x)) dx \leq C_1 \int_I (1 + \|v'(x)\|^m) dx < \infty.$$

Sejam $\varphi \in Lip(I, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\varphi(x)\| \leq k$ em I e $\|\varphi'(x)\| \leq k$ q.s. em I e $\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que $|\epsilon| \leq \epsilon_0$ para algum $0 < \epsilon_0 \leq 1$ fixo. Então existe $R \in \mathbb{R}$ tal que

$$x^2 + \|u(x) + \epsilon\varphi(x)\|^2 \leq R^2, \quad \forall x \in \bar{I}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|u' + \epsilon\varphi'\|^m &\leq 2^{m-1}(\|u'\|^m + \|\epsilon\varphi'\|^m) \leq 2^{m-1}(\|u'\|^m + \|\varphi'\|^m) \\ &\leq 2^{m-1}(\|u'\|^m + k^m). \end{aligned}$$

Agora, considere a seguinte sequência de funções:

$$\psi_\epsilon(x) = F_z(x, u + \epsilon\varphi, u' + \epsilon\varphi') \cdot \varphi + F_p(x, u + \epsilon\varphi, u' + \epsilon\varphi') \cdot \varphi'.$$

Como F é de classe C^2 em $\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ obtemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi_\epsilon(x) = \psi_0(x) \quad \text{q.s. em } I$$

com $\psi_0(x) = F_z(x, u, u') \cdot \varphi + F_p(x, u, u') \cdot \varphi$.

Usando (5.2) e a desigualdade de Schwarz tem-se

$$\begin{aligned} \|\psi_\epsilon(x)\| &\leq \|F_z(x, u + \epsilon\varphi, u' + \epsilon\varphi')\| \|\varphi\| + \|F_p(x, u + \epsilon\varphi, u' + \epsilon\varphi')\| \|\varphi'\| \\ &\leq kM(R) \left(\|F_z(x, u + \epsilon\varphi, u' + \epsilon\varphi')\| + \|F_p(x, u + \epsilon\varphi, u' + \epsilon\varphi')\| \right) \\ &\leq kM(R)(1 + \|u' + \epsilon\varphi'\|^m) \\ &\leq kM(R)(1 + 2^{m-1}(\|u'\|^m + k^m)). \end{aligned}$$

Logo (ψ_ϵ) é limitada superiormente por uma função L^1 e podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter $\psi_0 \in L^1$ e

$$\int_I \psi_\epsilon(x) dx = \int_I \psi_0(x) dx.$$

Logo, a função $\Phi(\epsilon) = \mathcal{F}(u + \epsilon\varphi)$, isto é,

$$\Phi(\epsilon) = \int_I F(x, u + \epsilon\varphi, u' + \epsilon\varphi') dx$$

é de classe $C^1(-\epsilon_0, \epsilon_0)$.

Mas, u é um mínimo local de \mathcal{F} em \mathcal{C} , e portanto $\Phi(0) \leq \Phi(\epsilon)$ em $(-\epsilon_0, \epsilon_0)$. Logo, $\epsilon = 0$ é mínimo local da função Φ , o que implica $\Phi'(0) = 0$. Portanto,

$$\Phi'(0) = \int_I F_z(x, u, u') \cdot \varphi + F_p(x, u, u') \cdot \varphi' dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N), \quad (5.7)$$

e concluímos que $u \in AC(I, \mathbb{R}^N)$ com $u' \in L^m(I, \mathbb{R}^N)$ é um extremal fraco de \mathcal{F} na classe $H^{1,m}(I, \mathbb{R}^N)$.

Além disso, pela hipótese (5.2), temos

$$\int_I \|F_z(x, u, u')\| dx \leq \int_I M(R)(1 + \|u'\|^m) dx < \infty.$$

Portanto, $F_z(\cdot, u, u') \in L^1(I, \mathbb{R}^N)$.

Então podemos mostrar que existe um vetor constante $c \in \mathbb{R}^N$ (veja a prova das proposições 2.4 e 2.5 do Capítulo 2) tal que

$$F_p(x, u(x), u'(x)) = \psi(x) \text{ q.s. em } I$$

com $\psi(x) = \int_a^x F_z(t, u(t), u'(t)) dt + c$.

O resto da demonstração segue como na prova do Lema 5.3, pois a imagem da aplicação $e : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ está contida na imagem de Ψ . De fato, a hipótese (iii) implica que $F_p(x, z, \mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$, pois $\mathcal{V} = \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Deste modo, obtemos $u \in C^2(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ e pelo Lema 5.2 seguem-se as outras afirmações.

E a prova do Teorema 5.1 está completa. ■

Usando os mesmos argumentos podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 5.2. *Se $u \in H^{1,m}(I, \mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico de \mathcal{F} , mais precisamente, um extremal fraco em $H^{1,m}(I, \mathbb{R}^N)$, ou seja, $\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$. Então $u \in C^2(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$.*

Se as hipóteses do Teorema 5.1 são satisfeitas então u satisfaz a equação de Euler-Lagrange. Além disso, se F é de classe C^k , $2 \leq k \leq \infty$, então $u \in C^k$. Se F é uma função analítica então u é função analítica.

Concluiremos esta Seção com três exemplos. Os dois primeiros ilustram o fato que a condição $F_{pp} > 0$ é necessária e o terceiro mostra que o Teorema 5.1 não é ótimo.

Exemplo 5.1. Toda função lipschitz u_0 em $(0, 1)$ com a propriedade de que u'_0 assume somente valores 1 e -1 é obviamente um mínimo do funcional $\int_0^1 (u'^2 - 1)^2 dx$ em $\mathcal{C} = \{u \in H^{1,4}(0, 1); u(0) = u_0(0), u(1) = u_0(1)\}$.

Neste caso, temos $F(p) = (p^2 - 1)^2$, logo, $F_{pp}(p) = 12p^2 - 4$. ■

Exemplo 5.2. Uma solução do problema

$$\min_{u \in \mathcal{C}} \int_{-1}^1 u^2 (2x - u')^2 dx$$

com $\mathcal{C} = \{u \in H^{1,2}(0, 1), u(-1) = 0, u(1) = 1\}$ é a função

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Note que $u \in C^1([-1, 1])$, mas $u \notin C^2([-1, 1])$, pois $u'(0)$ não existe.

Neste caso, temos $F(x, u, p) = u^2(2x - p)^2$, o que implica $F_{pp}(x, u, p) = 2u^2 \geq 0$. ■

Exemplo 5.3. Considere $\int_a^b (u^2 + u'^2 + e^u) dx$. Então, $F(x, u, p) = u^2 + p^2 + e^u$ não satisfaz as hipóteses do Teorema 5.1. ■

5.2 Regularidade parcial de Tonelli

Agora, discutiremos a regularidade de minimizantes de funcionais integrais mais gerais, ou seja, F não tem necessariamente um crescimento polinomial. Por simplicidade, trataremos somente o caso escalar (o caso vetorial pode ser encontrado em [5, capítulo 6]).

O principal resultado é o seguinte:

Teorema 5.3 (Teorema de regularidade parcial de Tonelli). *Seja $F(x, u, p)$ um lagrangeano de classe C^∞ tal que $F_{pp}(x, u, p) > 0, \forall(x, u, p)$.*

Se $u \in AC(a, b)$ é um mínimo local forte do funcional

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx \tag{5.8}$$

na classe

$$\mathcal{C}(a, b) = \{u \in AC(a, b); u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}.$$

Então u tem derivada clássica $u'(x)$ (possivelmente infinita) em $[a, b]$.

Na demonstração do Teorema 5.3 usaremos alguns resultados clássicos da solubilidade local da equação de Euler-Lagrange associada a \mathcal{F} . As ideias principais da prova são: se em algum ponto os quocientes das diferenças de u são uniformemente limitados podemos resolver uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem, considerando u como dado de fronteira (um problema de Dirichlet de contorno clássico) numa vizinhança deste ponto. Além disso, podemos garantir que a solução v deste problema de contorno é um minimizante de \mathcal{F} , e logo, $v = u$ neste vizinhança. Em particular, u é regular nesta vizinhança. Logo, u é diferenciável q.s. no sentido clássico e podemos concluir que os quocientes das diferenças são limitados q.s., e portanto u é regular num aberto A .

Para simplificar a exposição, reuniremos, no seguinte Lema, alguns resultados clássicos da Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias que serão usados posteriormente.

Lema 5.4. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e limitado, $F(x, z, p)$ um lagrangeano regular tal que $F_{pp} > 0$, $M > 0$ e $\delta > 0$ constantes.*

Considere a equação de Euler-Lagrange

$$-\frac{d}{dx}F_p(x, u, u') + F_z(x, u, u') = 0. \quad (5.9)$$

Se $(x_0, u_0) \in A$, $|\alpha| \leq M$, $|\beta| \leq M$ então existem $\epsilon > 0$ e uma única solução clássica $u(x; \alpha, \beta)$, definida em $|x - x_0| < \epsilon$, da equação de Euler-Lagrange (5.9) satisfazendo as condições iniciais

$$u(x_0; \alpha, \beta) = u_0 + \alpha, \quad u'(x_0; \alpha, \beta) = \beta. \quad (5.10)$$

Além disso,

(a) *u e u' são funções de classe $C^1(S)$ com*

$$S = \{(x, \alpha, \beta); |x - x_0| < \epsilon, |\alpha| \leq M, |\beta| \leq M\}$$

(b) *Para $(x, \alpha, \beta) \in S$ temos*

$$|u'(x; \alpha, \beta) - \beta| < \delta \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}(x_0; \alpha, \beta) > 0, \quad \text{sign} \frac{\partial u}{\partial \alpha}(x; \alpha, \beta) = \text{sign}(x - x_0) \quad (5.12)$$

com $\text{sign}(x)$ a função sinal.

Demonstração: Como $F_{pp} > 0$ então resolver (5.9) é equivalente a resolver a equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$u'' = f(x, u, u')$$

com

$$f(x, u, p) = \frac{F_z - pF_{pu} - F_{px}}{F_{pp}}.$$

Pela hipóteses, temos que $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$, e logo, as afirmações de existência, unicidade, continuidade, incluindo a dependência contínua dos dados iniciais, segue da Teoria clássica das Equações Diferenciais Ordinárias.

Por outro lado, como

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}(x_0; \alpha, \beta) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \beta}(x_0; \alpha, \beta) = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial \beta}(x_0; \alpha, \beta) = 1$$

então podemos escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que as condições em (b) sejam válidas. ■

Lema 5.5. *Sejam m, ρ, M_1 constantes positivas. Então existe $\epsilon > 0$ tal que $(x_0, x_1) \subset [a, b]$, $0 < x_1 - x_0 < \epsilon$, $|u_0| \leq m$ e*

$$\left| \frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0} \right| \leq M_1.$$

E existe uma única solução $\tilde{u} \in C^2([x_0, x_1])$ de (5.9) satisfazendo $\tilde{u}(x_0) = u(x_0)$, $\tilde{u}(x_1) = u_1$ e

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |\tilde{u}(x) - u_0| < \rho.$$

Além disso, \tilde{u} é o único miminizante de

$$\mathcal{F}(u; (x_0, x_1)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u') dx$$

no conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ u \in H^{1,1}(x_0, x_1); u(x_0) = u_0; u(x_1) = u_1, \max_{x \in [x_0, x_1]} |\tilde{u}(x) - u_0| < \rho \right\}.$$

Demonstração: Seja $\tau = m + p$, $A = (a, b) \times (-\tau, \tau)$ e tomemos $M > \max(M_1, 2\rho)$, $0 < \delta < M - M_1$. Então, podemos tomar $\epsilon > 0$ como no Lema 5.4 e supor que $3M\epsilon < \rho$.

Integrando (5.11) temos que, para $x \in [x_0, x_1]$,

$$\left| \int_{x_0}^x (u'(t; \alpha, \beta) - \beta) dt \right| \leq \int_{x_0}^x \delta dt,$$

ou seja,

$$|u(x; \alpha, \beta) - u(x_0; \alpha, \beta) - \beta(x - x_0)| \leq \delta(x - x_0).$$

Pela estimativa acima e (5.10) obtemos

$$|u(x; \alpha, \beta) - u_0 - \alpha - \beta(x - x_0)| \leq \delta(x - x_0) \quad (5.13)$$

Como $0 < x - x_0 < \epsilon$, por hipótese tem-se

$$\left| \frac{u_1 - u_0}{x - x_0} \right| \leq M_1.$$

Assim,

$$u_0 - M_1(x - x_0) \leq u_1 \leq u_0 + M_1(x - x_0).$$

De (5.13) tem-se

$$u_0 + \alpha + (\beta - \delta)(x - x_0) \leq u(x; \alpha, \beta) \leq u_0 + \alpha + (\beta + \delta)(x - x_0)$$

e portanto

$$u(x_1; 0, M) \geq u_0 + M_1(x_1 - x_0) + (M - M_1 - \delta)(x_1 - x_0) > u_1$$

$$u(x_1; 0, -M) \leq u_0 - M_1(x_1 - x_0) - (M - M_1 - \delta)(x_1 - x_0) < u_1.$$

Como $\frac{\partial u}{\partial \beta}(x_1; 0, \beta) > 0$ para $\beta \in [-M, M]$ podemos aplicar o Teorema do valor intermediário e concluir que existe um único $\beta_0 \in [-M, M]$ tal que $u(x_1; 0, \beta_0) = u_1$.

Então, definimos

$$\tilde{u}(x) = u(x; 0, \beta_0).$$

Fazendo $x = x_0$, $\alpha = 0$ e $\beta = \beta_0$ em (5.13), obtemos

$$|u_1 - u_0 - \beta_0(x - x_0)| \leq \delta(x - x_0).$$

Portanto,

$$||u_1 - u_2| - |\beta_0(x_1 - x_2)|| \leq \delta(x_1 - x_0) \Rightarrow |u_1 - u_2| - |\beta_0||x_1 - x_0| \geq -\delta(x_1 - x_0).$$

Logo,

$$|\beta_0| \leq \delta + \left| \frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0} \right| \Rightarrow |\beta_0| \leq \delta + M_1. \quad (5.14)$$

Para $x \in [x_0, x_1]$ temos, por (5.13), que

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x) - u_0| &= |u(x; 0, \beta_0) - u_0 - \beta_0(x - x_0) + \beta_0(x - x_0)| \\ &\leq |u(x; 0, \beta_0) - u_0 - \beta_0(x - x_0)| + |\beta_0||x - x_0| \\ &\leq \delta(x - x_0) + |\beta_0|(x - x_0) \leq (\delta + |\beta_0|)(x - x_0) \leq (2\delta + M_1)\epsilon \\ &< 3M\epsilon < \rho. \end{aligned}$$

Assim, $\max_{x \in [x_1, x_2]} |\tilde{u}(x) - u_0| < \rho$. Agora, suponha que $v \in C^2([x_0, x_1])$ é também uma solução de (5.9) satisfazendo $v(x_0) = u_0$, $v(x_1) = u_1$ e

$$\max_{x \in [x_1, x_2]} |v(x) - u_0| < \rho.$$

Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tal que

$$v'(\bar{x}) = \frac{v(x_1) - v(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0}$$

e $(\bar{x}, v(\bar{x})) \in A$.

Portanto, pelo Lema 5.4 (em particular (5.11)) substituindo (x_0, u_0) por $(\bar{x}, v(\bar{x}))$ e β por $v'(\bar{x})$ temos, para $x \in [x_0, x_1]$,

$$\left| v'(x) - \frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0} \right| < \delta.$$

Em particular,

$$|v'(x_0)| \leq \left| \frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0} \right| + \delta \leq M_1 + \delta < M.$$

Em resumo, existe um único $\beta_0 \in [-M, M]$ tal que a solução de (5.9) com valores iniciais $u(x_0) = \beta_0$ e $u'(x_0) = \beta_0$ tem valores $u(x_1) = u_1$. Logo, $v'(x_0) = \beta_0$ o que implica $v = \tilde{u}$.

Para mostrar que \tilde{u} é um minimizante de $\mathcal{F}(u; (x_0, x_1))$ em \mathcal{A} , considere a família de um-parâmetro de soluções $\{u(\cdot; \alpha, \beta_0), |\alpha| \leq M\}$.

Por (5.13) e (5.14) temos, para $x \in [x_0, x_1]$,

$$\begin{aligned}
u(x; M, \beta_0) - u_0 &\geq M + \beta_0(x - x_0) - \delta(x - x_0) \\
&\geq M + (\beta_0 - \delta)(x - x_0) \\
&\geq M - (2\delta + M_1)\epsilon > 2\rho - \rho = \rho, \\
u(x; -M, \beta_0) - u_0 &\leq -M + \beta_0(x - x_0) + \delta(x - x_0) \\
&\leq -M + (\beta_0 + \delta)(x - x_0) \\
&\leq -M + (2\delta + M_1)(x - x_0) \\
&< -2\rho + \rho = -\rho.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial u}{\partial \alpha}(x; \alpha, \beta_0) > 0$ temos que \tilde{u} está imerso num campo de extremais que cobrem a região $[x_0, x_1] \times [u_0 - \rho, u_0 + \rho]$. Como $F_{pp} > 0$, então pelo Teorema de Weierstrass (consulte [5, p. 31] tem-se

$$\mathcal{F}(u; (x_0, x_1)) > \mathcal{F}(\tilde{u}; (x_0, x_1)), \quad \forall u \in \mathcal{A}$$

com igualdade válida se, e somente se, $u = \tilde{u}$. ■

Demonstração do Teorema 5.3: Seja $u \in \mathcal{C}(a, b)$ um mínimo relativo de \mathcal{F} . Então, existe $\delta > 0$ tal que

$$\max_{x \in [a, b]} |u(x) - v(x)| < \delta_1 \Rightarrow \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in \mathcal{C}(a, b).$$

Seja $\bar{x} \in [a, b]$ tal que

$$M(\bar{x}) = \liminf_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \neq \bar{x}, x \in [a, b]}} \left| \frac{u(x) - u(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right| < \infty \quad (5.15)$$

Suponhamos que $\bar{x} \neq b$ e tomemos $\bar{x}_1 > \bar{x}$ com $(\bar{x}_1 - \bar{x})$ suficientemente pequeno tal que

$$\max_{x \in [\bar{x}, \bar{x}_1]} |u(x) - u(\bar{x})| < \frac{\delta_1}{2}.$$

Isso é possível, pois $u \in AC(a, b)$.

Escolhendo $M_1 > M(\bar{x})$ então, por (5.15), podemos aplicar o Lema 5.5 com $x_0 = \bar{x}$, $u_0 = u(\bar{x})$, $\rho = \delta_1/2$, $u_1 = u(x_1)$ com $x_1 \in (\bar{x}, \bar{x}_1)$ satisfazendo

$$x_1 - \bar{x} < \epsilon, \quad \left| \frac{u(x_1) - u(\bar{x})}{x_1 - \bar{x}} \right| < M_1.$$

Sejam \tilde{u} a correspondente solução da equação de Euler e $\hat{u} \in \mathcal{C}(a, b)$ definida por

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x) & \text{se } x \in [\bar{x}, x_1] \\ u(x) & \text{outros casos.} \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, b]} |\hat{u}(x) - u(x)| &\leq \max_{x \in [\bar{x}, x_1]} |\hat{u}(x) - u(\bar{x})| + \max_{x \in [\bar{x}, x_1]} |\hat{u}(x) - u(\bar{x})| \\ &\leq \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1 \end{aligned}$$

e logo,

$$\mathcal{F}(\hat{u}) - \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(\tilde{u}; (\bar{x}_1, x_1)) - \mathcal{F}(u, (\bar{x}_1, x_1)) \geq 0.$$

Isso mostra que u é mínimo de $\mathcal{F}(\cdot, (x_1, x_2))$ em \mathcal{A} e como \tilde{u} é única temos que $\tilde{u} = u$ e portanto $u \in C^2([\bar{x}, x_1])$.

De modo análogo, como $\bar{x} \neq a$ tem-se $u \in C^2([x_0, \bar{x}])$ para algum $x_0 < \bar{x}$. Em particular, u é Lipschitz numa vizinhança de $\bar{x} \in [a, b]$ com $M(\bar{x}) < \infty$ e pelo Lema 5.3 tem-se que u é C^∞ numa vizinhança de todo \bar{x} .

Como u é diferenciável q.s. em $[a, b]$ temos que $\Omega_0 = \{x \in [a, b]; M(x) < \infty\}$ é um aberto em $[a, b]$ com medida $\mu(\Omega_0) > 0$ e $u \in C^\infty(\Omega_0)$.

E a prova do Teorema 5.3 está completa. ■

Com consequência do Teorema 5.3 temos o seguinte resultado:

Teorema 5.4. *Seja $F(x, u, p)$ um lagrangeano regular com crescimento superlinear, ou seja,*

$$\lim_{\|p\| \rightarrow \infty} \frac{F(x, u, p)}{\|p\|} = \infty$$

tal que $F_{pp} > 0$. Seja $u \in AC(a, b)$ um mínimo local forte do funcional \mathcal{F} dado por (5.8) na classe

$$\mathcal{C}(a, b) = \{u \in AC(a, b); u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}.$$

Se $F_u(\cdot, u, u') \in L^1(a, b)$ ou $F_x(\cdot, u, u') \in L^1(a, b)$ então u é regular e satisfaz a equação de Euler-Lagrange e a equação de DuBois-Raymond

$$\frac{d}{dx} \left(F(x, u, u') - u'(x) F_{u'}(x, u, u') \right) = F_x(x, u, u').$$

Capítulo 6

Aplicações

6.1 Problema de valor de fronteira

Considere o funcional

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u'^2 + u^2) dx - \int_0^1 f u dx \quad (6.1)$$

com $f \in L^2(0, 1)$. Logo, $F(x, u, p) = \frac{1}{2}(p^2 + u^2) - fu$.

Mostraremos que F satisfaz as hipóteses do Teorema de existência de Tonelli. De fato,

$$\begin{aligned} F(x, u, p) &= \frac{1}{2}(p^2 + u^2) - fu = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}u^2 - fu \\ &\geq \frac{1}{2}p^2 + \left(\frac{1}{2}u - f\right)^2 - f^2 \geq \frac{1}{2}p^2 - f^2. \end{aligned}$$

Portanto, F tem crescimento superlinear. Claramente F e F_p são contínuas. Além disso, para todo $t \in [0, 1]$, tem-se

$$\begin{aligned} F(x, u, (1-t)p_1 + tp_2) &= \frac{1}{2}[(1-t)p_1 + tp_2]^2 + \frac{1}{2}u^2 - fu \\ &= \frac{1}{2}[(1-t)^2p_1^2 + 2t(1-t)p_1p_2 + t^2p_2^2] + \frac{1}{2}u^2 - fu \\ &= \frac{1}{2}(1-t)^2p_1^2 + t(1-t)p_1p_2 + \frac{1}{2}t^2p_2^2 + \frac{1}{2}u^2 - fu. \end{aligned}$$

Usando que $p_1 p_2 \leq \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$ obtemos

$$\begin{aligned}
F(x, u, (1-t)p_1 + tp_2) &\leq \frac{1}{2}(1-t)^2 p_1^2 + \frac{1}{2}t(1-t)(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}t^2 p_2^2 + \frac{1}{2}u^2 - fu \\
&\leq \frac{1}{2}(1-t)^2 p_1^2 + \frac{1}{2}t(1-t)p_1^2 + \frac{1}{2}(1-t)p_2^2 + \frac{1}{2}t^2 p_2^2 + \frac{1}{2}u^2 - fu \\
&\leq \frac{1}{2}(1-t)p_1^2 + \frac{1}{2}tp_2^2 + \frac{1}{2}u^2 - fu \\
&\leq (1-t) \left(\frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}u^2 - fu \right) + t \left(\frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}u^2 - fu \right) \\
&\leq (1-t)F(x, u, p_1) + tF(x, u, p_2).
\end{aligned}$$

e logo, F é convexo em p .

Pelo teorema de existência de Tonelli existe um mínimo de (6.1) em $H_0^1(0, 1)$. E pela convexidade do funcional temos que esse mínimo é único.

Além disso, a função $\mathcal{F}(u + t\varphi)$ é diferenciável com relação a t , $\forall \varphi \in H_0^1(0, 1)$ e logo, u satisfaz a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u + t\varphi)|_{t=0} = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(0, 1)$$

o que equivale a

$$\int_0^1 (u'\varphi' + u\varphi) dx = \int_0^1 f\varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(0, 1). \quad (6.2)$$

A regularidade do mínimo u segue dos resultados apresentados no Capítulo 5. Mas, neste caso, pode ser obtidos mais facilmente. De fato, por (6.2) vemos que u resolve (no sentido fraco) o *problema de valor de fronteira*

$$-u'' + u = f \text{ em } (0, 1) \quad (6.3)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (6.4)$$

Observe que,

- (i) Como $f \in L^2(0, 1)$ e $u \in H_0^1(0, 1)$ então, por (6.3), segue-se que $u'' \in L^2(0, 1)$, ou seja, $u \in H^2(0, 1)$. E se $f \in H^k(0, 1)$ com $k \in \mathbb{N}$ então $u \in H^{k+2}(0, 1)$;
- (ii) Se $f \in C([0, 1])$ e como toda função em $H^1(0, 1)$ pertence a $C([0, 1])$ temos que $u'' \in C([0, 1])$, ou seja, $u \in C^2([0, 1])$.

6.2 O problema de Sturm-Liouville

Definimos o operador de Sturm-Liouville L no intervalo limitado $[a, b]$ por

$$Lu = -(pu')' + qu$$

com $p \in C^1([a, b])$, $q \in C([a, b])$, $p \geq \beta > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ e $q \geq 0$.

Vamos investigar o problema de autovalor de Sturm-Liouville, com condições de Dirichlet, dado por

$$-(pu')' + qu = \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (6.5)$$

$$u(a) = u(b) = 0. \quad (6.6)$$

Definição 6.1. Os valores de λ para os quais (6.5)-(6.6) tem uma solução não-trivial são chamados **autovalores** e uma solução não-trivial u correspondente à λ é chamada **autofunção**.

Consideremos o problema generalizado

$$-(pu')' + qu = \lambda \sigma u, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (6.7)$$

$$u(a) = u(b) = 0, \quad (6.8)$$

com $\sigma \in C([a, b])$ e $\sigma > 0$, e p e q satisfazendo as mesmas condições acima.

Proposição 6.1. Seja V um subespaço fechado de $H_0^1(a, b)$, com $V \neq \{0\}$. Então

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b (pu'^2 + qu^2) dx$$

assume seu ínfimo no conjunto

$$W = V \cap \left\{ u \in H_0^1(a, b); \int_a^b \sigma u^2 dx = 1 \right\}.$$

Demonstração: Como $p \geq \beta > 0$ e $q \geq 0$ temos

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b (pu'^2 + qu^2) dx \geq 0 \quad \forall u \in H_0^1(a, b).$$

Logo, $\mathcal{F}(u)$ é limitado inferiormente.

Seja $(u_n) \subset W$ uma sequência minimizante, isto é,

$$\mathcal{F}(u_n) \rightarrow \lambda = \inf_{u \in W} \mathcal{F}(u).$$

Pela desigualdade de Poincaré tem-se

$$C_1 \geq \mathcal{F}(u_n) = \int_a^b (p u_n'^2 + q u_n^2) dx \geq \beta \|u_n'\|_{L^2(a,b)} \geq C \|u_n\|_{H_0^1(a,b)}.$$

Portanto, (u_n) é limitada em $H_0^1(a,b)$. Como $H_0^1(a,b)$ é um espaço de Hilbert temos que existem $u \in H_0^1(a,b)$ e uma subsequência, que representaremos por (u_n) , fracamente convergente, ou seja, $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(a,b)$.

Por outro lado, a forma quadrática $\mathcal{F}(u)$ é uma forma bilinear, simétrica, contínua $a(u,v)$ em $H_0^1(a,b)$, ou seja, $\mathcal{F}(u) = a(u,u)$ com

$$a(u,v) = \int_a^b (p u' v' + q u v) dx.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_n) = a(u_n, u_n) &= a(u_n - u, u_n - u) + 2a(u, u_n) - a(u, u) \\ &\geq 2a(u, u_n) - a(u, u), \end{aligned}$$

e portanto,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} [2a(u, u_n) - a(u, u)] = 2a(u, u) - a(u, u) = a(u, u) = \mathcal{F}(u).$$

Mas,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_n) = \lambda = \inf_{u \in W} \mathcal{F}(u),$$

e logo,

$$\mathcal{F}(u) \leq \lambda \tag{6.9}$$

Afirmamos que $u \in W$. De fato, como V é convexo e fechado na topologia forte então V é fechado na topologia fraca, portanto $u \in V$. Como (u_n) limitada em $H_0^1(a,b)$ e a imersão $H_0^1(a,b) \hookrightarrow L^2(a,b)$ é compacta temos que existe $v \in L^2(a,b)$ tal que $u_n \rightarrow v$ em $L^2(a,b)$.

Mostraremos que $u = v$. De fato, para $w \in L^2(a,b)$ temos que

$$\begin{aligned} |(u - v, w)_{L^2(a,b)}| &= |(u, w)_{L^2(a,b)} - (u_n, w)_{L^2(a,b)} + (u_n, w)_{L^2(a,b)} - (v, w)_{L^2(a,b)}| \\ &\leq |(u_n, w)_{L^2(a,b)} - (u, w)_{L^2(a,b)}| + |(u_n - v, w)_{L^2(a,b)}| \\ &\leq |(u_n, w)_{L^2(a,b)} - (u, w)_{L^2(a,b)}| + \|u_n - v\|_{L^2(a,b)} \|w\|_{L^2(a,b)}. \end{aligned}$$

Usando a continuidade do produto interno e o fato que a convergência fraca em $H_0^1(a, b)$ implica convergência fraca em $L^2(a, b)$ obtemos

$$(u_n, w)_{L^2(a,b)} \rightarrow (u, w)_{L^2(a,b)}.$$

Como (u_n) converge forte em $L^2(a, b)$ para v temos que

$$0 \leq |(u - v, w)_{L^2(a,b)}| \leq |(u_n, w)_{L^2(a,b)} - (u, w)_{L^2(a,b)}| + \|u_n - v\|_{L^2(a,b)} \|w\|_{L^2(a,b)} \rightarrow 0$$

e portanto,

$$(u - v, w)_{L^2(a,b)} = 0, \quad \forall w \in L^2(a, b).$$

Escolhendo $w = u - v$, tem-se

$$(u - v, u - v)_{L^2(a,b)} = 0 \Rightarrow u = v.$$

Assim,

$$\int_a^b \sigma u_n^2 dx \rightarrow \int_a^b \sigma u^2 dx.$$

Como $u_n \in W$ tem-se

$$\int_a^b \sigma u_n^2 dx = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e pela unicidade do limite obtemos

$$\int_a^b \sigma u^2 dx = 1.$$

Portanto, $u \in W$ e por (6.9) temos que

$$\lambda = \inf_{u \in W} \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u) \leq \lambda$$

o que implica $\mathcal{F}(u) = \lambda$. ■

Agora vamos definir indutivamente uma sequência de subespaços fechados de $H_0^1(a, b)$ como segue:

$$V_1 = H_0^1(a, b), \quad W_1 = V_1 \cap \left\{ u \in H_0^1(a, b); \int_a^b \sigma u^2 dx = 1 \right\}.$$

Aplicando a Proposição 6.1 obtemos $u_1 \in W_1$ tal que

$$\mathcal{F}(u_1) = a(u_1, u_1) = \lambda_1 = \inf \{ \mathcal{F}(u); u \in W_1 \}.$$

Em seguida, definimos V_2 como o subspaço fechado das funções $u \in H_0^1(a, b)$ que são σ -ortogonais à u_1 , isto é,

$$V_2 = \left\{ u \in H_0^1(a, b); \int_a^b \sigma u u_1 dx = 0 \right\}$$

e

$$W_2 = V_2 \cap \left\{ u \in H_0^1(a, b); \int_a^b \sigma u^2 dx = 1 \right\}.$$

Novamente pela Proposição 6.1 obtemos $u_2 \in W_2$ com

$$\mathcal{F}(u) = a(u_1, u_2) = \lambda_2 = \inf\{\mathcal{F}(u); u \in W_2\}.$$

Continuando este processo na n -ésima etapa temos o subspaço

$$V_n = \left\{ u \in H_0^1(a, b); \int_a^b \sigma u u_i dx = 0, i = 1, 2, \dots, n-1 \right\}$$

$$W_n = V_n \cap \left\{ u \in H_0^1(a, b); \int_a^b \sigma u^2 dx = 1 \right\}$$

e encontramos $u_n \in W_n$ tal que

$$\mathcal{F}(u_n) = a(u_n, u_n) = \lambda_n = \inf\{\mathcal{F}(u); u \in W_n\}.$$

Observe que

$$W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset \dots \supset W_n \supset W_{n+1} \supset \dots$$

e portanto,

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \dots$$

Além disso, por construção, temos

$$\int_a^b \sigma u_n u_k dx = \delta_{nk} \quad \text{com} \quad \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k, \\ 0 & \text{se } n \neq k. \end{cases} \quad (6.10)$$

Afirmção: λ_n e u_n , $n \in \mathbb{N}$ são respectivamente os autovalores e as autofunções do problema de autovalor de Sturm-Liouville.

De fato, se $\varphi_i \in V_i$, $\epsilon \neq 0$ e

$$\int_a^b \sigma (u_i + \epsilon \varphi_i)^2 dx = 1$$

então pela definição de mínimo

$$\mathcal{F}(u_i + \epsilon\varphi_i) \geq \lambda_i.$$

Logo,

$$a(u_i + \epsilon\varphi_i, u_i + \epsilon\varphi_i) \geq \lambda_i \int_a^b \sigma(u_i + \epsilon\varphi_i)^2 dx, \quad \forall \varphi_i \in V_i.$$

Desenvolvendo em ϵ obtemos

$$2\epsilon \left[a(u_i, \varphi_i) - \lambda_i \int_a^b \sigma u_i \varphi_i dx \right] + \epsilon^2 \left[a(\varphi_i, \varphi_i) - \lambda_i \int_a^b \sigma \varphi_i^2 dx \right] \geq 0, \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}$$

e logo,

$$a(u_i, \varphi_i) - \lambda_i \int_a^b \sigma u_i \varphi_i dx = 0, \quad \forall \varphi_i \in V_i$$

e por (6.10) tem-se

$$a(u_i, u_k) = \lambda_i \delta_{ik} \tag{6.11}$$

e portanto,

$$a(u_i, \varphi) - \lambda_i \int_a^b \sigma u_i \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(a, b). \tag{6.12}$$

Logo, u_i é solução fraca de (6.7) para $\lambda = \lambda_i$.

Assim, provamos que a seqüência de problemas de minimização

$$\min \left\{ \int_a^b (pu'^2 + qu^2) dx; u \in W_n \right\}$$

define uma seqüência (λ_n, u_n) de autofunções u_n e autovalores λ_n .

Agora vamos mostrar que o sistema de (λ_n, u_n) é completo no sentido de que se (λ, u) é uma solução de (6.7) com $u \neq 0$ então $\lambda = \lambda_i$ para algum i , e u deve ser um múltiplo de u_i , ou seja, λ é um autovalor simples.

Provaremos primeiro que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty. \tag{6.13}$$

De fato, suponha por absurdo, que (λ_n) é limitada então (u_n) é limitada em $H_0^1(a, b)$ e como $H_0^1(a, b) \hookrightarrow L^2(a, b)$ é compacta existe $u \in L^2(a, b)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $L^2(a, b)$.

Além disso

$$\int_a^b \sigma u^2 dx = 1.$$

Logo,

$$\int_a^b \sigma(u - u_n)^2 \rightarrow 0.$$

Mas, por (6.10), para $k \neq n$, temos

$$\int_a^b \sigma(u_k - u_n)^2 dx = \int_a^b \sigma u_k^2 dx - 2 \int_a^b \sigma u_k u_n dx + \int_a^b \sigma u_n^2 dx = 2$$

e portanto

$$\int_a^b \sigma(u - u_n)^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \sigma(u_k - u_n)^2 dx = 2, \quad \forall n$$

o que é uma contradição.

Agora vamos mostrar que toda $v \in H_0^1(a, b)$ tem uma expansão em σ -série de Fourier, ou seja,

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$$

com c_i os σ -coeficientes de Fourier de v com relação a u_i , ou seja,

$$c_i = \int_a^b \sigma v u_i dx.$$

Para isto, definimos

$$v_n = \sum_{i=1}^n c_i u_i.$$

Note que,

$$\int_a^b \sigma(v - v_n) u_i dx = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

e logo $v - v_n \in V_{n+1}$. Pela propriedade de mínimo de λ_{n+1} temos que

$$a(v - v_n, v - v_n) \geq \lambda_{n+1} \int_a^b \sigma(v - v_n)^2 dx. \quad (6.14)$$

As propriedades (6.10) e (6.12) implicam que

$$\int_a^b \sigma(v - v_n)^2 dx = \int_a^b \sigma v^2 dx - \sum_{i=1}^n c_i^2 = \int_a^b \sigma v^2 dx - \int_a^b \sigma v_n^2 dx, \quad (6.15)$$

$$a(v - v_n, v - v_n) = a(v, v) - \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2 = a(v, v) - a(v_n, v_n). \quad (6.16)$$

Mas, por (6.13), existe N tal que $\lambda_n > 0$, para todo $n \geq N$. Assim, por (6.14) e (6.16) obtemos

$$0 \leq \int_a^b \sigma(v - v_n)^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} a(v, v). \quad (6.17)$$

Logo,

$$\int_a^b \sigma(v - v_n)^2 dx \rightarrow 0 \quad (6.18)$$

e (6.15) implica

$$\int_a^b \sigma v_n^2 dx \rightarrow \int_a^b \sigma v^2 dx$$

ou equivalentemente

$$\int_a^b \sigma v^2 dx = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2. \quad (6.19)$$

Agora, por (6.16) obtemos

$$a(v_n, v_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2 \leq a(v, v).$$

Logo, a série $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i c_i^2$ é convergente. Portanto, para $n > m$ e $n, m \rightarrow \infty$ tem-se

$$\begin{aligned} \int_a^b \sigma(v_n - v_m)^2 dx &= \sum_{i=m+1}^n c_i^2 \rightarrow 0, \\ a(v_n - v_m, v_n - v_m) &= \sum_{i=m+1}^n \lambda_i c_i^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

E pela coercividade de $a(u, v)$ existe $C > 0$ tal que

$$C \|v_n - v_m\|_{H_0^1(a,b)} \leq a(v_n - v_m, v_n - v_m) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2 \leq a(v, v).$$

Logo (v_n) é uma sequência de Cauchy em $H_0^1(a, b)$ e portanto converge em $H_0^1(a, b)$.

E por (6.18) concluímos que $v_n \rightarrow v$ em $H_0^1(a, b)$.

Além disso,

$$a(v, v) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i c_i^2.$$

Finalmente, considere uma solução qualquer (λ, u) de (6.7). Então

$$\lambda \int_a^b \sigma u u_i dx = a(u, u_i) = \lambda_i \int_a^b \sigma u_i u dx.$$

Logo,

$$(\lambda - \lambda_i) \int_a^b \sigma u u_i dx = 0, \quad \forall i.$$

Consequentemente, se $\lambda \neq \lambda_i, \forall i$, temos, por (6.19), que

$$\int_a^b \sigma u^2 dx = 0.$$

Logo, $u = 0$. Portanto, $\lambda = \lambda_i$ para algum i .

Para provar que todos λ_i são autovalores simples, suponhamos que λ corresponde a dois autovalores da sequência (λ_n) . Então existem duas funções linearmente independentes \bar{u}_1 e \bar{u}_2 associadas ao autovalor λ e toda combinação linear

$$c_1 \bar{u}_1 + c_2 \bar{u}_2 \neq 0$$

é também uma autofunção correspondente a λ . Agora, escolhemos c_1, c_2 tais que

$$c_1 \bar{u}_1(a) + c_2 \bar{u}_2(a) = 0$$

$$c_2 \bar{u}'_1(a) + c_2 \bar{u}'_2(a) = 0$$

e pela unicidade de solução do Problema de Cauchy concluimos que $c_1 \bar{u}_1 + c_2 \bar{u}_2 \equiv 0$, o que contradiz o fato de \bar{u}_1 e \bar{u}_2 serem L.I. Portanto, o sistema (λ_n, u_n) é completo.

Em resumo,

Teorema 6.1. *Os autovalores do problema (6.7) formam uma sequência (λ_n) não-decrescente, tal que $\lambda_n \rightarrow \infty$. Uma sequência completa (λ_n, u_n) de autovalores λ_n e autofunções u_n com $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow \infty$ pode ser obtida resolvendo recursivamente os problemas de minimização*

$$\min \left\{ \mathcal{F}(u) = \int_a^b (pu'^2 + qu^2) dx; u \in W_n \right\}$$

com

$$W_n = V_n \cap \left\{ u \in H_0^1(0, 1); \int_a^b \sigma u^2 dx = 1 \right\};$$

$$V_1 = H_0^1(a, b);$$

$$V_n = \left\{ u \in H_0^1(0, 1); \int_a^b \sigma u u_i dx = 0, i = 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Considerações finais

Nesta dissertação investigamos os resultados de existência e regularidade para mínimo de funcionais integrais desenvolvidos por L. Tonelli. Destacamos os seguintes aspectos do trabalho:

(i) A técnica usada para obtenção da solução do problema de mínimo é a conhecida como métodos direto do cálculo das variações, acoplado com argumento de compacidade.

(ii) O estudo dos problemas variacionais por sua importância teórica, numérica e sua aplicação em diversos modelos de controle ótimo. Particularmente, a análise matemática que envolve espaços funcionais especiais, teoria de distribuição para funções vetoriais etc.

(iii) O estudo de problemas diferenciais através de problemas variacionais .

Bibliografia

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] J. M. Ball, V.J. Mizel, *One-dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler-Lagrange equation*, Arch. Rotation. Mech. Anal., **90**, 325-388, 1985.
- [3] O. Bolza, *Lectures on the Calculus of Variations*, Chicago, 1909.
- [4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.
- [5] G. Buttazzo, M. Giaquinta, and S. Hildebrandt, *One-dimensional variational problems. An introduction*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Vol 15, Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.
- [6] E.A. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1955.
- [7] B. Dacorogna. *Direct methods in the calculus of variations*, Springer, Berlin, 1989.
- [8] A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Hold, Rinehart and Winston, INC, 1969.
- [9] E. De Giorgi, *Teoremi di semicontinuità nel calcolo delle variazioni*, Inst. Naz. Alta. Mat.. Roma, 1969.
- [10] A. D. Ioffe, *On lower semicontinuity of interal functionals I*, SIAM J. Control Optimization, **15**, 521-538, 1977.

- [11] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin, *Introduction Real Analysis*, Dover Publications, INC, New-York, 1970.
- [12] C. Olech, *A characterization of L^1 - weak lower semicontinuity of integral functionals*, Bull. Acad. Pol. Sci., **25**, 135-142, 1977.
- [13] L. Tonelli, *Fondamenti di calcolo delle variazioni I, II*, Zanichelli, Bologna, 1921-23.