UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

FERNANDO RAMOS DE FARIAS

# UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

BELÉM – PARÁ
2013

**FERNANDO RAMOS DE FARIAS**

# UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

Monografia apresentada à Universidade Federal do Pará - UFPA, como instrumento parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. M.Sc. José Augusto Nunes Fernandes.
Co-orientador: Prof. Dr. Roberto Carlos Dantas Andrade.

**BELÉM – PARÁ**
**2013**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

---

Farias, Fernando Ramos de, 1980-
Uma sequência didática alternativa para o ensino de análise combinatória na educação básica - a notação fatorial e suas aplicações / Fernando Ramos de Farias. - 2013.

Orientador: José Augusto Nunes Fernandes;
Coorientador: Roberto Carlos Dantas Andrade.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2013.

1. Didática-Matemática. 2. Análise combinatória-Estudo e ensino (Ensino fundamental). I. Título.

CDD 22. ed. 371.330151

---

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FERNANDO RAMOS DE FARIAS

# UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA – A NOTAÇÃO FATORIAL E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Profissional de Matemática, da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

**Data da defesa:** 25/ 03 / 2013
**Conceito:** Excelente

Banca examinadora

______________________________
**Prof. Me. JOSÉ AUGUSTO NUNES FERNANDES – ORIENTADOR - UFPA**

______________________________
**Prof. Dr. ROBERTO CARLOS DANTAS ANDRADE – COORIENTADOR - ETRB**

______________________________
**Prof. Dr. JOÃO PABLO PINHEIRO DA SILVA – MEMBRO INTERNO - UFPA**

______________________________
**Prof. Dr. NATANAEL FREITAS CABRAL – MEMBRO EXTERNO - UEPA**

Oferecemos o presente trabalho aos nossos familiares e amigos por sua compreensão, paciência e apoio neste importante momento de nossas vidas

Agradecemos a Deus, princípio de tudo, por sua presença constante e proteção.

A nossos pais, por serem exemplo e alicerce em nossas vidas, formações e por terem sempre acreditado em nós.

A nossos familiares e amigos, por compartilharem dos bons e maus momentos, oferecendo-nos força para seguir.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), por oportunizar o PROFMAT, programa que nos proporcionou imensurável crescimento intelectual.

A Universidade Federal do Pará (UFPA), por nos proporcionar sua estrutura física e intelectual.

A CAPES, pelo reconhecimento e investimento que viabilizaram este importante projeto.

Ao nosso orientador José Augusto Nunes Fernandes e co-orientador Roberto Carlos Dantas Andrade, pela dedicação, compreensão e por contribuir para a realização deste trabalho.

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo oferecer à comunidade da educação básica uma sequência didática diferenciada para o ensino de Análise Combinatória. O que diferencia este material das outras produções comumente disponíveis nos livros didáticos é a construção dos conceitos de permutação, arranjo e combinação a partir dos princípios aditivo e multiplicativo, em detrimento a simples memorização e utilização de fórmulas, que são apresentadas somente no final do curso. Além disso, esta produção é composta por um material para uso em sala de aula, um material de instrução para o professor e planos de aula para cada capítulo que será trabalhado. Finalmente, o curso pode ser facilmente adaptado a realidade da escola, professor, aluno ou tempo disponível conforme cada especificidade.

**Palavras-Chave:** Ensino, Combinatória, Sequência Didática, Educação Básica.

## ABSTRACT

This paper aims to provide the community of basic education, a differentiated didatic sequence for teaching Combinatorial Analysis. What distinguishes this material from other productions commonly available in textbooks is the construction of the concepts of permutation and combination from the additive and multiplicative principles, rather than simply memorize and use formulas, which are only given at the end of the course . Moreover, this production is composed of a material for use in the classroom, one instructional material for the teacher and lesson plans for each chapter that will be worked. Finally, the course can be easily adapted to the reality of school, teacher, student, or time available as each specificity.



**Keywords**: Education, Combinatorics, Teaching Sequence, Basic Education.

## SUMÁRIO

**Apresentação**........................................................................................................**10**

**Introdução**...........................................................................................................**12**

**MATERIAL PARA USO EM SALA DE AULA**

**Capítulo 07: A NOTAÇÃO FATORIAL**....................................................................**14**

**7.1. Problemas de fixação**...............................................................................**19**

**Capítulo 08: O FATORIAL E OS AGRUPAMENTOS SIMPLES**..............................**21**

**8.1. A permutação**.............................................................................................**21**

**8.2. O arranjo**....................................................................................................**22**

**8.3. A combinação**.............................................................................................**25**

**8.4. Problemas de fixação**..............................................................................**27**

**Capítulo 09: A PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS**.........................**29**

**MATERIAL DE INSTRUÇÃO AO PROFESSOR**

***Apresentação***.......................................................................................................**35**

**Capítulo 07**.............................................................................................................**36**

**Capítulo 08**.............................................................................................................**37**

**Capítulo 09**.............................................................................................................**38**

**PLANOS DE AULA**

**Capítulo 07**.............................................................................................................**39**

**Capítulo 08**.............................................................................................................**41**

**Capítulo 09**.............................................................................................................**43**

**Considerações finais**..............................................................................................**45**

**Referências**.............................................................................................................**46**

# APRESENTAÇÃO

A Análise Combinatória, ou simplesmente Combinatória, é considerada por professores e alunos como um assunto difícil de ser ensinado e aprendido. Dois motivos são normalmente levantados para justificar essa noção: a apresentação tardia dos métodos de contagem, que, no sistema tradicionalmente adotado em nosso país, é deixada somente para a segunda série do ensino médio, e a dificuldade que o aluno tem em empregar adequadamente os conceitos e as fórmulas para o cálculo de arranjos, combinações e permutações.

O presente trabalho visa minimizar a problemática enfrentada pelos alunos relativa à identificação e utilização dos mecanismos e fórmulas da Análise Combinatória fundamentada, principalmente, nos princípios aditivo e multiplicativo. Primeiramente porque, a nosso ver, a mera memorização e utilização de fórmulas está fundamentalmente incorreta e em segundo lugar por acreditarmos que a metodologia que está por trás desta noção é que gera a dificuldade. Ao analisarmos alguns livros didáticos normalmente adotados em nosso país vemos que eles incorrem em dois erros fundamentais: há pouca ênfase aos princípios aditivo e multiplicativo de contagem (o primeiro normalmente é omitido) e induzem o aluno a simplesmente classificar os problemas como arranjos, permutações e combinações, sendo que a maioria, inclusive os mais interessantes, não podem ser classificados segundo esses critérios. Ao adotarmos o título *Uma sequência didática alternativa para o ensino de análise combinatória na educação básica* temos por objetivo dar ênfase aos princípios em vez das fórmulas e à criatividade, à interpretação e à escrita dos alunos, ao invés da apresentação de cálculos desconexos baseados em repetições de modelos prontos e superficiais.

Fortemente baseado em resolução de problemas, o trabalho tem como característica principal estimular o aluno a desenvolver estratégias para construir soluções e evitar erros comuns. As definições e técnicas sempre estão vinculadas a algum exemplo concreto que as justifique, motivando o aluno a desenvolver a compreensão do conceito ou da ferramenta, em detrimento da simples memorização de uma definição ou de um algoritmo.

Apresentamos nossa monografia para a conclusão do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), somando a experiência dos autores no ensino de combinatória nas redes públicas e particulares de ensino e visando contribuir de forma relevante para o ensino deste tópico que possui a fama de ser difícil tanto para alunos como para professores.

Iniciaremos com uma breve introdução, citando alguns aspectos históricos e a relação da Análise Combinatória com outras áreas do conhecimento. O trabalho está dividido em três seções: material para uso em sala de aula, instrucional para o professor e respectivos planos de aula, e apesar de resultar de um esforço coletivo, sua elaboração foi organizada da seguinte maneira: parte I, que introduz os métodos de contagem, dando ênfase aos princípios aditivo e multiplicativo elaborada por Victor Hugo Chacon Britto; parte II, que conceitua, através de propriedades de conjuntos e sequências, permutação simples, arranjo simples e combinação simples elaborada por Wilson Monteiro de Albuquerque Maranhão; finalmente, a parte III que apresenta a notação fatorial e seus desdobramentos elaborada por Fernando Ramos de Farias.

Neste trabalho segue a parte III, composta pelos capítulos 07, 08 e 09, com seus respectivos materiais para uso em sala de aula, instrucional para o professor e planos de aula.

# INTRODUÇÃO

Historicamente, acreditamos que é bastante difícil dizer onde surge a Análise Combinatória, mas os primeiros problemas de contagem documentados estão relacionados à construção de quadrados mágicos e à solução de enigmas. Costuma-se localizar o aparecimento da Combinatória atrelado ao surgimento da teoria das probabilidades ou ao desenvolvimento do binômio de Newton. Os primeiros trabalhos surgem com nomes como De Moivre, Bernoulli e Euler, este último mostrou conexões dos métodos de contagem com a Teoria dos Números e a Teoria dos Grafos. Na atualidade, muitos problemas de computação, pesquisa operacional e criptografia podem ser interpretados por estas teorias, o que aponta para um forte crescimento da importância da Análise Combinatória.

Através da nossa experiência, percebemos que o ensino de Análise Combinatória na educação básica tem sido tradicionalmente trabalhado com a simples apresentação e utilização das fórmulas de permutações, arranjos e combinações. Esta forma de exposição, em nosso ponto de vista é, não só incorreta, como também perniciosa, uma vez que dessa forma o aluno tem somente uma visão parcial do tema sendo induzido a uma atitude equivocada na hora de resolver problemas.

Podemos dizer, utilizando a definição de Morgado (2006, p. 02), que a Análise Combinatória é *"a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas".* Neste sentido, são dois os tipos de problemas que frequentemente são classificados como sendo de combinatória:

- ✓ Demonstrar a existência de uma configuração que cumpra determinadas condições;
- ✓ Contar a quantidades de subconjuntos de um conjunto dado que satisfaçam certas condições

Arranjos, permutações e combinações são exemplos do segundo tipo de problema. Os princípios aditivo e multiplicativo fazem também parte deste segundo grupo. O princípio das gavetas, ou princípio da casa dos pombos, é um exemplo de assunto que pode ser classificado no primeiro grupo.

Os autores compartilham da visão que um curso de Combinatória que tenha como público alvo os alunos do ensino básico trate somente dos temas relacionados à contagem, deixando as demonstrações de existência para um curso mais avançado, por exemplo, de preparação olímpica ou para o nível superior. Esta visão, longe de ser a ideal, é baseada no pouco tempo que é destinado no planejamento tradicional das escolas ao estudo deste tema e a pouca maturidade dos alunos em relação ao formalismo matemático.

## MATERIAL PARA USO EM SALA DE AULA

## CÁLCULOS COMBINATÓRIOS

### CAPÍTULO 07: A NOTAÇÃO FATORIAL

Muitas vezes, ao resolvermos exercícios de agrupamentos simples, ordenados ou não-ordenados, nos deparamos com multiplicações de números naturais consecutivos. Quando essas multiplicações aparecem sempre é possível escrevê-las de forma resumida com a introdução de uma nova notação: **a notação fatorial.**

Vamos resolver, inicialmente, dois problemas simples que nos darão oportunidade de demonstrar a utilidade da nova notação. Em seguida apresentaremos a definição, uma propriedade e uma estratégia útil ao lidarmos com expressões que envolvam a notação fatorial.

**PROBLEMA 56:** Maria, que é bibliotecária e adora matemática, estava arrumando seus livros de terror na estante de casa quando lhe surgiu a seguinte questão: eu tenho cinco livros diferentes de terror, se eu arrumá-los em uma ordem diferente a cada dia, quantos dias demorarão até repetir a ordem em que os arrumei hoje?

*Como Maria quer saber de quantas formas pode organizar todos os livros na sua estante, precisa saber qual a quantidade de* ***agrupamentos ordenados utilizando todos os elementos de um mesmo conjunto****, para isso pode utilizar o Princípio Multiplicativo ou recorrer ao conceito de permutação de cinco elementos, que neste caso são os livros. Temos então, que Maria tem cinco escolhas para o primeiro livro, quatro para o segundo, três para o terceiro, duas para o quarto e somente uma para o quinto livro. Logo, sendo N o número de maneiras de se organizar os livros na estante e $P_5$ a permutação de cinco elementos, temos:*

$$N = P_5 = \underbrace{5}_{1^{\underline{o}}\ livro} \times \underbrace{4}_{2^{\underline{o}}\ livro} \times \underbrace{3}_{3^{\underline{o}}\ livro} \times \underbrace{2}_{4^{\underline{o}}\ livro} \times \underbrace{1}_{5^{\underline{o}}\ livro} = 120 \textit{ maneiras.}$$

*Portanto Maria demorará cerca de quatro meses para repetir a ordem original.*

**PROBLEMA 57:** Feliz por ter resolvido o problema dos livros de terror, Maria observa a longa prateleira de livros nos fundos da biblioteca onde trabalha. Ela sabe que aquela prateleira tem duzentos livros, todos diferentes, e refaz a pergunta, agora com uma quantidade bem maior de livros: de quantas formas diferentes eu posso arrumar esses duzentos livros?

*Podemos utilizar o mesmo raciocínio que utilizamos no exemplo 01, portanto temos que* $N = P_{200}$ *mas agora enfrentamos dois problemas. Sabemos qual a solução, multiplicar todos os números naturais de 1 até 200, mas o produto que devemos fazer é extenso demais para ser escrito e grande demais para ser calculado manualmente. Para resolver o segundo problema podemos utilizar um computador, já para o primeiro, introduziremos uma nova notação a partir dos seguintes exemplos:*

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$$
$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 10!$$

*Através destes simples casos podemos entender como o nosso novo símbolo funciona: escrever um número natural seguido de uma exclamação indica que nós devemos calcular o produto de todos os números naturais diferentes de zero que são menores do que ele.*

*Note que o primeiro cálculo que fizemos é exatamente a solução do problema 56. Desta forma poderíamos ter escrito* $N = P_5 = 5!$. *Assim, a solução deste exemplo se escreve:*

$$N = P_{200} = 200!$$

Os problemas 56 e 57 nos mostram como a nossa nova notação pode simplificar a escrita da resolução de um problema. Além disso, essa notação nos ajudará a escrever fórmulas que calculam a quantidade de permutações, arranjos e combinações. Agora vamos às definições:

*Seja $n$ um número natural, o símbolo $n!$ representa o fatorial de $n$ e é definido da seguinte forma:*

$$n! = \begin{cases} 1, & se\ n = 0\ ou\ n = 1 \\ n.(n-1).(n-2)\ldots 2.1, & se\ n \geq 2 \end{cases}$$

Segundo a nossa definição temos que $0! = 1! = 1$; $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Temos também que:

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$$

$$25! = 25 \times 24 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = 15511210043330985984000000$$

Estes poucos exemplos nos mostram que o fatorial de um número cresce muito rapidamente com $n$, e o cálculo se torna extremamente trabalhoso. Para facilitar os cálculos e as simplificações que aparecerão destacamos a seguinte propriedade do fatorial:

*Para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \neq 0$, temos $n! = n.(n-1)!$*
*Em geral temos $n! = n.(n-1)! = n.(n-1).(n-2)! = \cdots$*

Utilizando esta propriedade temos, por exemplo, que:

$$9! = 9 \times \underbrace{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{8!} = 9 \times 8!$$

$$8! = 8 \times \underbrace{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{7!} = 8 \times 7!$$

O que nos dá $9! = 9 \times 8 \times 7!$. Expressões como estas serão úteis nos cálculos subseqüentes. Façamos então alguns exemplos.

**PROBLEMA 58:** Simplifique a expressão $\dfrac{9!}{7!}$

*Desenvolvendo o fatorial no numerador e no denominador obtemos:*

$$\frac{9!}{7!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

*Simplificando obtemos:*

$$\frac{9!}{7!} = \frac{9 \times 8 \times \cancel{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\cancel{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}} = 9 \times 8 = 72$$

*Utilizando a propriedade exposta anteriormente poderíamos ter escrito:*

$$\frac{9!}{7!} = \frac{9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 9 \times 8 = 72.$$

Este exemplo sugere uma estratégia útil quando queremos simplificar expressões, principalmente as que envolvem frações, onde o fatorial aparece. Utilizaremos esta estratégia para resolver os próximos exemplos:

> ***Estratégia:*** *ao lidar com expressões que envolvam o fatorial de dois ou mais números é conveniente desenvolver os fatoriais dos números maiores em função do fatorial do menor número.*

**<u>PROBLEMA 59:</u>** Simplifique a expressão $\frac{8!+6!}{5!}$

*Vamos utilizar a estratégia sugerida pelo exemplo anterior e desenvolver os fatoriais* $8!$ *e* $6!$ *em função de* $5!$. *Obtemos* $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5!$ *e* $6! = 6 \times 5!$. *Substituindo na expressão original:*

$$\frac{8! + 6!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5! + 6 \times 5!}{5!}$$

*Pondo em evidência o termo 5!, temos:*

$$\frac{8!+6!}{5!}=\frac{8\times7\times6\times5!+6\times5!}{5!}=\frac{5!\times(8\times7\times6+6)}{5!}$$

*Finalmente, cancelando o termo 5!, chegamos a seguinte expressão:*

$$\frac{8!+6!}{5!}=\frac{8\times7\times6\times5!+6\times5!}{5!}=\frac{\cancel{5!}\times(8\times7\times6+6)}{\cancel{5!}}=8\times7\times6+6=342$$

**PROBLEMA 60:** Resolva a seguinte equação $\frac{n!}{(n-2)!}=210$.

*Para resolvermos este tipo de equação precisamos simplificar uma expressão literal que envolve a notação fatorial. Novamente, utilizamos a estratégia de desenvolver o fatorial do maior número, neste caso "$n$", em função do fatorial do menor, "$n-2$". Obtemos então:*

$$\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)!}{(n-2)!}=\frac{n\times(n-1)\times\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}=n\times(n-1)=n^2-n$$

*Substituindo a expressão simplificada na equação original temos:*

$$n^2-n=210$$

*Resolvendo a equação do segundo grau obtemos como soluções $n'=15$ e $n''=-14$. Como o fatorial só está definido para números naturais a resposta $n''=-14$ não é solução da equação, portanto $S=\{15\}$.*

**PROBLEMA 61:** Escreva o produto $7\times6\times5$ utilizando a notação fatorial.

*Este produto não pode ser escrito diretamente como um único fatorial, pois nele não aparecem todos os naturais menores que sete. Entretanto, podemos "completar" o produto de forma conveniente de modo que os termos que estão faltando apareçam, da seguinte forma:*

$$7\times6\times5=\frac{7\times6\times5\times\mathbf{4}\times\mathbf{3}\times\mathbf{2}\times\mathbf{1}}{\mathbf{4}\times\mathbf{3}\times\mathbf{2}\times\mathbf{1}}=\frac{7!}{4!}$$

*Obtendo assim a expressão desejada.*

**7.1. PROBLEMAS DE FIXAÇÃO:** Resolva os problemas propostos abaixo, utilizando os conhecimentos adquiridos.

**PROBLEMA 62:** Encontre o valor das seguintes expressões:

$\boldsymbol{a})\ 7! - 5!$

$\boldsymbol{b})\ 0! + 1! + 2! + 3!$

$\boldsymbol{c})\ 4! + 5!$

$\boldsymbol{d})\ (4 + 5)!$

**PROBLEMA 63:** Calcule:

$\boldsymbol{a})\ \frac{10!}{7!}$

$\boldsymbol{b})\ \frac{12!}{7!.5!}$

$\boldsymbol{c})\ \frac{7! + 5!}{4!}$

**PROBLEMA 64:** Quantos são os anagramas da palavra PALITO? (Escreva a resposta utilizando a notação fatorial)

**PROBLEMA 65:** Resolva as seguintes equações:

$\boldsymbol{a})\ \frac{n!}{(n-1)!} = 20$

$\boldsymbol{b})\ \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 110$

**PROBLEMA 66:** Classifique como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, considerando que $a$ e $b$ são números naturais quaisquer.

***a)*** $(a+b)! = a! + b!$

***b)*** $(2a)! = 2 \cdot a!$

***c)*** $(a!)^2 = a! \cdot a!$

***d)*** $a^2! = a! \cdot a!$

***e)*** $(a \cdot b)! = a! \cdot b!$

**PROBLEMA 67:** Simplifique a expressão $\frac{(n+2)!}{n!}$

## CAPÍTULO 08: O FATORIAL E OS AGRUPAMENTOS SIMPLES.

Neste capítulo estudaremos a forma como a notação fatorial relaciona-se com o cálculo do número de agrupamentos simples: permutações, arranjos e combinações.

Relembraremos a definição precisa de cada agrupamento e, por meio dessa definição e de exemplos, estabeleceremos uma fórmula para o cálculo de cada um deles utilizando a notação fatorial.

### 8.1. A PERMUTAÇÃO

Nos problemas 56 e 57 a personagem Maria resolve dois problemas que tem a mesma estrutura: ela deseja saber de quantas formas diferentes pode organizar certo número de objetos distintos. Esses problemas, que diferem somente em relação ao número de objetos, são exemplos do agrupamento que denominamos de **permutação simples**.

Vamos relembrar a definição:

> *Se **X** é um conjunto com **n** elementos distintos, chama-se **permutação simples** cada um dos agrupamentos **ordenados** que podem ser formados, **sem repetição**, utilizando-se os **n** elementos do conjunto **A.** Este número é indicado por* $P_n$.

Como nos exemplos de Maria, os problemas de permutação simples podem ser resolvidos utilizando-se o Princípio Multiplicativo da seguinte forma: a permutação é obtida em $n$ etapas, onde cada uma dessas etapas corresponde à escolha do elemento do conjunto que ocupará determinada posição. Neste sentido podemos utilizar o seguinte esquema:

| ETAPAS | **Etapa** $1$ | **Etapa** $2$ | **...** | **Etapa** $n-1$ | **Etapa** $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| POSSIBILIDADES | $n$ | $n-1$ | ... | $2$ | $1$ |

Logo, denotando por $P_n$ o número de permutações dos $n$ elementos distintos de um conjunto temos:

$$P_n = n.(n-1)\ldots 2.1,\ ou\ seja,\ P_n = n!$$

## 8.2. O ARRANJO

Vamos relembrar o conceito de arranjo através de um problema.

**PROBLEMA 68:** Nas Olimpíadas de Londres em 2012 a competição feminina de vôlei de quadra teve como semifinalistas as seleções brasileira, japonesa, sul coreana e norte americana. Quantas são as possibilidades de premiação?

*A resolução deste problema envolve duas etapas: escolher os três países que serão premiados e escolher qual premiação (ouro, prata ou bronze) cada um desses três países escolhidos irá receber.*

*Podemos visualizar essas etapas na tabela abaixo:*

| PAÍSES | PÓDIOS FORMADOS | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| JAPÃO, BRASIL e EUA | J,B,E | J,E,B | B,J,E | B,E,J | E,B,J | E,J,B |
| JAPÃO, BRASIL E CORÉIA | J,B,C | J,C,B | B,C,J | B,J,C | C,B,J | C,J,B |
| JAPÃO, EUA e CORÉIA | J,E,C | J,C,E | C,E,J | C,J,E | E,C,J | E,J,C |
| EUA, CORÉIA e BRASIL | E,C,B | E,B,C | B,C,E | B,E,C | C,E,B | C,B,E |

*Logo podemos premiar três dos quatro países de 24 maneiras distintas.*

Observe que, ao formar 24 pódios diferentes, ocorreram as seguintes características:

- ✓ Em cada agrupamento três dos quatro países disponíveis aparecem e **não ocorrem repetições**.

- ✓ Os agrupamentos são **ordenados**, ou seja, a posição ocupada por cada país é importante, pois determina a medalha que sua seleção irá receber.

Dizemos então que cada agrupamento é um arranjo simples, ou seja, não possui elementos repetidos, de quatro elementos tomados três a três.

De um modo geral o arranjo pode ser caracterizado como a escolha ordenada de $p$ elementos distintos escolhidos em um conjunto que possui $n$ elementos distintos. Vamos então á definição:

> *Seja $\boldsymbol{X}$ um conjunto contendo $\boldsymbol{n}$ elementos distintos e $\boldsymbol{p}$ um número natural menor do que ou igual a $\boldsymbol{n}$, chama-se **arranjo simples dos $\boldsymbol{n}$ elementos tomados $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{p}$**, cada um dos agrupamentos **ordenados** que podem ser formados com $\boldsymbol{p}$ elementos distintos do conjunto $\boldsymbol{X}$. A quantidade desses arranjos e denotada por $\boldsymbol{A_{n,p}}$ ou $\boldsymbol{A_n^p}$.*

Portanto, no problema que acabamos de analisar, concluímos que o total de arranjos simples de quatro elementos tomados três a três é igual a vinte e quatro ou $A_4^3 = 24$.

Agora estamos em condições de perguntar: Como calcular o número de arranjos sem que seja necessário listar todos eles?

Novamente quem nos dá a resposta é o Princípio Multiplicativo.

Um arranjo simples consiste de $\boldsymbol{p}$ etapas e cada uma das etapas corresponde à escolha do elemento que ocupará determinada posição. Novamente um esquema ilustrará a situação.

| ETAPAS | **Etapa** $1$ | **Etapa** $2$ | **...** | **Etapa** $p$ |
|---|---|---|---|---|
| POSSIBILIDADES | $n$ | $n-1$ | ... | $n-(p-1)$ |

Aqui se faz necessário alguns esclarecimentos, vamos a eles:

- ✓ Na Etapa 1 temos $n$ possibilidades porque cada um dos $n$ elementos pode ser escolhido.
- ✓ Em cada uma das etapas seguintes existe uma escolha a menos que na etapa imediatamente anterior.
- ✓ Na última etapa, a Etapa $p$, existem $n-(p-1)$ possibilidades porque já foram escolhidos $p-1$ elementos.

Portanto, utilizando o Princípio Multiplicativo, temos:

$$A_{n,p} = n.(n-1).(n-2)\dots(n-p+1)$$

Esta fórmula nos diz que, para calcular o arranjo de $n$ elementos tomados $p$ a $p$ basta multiplicar, em ordem decrescente a partir de $n$, os $p$ números consecutivos.

Analisando novamente o problema 68 poderíamos tê-lo resolvido calculando $A_{4,3} = 4.3.2 = 24$.

Para relacionar a fórmula que acabamos de encontrar com a notação fatorial, vamos analisar um exemplo numérico.

**<u>PROBLEMA 69:</u>** Calcule $A_{7,3}$ e escreva o resultado utilizando a notação fatorial.

*Para calcular $A_{7,3}$ devemos multiplicar os três números consecutivos, em ordem decrescente, a partir do 7, logo $A_{7,3} = 7.6.5$.*

*Para escrever este resultado em notação fatorial utilizamos a técnica desenvolvida no exemplo 6, temos então que:*

$$A_{7,3} = 7\times 6\times 5 = \frac{7\times 6\times 5\times \mathbf{4}\times \mathbf{3}\times \mathbf{2}\times \mathbf{1}}{\mathbf{4}\times \mathbf{3}\times \mathbf{2}\times \mathbf{1}} = \frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7-3)!}$$

De um modo geral, utilizando a expressão obtida anteriormente, podemos pensar do seguinte modo:

$$A_{n,p} = n.(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n.(n-1)\dots(n-p+1).\boldsymbol{(n-p)\dots.1}}{\boldsymbol{(n-p)\dots.1}} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Portanto, utilizando a notação fatorial, obtemos a seguinte fórmula para o cálculo do arranjo:

*Seja $n$ e $p$ números naturais com $p \leq n$, temos $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$*

## 8.3. A COMBINAÇÃO

Novamente, começamos relembrando o conceito de combinação:

*Seja $\boldsymbol{X}$ um conjunto, contendo $\boldsymbol{n}$ elementos distintos e $\boldsymbol{p}$ um número natural menor do que ou igual a $\boldsymbol{n}$, chama-se **combinação simples dos $\boldsymbol{n}$ elementos tomados $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{p}$**, cada um dos agrupamentos **não-ordenados** que podem ser formados com $\boldsymbol{p}$ elementos distintos do conjunto $\boldsymbol{X}$. A quantidade dessas combinações é denotada por $C_{n,p}$ ou $C_n^p$.*

Para estabelecer uma fórmula para o cálculo do número de combinações similar àquelas que estabelecemos para os casos dos arranjos e das permutações vamos, primeiramente, ver como estes conceitos estão relacionados por meio de uma equação simples.

Vamos analisar novamente o problema 68.

Neste exemplo estávamos interessados em calcular o número de arranjos de quatro elementos tomados três a três. A resolução deste exemplo consistiu de duas etapas: escolher três elementos distintos dentre os quatro disponíveis e ordenar os três elementos escolhidos.

Observe que na nossa primeira etapa (escolher três elementos distintos dentre quatro) não estamos ordenando os elementos (isto é feito na segunda etapa!). Neste sentido, nossa primeira etapa consiste justamente em formar uma combinação de quatro elementos tomados três a três (lembre-se da definição de combinação!), portanto, utilizando o Princípio Multiplicativo temos a seguinte relação:

$A_{4,3} = C_{4,3} \cdot P_3$

Analisemos agora o caso geral.

Se um conjunto possui **n** elementos distintos, a formação de arranjos simples com **p** elementos distintos consiste de duas etapas:

- ✓ Escolher **p** elementos distintos dentre os **n** disponíveis, ou seja, formar uma **combinação simples** de **n** elementos tomados **p** a **p**;
- ✓ Ordenar os **p** elementos escolhidos sem repetição, isto é, formar uma **permutação simples** de **p** elementos.

Então, pelo Princípio Multiplicativo, temos:

$$A_{n,p} = C_{n,p} \cdot P_p$$

Utilizando agora as fórmulas já estabelecidas para o arranjo e a permutação obtemos:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

**<u>PROBLEMA 70:</u>** Resolva a equação $A_{6,p} = A_{5,p+1}$.

*Aplicando diretamente a fórmula para o cálculo do arranjo:*

$$A_{6,p} = A_{5,p+1} \Longrightarrow \frac{6!}{(6-p)!} = \frac{5!}{\big(5-(p+1)\big)!}$$

*Note agora que:*

$$(6-p)! = (6-p)\cdot\big((6-p)-1\big)\cdot\big((6-p)-2\big)! = (6-p)\cdot(5-p)\cdot(4-p)!$$

*Temos também que:*

$$\big(5-(p+1)\big)! = (4-p)!$$

*De modo que:*

$$\frac{6!}{(6-p)!} = \frac{5!}{\big(5-(p+1)\big)!} \Longrightarrow \frac{6.\cancel{5!}}{(6-p)\cdot(5-p)\cdot\cancel{(4-p)!}} = \frac{\cancel{5!}}{\cancel{(4-p)!}}$$

*Resolvendo a equação resultante, obtemos:*

$$\frac{6}{(6-p)\cdot(5-p)} = 1 \Rightarrow (6-p)\cdot(5-p) = 6 \Rightarrow p' = 3\ e\ p'' = 8$$

*Observe que para que as expressões não fazem sentido quando $p = 8$, portanto $S = \{3\}$.*

**PROBLEMA 71:** Um grupo de amigos se reúne para uma festa. Sabendo que todos se cumprimentaram com um aperto de mão e houve 105 apertos de mão, quantas pessoas estavam na festa?

*Devemos considerar que se A cumprimenta B, então B cumprimenta A. Portanto, ao escolhermos um par de pessoas, independentemente da ordem escolhida, estamos contando um aperto de mão. Por isso, se considerarmos que existem **n** pessoas na festa, o número de apertos de mão será $C_{n,2}$. Logo:*

$$C_{n,2} = 105 \Rightarrow \frac{n\cdot(n-1)}{2} = 105 \Rightarrow n^2 - n = 210 \Rightarrow n' = 21\ ou\ n'' = -20$$

*Logo 21 pessoas estavam na festa.*

**8.4. PROBLEMAS DE FIXAÇÃO:** Resolva os problemas propostos abaixo, utilizando os conhecimentos adquiridos.

**PROBLEMA 72:** Calcule:

**a)** $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$

**b)** $A_{6,3}$

**c)** $C_{6,0} + C_{6,1} + \cdots C_{6,5} + C_{6,6}$

**PROBLEMA 73:** Resolva as seguintes equações:

**a)** $P_{8-n} = 5 \cdot P_{7-n}$

**b)** $A_{n+1,3} = A_{n,4}$

**c)** $C_{n+1,2} + C_{n,3} = 5n$

**PROBLEMA 74:** Para calcular a média de gols de um campeonato de futebol, Arnaldo precisava saber quantos jogos foram disputados. Ao consultar o site da federação observou que foram disputados 380 jogos. Se no campeonato todas as equipes jogaram entre si em turno e returno, quantas equipes participaram?

## <u>CAPÍTULO 09:</u> A PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS.

Neste capítulo trataremos das permutações onde ocorre a repetição de algum elemento do conjunto. O principal exemplo deste tipo de agrupamento é o cálculo da quantidade de anagramas, em palavras que uma ou mais letras se repetem. É considerando este caso particular que basearemos toda a exposição, como veremos a seguir a partir da apresentação de uma situação problema.

Finalizaremos o capítulo com a apresentação de uma relação entre a permutação com elementos repetidos e a combinação simples.

### <u>PROBLEMA 75:</u> Novamente os anagramas!

Dentre as palavras BIRUTA, BARATA e BATATA, qual delas possui mais anagramas? Qual possui menos?

Note que a palavra BIRUTA não possui letras repetidas, logo, qualquer troca de letras gera um novo anagrama, já na palavra BARATA a letra A aparece três vezes e ao trocarmos duas letras A's de posição não geramos um novo anagrama. Finalmente, a palavra BATATA possui repetição de letras A e de letras T, logo ao trocarmos as letras A's entre si e as letras T's também entre si, não produzimos novos anagramas.

De um modo geral, quanto mais letras repetidas a palavra possui, menos anagramas distintos ela gera.

Vamos analisar mais detalhadamente o argumento exposto acima.

Suponhamos que, em cada um dos anagramas da palavra BIRUTA substituíssemos as vogais I e U pela vogal A. É claro que fazendo essa substituição obteríamos todos os anagramas da palavra BARATA. Mas, neste caso, cada anagrama apareceria repetido seis vezes. Vejamos no esquema abaixo o motivo disto:

$$\begin{array}{ccc} 6\ anagramas\ distintos\ de\ BIRUTA & geram & um\ \text{único}\ anagrama\ de\ BARATA \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \left.\begin{array}{c} ATIBUR \\ ATUBIR \\ UTABIR \\ UTIBAR \\ ITUBAR \\ ITABUR \end{array}\right\} & \longrightarrow & ATABAR \end{array}$$

Isto ocorre porque, fixando as posições das consoantes, as vogais A, I e U de BIRUTA podem trocar de posição de seis formas distintas ($P_3 = 6$) formando seis anagramas distintos. Já na palavra BARATA, ao fixarmos as consoantes temos somente um anagrama. Logo, o número de anagramas da palavra é igual a seis vezes o número de anagramas da palavra BARATA.

$$\begin{array}{ccc} 6 \cdot (Anagramas\ da\ palavra\ BARATA) & = & Anagramas\ da\ palavra\ BIRUTA = P_6 \\ Anagramas\ da\ palavra\ BARATA & = & \dfrac{P_6}{6} = \dfrac{P_6}{\underbrace{P_3}_{3\ letras\ A}} = 120 \end{array}$$

Sejam agora todos os anagramas da palavra BARATA. Se substituirmos em cada um deles a letra R pela letra T obteremos todos os anagramas da palavra BATATA. Note também que cada anagrama aparecerá duas vezes. Veja novamente o esquema:

$$\begin{array}{ccc} 2\ anagramas\ distintos\ de\ BARATA & geram & um\ \text{único}\ anagrama\ de\ BATATA \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \left.\begin{array}{c} ARABAT \\ ATABAR \end{array}\right\} & \longrightarrow & ATABAT \end{array}$$

Note que, fixando a posição da letra B e das letras A, as consoantes R e T podem trocar de posição de duas formas distintas ($P_2$). Logo, analogamente ao caso anterior, o número de anagramas da palavra BARATA é duas vezes o número de anagramas da palavra BATATA.

$$Anagramas\ de\ BIRUTA = P_6$$

$$Anagramas\ de\ BARATA = \frac{Anagramas\ de\ BIRUTA}{\underbrace{P_3}_{3\ letras\ A}} = \frac{P_6}{P_3}$$

$$Anagramas\ de\ BATATA = \frac{Anagramas\ de\ BARATA}{P_2} = \frac{P_6/P_3}{P_2} = \frac{P_6}{\underbrace{P_3}_{3\ letras\ A} \cdot \underbrace{P_2}_{2\ letras\ T}}$$

Agora, tomando o exemplo acima como modelo, podemos deduzir uma fórmula para o cálculo de permutações com elementos repetidos. Observe que na palavra BATATA existem:

- ✓ 6 letras;
- ✓ 3 letras A;
- ✓ 2 letras T;
- ✓ 1 letra B.

Neste caso o total de permutações é denotado por $P_6^{3,2,1}$. Portanto o exemplo acima mostra que:

$$P_6^{3,2,1} = \frac{P_6}{P_3 \cdot P_2 \cdot P_1} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!}$$

Generalizando o raciocínio acima temos o seguinte resultado:

*Seja $X = \{a_1, \dots, a_1, a_2, \dots, a_2, \dots, a_p, \dots, a_p\}$ um conjunto com **n** elementos nem todos distintos. Se o elemento $a_k$ aparece um número $n_k$ de vezes então o número de permutações distintas dos **n** elementos de X é dado por:*

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_p} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_p!}\ com\ n_1 + \dots + n_p = n$$

**PROBLEMA 76:** Quantos são os anagramas da palavra ARARA?

*Como a palavra ARARA possui 5 letras, 3 letras A e 2 letras T, utilizando a fórmula para o cálculo de permutações com elementos repetidos, temos:*

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

*Solução alternativa!*

*Poderíamos ter resolvido este problema de outra forma.*

*Para formar os anagramas da palavra ARARA devemos preencher 5 lugares com 3 A's e 2 R's.*

___, ___, ___, ___, ___.

*Para isso devemos escolher 3 entre as 5 posições possíveis para colocar os A's. Como são todos iguais, a ordem desta escolha não é importante. Temos então* $C_{5,3}$ *formas de fazer esta escolha. Após escolhermos a posição dos A's a posição dos T's fica determinada (Sobram dois lugares para colocar 2 T's). Portanto o número de anagramas da palavra ARARA é:*

$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

*Observe que, em vez de escolher os lugares para os A's, poderíamos ter escolhido os lugares para os 2 R's, e teríamos, raciocinando de forma análoga* $C_{5,2} = 10$ *anagramas.*

O resultado acima pode ser generalizado da seguinte forma: suponhamos que um conjunto de **n** elementos seja formado somente por dois tipos de símbolos (A e B, por exemplo) e que um destes símbolos (por exemplo A) se repita **k** vezes $(k < n)$. Quantas seqüências distintas podemos formar utilizando todos os elementos deste conjunto?

Podemos pensar de três formas:

Como o conjunto possui **n** elementos e **k** letras A, ele possui **n – k** letras B. De modo que para calcular o número de sequências distintas devemos calcular o número de anagramas da palavra:

$$\underbrace{AAA \ldots AA}_{k\ letras\ A}\underbrace{BBB \ldots BB}_{n-k\ letras\ B}$$

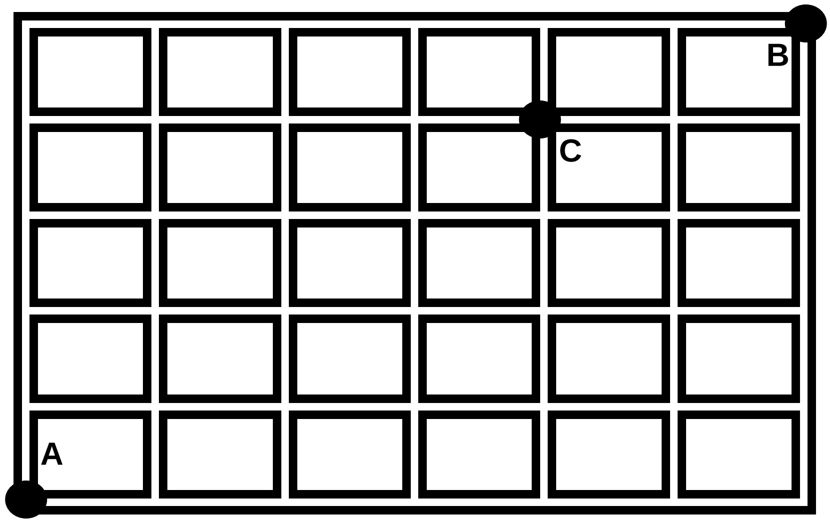
Portanto o número de sequências é $P_n^{k,n-k}$.

De outra forma, poderíamos ter calculado o número de sequências escolhendo, entre os **n** lugares disponíveis, **k** lugares, sem que a ordem da escolha seja importante, para colocar as letras A. Como, escolhidas a posição dos A's, fica determinada a posição dos B's, temos que o número de sequências é $C_{n,k}$. Se, em vez de escolher o lugar dos A's, tivéssemos escolhido o lugar dos **n – k** B's teríamos, analogamente, que o número de sequências é $C_{n,n-k}$.

Como o número de sequências independe da forma que utilizamos para contá-las temos:

$$P_n^{k,n-k} = C_{n,k} = C_{n,n-k}$$

**PROBLEMA 77:** A figura abaixo representa o mapa de uma cidade onde existem 7 avenidas na direção norte-sul e 6 na direção Leste-Oeste.




Quantos são os trajetos de comprimento mínimo ligando os pontos A e B? Quantos destes trajetos passam por C?

*Como estamos desejando que o caminho seja o mais curto possível devemos nos deslocar somente para cima e para a direita, além disso, devemos nos deslocar 5 vezes para cima e 6 vezes para a direita.*

*Representando os deslocamentos para cima por C e para a direita por D, cada caminho pode ser representado por um anagrama da “palavra” CCCCCDDDDDD. Desta forma temos que o número de caminhos é dado por:*

$$P_{11}^{5,6} = \frac{11!}{5! \cdot 6!} = 462$$

*Para saber quantos caminhos passam por C devemos separar nossa solução em duas etapas: primeiro ir de A até C e depois de C até B.*

*Para ir de A até C devemos nos deslocar 4 vezes para cima e 4 para a direita. Para ir de C até B nos deslocamos uma vez para cima e duas para a direita. Como nossa solução se dá em duas etapas, o Princípio Multiplicativo nos dá:*

$$Numero\ de\ caminhos\ passando\ por\ C = P_8^{4,4} \cdot P_3^{2,1} = 210$$

# MATERIAL DE INSTRUÇÃO AO PROFESSOR

## APRESENTAÇÃO

Caro professor, com este instrumento pretendemos ajudar o seu trabalho na sala de aula, através de sugestões, direcionamentos e enfoques nos objetivos traçados no momento da preparação do material a ser utilizado. Além disso, queremos também compartilhar um pouco da nossa experiência com o ensino de Análise Combinatória, para que, somando a sua vivência, possamos tentar atingir nosso principal objetivo: buscar a melhoria do processo de ensino e aprendizagem, não somente nos cálculos de Combinatória, mas na matemática como um todo.

Acreditamos que no ensino de Análise Combinatória podemos, a partir de cada problema proposto, buscar o máximo de estratégias e soluções possíveis apresentadas pelos próprios estudantes, escrevê-las, inclusive, no quadro e através delas mostrar para a turma onde estão os erros e acertos de cada solução, para que eles não venham a cometer novamente os mesmos erros e, na verdade, possam aprender com eles.

## CAPÍTULO 07

Este capítulo tem três objetivos: apresentar ao aluno a notação fatorial, justificar a utilização desta nova notação e capacitá-lo a trabalhar inteligentemente com ela.

São com os dois primeiros objetivos em mente que apresentamos o problema 56. Nele mostramos que, ao resolvermos um exercício que envolva o conceito de permutação, sempre ocorrem multiplicações onde aparecem inteiros consecutivos e é com base neste exemplo que apresentamos a notação, isto cumpre o nosso primeiro objetivo. Logo em seguida apresentamos o problema 57. Ele possui a mesma estrutura do problema 56, mas com um número bem maior de elementos. Este exemplo cumpre o nosso segundo objetivo: mostrar como a notação fatorial simplifica a escrita de produtos muito grandes que normalmente aparecem neste tipo de problema.

A seguir apresentamos a definição de fatorial. Apesar de formal, a definição normalmente não apresenta maiores dificuldades para a compreensão dos alunos. Tão importante quanto a definição é a propriedade que aparece em seguida. Esta deve ser trabalhada com os alunos para que as simplificações que surgirão se tornem somente um mero exercício de manipulação. Uma estratégia para estas simplificações e manipulações é apresentada em seguida. Cumpre-se então o nosso terceiro objetivo.

Dentre as atividades propostas no final do capítulo vale dar uma maior atenção para os problemas 60 e 61. No problema 60 o aluno é levado a verificar algumas propriedades da notação fatorial. Ele deve, por meio de contraexemplos, mostrar que algumas das afirmações são falsas, e, por meio de uma demonstração, validar as verdadeiras. Já no problema 61, ele deve exercitar a simplificação envolvendo expressões literais. Observe que algumas destas simplificações serão utilizadas no prosseguimento do texto.

# CAPÍTULO 08

O objeto de estudo deste capítulo são os agrupamentos simples e a sua relação com a notação fatorial. Mais especificamente: a obtenção de fórmulas, utilizando a notação fatorial, para o cálculo destes agrupamentos.

Em princípio, para cada agrupamento, é feita uma pequena revisão de conceitos de modo a deixar mais clara a exposição que virá em seguida. É importante que neste ponto o professor perceba se os alunos estão ou não seguros em identificar qual agrupamento é tratado em cada exemplo. Caso isto não ocorra o professor deve dar uma atenção mais detalhada aos exemplos introdutórios.

Após isto, deve ser dada ênfase à estrutura operacional de cada agrupamento, pois é ela que dará base para estabelecer a relação entre o agrupamento e a notação fatorial. Observe que muitos dos exemplos resolvidos e atividades do capítulo 07 reaparecem no contexto de algum agrupamento, isto deve facilitar a compreensão da fórmula em seu caso geral.

## CAPÍTULO 09

Este capítulo trata das permutações com exemplos repetidos. Do ponto de vista do trabalho, é um assunto novo, mas é fundamental relacioná-lo com os temas anteriormente tratados. Foi esta ideia que justificou a sua abordagem em um capítulo separado. A principal ideia a ser transmitida aos alunos é que o problema pode ser resolvido com diferentes técnicas e a fórmula é somente um recurso computacional. O capítulo termina com uma relação entre combinações e permutações circulares. Aqui a ênfase deve ser dada a interpretação da relação, deixando a fórmula final, novamente, somente como um instrumento.

# PLANOS DE AULA

## PLANO DE AULA (CAPÍTULO 07)

**Disciplina**: Matemática

**Professor:**

**Série:** 2º Ano – Ensino Médio

**Carga horária:** 2 h/a

**Modalidade**: Ensino Regular

**TEMA: A notação fatorial.**

**Conteúdo Programático**

1. **Notação Fatorial;**
   - 1.1. Introdução;
   - 1.2. Conceitos, exemplos e definições.
   - 1.3. Propriedades operatórias.

**Objetivo Geral:** Apresentar a Notação Fatorial e suas propriedades.

**Objetivos Específicos:**

- ✓ Apresentar a notação fatorial;
- ✓ Demonstrar a utilidade da notação fatorial na escrita de produtos com muitos fatores consecutivos.
- ✓ Apresentar as propriedades da notação e a correta manipulação de expressões

**Procedimentos Metodológicos**

- ✓ Aula expositiva.

**Recursos Didáticos**

- ✓ Material didático e a utilização do quadro branco.

**Avaliação**

- ✓ A avaliação será operacionalizada a partir da aplicação e discussão dos *exercícios contidos no material para uso em sala de aula*, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

**Referências**

DANTE, L. R. **Matemática**. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2005.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 2. Rio de Janeiro: Solgraf, 1999.

MELLO, J. L. P. **Matemática:** construção e significado. 1ª Ed. São Paulo: Moderna, 2005.

MORGADO, A. C. O. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PAIVA, M. R. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995.

**PLANO DE AULA (CAPÍTULO 08)**

**Disciplina**: Matemática
**Professor:**
**Série:** 2º Ano – Ensino Médio
**Carga horária:** 2 h/a
**Modalidade**: Ensino Regular

**TEMA: Os Agrupamentos Simples e a Notação Fatorial.**

**Conteúdo Programático**

**2.1. Permutação;**

8.1.1. Conceito e exemplos.
8.1.2. A fórmula para o calculo do número de permutações simples.

**2.2. Arranjo;**

8.2.1. Conceito e exemplos.
8.2.2. A fórmula para o calculo do número de arranjos simples.

**2.3. Combinação**

8.3.1. Conceito e exemplos.
8.3.2. A fórmula para o calculo do número de combinações simples.

**Objetivo Geral:** Aplicar a notação fatorial na construção de fórmulas dos agrupamentos simples.

**Objetivos Específicos:**

- ✓ Reconhecer a estrutura operacional para o cálculo dos agrupamentos simples;
- ✓ Reconhecer na estrutura acima a possibilidade de escrita com a utilização da notação fatorial;
- ✓ Aplicar esse conhecimento na resolução de problemas em que seja desconhecido o número de elementos do conjunto.

**Procedimentos Metodológicos**

- ✓ Aula expositiva.

**Recursos Didáticos**

- ✓ Material didático e a utilização do quadro branco.

**Avaliação**

- ✓ A avaliação será operacionalizada a partir da aplicação e discussão dos *exercícios contidos no material para uso em sala de aula*, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

**Referências**


DANTE, L. R. **Matemática**. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2005.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 2. Rio de Janeiro: Solgraf, 1999.

MELLO, J. L. P. **Matemática:** construção e significado. 1ª Ed. São Paulo: Moderna, 2005.

MORGADO, A. C. O. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PAIVA, M. R. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995.

## PLANO DE AULA (CAPÍTULO 09)

**Disciplina**: Matemática
**Professor:**
**Série:** 2º Ano – Ensino Médio
**Carga horária:** 2 h/a
**Modalidade**: Ensino Regular

**TEMA: Permutações com elementos repetidos.**

**Conteúdo Programático**

3. **Permutação com elementos repetidos;**
   3.1. Conceito e exemplos;
   3.2. Apresentação da fórmula para o cálculo do número de permutação com repetição.
   3.3. Apresentação da relação entre permutação com repetição e combinação.

**Objetivo Geral:** Construir o conceito de permutação com elementos repetidos e apresentar uma fórmula para o seu cálculo.

**Objetivos Específicos:**

- ✓ Conceituar permutação com repetição através da resolução de problemas;
- ✓ Mostrar como a notação fatorial simplifica o cálculo destas permutações;
- ✓ Estabelecer como um problema de Permutação com Repetição se relaciona com o conceito de Combinação Simples.

**Procedimentos Metodológicos**

- ✓ Aula expositiva.

**Recursos Didáticos**

- ✓ Material didático e a utilização do quadro branco.

**Avaliação**

- ✓ A avaliação será operacionalizada a partir da aplicação e discussão dos *exercícios contidos no material para uso em sala de aula*, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

**Referências**

DANTE, L. R. **Matemática**. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2005.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 2. Rio de Janeiro: Solgraf, 1999.

MELLO, J. L. P. **Matemática:** construção e significado. 1ª Ed. São Paulo: Moderna, 2005.

MORGADO, A. C. O. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PAIVA, M. R. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao escrevermos um curso de Combinatória voltado para o ensino médio, que apresenta uma sequência didática diferente das que são tradicionalmente apresentadas nos livros didáticos, além de buscarmos atender ao estipulado pelo programa de que "Os Trabalhos de Conclusão de Curso devem versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula”, tínhamos em mente também, as dificuldades que nós e muitos de nossos colegas de profissão enfrentam em sala de aula ao terem que ensinar este conteúdo.

A forma de apresentação do texto já tinha sido utilizada pelos autores de forma independente e o bom resultado obtido nos levou a organizar estas notas no intuito de compartilhar nossa experiência com esta abordagem. Longe de ser um material definitivo, é um esforço inicial que visa dar ao professor um material acessível e que contenha uma característica diferenciada: a forma em que as soluções dos problemas são apresentadas. Estas soluções foram escritas baseadas em como apresentamos o tema em nossas aulas, de modo que o aluno não tenha dificuldade ao lê-las e o professor que utilizar o material sinta facilidade ao adaptá-lo ou acrescentar seus próprios problemas e soluções.

Esperamos com a produção deste material não só fornecer uma sequência didática alternativa para o ensino de Análise Combinatória, como também inspirar uma reflexão acerca do ensino de Matemática na Educação Básica brasileira. Um ensinar voltado para a criatividade dos alunos e seus professores, e a construção coletiva dos conceitos.

# REFERÊNCIAS

DANTE, L. R. **Matemática**. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2005.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 2. Rio de Janeiro: Solgraf, 1999.

MELLO, J. L. P. **Matemática:** construção e significado. 1ª Ed. São Paulo: Moderna, 2005.

MORGADO, A. C. O. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PAIVA, M. R. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995.