

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ESTABILIDADE EXPONENCIAL DE UM SISTEMA TERMO ELÁSTICO POROSO: LEI DE CATTANEO VERSUS LEI DE FOURIER

Marly dos Anjos Nunes

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM - PA
Março de 2012

Marly dos Anjos Nunes

**ESTABILIDADE EXPONENCIAL DE UM
SISTEMA TERMO ELÁSTICO POROSO: LEI
DE CATTANEO VERSUS LEI DE FOURIER**

Dissertação apresentada ao colegiado do programa de pós-graduação em matemática e estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obtenção do título de mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

**BELÉM - PA
Março de 2012**

Marly dos Anjos Nunes

ESTABILIDADE EXPONENCIAL DE UM SISTEMA TERMO ELÁSTICO POROSO: LEI DE CATTANEO VERSUS LEI DE FOURIER

Dissertação apresentada ao colegiado do programa de pós-graduação em matemática e estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obtenção do título de mestre em matemática.

Data da defesa: 30 de Março de 2012

Conceito:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (Orientador)
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Universidade Estadual do Pará (UEPA)

BELÉM - PA
Março de 2012

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente à Papai do Céu, pela saúde, pela força, por ter me guiado, me governado, me iluminado e ter me feito essa pessoa que sou, onde cheguei e até onde irei chegar. Obrigada senhor Deus!

Em especial, agradeço também pelo que sou e onde cheguei à uma mulher batalhadora, guerreira, focada, determinada e tantos outros adjetivos que não caberiam nas páginas que contém essa dissertação, MINHA MÃE Ana Celina, obrigada pelo amor, carinho, dedicação e por ter me proporcionado a ter a educação que possuo. Te amo!

Sou muito grata aos meu irmãos Cristiano e Leonardo por sempre acreditarem na minha capacidade e quando me encontrava desanimada, melhoravam minha autoestima.

As minhas tias Raimunda e Marize, agradeço pelos momentos que me socorriam quando eu não estava bem de saúde, pela preocupação que tiveram comigo desde o meu nascimento, pela amizade e pelas conversas na cozinha.

Ao meu namorado, Rezala Chadad, que mesmo desconfiando dos meus estudos, passou a acreditar no meu potencial, obrigada meu bem, por me deixar relaxada e pelo carinho todo especial que tens comigo. Além disso, agradeço por ter reproduzido comigo um ser muito especial que estamos à espera, nossa filha Yasmin Chadad. Tenho certeza que a existência dela nos faz ter forças para mais conquistas em nossas vidas.

Um agradecimento muito especial ao meu tio Paulo dos Anjos, que na verdade foi como um pai na minha vida, mesmo com todo seu jeito carrasco de ser, conseguia expressar o seu sentimento por todos, em particular por mim a quem sempre falava com orgulho. Tenho certeza tio, que apesar de tudo, o senhor encontrou a luz e está em paz junto com Deus pai todo poderoso olhando por mim e por todos. Obrigada pai PAULO.

Meus sinceros agradecimentos ao meu orientador Prof. Dr. Mauro de Lima Santos, por ter acreditado em mim, por me ter como orientanda e por sempre ter uma palavra amiga nos momentos em que mais precisei; por seu profissionalismo, competência e seu imenso conhecimento matemático que enriqueceu os meus conhecimentos; que você seja sempre essa pessoa simples, humilde e sincera.

Meus sinceros agradecimentos aos professores doutores Dilberto da Silva Almeida Júnior e Ducival Carvalho Pereira, membros da banca examinadora, por aceitarem avaliar este trabalho.

À minha cunhada Pâmela Mota, agradeço pela amizade e pelas palavras de carinho nos momentos bons e ruins.

Deixo minha gratidão ao meus colegas da UFPA, em especial o Erico, Nilza, Juliana, Brigida, Cristyan, Suellem, Mirelson, Marcos, pelas horas de estudos, pelos momentos de lazer, pelas experiências adquiridas naqueles momentos difíceis, espero manter esse laço de amizade por muito tempo. Sucesso para todos nós!

Por fim, agradeço à todos que direta ou indiretamente contribuíram para mais essa conquista em minha vida.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha mãe ANA CELINA DOS ANJOS NUNES pelo exemplo de perseverança, honestidade e humildade, pela amizade e pelo amor que dedicou a mim.

RESUMO

No presente trabalho estudamos a existência e unicidade de solução bem como o decaimento exponencial do modelo abaixo. Nosso resultado mais importante versa sobre o decaimento exponencial do sistema termo-elástico-poroso: Cattaneo versus Fourier, dado por

$$\begin{aligned}
 \rho u_{tt} &= \mu u_{xx} + b\phi_x - \beta\theta_x && \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\
 J\phi_{tt} &= \alpha\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi + m\theta - \gamma\phi_t && \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\
 c\theta_t &= k^*q_x - \beta u_{xt} - m\phi_t && \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\
 \tau q_t &= -\beta q - \theta_x && \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\
 u &= \phi_x = \theta = q = 0 && \text{sobre } (0, \pi) \times (0, \infty), \\
 (u(\cdot, 0), \phi(\cdot, 0), \theta(\cdot, 0), q(\cdot, 0)) &= (u_0(x), \phi_0(x), \theta_0(x), q_0(x)) && \text{em } (0, \pi), \\
 (u_t(\cdot, 0), \phi_t(\cdot, 0)) &= (u_1(x), \phi_1(x)) && \text{em } (0, \pi),
 \end{aligned}$$

a existência e unicidade será obtida usando o Teorema de Lumer-Phillips e para o decaimento exponencial usaremos uma técnica de semigrupo.

Palavras Chaves: Decaimento exponencial, Sistema termo elástico poroso e semigrupo.

ABSTRACT

In this dissertation we study there first distance and uniqueness of solutions dog as well as the exponential decay model. Our most important result concerns the exponential decay of the system porous-thermo-elasticity:

$$\begin{aligned}
 \rho u_{tt} &= \mu u_{xx} + b\phi_x - \beta\theta_x && \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\
 J\phi_{tt} &= \alpha\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi + m\theta - \gamma\phi_t && \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\
 c\theta_t &= k^*q_x - \beta u_{xt} - m\phi_t && \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\
 \tau q_t &= -\beta q - \theta_x && \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\
 u = \phi_x = \theta = q &= 0 \text{ sobre } (0, \pi) \times (0, \infty), \\
 (u(., 0), \phi(., 0), \theta(., 0), q(., 0)) &= (u_0(x), \phi_0(x), \theta_0(x), q_0(x)) && \text{em } (0, \pi), \\
 (u_t(., 0), \phi_t(., 0)) &= (u_1(x), \phi_1(x)) && \text{em } (0, \pi),
 \end{aligned}$$

the existence and uniqueness is obtained using the Theorem of Lumer-Phillips and the exponential decay will use a technical the semigroup.

Keywords : Exponential decay, System porous-thermo-elasticity, Semigroups .

Sumário

Introdução	6
1 Preliminares	9
1.1 Algumas noções de Análise Funcional	9
1.2 Espaços de Sobolev	11
1.3 Teoria de Semigrupos	13
1.4 Resultados Auxiliares	17
2 Existência e Unicidade de Solução	18
2.1 Funcional de Energia	19
2.2 Existência e Unicidade de Solução	22
3 Estabilidade Exponencial	28
3.1 Técnicas de Semigrupo	28
Referências Bibliográficas	34

Introdução

Nesta dissertação estudamos o comportamento assintótico de um sistema termo elástico poroso: Cattaneo versus Fourier em uma dimensão. Nessa abordagem as equações de evolução são dadas por

$$\rho u_{tt} = t_x \quad , \quad \rho \kappa \phi_{tt} = h_x + g \quad e \quad d\eta_x = q_x,$$

onde t é a tensão, h é a tensão de equilíbrio e g é a força de equilíbrio e q é o fluxo de calor. As variáveis u e ϕ e η representam o deslocamento do material elástico sólido, volume fracional e a entropia, respectivamente.

Assumimos que as constantes ρ , κ e d são positivas em relação ao mecanismo físico, e as equações constitutivas são

$$\begin{aligned} t &= \mu u_x + b\phi - \beta\theta, \\ h &= \alpha\phi_x, \\ \eta &= \beta u_x + m\phi + c\theta, \\ g &= -bu_x - \xi\phi + m\theta - \gamma\phi_t, \\ q &= \kappa\theta_x. \end{aligned}$$

Nesse problema, a densidade da energia interna é uma forma definida positiva e os coeficientes constitutivos satisfazem as seguintes condições:

$$\mu > 0 \quad , \quad \alpha > 0 \quad , \quad c > 0 \quad \xi > 0 \quad e \quad \mu\xi > b^2.$$

Assumimos que a função responsável pela dissipação porosa é definida por $-\gamma\phi_t$ e que o parâmetro β é diferente de zero, onde βq é responsável pela dissipação térmica. Substituindo as equações constitutivas nas equações de evolução, obtemos a equação de campo, isto é, um sistema formado por três equações dadas por:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b\phi_x - \beta\theta_x \\ J\phi_{tt} = \alpha\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi + m\theta - \gamma\phi_t \\ c\theta_t = \kappa^*\theta_{xx} - \beta u_{xt} - m\phi_t. \end{cases}$$

Aqui $J = \rho\kappa$ e $\kappa^* = \frac{\kappa}{d}$, mas a partir de agora omitiremos o símbolo $*$.

Esse sistema termo elástico poroso foi estudado por Casas e Quintanilla [2], com respeito a estabilidade exponencial, considerando ambos os tipos de dissipação: a viscosidade com estrutura porosa e a dissipação térmica, nas equações de evolução. Em [6] Quintanilla estuda o sistema elástico obtendo o decaimento lento de soluções, isso acontece quando considera-se o amortecimento térmico ou poroso.

Um crescente interesse tem sido desenvolvido nos últimos anos para determinar o comportamento de decaimento das soluções de problemas de elasticidades. Sabe-se que a combinação das equações de elasticidade com os efeitos térmicos provoca estabilidade exponencial de soluções para o caso de uma dimensão.

Vários resultados desse tipo foram obtidos, dentre eles a teoria clássica estudada no livro de Jiang e Racke [3], encontramos sistemas onde somente a dissipação porosa está presente nos estudos de Muñoz-Rivera e Quintanilla, vale ressaltar o livro de Liu e Zheng [4], os autores de forma sistemática utilizam uma técnica para provar a estabilidade exponencial de um semigrupo, a fim de aplicá-los a vários problemas termomecânicos. Uma outra referência é a tese de doutorado Pamplona [5], lá o autor estuda vários tipos de sistemas, dentre eles um sistema elástico poroso com condução de calor levando em conta as dissipações viscoelástica e viscoporosa tem-se a estabilidade exponencial.

O objetivo principal deste trabalho é estudar o decaimento exponencial de solução para o sistema dado por:

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta\theta_x &= 0 && \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \alpha\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi - m\theta + \gamma\phi_t &= 0 && \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ c\theta_t - k^*q_x + \beta u_{xt} + m\phi_t &= 0 && \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x &= 0 && \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u = \phi_x = \theta &= 0 && \text{sobre } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ (u(\cdot, 0), \phi(\cdot, 0), \theta(\cdot, 0), q(\cdot, 0)) &= (u_0(x), \phi_0(x), \theta_0(x), q_0(x)) && \text{em } (0, \pi), \\ (u_t(\cdot, 0), \phi_t(\cdot, 0)) &= (u_1(x), \phi_1(x)) && \text{em } (0, \pi). \end{aligned}$$

Observe que o sistema acima é originado do artigo de Casas e Quintanilla [2], porém acrescentamos a última equação, chamada Lei de Cattaneo. A principal contribuição do presente trabalho é mostrar que esse sistema decai exponencialmente.

Santos, M.L, Almeida Júnior e Muñoz Rivera em [7] consideram o sistema de Timoshenko com a lei de Fourier e encontraram duas importantes constantes associada ao sistema que caracterizam a estabilidade exponencial e polinomial do modelo. Em outro trabalho, Sare e Racke [8] usando o mesmo método de [7] obteve duas constantes associadas ao sistema de Timoshenko com memória, onde para lei de Cattaneo não havia estabilidade exponencial, assumindo que essas constantes são iguais, por outro lado com a lei de Fourier obtemos decaimento exponencial.

Passemos agora a descrever o conteúdo desta dissertação que está organizada da seguinte forma: No Capítulo 1, apresentamos algumas definições, teoremas e alguns resultados que serão usados para entender e desenvolver o trabalho.

No Capítulo 2, mostramos a existência e unicidade de solução do nosso sistema, utilizando o lema de Lax-Milgran.

Finalmente no Capítulo 3, será demonstrado o nosso resultado principal que é o decaimento exponencial de soluções para o nosso sistema. O método usado são as técnicas de semigrupos, sendo mais específico, utilizaremos o teorema de Gearhart e colaboradores.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo veremos um breve levantamento dos conceitos e resultados, a fim de nos auxiliar na compreensão dos capítulos seguintes. Desse modo, não nos preocuparemos com a demonstração dos resultados utilizados, mas para posterior consulta mencionaremos as referências onde poderão ser encontradas.

1.1 Algumas noções de Análise Funcional

Definição 1.1 (Norma). Seja E um espaço vetorial real. Uma aplicação

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dita uma **norma** em E se, para quaisquer $x, y \in E$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, as seguintes condições são satisfeitas:

- a) $\|x\| \geq 0$;
- b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- c) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Um espaço vetorial E munido de uma norma $\|\cdot\|$ é chamado **espaço vetorial normado** e denotado por $(E, \|\cdot\|)$.

Observação 1.1. Sendo $U \in E$, denotaremos por $\|U\|_H$ a norma do vetor U do espaço de Hilbert H .

Definição 1.2 (Métrica). Seja M um conjunto não vazio. Uma **métrica** em M é uma função

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

que associa a cada par $(x, y) \in M \times M$ um número real $d(x, y)$, denominado distância de x a y . Para tal função, considerando-se $x, y, z \in M$ devem satisfazer as seguintes condições:

- a) $d(x, x) = 0$;
- b) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
- c) $d(x, y) = d(y, x)$;
- d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Se M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M , dizemos que o par (M, d) é um **espaço métrico**.

Observação 1.2. Em particular todo espaço vetorial normado é um espaço métrico.

Definição 1.3 (Completo). Um espaço métrico E é dito **completo** se toda sequência de Cauchy em E é convergente, isto é, a sequência converge para um elemento do próprio espaço.

Definição 1.4 (Banach). Um espaço vetorial normado que é completo com a métrica induzida pela norma é dito um **espaço de Banach**.

Definição 1.5 (Produto Interno). Um **produto interno** num espaço vetorial E é uma forma bilinear simétrica definida positiva, isto é, uma função

$$(\cdot, \cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer $u, v, w \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- a) $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$
 $(u, \alpha v + \beta w) = \alpha(u, v) + \beta(u, w)$;
- b) $(u, v) = (v, u)$;
- c) $(u, u) \geq 0$;
- d) $(u, u) \neq 0$ se $u \neq 0$.

Observação 1.3. Podemos omitir o subíndice E da notação $(\cdot, \cdot)_E$, semelhante ao caso da norma.

Definição 1.6 (Hilbert). Um espaço vetorial dotado de um produto interno é dito um **espaço de Hilbert** se ele é completo com relação à norma dada por

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Definição 1.7 (Imersão Contínua). Sejam E e H espaços de Hilbert. Dizemos que E está imerso em H com imersão contínua, quando existe uma constante positiva c tal que

$$\|u\|_H \leq c\|u\|_E$$

para todo $u \in E$.

Definição 1.8 (Forma bilinear contínua e coerciva). Seja H um espaço de Hilbert real. Uma forma bilinear

$$a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dita:

a) **Contínua**, se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq c|u||v|, \quad \forall u, v \in H$$

b) **Coerciva**, se existir uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \alpha|v|^2, \quad \forall v \in H.$$

Lema 1.1 (Lax-Milgran). *Suponhamos que $a(u, v)$ seja uma forma bilinear, contínua e coerciva num espaço de Hilbert H . Então, dado qualquer funcional linear contínuo f em H , existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in H.$$

Demonstração. Ver [1]. □

1.2 Espaços de Sobolev

Nesta seção apresentaremos uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais. Esta classe é conhecida como **espaços de Sobolev**.

Definição 1.9 (Espaços $L^p(\Omega)$). Seja Ω um subconjunto aberto do \mathbb{R}^k dotado da medida de Lebesgue. Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$, denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

com a norma definida por

$$\|u\|_{L^p} := \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposição 1.1. $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Ver [1]. □

Quando tivermos $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) := \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

e norma induzida

$$\|u\|_2 = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação 1.4. Seja $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por q o expoente conjugado,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Para um tratamento moderno das equações diferenciais parciais é essencial o conceito de distribuição. Consideremos os elementos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Denotamos por D^α o operador derivada de ordem α , onde escrevemos da forma

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Denotamos $D^\alpha u = u$, quando $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$. Agora, construímos um espaço de todas as funções u de $L^p(\Omega)$, onde $D^\alpha \in L^p(\Omega)$, sendo que $D^\alpha u$ é a derivada no sentido das distribuições.

Definição 1.10 (Espaços de Sobolev). Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n . Definimos o **espaço de Sobolev** de ordem m sobre Ω como:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ com } |\alpha| \leq m\},$$

com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Proposição 1.2. $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Ver [1]. □

Em especial quando $m = 0$, $H^{0,p}(\Omega)$ é identificado com $L^p(\Omega)$ e quando $p = 2$, tem-se que $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert que denotamos por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \text{ com } |\alpha| \leq m\},$$

munido do produto interno

$$((u, v))_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

com a norma

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx.$$

Em particular temos a norma para o espaço $H^1(\Omega)$, denotada por

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx.$$

Considerando $C_0^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das funções φ infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto. Portanto, definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Desse modo, obtemos

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Quando $p = 2$, escrevemos $H_0^m(\Omega)$ no lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$, onde $m \geq 1$.

Proposição 1.3. $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Demonstração. Ver [1]. □

1.3 Teoria de Semigrupos

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos e resultados sobre a teoria de semigrupos, dentre eles o teorema de Gearhart, que é de extrema importância para este trabalho.

Definição 1.11 (Semigrupo). Dizemos que a família de subconjuntos $\{T(t) : t \geq 0\}$ de $L(X)$ é um **semigrupo** de operadores lineares em X , quando:

- a) $T(0) = I$, onde I é o operador identidade;
- b) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s > 0$.

Definição 1.12. Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é dito **uniformemente contínuo**, quando tivermos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Definição 1.13. Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é dito **fortemente contínuo** ou C_0 -semigrupo, se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x, \quad \forall x \in X.$$

De modo equivalente, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Definição 1.14 (Gerador Infinitesimal). Sendo o conjunto $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em X . Seu **gerador infinitesimal** é o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

onde

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Observemos que

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+}{dt} T(t)x \right|_{t=0}$$

para $x \in D(A)$.

Teorema 1.3.1. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo. Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Ver [9]. □

Corolário 1.3.1. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo. Então para cada $x \in X$, a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua de \mathbb{R}^+ em X .*

Demonstração. Ver [9]. □

Definição 1.15. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 - semigrupo. Quando $\|T(t)\| \leq M$ dizemos que o semigrupo é **uniformemente limitado**. Quando $\|T(t)\| \leq 1$, diremos que o semigrupo é de **contrações**.*

Definição 1.16 (Conjunto Resolvente). *Seja A um operador linear em X , limitado ou não. Denotamos por $\rho(A)$ o conjunto **resolvente** formado por $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - A$ seja invertível e $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador limitado. A família $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ é chamada de resolvente de A .*

Teorema 1.3.2. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 - semigrupo e A o seu gerador infinitesimal. Então são válidas as seguintes propriedades:*

(a) $\forall x \in X, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$

(b) $\forall x \in X, \quad \int_0^t T(s)x ds \in D(A) \quad e \quad A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$

(c) $\forall x \in D(A), \quad t \geq 0, \quad T(t)x \in D(A) \quad e \quad \frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad \text{para } t > 0.$

(d) $\forall x \in D(A), \quad t, s \geq 0 \quad e \quad T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$

Demonstração. Ver [9]. □

Corolário 1.3.2. *Seja A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Então $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração. Ver [9]. □

Proposição 1.4. *Seja A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $D(A^n)$ o domínio de A^n . Então, $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X .*

Demonstração. Ver [9]. □

Proposição 1.5. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, fechado de modo que $\overline{D(A)} = X$, $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{|\lambda|}$ para todo $\lambda > 0$. Então são válidas as seguintes propriedades:*

a) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x$ para todo $x \in X$.

b) Se $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I$ então $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax$ para todo $x \in D(A)$.

c) Para cada $\lambda > 0$, A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $\{e^{tA_\lambda} : t \geq 0\}$. E para $\lambda, \mu, t > 0$ e $x \in X$, temos

$$\|e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu}\| \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Demonstração. Ver [9]. □

Teorema 1.3.3. (Hille-Yosida) *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações se e somente se*

a) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.

b) $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$.

Demonstração. Ver [9]. □

Corolário 1.3.3. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de contrações. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então para $x \in X$, temos*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x.$$

Demonstração. Ver [10]. □

Corolário 1.3.4. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de contrações. O conjunto resolvente de A contém o semi-plano $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ e para $\lambda > 0$ temos*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

Demonstração. Ver [10]. □

Definição 1.17 (Operador Dissipativo). *Diremos que um operador A é dissipativo, se para todo $x \in D(A)$, existe um $x^* \in F(x)$ tal que $\operatorname{Re}\langle x^*, x \rangle \leq 0$.*

Teorema 1.3.4. *Um operador A é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\| \quad , \quad \forall x \in D(A) \quad \text{e} \quad \lambda > 0.$$

Demonstração. Ver [10]. □

Teorema 1.3.5. (Lumer-Phillips) *Seja A um operador linear em X , com domínio $D(A)$ denso em X .*

- a) *Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem $R(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de C_0 -semigrupo de contrações em X .*
- b) *Se A é o gerador infinitesimal de C_0 -semigrupo de contrações em X , então $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.*

Demonstração. Ver [10]. □

Lema 1.2. *Seja $S : X \rightarrow X$ um operador linear e contínuo com inversa contínua. Seja $B \in L(X)$ tal que*

$$\|B\| < \frac{1}{\|S^{-1}\|}$$

então $S + B$ é linear, contínuo e invertível.

Demonstração. Ver [10], página XX. □

Corolário 1.3.5. *Seja A um operador com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H . Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações sobre H .*

Demonstração. Suponhamos que $0 \in \rho(A)$, então A é invertível e A^{-1} é limitado. Notamos que

$$(\lambda I - A) = A \cdot (\lambda A^{-1} - I)$$

Por outro lado, tomando $B = \lambda A^{-1}$ e $S = -I$, para $|\lambda| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Logo, usando o lema 1.2., concluímos que $(\lambda A^{-1} - I)$ é invertível. Além disso, o operador $\lambda I - A$ é invertível, por ser composição de operadores invertíveis. Assim, segue do teorema de Lumer-Phillips que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações. □

Proposição 1.6. *Seja A um operador linear dissipativo em H . Se $\overline{D(A)} = H$ então A é fechado.*

Demonstração. Ver [9]. □

Teorema 1.3.6. (Gearhart) *Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0 -semigrupo de contrações sobre o espaço de Hilbert H . Então, $S(t)$ é exponencialmente estável se e somente se*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \quad \text{e} \quad \overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_H < \infty.$$

Demonstração. Ver [10]. □

1.4 Resultados Auxiliares

Veremos nesta seção resultados avulsos de extrema importância que serão usados para o desenvolvimento de pequenos cálculos. Aqui apresentamos algumas desigualdades que desempenham um papel muito importante

1. Desigualdade Elementar

Para $a, b \in \mathbb{R}$ temos

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

Demonstração. $0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. □

2. Desigualdade Cauchy-Schwarz

Seja V um espaço vetorial com produto interno, e sejam $u, v \in V$. Então

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} \cdot (v, v)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Ver [1]. □

3. Desigualdade de Young

Se $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então para $a, b \geq 0$,

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Demonstração. Ver [1], página 92. □

4. Desigualdade de Hölder

Sejam $u \in L^p$ e $v \in L^q$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $u, v \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Demonstração. Ver [1], página 25. □

5. Desigualdade de Minkowski

Sejam $1 \leq p < \infty$ e $u, v \in L^p(\Omega)$. Então

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

Demonstração. Ver [1]. □

6. Desigualdade de Poincaré

Seja Ω um aberto e limitado do \mathbb{R}^n . Então existe uma constante C (depende de Ω) tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Demonstração. Ver [1]. □

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução

Neste capítulo estudamos a existência e unicidade de solução para o sistema termo elástico poroso: Cattaneo versus Fourier, dado por:

$$\rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b\phi_x - \beta\theta_x \quad (2.1)$$

$$J\phi_{tt} = \alpha\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi + m\theta - \gamma\phi_t \quad (2.2)$$

$$c\theta_t = k^*q_x - \beta u_{xt} - m\phi_t \quad (2.3)$$

$$\tau q_t = -\beta q - \theta_x \quad (2.4)$$

satisfazendo as condições de fronteira

$$u(x, t) = \phi_x(x, t) = \theta(x, t) = q(x, t) = 0, \quad x = 0, \pi, \quad t \in (0, \infty) \quad (2.5)$$

com as seguintes condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0, \quad \phi(x, 0) = \phi_0, \quad \theta(x, 0) = \theta_0, \quad q(x, 0) = q_0, \quad x \in [0, \pi] \quad (2.6)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x), \quad x \in [0, \pi]$$

Para que a desigualdade de Poincaré seja válida impomos que:

$$\int_0^\pi \phi_0(x)dx = \int_0^\pi \phi_1(x)dx = 0 \quad (2.7)$$

E para garantir o decaimento das soluções, definamos os seguintes espaços

$$L_*^2(0, \pi) = \left\{ w \in L^2(0, \pi); \int_0^\pi w(x)dx = 0 \right\},$$

e

$$H_*^m(0, \pi) = \left\{ w \in H^m(0, \pi); \int_0^\pi w(x) dx = 0, \quad m = 1, 2 \right\}.$$

Para mostrar existência e unicidade de solução utilizaremos o Teorema de Lumer-Phillips que garante a existência de uma única solução do sistema (2.1) – (2.6).

2.1 Funcional de Energia

Nesta seção encontraremos a energia associada ao sistema (2.1) – (2.6), que sugere o espaço de Hilbert \mathcal{H} . Além disso, encontramos o operador \mathcal{A} com seu respectivo domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ e construiremos o problema de Cauchy.

Lema 2.1. *A Energia $E(t)$ associada ao sistema (2.1) – (2.6) dada por:*

$$\begin{aligned} E(t) := & \rho \int_0^\pi |u_t|^2 dx + \mu \int_0^\pi |u_x|^2 dx + J \int_0^\pi |\phi_t|^2 dx + \alpha \int_0^\pi |\phi_x|^2 dx \\ & + \xi \int_0^\pi |\phi|^2 dx + c \int_0^\pi |\theta|^2 dx + \tau \int_0^\pi |q|^2 dx + 2b \int_0^\pi \phi u_x dx \end{aligned}$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\gamma \int_0^\pi |\phi_t|^2 dx - \beta \int_0^\pi |q|^2 dx \leq 0$$

Demonstração. De fato, considerando as equações (2.1) – (2.4) e usando o método multiplicativo, juntamente com as condições de contorno Dirichlet-Neumann-Dirichlet, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta\theta_x &= 0 \\ \int_0^\pi (\rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta\theta_x) u_t dx &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \rho \left(\int_0^\pi |u_t|^2 dx \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mu \left(\int_0^\pi |u_x|^2 dx \right) - b \int_0^\pi \phi_x u_t dx + \beta \int_0^\pi \theta_x u_t dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} J\phi_{tt} - \alpha\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi - m\theta + \gamma\phi_t &= 0 \\ \int_0^\pi (J\phi_{tt} - \alpha\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi - m\theta + \gamma\phi_t) \phi_t dx &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} J \left(\int_0^\pi |\phi_t|^2 dx \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha \left(\int_0^\pi |\phi_x|^2 dx \right) + b \int_0^\pi \phi_t u_x dx \\ + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \xi \left(\int_0^\pi |\phi|^2 dx \right) + \gamma \int_0^\pi |\phi_t|^2 dx - m \int_0^\pi \theta \phi_t dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
 c\theta_t - \kappa^*q_x + \beta u_{xt} + m\phi_t &= 0 \\
 \int_0^\pi (c\theta_t - \kappa^*q_x + \beta u_{xt} + m\phi_t)\theta dx &= 0 \\
 \frac{1}{2}\frac{d}{dt}c\left(\int_0^\pi |\theta|^2 dx\right) - \beta \int_0^\pi \theta_x u_t dx + m \int_0^\pi \theta \phi_t dx - \kappa \int_0^\pi q_x \theta dx &= 0
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
 \tau q_t + \beta q + \theta_x &= 0 \\
 \int_0^\pi (\tau q_t + \beta q + \theta_x)q dx &= 0 \\
 \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\tau\left(\int_0^\pi |q|^2 dx\right) + \beta \int_0^\pi |q|^2 dx + \int_0^\pi \theta_x q dx &= 0
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Somando (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) encontramos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{ & \rho \int_0^\pi |u_t|^2 dx + \mu \int_0^\pi |u_x|^2 dx + J \int_0^\pi |\phi_t|^2 dx \\
 & + \alpha \int_0^\pi |\phi_x|^2 dx + \xi \int_0^\pi |\phi|^2 dx + c \int_0^\pi |\theta|^2 dx \\
 & + \tau \int_0^\pi |q|^2 dx + 2b \int_0^\pi \phi u_x dx \} \\
 & = -\gamma \int_0^\pi |\phi_t|^2 dx - \beta \int_0^\pi |q|^2 dx
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Definindo a energia associada ao sistema (2.1) – (2.6) por

$$\begin{aligned}
 E(t) := & \rho \int_0^\pi |u_t|^2 dx + \mu \int_0^\pi |u_x|^2 dx + J \int_0^\pi |\phi_t|^2 dx + \alpha \int_0^\pi |\phi_x|^2 dx \\
 & + \xi \int_0^\pi |\phi|^2 dx + c \int_0^\pi |\theta|^2 dx + \tau \int_0^\pi |q|^2 dx + 2b \int_0^\pi \phi u_x dx
 \end{aligned}$$

a equação (2.12) pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\gamma \int_0^\pi |\phi_t|^2 dx - \beta \int_0^\pi |q|^2 dx$$

sendo assim

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$$

isto é, a energia é decrescente, como queríamos mostrar. \square

A energia sugere que denotemos o espaço de Hilbert \mathcal{H} por

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, \pi) \times L^2(0, \pi) \times H_*^1(0, \pi) \times L_*^2(0, \pi) \times L^2(0, \pi) \times L^2(0, \pi),$$

com produto interno

$$\langle U, V \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^\pi [\rho v \bar{v}^* + J \varphi \bar{\varphi}^* + c \theta \bar{\theta}^* + \mu u_x \bar{u}_x^* + \alpha \phi_x \bar{\phi}_x^* + \xi \phi \bar{\phi}^* + b(u_x \bar{\phi}^* + \bar{u}_x^* \phi) + J q \bar{q}^*] dx \quad (2.13)$$

onde $U = (u, v = u_t, \phi, \varphi = \phi_t, \theta, q)$ e $V = (u^*, v^*, \phi^*, \varphi^*, \theta^*, q^*)$. A norma correspondente em \mathcal{H} é dada por

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\pi [\rho |v|^2 + J |\varphi|^2 + c |\theta|^2 + \mu |u_x|^2 + \alpha |\phi_x|^2 + \xi |\phi|^2 + 2b \operatorname{Re}(u_x \bar{\phi}) + J |q|^2] dx.$$

Vamos reescrever o sistema (2.1) – (2.6) como um sistema de EDO's de primeira ordem para $U = (u, v, \phi, \varphi, \theta, q)^T$, ao qual " T " denota a transposta do vetor U . Logo U satisfaz o problema de Cauchy

$$U_t = AU, \quad U(0) = U_0$$

onde $U_0 = (u_0, u_1, \phi_0, \phi_1, \theta_0, q_0)$ e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador definido por:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & Id & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{J} D^2 & 0 & \frac{b}{-D} & 0 & -\frac{\beta}{D} & 0 \\ \rho & 0 & \rho & Id & \rho & 0 \\ -\frac{b}{J} D & 0 & \left(\frac{\alpha}{J} D^2 - \frac{\xi}{J} \right) & -\frac{\gamma}{J} & \frac{m}{J} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{c} D & 0 & -\frac{m}{c} & 0 & \frac{k^*}{c} D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} D & -\frac{\beta}{\tau} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

sendo $D = \frac{d}{dx}$, o operador derivada na variável x e Id o operador identidade, com domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H} \mid AU \in \mathcal{H}\}$ dado por:

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi)) \times H_0^1(0, \pi) \times (H_*^1(0, \pi) \cap H_*^2(0, \pi)) \times H_*^1(0, \pi) \times H_0^1(0, \pi) \times H_0^1(0, \pi)$$

2.2 Existência e Unicidade de Solução

Lema 2.2. *O Operador \mathcal{A} definido em (2.13) é dissipativo.*

Demonstração. De fato, considerando $U = (u, v, \phi, \varphi, \theta, q)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, obtemos

$$\langle AU, U \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v \\ \frac{\mu}{\rho}u_{xx} + \frac{b}{\rho}\phi_x - \frac{\beta}{\rho}\theta_x \\ \frac{\alpha}{J}\phi_{xx} - \frac{b}{J}u_x - \frac{\xi}{J}\phi + \frac{m}{J}\theta - \frac{\gamma}{J}\phi_t \\ \frac{k^*}{c}q_x - \frac{\beta}{c}u_{xt} - \frac{m}{c}\phi_t \\ -\frac{\beta}{\tau}q - \frac{1}{\tau}\theta_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \\ \varphi \\ \theta \\ q \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\langle AU, U \rangle = \int_0^\pi \left[\rho \left(\frac{\mu}{\rho}u_{xx} + \frac{b}{\rho}\phi_x - \frac{\beta}{\rho}\theta_x \right) \bar{u}_t + J \left(\frac{\alpha}{J}\phi_{xx} - \frac{b}{J}u_x - \frac{\xi}{J}\phi + \frac{m}{J}\theta - \frac{\gamma}{J}\phi_t \right) \bar{\phi}_t \right]$$

$$+ c \left(\frac{k^*}{c}q_x - \frac{\beta}{c}u_{xt} - \frac{m}{c}\phi_t \right) \bar{\theta} + \mu u_{tx} \bar{u}_x + \alpha \phi_{tx} \bar{\phi}_x + \xi \phi_t \bar{\phi}$$

$$+ b(u_{tx} \bar{\phi} + \bar{u}_x \phi_t) + \tau \left(-\frac{\beta}{\tau}q - \frac{1}{\tau}\theta_x \right) \bar{q} dx$$

Fazendo a distribuição, temos

$$= \int_0^\pi \mu u_{xx} \bar{u}_t + b \phi_x \bar{u}_t - \beta \theta_x \bar{u}_t + \alpha \phi_{xx} \bar{\phi}_t - b u_x \bar{\phi}_t - \xi \phi \bar{\phi}_t + m \theta \bar{\phi}_t - \gamma \phi_t \bar{\phi}_t$$

$$+ k^* q_x \bar{\theta} - \beta u_{xt} \bar{\theta} - m \phi_t \bar{\theta} + \mu u_{tx} \bar{u}_x + \alpha \phi_{tx} \bar{\phi}_x + \xi \phi_t \bar{\phi} + b u_{tx} \bar{\phi} + b \bar{u}_x \phi_t - \beta q \bar{q} - \theta_x \bar{q} dx$$

Associando as partes que nos convém

$$\int_0^\pi \mu u_{xx} \bar{u}_t + \mu u_{tx} \bar{u}_x + \alpha \phi_{xx} \bar{\phi}_t + \alpha \phi_{tx} \bar{\phi}_x - b u_x \bar{\phi}_t + b \bar{u}_x \phi_t - \xi \phi \bar{\phi}_t + \xi \phi_t \bar{\phi}$$

$$- \gamma \phi_t \bar{\phi}_t - \beta q \bar{q} + m \theta \bar{\phi}_t - m \phi_t \bar{\theta} + b \phi_x \bar{u}_t + b u_{tx} \bar{\phi} - \beta \theta_x \bar{u}_t - \beta u_{xt} \bar{\theta} + k^* q_x \bar{\theta} - \theta_x \bar{q} dx$$

Aplicando a propriedade da integral e sabendo que $(a+bi) - \overline{(a+bi)} = 2bi$ e $(f)\overline{(f)} = |f|^2$ temos:

$$\operatorname{Re} \langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma \int_0^\pi |\phi_t|^2 dx - \beta \int_0^\pi |q|^2 dx \leq 0.$$

Visto que γ e β são positivos, portanto \mathcal{A} é dissipativo. \square

Enunciaremos agora o resultado que nos garante que o operador \mathcal{A} é o gerador infinitesimal, usaremos o Lema de Lax-Milgran como um recurso matemático para provar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$ e o Teorema de Lumer-Phillips para mostrar o principal resultado desta seção.

Teorema 2.2.1. *O Operador \mathcal{A} definido em (2.13) é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} .*

Demonstração. De fato, de acordo com o corolário 1.3.5. resta mostrar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, já que o domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} e pelo Lema 2.2., \mathcal{A} é dissipativo.

Desse modo, consideremos $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}$, queremos encontrar

$$U = (u, v, \phi, \varphi, \theta, q)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

que satisfaça a seguinte equação resolvente $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$, com $\lambda = 0$, implica

$$-\mathcal{A}U = F$$

Daí temos o seguinte sistema

$$v = -f_1 \in H_0^1(0, \pi) \quad (2.14)$$

$$\mu u_{xx} + b\phi_x - \beta\theta_x = -\rho f_2 \in L^2(0, \pi) \quad (2.15)$$

$$\varphi = -f_3 \in H_*^1(0, \pi) \quad (2.16)$$

$$\alpha\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi + m\theta - \gamma\phi_t = -Jf_4 \in L_*^2(0, \pi) \quad (2.17)$$

$$k^*q_x - \beta u_{xt} - m\phi_t = -cf_5 \in L^2(0, \pi) \quad (2.18)$$

$$-\beta q - \theta_x = -\tau f_6 \in L_*^2(0, \pi) \quad (2.19)$$

De (2.14) e (2.16) concluímos que

$$v \in H_0^1(0, \pi) \quad e \quad \varphi \in H_*^1(0, \pi).$$

Substituindo (2.14) e (2.16) em (2.18) e sabendo que $H_0^1 \subset L^2$ e se $f \in H_*^1 \implies f \in H^1 \subset L^2$ temos

$$\kappa q_x = +\beta(f_1)_x + mf_3 - cf_5 \in L^2(0, \pi)$$

assim, $q_x \in L^2(0, \pi) \implies q \in H^1$, segue de (2.19) que $\theta \in H^2(0, \pi)$.

Assim, obtemos o seguinte problema elíptico

$$\mu u_{xx} + b\phi_x = \beta\theta_x - \rho f_2 \in L^2(0, \pi), \quad (2.20)$$

$$\alpha\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi = -m\theta - \gamma f_3 - Jf_4 \in L^2(0, \pi), \quad (2.21)$$

com condições de fronteira Dirichlet/Neumann, isto é, $u(0) = u(\pi) = \phi_x(0) = \phi_x(\pi) = 0$. Agora multiplicando (2.20) por φ e integrando de 0 a π , encontramos

$$\mu \int_0^\pi u_{xx} \varphi dx + b \int_0^\pi \phi_x \varphi dx = - \int_0^\pi (\rho f_2 - \beta \theta_x) \varphi dx. \quad (2.22)$$

Usando integração por partes na primeira integral do primeiro membro de (2.22), obtemos

$$\mu \int_0^\pi u_x \varphi_x dx + b \int_0^\pi \phi_x \varphi dx = \int_0^\pi (\rho f_2 - \beta \theta_x) \varphi dx. \quad (2.23)$$

Por outro lado, multiplicando (2.21) por η e depois integrando de 0 a π , encontramos

$$\alpha \int_0^\pi \phi_{xx} \eta dx - b \int_0^\pi u_x \eta dx - \xi \int_0^\pi \phi \eta dx = - \int_0^\pi (m\theta + \gamma f_3 + Jf_4) \eta dx. \quad (2.24)$$

Usando integração por partes na primeira integral do primeiro membro de (2.24), obtemos

$$\alpha \int_0^\pi \phi_x \eta_x dx + b \int_0^\pi u_x \eta dx + \xi \int_0^\pi \phi \eta dx = \int_0^\pi (m\theta + \gamma f_3 + Jf_4) \eta dx. \quad (2.25)$$

Somando (2.23) com (2.25), obtemos o seguinte problema variacional:

Determinar $(u, \phi) \in E$ onde $E = H_0^1(0, \pi) \times H_*^1(0, \pi)$ munido com a norma:

$$\|V\|_E^2 = \int_0^\pi u_x^2 dx + \int_0^\pi \phi_x^2 dx$$

onde $V = (u, \phi) \in E$, tal que a forma bilinear

$$\begin{aligned} a(V, \tilde{V}) = a((u, \phi), (\varphi, \eta)) = & \alpha \int_0^\pi \phi_x \eta_x dx + b \int_0^\pi (u_x \eta - \phi_x \varphi) dx \\ & + \xi \int_0^\pi \phi \eta dx + \mu \int_0^\pi u_x \varphi_x dx. \end{aligned}$$

é contínua e coerciva no espaço de Hilbert $E \times E$, onde $\tilde{V} = (\varphi, \eta) \in E$.

De fato,

- $a(V, \tilde{V})$ é bilinear

Segue pela linearidade da integral.

- $a(V, \tilde{V})$ é contínua

$$\begin{aligned} |a(V, \tilde{V})| &= \left| \mu \int_0^\pi u_x \varphi_x dx - b \int_0^\pi \phi_x \varphi dx + \alpha \int_0^\pi \phi_x \eta_x dx + b \int_0^\pi u_x \eta dx + \xi \int_0^\pi \phi \eta dx \right| \\ &\leq \mu \left| \int_0^\pi u_x \varphi_x dx \right| - b \left| \int_0^\pi \phi_x \varphi dx \right| + \alpha \left| \int_0^\pi \phi_x \eta_x dx \right| + b \left| \int_0^\pi u_x \eta dx \right| + \xi \left| \int_0^\pi \phi \eta dx \right| \\ &\leq \mu c_1 \|u\| \|\varphi\| - bc_2 \|\phi\| \|\varphi\| + \alpha c_3 \|\phi\| \|\eta\| + bc_4 \|u\| \|\eta\| + \xi c_5 \|\phi\| \|\eta\| \end{aligned}$$

como $\|(u, \phi)\| = (\|u\|^2 + \|\phi\|^2)^{\frac{1}{2}} \geq \|u\|, \|\phi\|$, temos

$$\begin{aligned} |a(V, \tilde{V})| &\leq \mu c_1 \{\|(u, \phi)\| \|\varphi, \eta\|\} - bc_2 \{\|(u, \phi)\| \|\varphi, \eta\|\} + \alpha c_3 \{\|(u, \phi)\| \|\varphi, \eta\|\} \\ &\quad + bc_4 \{\|(u, \phi)\| \|\varphi, \eta\|\} + \xi c_5 \{\|(u, \phi)\| \|\varphi, \eta\|\} \\ &\leq k \|(u, \phi)\| \|\varphi, \eta\| \end{aligned}$$

Portanto,

$$|a(V, \tilde{V})| \leq k \|V\|_E \|\tilde{V}\|_E, \quad \forall V, \tilde{V} \in E.$$

- $a(V, \tilde{V})$ é coerciva

$$a(V, V) = a((u, \phi), (u, \phi)) = \mu \int_0^\pi u_x^2 dx - b \int_0^1 \phi_x u dx + \alpha \int_0^\pi \phi_x^2 dx + b \int_0^\pi u_x \phi dx + \xi \int_0^\pi \phi^2 dx$$

Integrando por partes temos

$$a(V, V) = \mu \int_0^\pi u_x^2 dx + 2b \int_0^1 u_x \phi dx + \alpha \int_0^\pi \phi_x^2 dx + \xi \int_0^\pi \phi^2 dx$$

Sabendo que $0 \leq (a + b)^2 \Rightarrow +ou - 2ab \leq a^2 + b^2$ e fazendo $a = \frac{bu_x}{(\xi)^{\frac{1}{2}}}$ e $b = \xi^{\frac{1}{2}}\phi$ usamos

$$2b \int_0^\pi u_x \phi dx = \int_0^\pi 2 \left(\frac{bu_x}{\xi^{\frac{1}{2}}} \right) (\xi^{\frac{1}{2}}\phi) \geq - \int_0^\pi \left(\frac{b^2}{\xi} u_x^2 + \xi \phi^2 \right)$$

temos

$$\begin{aligned} a(V, V) &\geq \mu \int_0^\pi u_x^2 dx - \frac{b^2}{\xi} \int_0^\pi u_x^2 dx + \alpha \int_0^\pi \phi_x^2 dx \\ a(V, V) &\geq \left(\frac{\mu\xi - b^2}{\xi} \right) \int_0^\pi u_x^2 dx + \alpha \int_0^\pi \phi_x^2 dx \end{aligned}$$

Portanto, pela condição $\mu\xi > b^2$ e tomando $c = \min \left\{ \frac{\mu\xi - b^2}{\xi}, \alpha \right\}$

$$a(V, V) \geq c\|V\|_E^2, \quad \forall V \in E.$$

Agora, consideremos o seguinte funcional definido por

$$h(\varphi, \eta) = \int_0^\pi (\rho f_2 - \beta \theta_x) \varphi \, dx + \int_0^\pi (m\theta + \gamma f_3 + Jf_4) \eta \, dx,$$

- h é linear

De fato, sejam $\tilde{V} = (\varphi, \eta)$, $W = (\sigma, \omega)$ em E e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} h(\tilde{V} + \lambda W) &= h(\varphi + \lambda\sigma, \eta + \lambda\omega) \\ &= \int_0^\pi (\rho f_2 - \beta \theta_x)(\varphi + \lambda\sigma) \, dx + \int_0^\pi (m\theta + \gamma f_3 + Jf_4)(\eta + \lambda\omega) \, dx \\ &= \int_0^\pi (\rho f_2 - \beta \theta_x) \varphi \, dx + \int_0^\pi (m\theta + \gamma f_3 + Jf_4) \eta \, dx \\ &\quad + \lambda \left[\int_0^\pi (\rho f_2 - \beta \theta_x) \sigma \, dx + \int_0^\pi (m\theta + \gamma f_3 + Jf_4) \omega \, dx \right] \\ &= h(\tilde{V}) + \lambda h(W). \end{aligned}$$

- h é contínua

Usando a desigualdade de Holder e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} |h(\tilde{V})| &= \left| \int_0^\pi (\rho f_2 - \beta \theta_x) \varphi \, dx + \int_0^\pi (m\theta + \gamma f_3 + Jf_4) \eta \, dx \right| \\ &\leq \left| \int_0^\pi (\rho f_2 - \beta \theta_x) \varphi \, dx \right| + \left| \int_0^\pi (m\theta + \gamma f_3 + Jf_4) \eta \, dx \right| \\ &\leq \int_0^\pi |(\rho f_2 - \beta \theta_x)| |\varphi| \, dx + \int_0^\pi |(m\theta + \gamma f_3 + Jf_4)| |\eta| \, dx \\ &\leq \rho \|f_2\| \cdot \|\varphi\| + \beta \|\theta_x\| \cdot \|\varphi\| + m \|\theta\| \cdot \|\eta\| + \gamma \|f_3\| \cdot \|\eta\| + J \|f_4\| \cdot \|\eta\| \\ &\leq C_1(\rho \|f_2\| + \beta \|\theta_x\|) \|\varphi_x\| + C_2(m \|\theta\| + \gamma \|f_3\| + J \|f_4\|) \|\eta_x\| \\ &\leq C_3(\|\varphi_x\| + \|\eta_x\|) \\ &= C_3 \left\{ \left[\int_0^\pi |\varphi_x|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_0^\pi |\eta_x|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\leq 2C_3 \left\{ \int_0^\pi |\varphi_x|^2 \, dx + \int_0^\pi |\eta_x|^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\tilde{V}\|. \end{aligned}$$

Assim, pelo Lema de Lax-Milgran, existe uma única solução $V = (u, \phi) \in E$ para o problema variacional

$$a(V, \tilde{V}) = h(\tilde{V})$$

isto é, V satisfaz ao sistema (2.20) – (2.21). Por outro lado, usando a regularidade elíptica, concluímos que existe uma única $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ solução para o sistema $-\mathcal{A}U = F$. Portanto, \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} . \square

Capítulo 3

Estabilidade Exponencial

Neste capítulo mostramos a estabilidade exponencial para a solução do sistema (2.1) – (2.4) e para esse objetivo usamos técnicas de semigrupos, em especial o teorema de Gearhart.

3.1 Técnicas de Semigrupo

Nessa seção usamos o teorema de Gearhart para mostrar que a solução do sistema (2.1) – (2.4) decai exponencialmente. Para atingir esse objetivo usamos os argumentos de Liu e Zheng [4].

Lema 3.1. *Seja \mathcal{A} definido em (2.13). Então, vale a condição*

$$\{i\lambda; \lambda \in (-\infty, \infty)\} \subseteq \rho(\mathcal{A}). \quad (3.1)$$

Demonstração. A prova consiste nas seguintes etapas:

(i) Desde que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $|\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$ o seguinte operador

$$(i\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{A}(i\lambda\mathcal{A}^{-1} - I)$$

é invertível. Além disso, $\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|$ é uma função contínua para $\lambda \in (-\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1})$.

(ii) Se $\sup\{\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|; |\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}\} = M < \infty$ então o operador

$$(i\lambda I - \mathcal{A}) = (i\lambda_0 I - \mathcal{A}).(I + i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}),$$

com $|\lambda_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$ é invertível para $|\lambda - \lambda_0| < M^{-1}$. Por outro lado, o seguinte conjunto $\{\lambda; |\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} + M^{-1}\}$ está contido em $\rho(\mathcal{A})$. Além disso, $\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|$ é uma função contínua para $\lambda \in (-\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - M^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} + M^{-1})$.

(iii) Suponha que (3.1) seja falso. Então existe $\varpi \in \mathbb{R}$, com $\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \leq |\varpi| < \infty$ tal que

$$\{i\lambda; |\lambda| < |m|\} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad e \quad \sup\{\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|; |\lambda| < |m|\} = \infty.$$

Portanto, existe uma seqüência de números reais λ_n com $\lambda_n \rightarrow \varpi$, $|\lambda_n| < |\varpi|$ e uma seqüência de vetores $\omega_n = (u_n, v_n, \phi_n, \varphi_n, \theta_n, q_n)$ com norma unitária no domínio de operador \mathcal{A} tal que

$$\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})\omega_n\| \longrightarrow 0. \quad (3.2)$$

quando $n \rightarrow \infty$, isto é,

$$i\lambda_n u_n - v_n \longrightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, \pi), \quad (3.3)$$

$$i\lambda_n v_n - \rho^{-1}\mu D^2 u_n - \rho^{-1}bD\phi_n + \rho^{-1}\beta D\theta_n \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0, \pi), \quad (3.4)$$

$$i\lambda_n \phi_n - \varphi_n \longrightarrow 0 \text{ em } H_*^1(0, \pi), \quad (3.5)$$

$$i\lambda_n \varphi_n + J^{-1}\gamma\varphi_n + J^{-1}bDu_n - J^{-1}(\alpha D^2 \phi_n - \xi\phi_n) - J^{-1}m\theta_n \longrightarrow 0 \text{ em } L_*^2(0, \pi), \quad (3.6)$$

$$i\lambda_n \theta_n + c^{-1}\beta Dv_n + c^{-1}m\varphi_n - c^{-1}\kappa Dq_n \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0, \pi), \quad (3.7)$$

$$i\lambda_n q_n + \tau^{-1}D\theta_n + \tau^{-1}\beta q_n \longrightarrow 0 \text{ em } L_*^2(0, \pi). \quad (3.8)$$

Fazendo o produto interno $\langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})\omega_n, \omega_n \rangle$ em \mathcal{H} . Obtemos

$$\begin{aligned} &= \left\langle \begin{pmatrix} i\lambda_n u_n - v_n \\ i\lambda_n v_n - \rho^{-1}\mu D^2 u_n - \rho^{-1}bD\phi_n + \rho^{-1}\beta D\theta_n \\ i\lambda_n \phi_n - \varphi_n \\ i\lambda_n \varphi_n + J^{-1}\gamma\varphi_n + J^{-1}bDu_n - J^{-1}(\alpha D^2 \phi_n - \xi\phi_n) - J^{-1}m\theta_n \\ i\lambda_n \theta_n + c^{-1}\beta Dv_n + c^{-1}m\varphi_n - c^{-1}\kappa Dq_n \\ i\lambda_n q_n + \tau^{-1}D\theta_n + \tau^{-1}\beta q_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \phi_n \\ \varphi_n \\ \theta_n \\ q_n \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_0^\pi \rho(i\lambda_n v_n - \rho^{-1}\mu D^2 u_n - \rho^{-1}bD\phi_n + \rho^{-1}\beta D\theta_n)\overline{v_n} \, dx \\ &+ \int_0^\pi J(i\lambda_n \varphi_n + J^{-1}\gamma\varphi_n + J^{-1}bDu_n - J^{-1}(\alpha D^2 \phi_n - \xi\phi_n) - J^{-1}m\theta_n)\overline{\varphi_n} \, dx \\ &+ \int_0^\pi c(i\lambda_n \theta_n + c^{-1}\beta Dv_n + c^{-1}m\varphi_n - c^{-1}\kappa Dq_n)\overline{\theta_n} \, dx \\ &+ \int_0^\pi \mu(i\lambda_n u_{nx} - v_{nx})\overline{u_{nx}} \, dx + \int_0^\pi \alpha(i\lambda_n \phi_{nx} - \varphi_{nx})\overline{\phi_{nx}} \, dx \\ &+ \int_0^\pi \xi(i\lambda_n \phi_n - \varphi_n)\overline{\phi_n} \, dx + \int_0^\pi b[(i\lambda_n u_{nx} - v_{nx})\overline{\phi_n} + \overline{u_{nx}}(i\lambda_n \phi_n - \varphi_n)] \, dx \\ &+ \int_0^\pi \tau(i\lambda_n q_n + \tau^{-1}D\theta_n + \tau^{-1}\beta q_n)\overline{q_n} \, dx. \end{aligned}$$

Em seguida tomando a parte real, temos

$$\operatorname{Re}(\langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})\omega_n, \omega_n \rangle) = \gamma \int_0^\pi \varphi_n \overline{\varphi_n} \, dx + \beta \int_0^\pi q_n \overline{q_n} \, dx.$$

Portanto,

$$\gamma\|\varphi_n\|^2 + \beta\|q_n\|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0, \pi).$$

Logo, concluímos que

$$\begin{aligned} \varphi_n &\longrightarrow 0 \\ q_n &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

e de (3.5), temos que

$$\phi_n \longrightarrow 0.$$

De (3.8) segue que

$$\|D\theta_n\| \longrightarrow 0$$

Assim, simplificando (3.7) obtemos

$$\beta Dv_n - \kappa Dq_n \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0, \pi).$$

Integrando (3.9) em relação à x , encontramos

$$\beta v_n - \kappa q_n \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0, \pi).$$

Então

$$v_n \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0, \pi).$$

Tomando o produto interno de (3.4) com u_n , temos

$$i\lambda_n \langle v_n, u_n \rangle - \rho^{-1}\mu \langle D^2 u_n, u_n \rangle - \rho^{-1}b \langle D\phi_n, u_n \rangle + \rho^{-1}\beta \langle D\theta_n, u_n \rangle \longrightarrow 0$$

Integrando por parte, obtemos

$$\|Du_n\| \longrightarrow 0$$

E, também tomando o produto interno de (3.6) com ϕ_n , tem-se

$$i\lambda_n \langle \varphi_n, \phi_n \rangle + J^{-1}\gamma \langle \varphi_n, \phi_n \rangle + J^{-1}b \langle Du_n, \phi_n \rangle - J^{-1}\alpha \langle D^2 \phi_n, \phi_n \rangle + J^{-1}\xi \langle \phi_n, \phi_n \rangle - J^{-1}m \langle \theta_n, \phi_n \rangle \longrightarrow 0$$

Concluimos que

$$\|D\phi_n\| \longrightarrow 0.$$

Assim, ω_n não tem norma unitária, o que é uma contradição. □

Lema 3.2. *Seja o operador \mathcal{A} definido em (2.13). Então é válida a condição*

$$\overline{\lim}_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty. \quad (3.9)$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que (3.9) seja falso. Então, existe uma sequência de números reais $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$|\lambda_n| \longrightarrow \infty$$

e uma sequência de vetores $\omega_n = (u_n, v_n, \phi_n, \varphi_n, \theta_n, q_n)^T$ no $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ com norma unitária em \mathcal{H} , de modo que

$$\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})\omega_n\| \longrightarrow 0.$$

Já vimos que

$$\operatorname{Re}(\langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})\omega_n, \omega_n \rangle) = \gamma \int_0^\pi \varphi_n \overline{\varphi_n} dx + \beta \int_0^\pi q_n \overline{q_n} dx.$$

isto é,

$$\gamma \|\varphi_n\|^2 + \beta \|q_n\|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0, \pi).$$

Dividindo (3.7) por λ_n e usando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\lambda_n^{-1}(c^{-1}\kappa Dq_n - c^{-1}\beta Dv_n) \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0, \pi) \quad (3.10)$$

Dividindo (3.3) por λ_n e usando (3.10), obtemos

$$\lambda_n^{-1}c^{-1}\kappa Dq_n - ic^{-1}\beta Du_n \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0, \pi) \quad (3.11)$$

Desde que $\|Du_n\|$ é limitado, temos que $\|\lambda_n^{-1}Dq_n\|$ é limitado.

Tomando o produto interno de (3.11) com Du_n , temos

$$\lambda_n^{-1}c^{-1}\kappa \langle Dq_n, Du_n \rangle - ic^{-1}\beta \langle Du_n, Du_n \rangle \longrightarrow 0$$

$$\lambda_n^{-1}c^{-1}\kappa \langle Dq_n, Du_n \rangle - ic^{-1}\beta \|Du_n\|^2 \longrightarrow 0 \quad (3.12)$$

Agora, integrando por partes, temos

$$\lambda_n^{-1} c^{-1} \kappa \langle Dq_n, Du_n \rangle = -\lambda_n^{-1} c^{-1} \kappa \langle q_n, D^2 u_n \rangle \quad (3.13)$$

Por outro lado, dividindo (3.4) por λ_n

$$\lambda_n^{-1} (\rho^{-1} b D\phi_n + \rho^{-1} \mu D^2 u_n) \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0, \pi) \quad (3.14)$$

Dividindo (3.5) por λ_n e usando (3.14), obtemos

$$i^{-1} \lambda_n^{-2} \rho^{-1} b D\varphi_n + \lambda_n^{-1} \rho^{-1} \mu D^2 u_n \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0, \pi) \quad (3.15)$$

Desde que $\|D\varphi_n\|$ é limitado, temos que $\|\lambda_n^{-1} D^2 u_n\|$ é limitado. Tendo em vista

$$\gamma \|\varphi_n\|^2 + \kappa \|q_n\|^2 \longrightarrow 0$$

temos de (3.13)

$$c^{-1} \kappa \langle q_n, D^2 u_n \rangle \longrightarrow 0$$

De (3.12), obtemos

$$\|Du_n\| \longrightarrow 0$$

e

$$\lambda_n^{-1} Dv_n \longrightarrow 0$$

Tomando o produto interno de (3.4) com v_n e dividindo por λ_n , temos

$$i \|v_n\|^2 + \rho^{-1} \mu \langle Du_n, \lambda_n^{-1} Dv_n \rangle - \rho^{-1} b \langle D\phi_n, \lambda_n^{-1} v_n \rangle \longrightarrow 0$$

Portanto,

$$v_n \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0, \pi).$$

Agora, façamos o produto interno de (3.6) por ϕ_n , temos

$$i \lambda_n \langle \varphi_n, \phi_n \rangle + J^{-1} \alpha \|D\phi_n\|^2 + J^{-1} \xi \|\phi_n\|^2 \longrightarrow 0$$

Segue de (3.5) que,

$$-\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle + J^{-1}\alpha \|D\phi_n\|^2 + J^{-1}\xi \|\phi_n\|^2 \longrightarrow 0$$

isto implica que

$$\|D\phi_n\| \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2(0, \pi).$$

Portanto ω_n não tem norma unitária, o que é uma contradição. \square

Teorema 3.1.1. *Seja $(u, u_t, \phi, \phi_t, \theta, q)$ solução do problema determinado pelo sistema (2.1) – (2.4) com condições fronteira (2.5) e condições iniciais (2.6). Então a solução $(u, u_t, \phi, \phi_t, \theta, q)$ decai exponencialmente.*

Demonstração. Segundo os lemas 3.1 e 3.2 usamos o resultado devido a Gearhart e colaboradores afirmamos que o semigrupo de contrações no espaço de Hilbert \mathcal{H} é exponencialmente estável se, e somente se, satisfaz as condições (3.1) e (3.9). Assim, o teorema está provado. \square

Referências Bibliográficas

- [1] Brezis, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Universitext Series, Springer, New York, 2010.
- [2] Casas P. , Quintanilla, R. **Exponential decay in one-dimensional porous-thermoelasticity**. Mechanics Research Communications.
- [3] Jiang, S., Racke, R. **Evolution Equations in Thermoelasticity**. Chapman and Hall, 2000.
- [4] Liu, Z e Zheng, S. **Semigroups associated with dissipative systems** . CRC Research Notes in Mathematics 398,Chapman e Hall. 1999.
- [5] Pamplona, P. **Estabilização assintótica de sistemas elástico com porosidade**. IM-UFRJ, 2009.
- [6] Quintanilla, R. **Slow decay for one dimensional porous dissipation elasticity**.
- [7] Santos, M.L., Júnior, D.S.A., Rivera, J.E.M. **The new stability numbers of the Timoshenko system with second sound**.
- [8] Sare, H., Racke, R. **On the stability of damped Timoshenko systems- Cattaneo versus Fourier law**. Department of Mathematics and Statistics University of Konstanz, 78457.
- [9] Pazy, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. Applied Mathematical Sciences 44. Springer-Verlag. 1983.
- [10] Rivera, J.E.M. **Estabilização de semigrupos e aplicações**. Rio de Janeiro, 2008.