UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MARCEL LUCAS PICANÇO NASCIMENTO

Análise matemática de dois modelos campo de fase: Caginalp e Penrose-Fife

BELÉM- PA
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MARCEL LUCAS PICANÇO NASCIMENTO

Análise matemática de dois modelos campo de fase: Caginalp e Penrose-Fife

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME) da Universidade Federal do Pará- UFPA para obtenção de título de Mestre em Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz.

BELÉM - PA
2011

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

MARCEL LUCAS PICANÇO NASCIMENTO

Análise matemática de dois modelos campo de fase: Caginalp e Penrose-Fife

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME) da Universidade Federal do Pará- UFPA para obtenção de título de Mestre em Matemática:

____

Profª. Drª. Cristina Lúcia Dias Vaz/UFPA/Orientadora

____

Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo/UFPA

____

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva/UFPA

____

Prof. Dr. José Luiz Boldrini/UNICAMP

DATA DA AVALIAÇÃO: _____ / _____ / _____

CONCEITO: ______________________________

Agradecimentos

Primeiramente ao Nosso Senhor Jesus Cristo pela sua misericórdia comigo, que mesmo eu sendo tão fraco e falho, Ele nunca desistiu de mim.

À Nossa Senhora Virgem Maria, pela sua santa intercessão, impressindível nas horas de fraqueza.

À minha família: meus pais José do Carmo e Eliete Catarina, meus irmãos Renan Mateus e Iuri Marcos, por serem meu sustentáculo, meu alicerce forte para vencer e crescer na vida.

À minha namorada, Girlane Suame. Por tudo o que passamos. Pela sua companhia e ajuda determinantes. Simplesmente este trabalho também é seu.

À professora Cristina Vaz, minha orientadora e amiga. Todos os seus ensinamentos, sejam matemáticos ou não, estarão comigo por toda a minha vida profissional e pessoal. Não tenho como agradecer por tudo.

Aos amigos que estiveram juntos nesta difícil caminhada, em especial: Neide Ferreira, Haydeé Nascimento, José Maria Alves e Maria Socorro Alves, que foram meus segundos pais em Belém do Pará.

À Associação Católica Adoremos o Senhor - ACAS e amigos, que me ensinaram diariamente quem é o Caminho, a Verdade e a Vida.

Aos colegas do curso de Mestrado, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME.

"Tudo posso Naquele que me conforta."

Filipenses 4, 13

Resumo

Neste trabalho investigaremos a existência, unicidade e regularidade da solução de dois modelos matemáticos que descrevem fenômenos de mudança de fase, conhecidos como modelos *Caginalp* e *Penrose-Fife*. Estes modelos são do tipo interface difusa, pois consideram que a interface que separa as fases sólida e líquida, no processo de solidificação, tem uma certa espessura, possivelmente fina.

O modelo *Caginalp* foi muito estudado por G. Caginalp e seus colaboradores (veja, por exemplo, [1, 2, 15]) e consiste de uma equação de evolução para a fase, a qual é conhecida como equação de Allen-Cahn, acoplada a uma equação de evolução para a temperatura, oriunda de um balanço de energia.

O modelo *Penrose-Fife*, proposto por P. Penrose e P. C. Fife [8, 10], formula as equações de evolução da fase e da temperatura baseado na 2^a lei da termodinâmica (e portanto, chamado *termodinamicamente consistente*) e foi muito estudado por vários pesquisadores, entre os quais citamos os trabalhos [14, 15, 16].

Investigaremos as soluções dos modelos *Caginalp* e *Penrose-Fife* usando o teorema da contração. Para isto, definiremos um operador, num adequado subconjunto fechado de um espaço métrico completo, cujo ponto fixo é a solução desejada. Em seguida, provaremos que este operador é uma contração estrita. Para o modelo Caginalp obteremos solução global no tempo e para o modelo Penrose-Fife solução local no tempo. Os resultados de existência, unicidade e regularidade da teoria de equações lineares parabólicas serão fundamentais na aplicação o teorema da contração.

Palavras-chave: campo de fase, teorema da contração, modelo Caginalp, modelo Penrose-Fife.

Conteúdo

Introdução **1**

1 Preliminares **4**

1.1 Notações e espaços funcionais 4

1.2 Resultados Auxiliares 6

1.2.1 Imersões de Sobolev 6

1.2.2 Teorema da contração 6

1.2.3 Princípio de Máximo 7

1.2.4 Algumas desigualdades 9

1.2.5 Aproximação de Galerkin 10

2 Equação de evolução parabólica **12**

2.1 Equação diferencial parabólica linear 12

2.1.1 Formulação variacional 13

2.1.2 Existência e unicidade de solução 16

2.2 Uma equação parabólica não linear 24

3 Modelo Caginalp **28**

3.1 Solução local: prova do teorema 3.1 29

3.2 Solução Global: prova do teorema 3.2 35

4 Modelo Penrose-Fife **37**

4.1 Problema linear auxiliar 38

4.1.1 Existência e unicidade 41

4.2 Solução local: prova do teorema 4.1 49

Considerações Finais **71**

Referências Bibliográficas **73**

Introdução

Neste trabalho investigaremos a existência, unicidade e regularidade da solução de dois modelos matemáticos do tipo interface difusa, que descrevem fenômenos de mudança de fase, conhecidos como modelos *Caginalp* e *Penrose-Fife*.

Modelos de **interface difusa** consideram que a interface que separa a fase sólida e a fase líquida no processo de solidificação tem uma *espessura*, possivelmente fina, e pode ser tratada como uma região interfacial, na qual as quantidades físicas variam continuamente. Um exemplo importante de modelos de interface difusa são os conhecidos modelos de **campos de fase**. Estes modelos consideram uma função $\varphi(x,t)$, chamada campo de fase ou parâmetro de ordem, cujos valores indicam a fase do material. Por exemplo, se $\varphi = 1$ tem-se a fase *sólida*; se $\varphi = 0$ tem-se a fase *líquida* , se $0 < \varphi < 1$ tem-se a fase *de mistura* e a interface localiza-se em $\varphi = \dfrac{1}{2}$.

A formulação do modelo *Caginalp*, essencialmente, usa um funcional energia livre para descrever o processo de mudança de fase, com dois tipos de contribuições para a energia: uma parcela dependendo do gradiente do campo de fase (e que basicamente fornece a energia acumulada na interface) e outra correspondente à densidade de energia potencial. Este funcional é conhecido como *funcional energia Ginzburg-Landau*:

$$F = \int_\Omega f(\varphi,\theta) + \frac{\gamma}{2}|\nabla\varphi|^2\,dx.$$

Neste caso, temos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \alpha\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \xi^2\Delta\varphi = \dfrac{1}{2}(\varphi-\varphi^3) + 2u & \text{em} \quad \Omega\times(0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = -\dfrac{\ell}{2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} & \text{em} \quad \Omega\times(0,T), \\ \varphi = 0, \ \ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T), \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \ \ u(x,0) = u_0(x) & \text{em} \quad \Omega, \end{cases}$$

com φ o campo de fase, u a temperatura, Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$. As constantes positivas α, ξ, k e ℓ estão relacionadas com o tempo de relaxação, a espessura da interface, a condutividade térmica e o calor latente.

Por outro lado, a formulação do modelo *Penrose-Fife*, essencialmente, usa um funcional entropia para descrever o processo de mudança:

$$S(e,\varphi) = \int_\Omega s(e,\varphi) - \frac{\gamma}{2}|\nabla\varphi|^2\,dx$$

com “e” a energia interna e $s(e,\varphi)$ a densidade de entropia.

Neste caso, temos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \xi^2\Delta\varphi = (\varphi - \varphi^3) + \dfrac{\lambda(\varphi)}{\theta} & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - \lambda(\varphi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = -K\Delta\left(\dfrac{1}{\theta}\right) & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0, \ \ \dfrac{\partial\theta}{\partial\eta} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \ \ \theta(x,0) = \theta_0(x) & \text{em} \quad \Omega, \end{cases}$$

com φ o campo de fase, θ a temperatura, ξ e K constantes positivas. $\lambda(\varphi)$ uma função linear dada por $a\,\varphi$ com $a > 0$ constante e $\theta_0(x) > 0$.

Maiores detalhes sobre a obtenção dos sistemas de equações diferenciais descritos acima podem ser encontrados em [9] e [13], respectivamente,

O nosso trabalho foi organizado do seguinte modo:

No capítulo 1 descreveremos as notações, espaços funcionais e alguns resultados clássicos da teoria das equações diferenciais que serão usados no trabalho. Entre eles, destacamos o teorema da contração, que será a principal ferramenta para a resolução dos problemas propostos neste trabalho.

No capítulo 2 investigaremos a solução de dois problemas diferenciais parabólicos: um problema linear e outro não linear. Para obtermos existência e regularidade do problema parabólico linear usaremos o método de Galerkin e para resolvermos o problema não linear usaremos o teorema da contração. O procedimento de resolução do problema não linear será o método usado na resolução dos modelos propostos no trabalho.

A referência usada para o estudo dos resultados deste capítulo foi o livro de equações diferenciais parciais [5].

No capítulo 3 investigaremos a existência, unicidade e regularidade do *modelo Caginalp*. Para isto, definiremos um operador cujo ponto fixo é a solução desejada. Primeiro, obteremos um resultado local no tempo e depois estenderemos a solução para todo intervalo do tempo. A referência usada para o estudo dos resultados deste capítulo foi o livro de equações diferenciais parciais [16, cap. 4].

Finalmente, no capítulo 4 investigaremos a existência, unicidade e regularidade do segundo modelo de campo de fase, o *modelo Penrose-Fife*. Do ponto de vista matemático, este modelo é mais complexo do que o modelo Caginalp, devido a presença do inverso da temperatura na equação da temperatura e um termo altamente não linear. Por esta razão, trabalharemos em espaços muito regulares e aplicaremos um princípio de máximo. Na seção 4.1 trataremos um problema parabólico linear associado a este modelo cuja resolução não se encontra facilmente nos livros clássicos da teoria da equações diferenciais parabólicas. Usaremos o método de Galerkin para resolver este problema linear. Para resolvermos o modelo Penrose-Fife adotaremos o mesmo procedimento usado na resolução do modelo Caginalp, o que será feito na seção 4.2. As referências usadas para o estudo dos resultados deste capítulo foram o artigo [15] e o livro de equações diferenciais parciais [16, cap. 4].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados que serão ferramentas importantes no desenvolvimento do trabalho.

1.1 Notações e espaços funcionais

As seguintes notações serão usadas no trabalho:

$\mathbb{R}^n$ representará espaço euclidiano n-dimensional.

Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$.

Q representará o cilindro $\Omega \times (0, T)$.

$S = \partial\Omega \times (0, T)$ representará a superfície lateral do cilindro Q.

$\vec{\eta}$ representará a normal unitária exterior à S.

$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_{i=1}^{n}$ representará o operador gradiente.

$\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ representará o operador Laplaciano.

D_x^j e D_t são as derivadas com relação as variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ de ordem j e com relação a t, respectivamente. Algumas vezes teremos as derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t} = u_t = u'$.

$\displaystyle\sum_{(j)}$ é o somatório sobre todos os possíveis j.

$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$ e $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}$ é norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$ e do vetor gradiente.

No que segue vamos considerar $0 < T < \infty$, B um espaço de Banach qualquer com norma $\| \, . \, \|_B$ e apresentar a definição de alguns espaços funcionais:

$C^m(\Omega)$ é o espaço das funções com todas as derivadas de ordem $\leq m$ contínuas em Ω (m inteiro positivo ou $m = \infty$).

$\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaço vetorial das funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω e $\mathcal{D}'(\Omega)$ o seu dual. Também usaremos os espaços $\mathcal{D}(0,T)$ e $\mathcal{D}'(0,T)$.

$L^q(\Omega)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções $u(x)$ de Ω em $\mathbb{R}$ mensuráveis (no sentido de Lebesgue) e q-integráveis ($q \geq 1$) cuja norma é dada por

$$||u||_{L^q(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^q \, dx \right)^{1/q} \qquad (1 \leq q < \infty),$$

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_{\Omega} |u(x)| \qquad (q = \infty).$$

$W_q^p(\Omega)$ é o espaço de Banach (com p inteiro) das funções $u(x)$ em $L^q(\Omega)$ com derivadas generalizadas (no sentido usual) de ordem $\leq p$ que pertencem a $L^q(\Omega)$ e cuja norma é dada por

$$||u||_{W_q^p(\Omega)} = \sum_{j=0}^{p} \sum_{(j)} \left\| D_x^j u \right\|_{L^q(\Omega)} .$$

$\overset{0}{W}{}_q^p(\Omega)$ representará o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W_q^p(\Omega)$.

Observação 1.1 *Para o caso particular de $q = 2$, a notação dos espaços de Sobolev será $W_2^p(\Omega) = H^p(\Omega)$ e $\overset{0}{W}{}_2^p(\Omega) = H_0^p(\Omega)$.*

$L^p(0,T;\, B)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções $u: \; [0,T] \to B$, mensuráveis tal que a função $t \in [0,T] \to ||u(t)||_B$ (definidas q.s.) é p-integrável ($1 \leq p \leq \infty$) com norma dada por

$$||u||_{L^p(0,T;B)} = \left(\int_0^T ||u(t)||_B^p \, dt \right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty).$$

$$||u||_{L^\infty(0,T;B)} = ess \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_B \qquad (p = \infty).$$

$C([0,T];\, B)$ é o espaço de Banach das funções $u:\ [0,T] \to B$ contínuas, cuja a norma é dada por

$$||u||_{C([0,T];B)} = \max_{t\in[0,T]} ||u(t)||_B.$$

$W^{m,p}(0,T;\, B)$ é o espaço das (classes de) funções em $L^p(0,T;\, B)$ cujas derivadas generalizadas de ordem $\leq m$ também pertencem a $L^p(0,T;\, B)$. Em particular, para $p = 2$, temos a notação $H^m(0,T;\, B)$.

1.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção, enunciaremos alguns resultados auxiliares que serão usados no trabalho.

1.2.1 Imersões de Sobolev

Lema 1.1 *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^2. Se k, m e p são inteiros e $p \geq 1$ então as seguintes imersões são contínuas:*

$$\begin{aligned} W_p^k(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega) \qquad & \textit{para } kp < n \textit{ e } p^* = \frac{np}{(n-kp)}, \\ W_p^k(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega}) \qquad & \textit{para } 0 \leq m < k - \frac{n}{p}. \end{aligned}$$

Lema 1.2 *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^2 e $r \geq 1$, $p < \infty$. Se j e m são inteiros tais que $0 \leq j < m$ e*

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{r} + \frac{j}{n} - \frac{m}{n}$$

então a seguinte imersão é compacta: $W_r^m(\Omega) \subset W_p^j(\Omega)$.

As imersões acima são também válidas para $\overset{0}{W}{}_q^p(\Omega)$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ arbitrário.

1.2.2 Teorema da contração

Agora, vamos enunciar o **teorema da contração**, uma das principais ferramentas para a resolução dos problemas prospostos neste trabalho. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [12, p. 336].

Definição 1.1 *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Dizemos que uma aplicação $\Phi : X \to X$ é uma **contração** em X se existe uma constante $k \in (0, 1)$ tal que*

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq k\, d(x, y),$$

*para todo $x, y \in X$. Além disso, dizemos que $x \in X$ é um **ponto fixo** de Φ se $\Phi(x) = x$.*

Teorema 1.1 (Princípio da Contração) *Toda contração $\Phi : X \to X$ definida no espaço métrico completo (X, d) tem um único ponto fixo.*

Teorema 1.2 (Subespaço completo) *Um subconjunto A de um espaço métrico completo (X, d) é completo se, e somente se, o conjunto A é fechado em X.*

Observe que, pelo teorema 1.1, se X é um espaço de Banach com $d(x, y) = ||x - y||$ e $A \subset X$ é fechado, então A é completo. Neste caso, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.3 *Se A é um conjunto não vazio e fechado do espaço de Banach $(X, ||\cdot||)$ e $\Phi : A \to A$ é uma contração. Então Φ tem um único ponto fixo em A.*

1.2.3 Princípio de Máximo

Na resolução do modelo *Penrose-Fife* aplicaremos alguns resultados de *princípio de mínimo*, por esta razão enunciaremos alguns destes resultados nesta seção. As demonstrações destes teoremas podem ser encontradas em [6, 11].

Sejam Q um domínio (n+1)-dimensional, o operador

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.1}$$

e as seguintes hipóteses:

($\mathbf{H}_1$) L é um operador parabólico em Q: para todo $(x, t) \in Q$ e para qualquer vetor não nulo $\xi \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i \xi_j > 0; \tag{1.2}$$

($\mathbf{H}_2$) os coefiecintes de L são funções contínuas em Q e $c(x, t) \leq 0$ em Q;

$(\mathbf{H}_3)$ as funções $u(x,t)$ que satisfazem (1.1) são de classe C^2 na variável x e de classe C^1 na variável t.

Para qualquer ponto $P_1 = (x_1, t_1)$ de Q, representaremos por $\mathcal{S}(P_1)$ o conjunto de pontos P de Q que são ligados ao ponto P_1 por uma curva contínua simples contida em Q a qual, na variável t, é crescente de P a P_1. Representaremos por $\mathcal{C}(P_1)$ a componente (com $t = t_1$) de $Q \cup \{t = t_0\}$ que contém P_1. Note que $\mathcal{C}(P_1) \subset \mathcal{S}(P_1)$.

O seguinte resultado é conhecido como *princípio de máximo forte*:

Teorema 1.4 *Suponhas que as hipóteses* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2)$ *e* $(\mathbf{H}_3)$ *são verdadeiras.*

Se $Lu \geq 0 (Lu \leq 0)$ *em* Q *e* $u(x,t)$ *atinge o seu valor de máximo positivo (mínimo negativo) no ponto* P_1 *então* $u(P) = u(P_1)$ *para todo* $P \in \mathcal{S}(P_1)$.

Definição 1.2 *Seja* $P_0 = (x_0, t_0)$ *um ponto da fronteira* ∂Q *do domínio* Q. *Dizemos que* P_0 *tem* **propriedade forte da esfera interior** *se existe uma bola fechada* D *com centro em* (x_2, t_2) *tal que* $D \subset \bar{Q}$, $D \cap \partial Q = \{P_0\}$ *e* $x_2 \neq x_0$.

Entenderemos por *direçaõ não tangencial "para dentro"* uma direção que, a partir de P_0, aponta para o interior da bola D cuja fronteira tangência ∂Q em P_0.

Vamos supor que Q é limitado e que as hipóteses $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2)$ e $(\mathbf{H}_3)$ são verdadeiras em $\bar{Q}$. Suponha que $u(x,t)$ é uma função contínua em $\bar{Q}$ e que $Lu \geq 0$ em Q. Se $u(x,t)$ tem um valor de máximo positivo M então, pelo teorema 1.4, $u(P_0) = M$ para algum P_0 na fronteira ∂Q de Q.

Teorema 1.5 *Suponha que* Q *é limitado e que as hipóteses* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2)$ *e* $(\mathbf{H}_3)$ *são verdadeiras em* $\bar{Q}$. *Suponha que* $u(x,t)$ *é uma função contínua em* $\bar{Q}$ *e que* $Lu \geq 0$ *em* Q. *Seja* P_0 *um ponto com a propriedade forte da esfera interior. Suponha também que, para alguma vizinhança* V *de* P_0, *tem-s* $u(x,t) < M$ *em* $Q \cap V$. *Então, para qualquer direçaõ não tangencial "para dentro"* τ,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} < 0 \quad \text{em} \ P_0.$$

1.2.4 Algumas desigualdades

1) Desigualdade de Hölder:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$,um conjunto não vazio e mensurável. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, com $1 < p < \infty$, então

$$\int_{\Omega} |u\, v| dx \leq ||u||_{L^p(\Omega)} ||v||_{L^q(\Omega)}.$$

3) Desigualdade de Young: Para todo $a, b > 0$, e para p, q tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$, com $1 < p < \infty$ tem-se

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

Fazendo $a = (\epsilon p)^{\frac{1}{p}} a$ e $b = \dfrac{b}{(\epsilon p)^{\frac{1}{p}}}$, $\forall \epsilon > 0$ na desigualdade de Young, obtemos

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q$$

com $C(\epsilon) = q^{-1}(\epsilon p)^{-\frac{q}{p}}$.

5) Desigualdade de Interpolação:

Seja $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ e $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{s} + \dfrac{(1-\theta)}{t}$. Suponha que $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$. Então $u \in L^r(\Omega)$ e

$$||u||_{L^r(\Omega)} \leq ||u||^{\theta}_{L^s(\Omega)} ||u||^{1-\theta}_{L^t(\Omega)}.$$

6) Desigualdade de Interpolação Gagliardo-Nirenberg:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um dimínio limitado com $\partial\Omega$ de classe C^2. Sejam j, m inteiros tais que $0 \leq j < m$. Se $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq q, r \leq \infty$ e $\dfrac{j}{m} \leq \alpha \leq 1$ tais que

$$\frac{1}{p} - \frac{j}{n} = \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + (1-\alpha)\frac{1}{q}.$$

Então, existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que, para $u \in W^m_r(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, tem-se

$$||D^j u||_{L^p(\Omega)} \leq c_1 ||D^m u||^{\alpha}_{L^r(\Omega)} ||u||^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)} + c_2 ||u||_{L^q(Omega)}, \tag{1.3}$$

com a seguinte exceção: se $\dfrac{j}{m} \leq \alpha < 1$ e $1 < r < \infty$ e $m - j - \dfrac{n}{r}$ é um inteiro não negativo então (1.3) vale.

7) Desigualdade de Gronwall (forma diferencial):

Seja $\eta(.)$ uma função absolutamente contínua não negativa em $[0,T]$, que satisfaz, para t q.s, a desigualdade diferencial

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

em que $\phi(t), \psi(t)$ são funções integráveis não negativas em $[0,T]$. Então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)\,ds}\Big[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\Big], \tag{1.4}$$

para todo $t \in [0,T]$.

8) Desigualdade de Poincaré:

Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ e $u \in H_0^1(\Omega)$. Então existe uma constante $C_P > 0$ que depende de Ω e n, tal que

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq C_p||\nabla u||_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

9) Fórmula de Green:

Seja Ω um domínio limitado de classe C^1 e $\Gamma = \partial\Omega$. Então, para $u, v \in H^1(\Omega)$ e $i = 1, \cdots, n$ tem-se

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int_\Gamma \gamma(u)\gamma(v)\eta_i\,dS - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}v\,dx$$

com η_i as componentes da normal exterior η e γ o operador traço.

É comum usarmos u no lugar de $\gamma(u)$. No que segue, vamos enunciar a seguinte conseqüência da fórmula de Green: se $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$ então

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx = -\int_\Omega (\Delta u)v\,dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}v\,dS.$$

1.2.5 Aproximação de Galerkin

Para resolvermos uma equação de operadores $Fu = y$ definida no espaço de Banach B podemos considerar problemas aproximados $F_m u = y_m$ em subespaços B_m de dimensão finita. Se as seqüências (F_m) e (B_m) convergem, em algum sentido, para F e B, respectivamente, então gostaríamos de obter da seqüência de soluções aproximadas

(u_m) de $F_m u_m = y_m$ em B_m uma subseqüência (u_{m_j}) convergindo para a solução de $F u = y$ em B. Por exemplo, se B é um espaço de Banach com base $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ podemos considerar B_m o subespaço gerado pelas m primeiras funções de $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$, ou seja, $B_m = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m]$, as projeções $P_m : B \to B_m$ definidas por $P_m u = \sum_{j=1}^{m} x_j\varphi_j$ com $u = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\varphi_j$ e os problemas aproximados em B_m

$$F_m u_m = P_m y \ \text{ para } \ u_m \in B_m \tag{1.5}$$

com $F_m = P_m F_{|_{B_m}}$.

O sistema (1.5) é chamado **método ou aproximação de Galerkin** da equação $Fu = y$. No caso que B é um espaço **reflexivo** podemos usar o seguinte resultado de compacidade fraca (veja, por exemplo [5, p. 639]):

Teorema 1.6 (Teorema de compacidade fraca) *Seja B uma espaço de Banach reflexivo. Suponha que a sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset B$ seja limitada. Então existe uma subsequência $(u_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $u_0 \in B$ tais que $u_{m_j} \rightharpoonup u_0$.*

Assim, para resolvermos $Fu = y$ passando o limite em (1.5) precisamos:

1. determinar estimativas *a priori* da sequência de soluções (u_m), ou seja, obter $||u_m|| \leq M$ com M uma constante que independe de m, e portanto, obter uma subsequência (u_{m_j}) que converge fracamente para u_0;

2. usar as propriedades de F e da construção de Galerkin para mostrar que u_0 é solução do problema original, isto é, $Fu_0 = y$.

Capítulo 2

Equação de evolução parabólica

Neste capítulo investigaremos a existência, unicidade e regularidade de solução da equação de evolução parabólica linear e uma equação diferencial não linear. Por todo este capítulo, vamos considerar Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, $Q = \Omega \times (0,T)$ e $S = \partial\Omega \times (0,T)$ para algum $T > 0$ fixo.

2.1 Equação diferencial parabólica linear

Nesta seção vamos estudar o seguinte problema parabólico linear:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Lu & = & f & \text{em } Q, \\ u & = & 0 & \text{em } S, \\ u & = & u_0 & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

com $f : Q \to \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ e $u : Q \to \mathbb{R}$.

O operador diferencial L é dado na forma divergente, ou seja,

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u. \tag{2.2}$$

Por toda esta seção, vamos considerar as seguintes hipóteses:

(A$_1$) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com $n = 2$ ou 3 e fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2. $Q = \Omega \times (0,T)$ e $S = \partial\Omega \times (0,T)$ para algum $T > 0$ finito;

$(\mathbf{A}_2)$ $a_{ij}, b_i, c : Q \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis e limitadas, isto é, funções de $L^\infty(Q)$;

$(\mathbf{A}_3)$ Existe uma constante $\rho > 0$, que indenpende de x, t, tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \rho \sum_{i=1}^{n} |\xi|_i^2, \tag{2.3}$$

q.s em Q e $\forall \xi_i \in \mathbb{R}^n$.

Para resolvermos o problema (2.1) adotaremos o seguinte procedimento:

1. Formulação variacional do problema (2.1);
2. Existencia de solução.
   (a) Formulação do problema aproximado: uso do método de Galerkin; u_m;
   (b) Estimativas *a priori*: obtenção de convergência fraca, fraca-$*$ e/ou forte;
   (c) Passagem do limite: $u_m \to u$;
   (d) Demonstração que u é a solução de (2.1);
3. Unicidade.

2.1.1 Formulação variacional

Vamos considerar os espaços de Hilbert separáveis $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ com $(\cdot\,,\,\cdot)$ o produto interno do $L^2(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$ o dual de $H_0^1(\Omega)$ com $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\rangle$ o par de dualidade $H_0^1(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$ e norma $||\cdot||_*$ e as imersões contínuas $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$.

Queremos achar a *solução fraca* do problema parabólico linear (2.1). Para isso, consideraremos $u : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$, dada por $u(t)[x] := u(x,t), x \in \Omega$. Ou seja, vamos considerar uma aplicação u de $[0,T]$ no espaço $H_0^1(\Omega)$. Analogamente, definiremos $f : [0,T] \to L^2(\Omega)$ dado por $f(t)[x] = f(x,t)$.

Seja $0 < T < \infty$, representamos por $W(0,T)$ o seguinte espaço:

$$W(0,T) = \{u\,;\, u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))\,;\, u' \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))\}.$$

Então, temos as seguinte propriedades:

$$W(0,T) \subset C([0,T]; L^2(\Omega)). \tag{2.4}$$

Para $u \in W(0,T)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ tem-se

$$\langle u'(\cdot), v\rangle = \frac{d}{dt}(u(\cdot), v) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}(0,T). \tag{2.5}$$

Lembrando que (2.5) é equivalente a

$$\int_0^T \langle u'(t), v\rangle \psi(t)\, dt = -\int_0^T (u(t), v)\psi(t)\, dt, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0,T). \tag{2.6}$$

2.1.1.1 Forma bilinear

Vamos definir uma forma bilinear associada ao operador L. Sejam $v, w \in H_0^1(\Omega)$. Multiplicando a equação diferencial em (2.1) por v, integrando em Ω e usando a fórmula de Green, obtemos

$$\int_\Omega u'(t)v(x)\, dx + B[u(t), v; t] = \int_\Omega f(t)v(x)\, dx,$$

com

$$\begin{aligned} B[w, v; t] &:= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\, dx \\ &+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i}(x)v(x)\, dx + c(x,t)w(x)v(x)\, dx, \end{aligned} \tag{2.7}$$

quase sempre em $[0,T]$. Observe que para $w, v \in H_0^1(\Omega)$ a função $t \mapsto B[w,v;t]$ é mensurável.

No seguinte lema, provaremos as principais propriedades da forma bilinear $B[w, v; t]$:

Lema 2.1 *Para $t \in (0,T)$, a forma bilinear $B[\cdot,\cdot,t] : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é contínua e coerciva, ou seja, existem constantes $\alpha, \beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ tais que*

$$|B[w, v; t]| \leq \alpha ||w||_{H_0^1(\Omega)} ||v||_{H_0^1(\Omega)}, \tag{2.8}$$

$$B[v, v; t] + \gamma ||v||^2_{L^2(\Omega)} \geq \beta ||v||^2_{H_0^1(\Omega)}, \tag{2.9}$$

para todo $w, v \in H_0^1(\Omega)$, q.s. em $[0,T]$.

Demonstração: Pela hipósete $(\mathbf{A}_2)$ temos que

$$\sup_{ij}\Big(\sup_{(x,t)\in Q} ess\ |a_{ij}(x,t)|\Big) \leq C_0\,, \quad \sup_{i}\Big(\sup_{(x,t)\in Q} ess\ |b_i(x,t)|\Big) \leq C_1\,,$$
$$\sup_{(x,t)\in Q} ess\ |c(x,t)| \leq C_2.$$

Portanto, para $w, v \in H_0^1(\Omega)$ e q.s. $t \in [0,T]$ tem-se

$$|B[w,v;t]| = \left|\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x,t) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i(x,t) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) v(x)\, dx\right.$$
$$+ \left|\int_\Omega c(x,t) w(x) v(x)\, dx\right|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|B[w,v;t]| &\leq C_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\right|^2\right)^{1/2} \\
&+ C_1 \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \\
&+ C_2 \left(\int_\Omega |w(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \\
&\leq C_0 ||\nabla w||^2_{L^2(\Omega)} ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} + C_1 ||\nabla w||^2_{L^2(\Omega)} ||v||^2_{L^2(\Omega)} + C_2 ||w||^2_{L^2(\Omega)} ||v||^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

e pela desigualdade de Poincaré obtemos

$$|B[w,v;t]| \leq C(||w||^2_{H_0^1(\Omega)} ||v||^2_{H_0^1(\Omega)}),$$

Logo, provamos que $B[w,v;t]$ é contínua em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ q.s em $[0,T]$.

Para mostrar a coercividade, usaremos a hipótese $(\mathbf{A}_3)$. Assim, para $v \in H_0^1(\Omega)$ e q.s. $t \in [0,T]$ tem-se

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i(x,t) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) v(x)\, dx\right| &\leq C_1 \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{\rho}{2} ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C_1^2}{2\rho} ||v||^2_{L^2(\Omega)};
\end{aligned}$$

$$\left|\int_\Omega c(x,t) |v(x)|^2\, dx\right| \leq C_2 ||v||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Então, escolhendo $\gamma - C_2 - \dfrac{C_1^2}{2\rho} > 0$, obtemos

$$B[v,v;t] + \gamma ||v||^2_{L^2(\Omega)} > \frac{\rho}{2} ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} + \Big(\gamma - C_2 - \frac{C_1^2}{2\rho}\Big) ||v||^2_{L^2(\Omega)} \geq \beta ||v||^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

E a prova do lema 2.1 está completa. $\square$

Portanto, podemos considerar a seguinte formulação variacional do problema (2.1):

Sejam $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$. Queremos encontrar uma função $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ com $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ tal que

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + B[u(t), v; t] = (f(t), v) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}(0, T), \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.10}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.11}$$

Lembrando que

$$\int_0^T \langle u'(t), v\rangle \psi(t)\, dt = -\int_0^T (u(t), v)\psi'(t)\, dt, \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(0, T), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

temos que (2.10) é equivalente a

$$-\int_0^T (u(t), v)\psi'(t)\, dt + \int_0^T B[u(t), v; t]\psi(t)\, dt = \int_0^T (f(t), v)\psi(t)\, dt, \tag{2.12}$$

$\forall \psi \in \mathcal{D}(0, T), \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Por outro lado, para cada $t \in [0, T]$ e para cada $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, a forma bilinear $B[u(t), v; t]$ define um operador linear contínuo $A(t) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ dado por

$$\langle A(t)u(t), v\rangle = B[u(t), v; t], \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto,

$$\sup_{0 \le t \le T} ||A(t)||_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))} \le \alpha. \tag{2.13}$$

com α a constante dada em (2.8).

Então podemos escrever (2.10), (2.11) na forma:

$$\begin{aligned} &u'(t) + A(t)u(t) = f(t) \ \text{ no sentido de } \ L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ &u(0) = u_0. \end{aligned}$$

2.1.2 Existência e unicidade de solução

Agora vamos provar o seguinte resultado de existência e unicidade:

Teorema 2.1 *Sejam $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ funções dadas. Então o problema* (2.1) *tem uma única solução fraca $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ com $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.*

2.1.2.1 Problema aproximado

Vamos aplicar o *método de Galerkin* (veja seção 1.2.5) para obter a solução fraca do problema parabólico linear (2.1). Para isto, seja $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma base de $H_0^1(\Omega)$ (as autofunções do operador Laplaciano) definida por

$$\begin{aligned} -\Delta w_k = \lambda_k\, w_k \quad & \text{em} \quad \Omega, \\ w_k = 0 \qquad & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Seja $V_m = [w_1, w_2, \cdots, w_m]$ então existe uma seqüência $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{0m} \in V_m \ \ , \forall m \ \text{ e } \ u_{0m} \to u_0 \ \text{ em } \ L^2(\Omega). \tag{2.15}$$

Então, temos o seguinte problema aproximado: achar uma função $u_m : [0,T] \to V_m$ na forma

$$u_m(t) := \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k, \tag{2.16}$$

tal que

$$\begin{aligned} & (u_m'(t), w_j) + B[u_m(t), w_j; t] = (f(t), w_j), \ \ 1 \le j \le m, \\ & u_m(0) = u_{0m}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Primeiro vamos resolver o problema aproximado:

Lema 2.2 *Para cada m, existe uma única solução u_m do problema* (2.17) *tal que $u_m \in C([0,T]; V_m)$ com $u' \in L^2(0,T;V_m)$.*

Demonstração: Observe que, para $1 \le j \le m$, temos

$$\begin{aligned} (u_m'(t), w_j) &= \sum_{k=1}^{m} (d_m^k)'(t)(w_k, w_j), \\ B[u_m(t), w_j; t] &= B\left[\sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k, w_j; t\right] = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) B[w_k, w_j; t] = \sum_{k=1}^{m} \beta^{kj}(t) d_m^k(t), \\ (f(t), w_j) &= f^j(t), \end{aligned}$$

com $\beta^{kj} = B[w_k, w_j; t]$. Então, o sistema (2.17) é equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais lineares de 1^a ordem:

$$\begin{aligned} & K\alpha'(t) + B(t)\alpha(t) = F(t), \\ & \alpha(0) = \alpha_{0m}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

$\alpha(t)$, $F(t)$ vetores $m \times 1$ e K, $B(t)$ matrizes $m \times m$ cujos elementos $\alpha_k(t)$, $F_j(t)$, a_{kj} e β_{kj} são definidos, respectivamente, por

$$\alpha_k(t) = d_m^k(t), \;\; F_j(t) = f^j(t), \;\; a_{jk} = (w_k, w_j), \;\; \beta_{kj}(t) = B[u_k(t), u_j(t); t],$$

para $1 \leq k, j \leq m$.

Como $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ são LI então a matriz K é inversível. Além disso, os coeficientes da matriz $B(t)$ são dados pelos coeficientes da forma bilinear $B[u(t), v; t]$, e logo, pelas funções $a_{ij}(x.t), b_i(x,t), c(x,t)$, Como $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(Q)$ e a função $t \mapsto f^j(t)$ é uma função de $L^2(\Omega)$ então pela teoria clássica das equações diferenciais ordinárias (veja, por exemplo, [3, p. 97]), existe uma única solução contínua $\alpha(t) = [d_m^1(t), d_m^2(t), ..., d_m^m(t)]$ do sistema (2.18) definida em $[0, T]$.

E a prova do Lema 2.2 está completa. □

2.1.2.2 Estimativas a priori

Nesta seção obteremos estimativas uniformes com relação a m. Para isto, multiplique (2.17) por $d_m^k(t)$ e some para $k = 1, ..., m$, para obter

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + B[u_m(t), u_m(t); t] = (f(t), u_m(t)). \tag{2.19}$$

Integrando em $(0, t)$ tem-se

$$\frac{1}{2}||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t B[u_m(t), u_m(t); t]\, dt = \frac{1}{2}||u_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t (f(t), u_m(t))\, dt.$$

Usando (2.9) (veja Lema 2.1 com $\gamma = 0$), obtemos

$$\frac{1}{2}||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \beta \int_0^t ||u_m(t)||_{H_0^1(\Omega)}\, dt = \frac{1}{2}||u_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t (f(t), u_m(t))\, dt \tag{2.20}$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned} &||u_{0m}||_{L^2(\Omega)} \leq c_0 ||u_0||_{L^2(\Omega)}, \quad \text{com } c_0 \text{ independente de } m \\ &|(f(t), u_m(t))| \leq \frac{1}{2\beta}\int_0^t ||f(\tau)||^2_*\, d\tau + \frac{\beta}{2}\int_0^t ||u_m(\tau)||^2_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Usando (2.21) em (2.20), obtemos

$$||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 2\beta \int_0^t ||u_m(\tau)||^2_{H_0^1(\Omega)}\, d\tau \leq C\Big(||u_0||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T ||f(t)||^2_*\Big), \tag{2.22}$$

q.s em $[0, t]$ com $C > 0$ independente de m.

2.1.2.3 Passagem do limite

Deduzimos de (2.22) e (2.13) que a sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, e $A(\cdot)u_m$ é limitada uniformemente em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Aplicando o *Teorema de Compacidade Fraca* (Teorema 1.6, p. 11), temos que existe uma subsequência $(u_{m_l})_{l\in\mathbb{N}} \subset (u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cup L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$u_{m_l} \rightharpoonup u \quad \text{fraca em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.23}$$

$$u_{m_l} \rightharpoonup u \quad \text{fraca-}* \text{ em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.24}$$

$$A(\cdot)u_{m_l} \rightharpoonup A(\cdot)u \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.25}$$

Observação 2.1 *A convergência* (2.25) *segue do fato de* $A(\cdot)$ *ser um operador linear contínuo de* $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *em* $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ *(em particulra na topologia fraca) e da convergência* (2.23)*.*

Sejam $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$. Como $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma base de $H_0^1(\Omega)$, temos que existe uma sequência $v_m \in V_m$ tal que $v_m \to v$ (forte) em $H_0^1(\Omega)$ com cada v_m uma combinação linear finita de certos elementos w_k. Portanto, podemos considerar

$$\phi_m(t) = \psi(t)v_m \ \text{ e } \ \phi(t) = \psi(t)v.$$

Deste modo, temos que

$$\phi_{ml} \to \phi \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.26}$$

$$\phi'_{ml} \to \phi' \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.27}$$

De (2.17) deduzimos que

$$-\int_0^T (u_{ml}(t), \phi'_{ml}(t))\,dt + \int_0^T B[u_{ml}(t), \phi_{ml}(t); t]\,dt = \int_0^T (f(t), \phi_{ml}(t))\,dt. \tag{2.28}$$

De (2.26) tem-se

$$\int_0^T (f(t), \phi_{ml}(t))\,dt \to \int_0^T (f(t), v)\psi(t)\,dt.$$

Usando a convergência (2.24) e (2.27) tem-se

$$\int_0^T B[u_{ml}(t), \phi_{ml}(t); t]\,dt = \int_0^T (A(t)u_{ml}(t), \phi_{ml}(t))\,dt \to \int_0^T B[u(t), \phi(t); t]\,dt.$$

Portanto, podemos passar o limite em (2.17) e obter

$$-\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\,dt + \int_0^T B[u(t),v;t]\psi(t)\,dt = \int_0^T (f(t),v)\psi(t)\,dt, \tag{2.29}$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega), \forall \psi \in \mathcal{D}(0,T)$.

2.1.2.4 $u(t)$ é solução do problema (2.10)

Nesta seção provaremos o seguinte resultado:

Lema 2.3 *A função limite $u(t)$ é solução do problema (2.10)*

Demonstração: Para provamos o Lema 2.3 resta mostrarmos que $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e a condição inicial (2.11).

De (2.29) deduzimos que

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\,dt &= \int_0^T (f(t),v)\psi(t)\,dt - \int_0^T B[u(t),v;t]\psi(t)\,dt \\ &= \int_0^T (f(t)-A(t)u(t),v)\psi(t)\,dt. \end{aligned}$$

Como $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e $A(\cdot)u(\cdot) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ temos que $g = f - A(\cdot)u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e

$$-\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\,dt + \int_0^T = \int_0^T (g(t),v)\psi(t)\,dt,$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$, $\forall \psi \in \mathcal{D}(0,T)$, o que implica

$$u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.30}$$

Para provar que $u(0) = u_0$, usaremos o seguinte resultado

Lema 2.4 *Para toda $u, w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ com $u', w' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e para $t \in [0,T]$ arbitrário, vale a seguinte integração por partes generalizada:*

$$(u(t),w(t))_{L^2(\Omega)} - (u(0),w(0))_{L^2(\Omega)} = \int_0^t \langle u'(\tau),w(\tau)\rangle + \langle w'(\tau),u(\tau)\rangle\,d\tau$$

Como $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, podemos aplicar o Lema 2.4 e obter

$$\int_0^T \langle u'(t), \psi(t)\, v\rangle = -\langle u(t), v\rangle \psi'(t)\, dt - (u(0), v)\psi(0), \tag{2.31}$$

$\forall \psi \in \mathcal{D}(0,T)$ tal que $\psi(T) = 0$ e $\forall v \in H_0^1(\Omega)$. Por outro lado, de (2.10) e (2.30) temos que

$$-\int_0^T (u'(t), v)\psi(t)\, dt = \int_0^T (f(t), v)\psi(t)\, dt - \int_0^T B[u(t), v; t]\psi(t)\, dt. \tag{2.32}$$

De (2.17) deduzimos

$$-\int_0^T (u'_{ml}(t), v_{ml})\psi(t)\, dt = \int_0^T (f(t), v_{ml})\psi(t)\, dt - \int_0^T B[u_{ml}(t), v_{ml}; t]\psi(t)\, dt, \tag{2.33}$$

$$\int_0^T (u'_{ml}(t), v_{ml})\psi(t)\, dt = -\int_0^T (u_{ml}(t), v_{ml})\psi'(t)\, dt - (u_{0m}, v)\psi(0). \tag{2.34}$$

Passando o limite em (2.33) e (2.34) para $l \to \infty$, obtemos

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^T (u'_{ml}(t), v_{ml})\psi(t)\, dt = \int_0^T (f(t), v)\psi(t)\, dt - \int_0^T B[u(t), v; t]\psi(t)\, dt, \tag{2.35}$$

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^T (u'_{ml}(t), v_{ml})\psi(t)\, dt = -\int_0^T (u(t), v)\psi'(t)\, dt - (u_0, v)\psi(0). \tag{2.36}$$

Usando (2.32) em (2.35) obtemos

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^T (u'_{ml}(t), v_{ml})\psi(t)\, dt = \int_0^T (u(t), v)\psi'(t)\, dt. \tag{2.37}$$

Em particular, para $\psi(0) = 1$, comparando (2.31), (2.36) e (2.37), obtemos

$$(u(0), v) = (u_0, v), \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.38}$$

Como $H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, (2.38) é válida $\forall v \in L^2(\Omega)$, e logo, $u(0) = u_0$.

E a prova do Lema 2.3 está complete. $\square$

2.1.2.5 Unicidade

Para provarmos que a solução $u(t)$ é única, suponha que u_1 e u_2 são soluções fracas distintas do problema (2.1) e considere $u = u_1 - u_2$. Então, $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e satisfaz

$$\begin{aligned} &\langle u'(t), v\rangle + B[u(t), v; t] = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ &u(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Fazendo $v = u(t)$ em (2.39) e integrando em $(0,t)$ obtemos

$$||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_0^t B[u(\tau), u(\tau); \tau]\, d\tau = 0. \tag{2.40}$$

Usando em (2.40) a coersividade (2.9) com $\gamma = 0$ tem-se

$$||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} < 0 \Rightarrow u(t) = 0, \quad \forall t \in [0,T],$$

e concluímos a prova da unicidade de solução do problema (2.1).

2.1.2.6 Regularidade da solução

Para obtermos mais regularidade para a solução do problema (2.1), vamos considerar o seguinte caso particular:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u & = & f & \text{em } Q, \\ u & = & 0 & \text{em } S, \\ u(x,0) & = & u_0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.41}$$

Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.2 *Se $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ e $f \in L^2(Q)$ então a única solução u do problema* (2.41) *satisfaz $u \in C([0,T]; H^1_0(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$.*

Demonstração: Multiplique a equação (2.17) por ${d^k_m}'(t)$, e some $k = 1, 2, ..., m$ para obter

$$(u'_m(t), u'_m(t)) + B[u_m(t), u'_m(t); t] = (f(t), u'_m(t)) \quad \text{q.s. em } [0,T].$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young, tem-se

$$\frac{1}{2}||u'_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_m(t)||^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{1}{2}||f(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando em $(0,T)$, temos

$$\max_{0 \leq t \leq T} ||u_m(t)||^2_{H^1_0(\Omega)} + \int_0^t ||u'_m(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau \leq ||u_m(0)||^2_{H^1_0(\Omega)} + \int_0^T ||f(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau. \tag{2.42}$$

Usando $||u_m(0)||_{H^1_0(\Omega)} \leq ||u_0||_{H^1_0(\Omega)}$, deduzimos de (2.42) que u_m é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T; H^1(\Omega))$ e u'_m é uniformemente limitada em $L^2(0,T; L^2(\Omega))$. Logo, temos que $u \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$.

Agora, de (2.41), temos que

$$\begin{cases} -\Delta u(t) &= f(t) - u'(t) & \text{em } \Omega, \\ u(t) &= 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $f(t) - u'(t) \in L^2(\Omega)$ q.s. em $[0, T]$, então pela *teoria de regularidade das equações elípticas*, obtemos $u(t) \in H^2(\Omega)$ q.s. em $[0, T]$ tal que

$$||u(t)||^2_{H^2(\Omega)} \leq C(||f(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u'(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)})$$

Integrando em $[0, T]$ e usando (2.42), deduzimos que $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$.

E a prova do teorema 2.2 está completa. $\square$

2.1.2.7 Condição de fronteira de Neumann

Usando o método de Galerkin podemos também obter existência, unicidade e regularidade para o seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 & \text{em } S, \\ u(x, 0) &= u_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.43}$$

Teorema 2.3 *Se $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ então existe uma única solução $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ do problema* (2.43).

Para obtermos mais regularidade podemos derivar a equação (2.43) com relação ao tempo e exigir mais regularidade dos dados do problema para obter o seguinte resultado:

Teorema 2.4 *Suponha que $u_0 \in H^3(\Omega)$ e satisfaz as condições de compatibilidade. Suponha também que $f \in C([0, T]; H^2(\Omega))$ e $f' \in C([0, T]; H^1(\Omega))$ então a solução u do problema (2.43) satisfaz $u \in C([0, T]; H^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^3(\Omega))$, $u' \in C([0, T]; H^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^3(\Omega))$ e $u'' \in L^2([0, T]; H^2(\Omega))$.*

2.2 Uma equação parabólica não linear

Nesta seção vamos aplicar o Princípio da Contração para obter existência e unicidade da solução para o seguinte problema parabólico não linear. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente regular, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função **Lipschitz contínua**, isto é, existe uma constante $C_L > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C_L|x - y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|). \tag{2.44}$$

Queremos investigar a existência e unicidade de solução do seguinte problema não linear:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u & = & f(u) & \text{em } Q, \\ u & = & 0 & \text{em } S, \\ u(x, 0) & = & u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \tag{2.45}$$

com $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Teorema 2.5 *Suponhamos que $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua. Então existe uma única solução fraca local para o problema* (2.45). *Ou seja, existe $t^* \in (0, T)$ tal que $u \in L^2(0, t^*; H_0^1(\Omega))$ com $u' \in L^2(0, t^*; H^{-1}(\Omega))$ satisfaz*

$$\langle u'(t), v\rangle + (\nabla u(t), \nabla v) = (f(u(t)), v) \qquad \text{em } \mathcal{D}'(0, T),\ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

com $(\cdot, \cdot)$ o produto interno de $L^2(\Omega)$ e $\langle \cdot, \cdot\rangle$ o par de dualidade de $H_0^1(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$.

Demonstração: Vamos aplicar o Teorema da Contração. Para isto, sejam $T > 0$ alguma constante dada, $w \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ e $u = \Phi(w)$ a solução do problema linearizado:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \\ \langle u'(t), v\rangle + (\nabla u(t), \nabla v) = (f(u(t)), v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \ \text{ q.s. em } \quad [0, T]. \end{array} \right. \tag{2.46}$$

Considere $X = C([0, T]; L^2(\Omega))$ com a norma $||w||_X = \max\limits_{t\in[0,T]} ||w(t)||_{L^2(\Omega)}$ e $\Phi : X \longrightarrow X$. Observe que $f(w) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. De fato, por (2.44), tem-se

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^T ||f(w(t))||^2_{L^2(\Omega)} & \leq & \displaystyle C \int_0^T (1 + ||w(t))||^2_{L^2(\Omega)}) \\ & \leq & \displaystyle\left(C + \max_{t\in[0,T]} ||w(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) T \ < +\infty. \end{array}$$

Logo, pelo teorema 2.1 temos que o problema (2.46) tem uma única solução $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Logo, $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$ e portanto, Φ está bem definido.

Agora, provaremos que Φ é uma contração, ou seja, mostraremos que existe uma constante $k \in (0,1)$ tal que, para $w_1, w_2 \in X$,

$$||\Phi(w_1) - \Phi(w_2)||_X \leq k||w_1 - w_2||_X.$$

Assim, para $w_1, w_2 \in X$, pela definição de Φ, temos que $u_1 = \Phi(w_1)$ e $u_2 = \Phi(w_2)$, o que implica que $u_1, u_2 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ tal que

$$\langle u_i'(t), v\rangle + (\nabla u_i(t), \nabla v) = (f(w_i(t)), v), \tag{2.47}$$

para $i = 1, 2$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, q.s. em [0,T]. Fazendo-se $u = u_1 - u_2$ e subtraindo as equações dadas em (2.47), resulta que

$$\langle u'(t), v\rangle + (\nabla u(t), \nabla v) = \Big(f(w_1(t)) - f(w_2(t)), v\Big),$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$, q.s. em [0,T]. Escolhendo $v = u(t)$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} = \Big(f(w_1(t)) - f(w_2(t)), u(t)\Big).$$

Como f é Lipschitz tem-se que o operador de Nemytskii $f(w)$ está definido em $L^2(\Omega)$, então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||f(w_1(t)) - f(w_2(t))||_{L^2(\Omega)}||u(t)||_{L^2(\Omega)}.$$

Usando as desigualdades de Young e Poincaré, obtemos

$$\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{4\varepsilon}(||f(w_1(t)) - f(w_2(t))||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon C_P||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Pelo fato de f ser Lipschitz contínua, resulta que

$$\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C||w_1(t) - w_2(t)||_{L^2(\Omega)}.$$

com C uma constante positiva que depende de Ω e da constante de Lipschitz C_L.

Integrando em $(0,t)$ para $t \in [0,T]$ e usando que $u(0) = 0$, tem-se

$$||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C\int_0^t ||w_1(\tau) - w_2(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}d\tau.$$

Assim,

$$\max_{0\le t\le T} ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \le CT \max_{0\le t\le T} ||w_1(t) - w_2(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Logo,

$$||\Phi(w_1) - \Phi(w_2)||_X \le \sqrt{T\,C}||w_1 - w_2||_X.$$

Escolhendo t^* tal que $\sqrt{CT} = \dfrac{1}{2}$, ou seja, $t^* = \dfrac{1}{4C}$, concluímos que

$$||\Phi(w_1) - \Phi(w_2)||_X \le \frac{1}{2}||w_1 - w_2||_X.$$

Então, pelo teorema da contração, Φ tem um único ponto fixo em $C([0,t^*];L^2(\Omega))$. Como $f(u) \in L^2(0,t^*;L^2(\Omega))$, para $u \in C([0,t^*];L^2(\Omega))$, então concluímos, pelo teorema 2.1, que $u \in L^2(0,t^*;H^1_0(\Omega))$, com $u' \in L^2(0,t^*;H^{-1}(\Omega))$.

E a prova do teorema 2.5 está completa. □

2.2.0.8 Existência de solução global

Nesta seção faremos alguns comentários e apresentaremos os resultados para obtenção de solução global no tempo.

Para a forma bilinear $B : H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por $B(u,v) = (\nabla u, \nabla v)$, podemos associar um operador linear e contínuo $A : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ do seguinte modo: para cada $u \in H^1_0(\Omega)$, a aplicação $v \mapsto B(u,v)$ de $H^1_0(\Omega)$ em $\mathbb{R}$ é linear e contínua, e portanto, define um elemento de $\xi_u \in H^{-1}(\Omega)$. Representando por A a transformação $u \mapsto \xi_u$ de $H^1_0(\Omega)$ em $H^{-1}(\Omega)$, temos, pelas propriedades de $B(u,v)$, que A é linear e contínuo. De fato,

$$|\xi_u(v)| = |B(u,v)| \le M||u||_{H^1_0(\Omega)}||v||_{H^1_0(\Omega)},$$

o que implica que $||A(u)||_* = \sup\limits_{v\neq 0} \dfrac{\langle \xi_u, v\rangle}{||v||_{H^1_0(\Omega)}} \le M||u||_{H^1_0(\Omega)}$. Logo, $A \in \mathcal{L}(H^1_0, H^{-1})$.

Reciprocamente, dado um operador linear e contínuo A, podemos associar a ele a forma linear contínua $B : H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle A(u), v\rangle = B(u,v) = (\nabla u, \nabla v), \quad \forall u, v \in H^1_0(\Omega).$$

Além disso, pela desigualdade de Poincaré, temos que

$$B(u,u) = ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} \le C_p||u||^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Logo, $B(u,v)$ é uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então, pelo *teorema de Lax-Milgram*, o operador $A : H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ é um isomorfismo. Considerando as seguintes imersões e as respectivas densidades:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega),$$

definimos o domínio do operador A em $L^2(\Omega)$ por

$$D(A) = \{v \in H_0^1(\Omega); A(v) \in L^2(\Omega)\}.$$

Assim, o problema (2.45) pode ser formulado como uma equação diferencial ordinária em espaços de Banach do tipo:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d\,u}{dt} + Au & = & f(u) \\ u(0) & = & u_0, \end{array} \right. \tag{2.48}$$

com $u : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$, $A = -\Delta$ e $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

O seguinte resultado pode ser encontrado em [7, teorema 4.4, p. 244]:

Teorema 2.6 *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz, então existe um $t^*_{\max}$ maximal tal que a única solução do problema* (2.48) *satisfaz*

$$u \in C([0, t^*_{\max}]; L^2(\Omega)) \cap C([0, t^*_{\max}]; D(A)) \cap C^1([0, t^*_{\max}]; L^2(\Omega)).$$

Além disso, se $t^*_{\max} < \infty$, então $\lim\limits_{t \to t^*_{\max}} ||u(t)||_{H_0^1(\Omega)} = \infty$. Neste caso, dizemos que a solução "explode" em tempo finito.

A pergunta que surge naturalmente é se podemos estender a solução local de modo que se torne global. Note que, se $t^*_{\max} < \infty$ e tivermos uma estimativa uniforme a priori da solução, então esta pode ser estendida em $[0,T]$.

O seguinte teorema pode ser encontrado em [15, teorema 1.4.4, p.23]:

Teorema 2.7 *Para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz e $t^*_{\max} < \infty$, se a solução u do problema* (2.45) *tem uma estimativa a priori*

$$||u(t)||_{H_0^1(\Omega)} \leq C, \quad \forall t \in [0, t^*_{\max}],$$

com C sendo uma constante positiva que independe de t (mas pode depender de $t^*_{\max}$). Então, o problema (2.45) *admite uma única solução global.*

Capítulo 3

Modelo Caginalp

Neste capítulo, vamos investigar a existência, unicidade e regularidade do seguinte sistema de equações:

$$\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \xi^2\Delta\varphi = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi^3) + 2u \quad \text{em} \quad Q, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = -\frac{\ell}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad \text{em} \quad Q, \tag{3.2}$$

$$\varphi = 0, \;\; u = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{3.3}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \;\; u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{3.4}$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^n, Q = \Omega \times (0,T)$ e $S = \partial\Omega \times (0,T)$.

Para este sistema, temos os seguintes resultados:

Teorema 3.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$ um domínio limitado de classe C^2. Suponha que $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$. Então, existe um $T^* > 0$ que depende de φ_0, u_0 tal que o problema* $(3.1) - (3.4)$ *tem uma única solução (φ, u) que satisfaz $\varphi \in C([0,T^*]; H_0^1(\Omega))$, com $\varphi' \in L^2(0,T^*; L^2(\Omega))$ e $u \in C([0,T^*]; L^2(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T^*; H^{-1}(\Omega))$.*

Teorema 3.2 *Sejam $0 < T < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2. Suponha $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$. Então, o problema (3.1)-(3.4) tem uma única solução (φ, u) que satisfaz $\varphi \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$ com $\varphi' \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ e $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$.*

3.1 Solução local: prova do teorema 3.1

Para provarmos o teorema 3.1 vamos considerar o seguinte conjunto:

$$X = \Big\{(\varphi, u)\ ;\ (\varphi, u) \in (C([0,T^*]; H_0^1(\Omega)))^2,\ \ ||(\varphi, u)||_{(C([0,T^*];H_0^1(\Omega)))^2} \leq R\Big\}, \tag{3.5}$$

com $0 < T^* < \infty$ e $R > 0$ constantes a serem determinadas.

Seja $\Phi : X \to X$ um operador defindo por: para $(\psi, v) \in X$, $(\varphi, u) = \Phi(\psi, v)$ é a única solução do seguinte problema linearizado:

$$\alpha\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi = \frac{1}{2}(\psi - \psi^3) + 2v \quad \text{em} \quad Q, \tag{3.6}$$

$$u_t - k\Delta u = -\frac{\ell}{2}\varphi_t \quad \text{em} \quad Q, \tag{3.7}$$

$$\varphi(x) = 0,\ u(x) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \tag{3.8}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0,\ u(x,0) = u_0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.9}$$

Lembrando que $H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ e $(\psi, v) \in (C([0,T^*]; H_0^1(\Omega)))^2$, obtemos que $\psi^3 \in C([0,T^*]; L^2(\Omega))$ e, logo, $\frac{1}{2}(\psi - \psi^3) + 2v \ \in\ C([0,T^*]; L^2(\Omega))$. Portanto, pelos resultados de existência e unicidade das equações diferenciais parabólicos lineares (veja capítulo 2, teorema 2.2, p. 21), temos que existe uma única solução φ tal que $\varphi \in C([0,T^*]; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T^*; H^2(\Omega))$ com $\varphi' \in L^2(0,T^*; L^2(\Omega))$.

Agora, aplicando novamente os resultados de existência e unicidade das equações diferenciais parabólicos lineares com $\varphi' \in L^2(0,T^*; L^2(\Omega))$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$ obtemos que existe uma única solução u tal que $u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T^*; H^{-1}(\Omega))$.

Para provarmos que o operador Φ está bem definido, ou seja, $\Phi(\psi, v) = (\varphi, u) \in X$ devemos fazer uma escolha adequada da constante $R > 0$ e impor algumas restrições em T^*. Para isto, precisamos obter algumas estimativas das soluções do problema linearizado (3.6)-(3.9).

Multiplicando (3.6) por φ, integrando em Ω e usando a fórmula de Green, obtemos

$$\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\psi(t) - \psi^3(t)||\varphi(t)|\,dx + 2\int_\Omega |v(t)||\varphi(t)|\,dx.$$

Usando desigualdades de Hölder, Young e Poincaré, obtemos

$$\alpha\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1(||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi(t)||^6_{L^6(\Omega)}) + C_2||v(t)||^2_{L^2(\Omega)},$$

com C_1 e C_2 são constantes positivas dependendo apenas de Ω, α e ξ.

Agora, integrando no tempo em $(0,t)$ com $t \in [0,T^*]$, temos

$$||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{\alpha}||\nabla\varphi||^2_{L^2(Q)} \leq ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_1T^*\Big(||\psi||^6_{C([0,T^*];L^6(\Omega))}+$$
$$||\psi||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))} + ||v||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))}\Big)$$

Logo,

$$\max_{0\leq t\leq T^*}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_1T^*\Big(||\psi||^6_{C([0,T^*];L^6(\Omega))}+$$
$$||\psi||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))} + ||v||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))}\Big).$$

Portanto,

$$||\varphi||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))} \leq ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_2T^*(R^6+R^2). \tag{3.10}$$

Multiplicando (3.6) por $-\Delta\varphi$, integrando em Ω, usando a fórmula de Green e as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{2\alpha}||\Delta\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_3(||\psi(t)||^6_{L^6(\Omega)} + ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}).$$

Integrando em $(0,t)$ com $t \in [0,T^*]$, obtemos

$$||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{2\alpha}||\Delta\varphi||^2_{L^2(Q)} \leq ||\nabla\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_3T^*\Big(||\psi||^6_{C([0,T^*];L^6(\Omega))}+$$
$$||\psi||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))} + ||v||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))}\Big)$$

Logo,

$$||\nabla\varphi||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))} \leq ||\nabla\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_4T^*(R^6+R^2). \tag{3.11}$$

Somando as estimativas (3.10) e (3.11) tem-se

$$||\varphi||^2_{C([0,T^*];H^1_0(\Omega))} \leq ||\varphi_0||^2_{H^1_0(\Omega)} + C_5T^*(R^6+R^2). \tag{3.12}$$

com a constante positiva C_5 dependendo de Ω, α e ξ.

Multiplicando (3.6) por φ_t, integrando em Ω, usando a fórmula de Green e as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2\xi^2}{\alpha}\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_6\Big(||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi||^6_{L^6(\Omega)} + ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Integrando em $(0,t)$ com $t \in [0,T^*]$, obtemos

$$||\varphi_t||^2_{L^2(Q)} + \frac{2\xi^2}{\alpha}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_7||\nabla\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_8T^*\Big(||\psi||^6_{C([0,T^*];L^6(\Omega))}+$$
$$||\psi||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))} + ||v||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))}\Big)$$

o que implica,

$$||\varphi_t||^2_{L^2(Q)} \leq C_7||\nabla\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_8T^*(R^6+R^2). \tag{3.13}$$

A seguir, multiplicando (3.7) por u integrando em Ω, usando a fórmula de Green e as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + k||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_9||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando em $(0,t)$ com $t \in [0,T^*]$, tem-se

$$\max_{0\leq t\leq T^*}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + k||\nabla u||^2_{L^2(Q)} \leq ||u_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_9||\varphi_t||^2_{L^2(Q)}. \tag{3.14}$$

Usando (3.13) em (3.14), tem-se

$$||u||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))} \leq ||u_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_7||\nabla\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_{10}T^*(R^6+R^2). \tag{3.15}$$

com as constantes C_7 e C_{10} dependendo de Ω, ℓ e k.

Agora vamos escolher $R>0$. Escolhendo

$$R^2 > 4\max\{||\varphi_0||^2_{H^1_0(\Omega)}, ||u_0||^2_{L^2(\Omega)}, C_7||\nabla\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)}\}, \tag{3.16}$$

temos que as estimativas (3.12) e (3.15) torna-se

$$||\varphi||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))} \leq \frac{R^2}{4} + C_5T^*(R^6+R^2), \tag{3.17}$$
$$||u||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))} \leq \frac{R^2}{2} + C_5T^*(R^6+R^2). \tag{3.18}$$

Para termos $(\varphi,u)\in X$ devemos impor que

$$||\varphi||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))} \leq R^2 \ \text{ e } \ ||u||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))} \leq R^2.$$

Fazendo esta imposição em (3.17) e (3.18), obtemos

$$\frac{R^2}{4} + C_5T^*(R^6+R^2) \leq R^2 \ \text{ e } \ \frac{R^2}{2} + C_5T^*(R^6+R^2) \leq R^2,$$

o que implica nas restrições

$$T^* < \frac{3}{4C_5(R^4+1)} \;\text{ e }\; T^* < \frac{1}{2C_{10}(R^4+1)}.$$

Portanto, escolhendo $R > 0$ satisfazndo (3.16) e T^* tal que

$$T_1^* < \min\left\{\frac{3}{4C_5(R^4+1)}, \frac{1}{2C_{10}(R^4+1)}\right\} \tag{3.19}$$

temos que $(\varphi, u) \in X$ e o operador Φ está bem definido.

No que segue, mostraremos que este operador Φ é uma contração em X, para podermos aplicar o Teorema da Contração. Para isto, sejam $(\psi_i, v_i) \in X$ e $(u_i, \varphi_i) = \Phi(\psi_i, v_i)$ com $i = 1, 2$. Pela definição de Φ temos que

$$\begin{array}{lll} \alpha\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t} - \xi^2\Delta\varphi_i = \dfrac{1}{2}(\psi_i - \psi_i^3) + 2v_i & \text{em} & Q, \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - k\Delta u_i = -\dfrac{\ell}{2}\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t} & \text{em} & Q, \\ \varphi_i = 0, \;\; u_i = 0, & \text{em} & S, \\ \varphi_i(x,0) = \varphi_0, \;\; u_i(x,0) = u_0 & \text{em} & \Omega. \end{array} \tag{3.20}$$

Fazendo $\psi = \psi_1 - \psi_2, v = v_1 - v_2, u = u_1 - u_2, \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ e subtraindo as equações (3.20), obtemos

$$\begin{array}{lll} \alpha\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi = \dfrac{1}{2}\Big((\psi_1 - \psi_1^3) - (\psi_2 - \psi_2^3)\Big) + 2v & \text{em} & Q, \\ u_t - k\Delta u = -\dfrac{\ell}{2}\varphi_t & \text{em} & Q, \\ \varphi = 0, \;\; u = 0, & \text{em} & S, \\ \varphi(x,0) = 0, \;\; u(x,0) = 0 & \text{em} & \Omega. \end{array} \tag{3.21}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Big((\psi_1 - \psi_1^3) - (\psi_2 - \psi_2^3)\Big) &= \frac{1}{2}(\psi - (\psi_1^3 - \psi_2^3)) \\ &= \frac{1}{2}(\psi - (\psi_1 - \psi_2)(\psi_1^2 + \psi_1\psi_2 + \psi^2)) \\ &= \frac{1}{2}\psi(1 - (\psi_1^2 + \psi_1\psi_2 + \psi^2)) \\ &= \frac{1}{2}\psi d(\psi_1, \psi_2), \end{aligned}$$

Portanto, (3.21) torna-se

$$\alpha\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi = \frac{1}{2}\psi d(\psi_1, \psi_2) + 2v \quad \text{em} \quad Q, \tag{3.22}$$

$$u_t - k\Delta u = -\frac{\ell}{2}\varphi_t \quad \text{em} \quad Q, \tag{3.23}$$

$$\varphi = 0, \;\; u = 0, \quad \text{em} \quad S, \tag{3.24}$$

$$\varphi(x,0) = 0, \;\; u(x,0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.25}$$

com $d(\psi_1, \psi_2) = 1 - (\psi_1^2 + \psi_1\psi_2 + \psi_2^2)$.

Observe que $\psi_i \in C([0,T^*]; H_0^1(\Omega)) \subset C([0,T^*]; L^6(\Omega))$, e, logo, $\psi_i\, \psi_j \in C([0,T^*]; L^6(\Omega))$, o que impica $d(\psi_1, \psi_2) \in C([0,T^*]; L^3(\Omega))$.

Multiplicando a equação (3.22) por φ, integrando em Ω, usando a fórmula de Green e as desigualdades de Hölder, Young e Poincaré temos

$$\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{2\alpha}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_{10}\Big(||\psi(t)||^2_{L^6(\Omega)}||d(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^3(\Omega)} + ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big), \tag{3.26}$$

com C_{10} dependendo de Ω, ξ^2, α.

Integrando em $(0,t)$ com $t \in (0,T^*)$, temos

$$||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{2\alpha}\int_0^t ||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_{10}\left(\int_0^t ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}||d(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^3(\Omega)} + \int_0^t ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.27}$$

Mas $\psi_i \in X$, e logo,

$$||d(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{C}\Big(1 + ||\psi_1||^2_{C([0,T^*];L^3(\Omega))} + ||\psi_1||_{C([0,T^*];L^3(\Omega))}||\psi_2||_{C([0,T^*];L^3(\Omega))} + ||\psi_2||^2_{C([0,T^*];L^3(\Omega))}\Big).$$

Portanto,

$$||d(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{C}(1 + 3R^2). \tag{3.28}$$

Usando (3.28) em (3.27) tem-se

$$\max_{t\in[0,T^*]} ||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{2\alpha}\int_0^t ||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$
$$C_{11}T^*\Big((1+3R^2)||\psi||^2_{C([0,T^*];H_0^1(\Omega))} + ||v||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))}\Big), \tag{3.29}$$

com C_{11} dependendo de Ω, ξ^2, α.

Multiplicando a equação (3.22) por φ_t, integrando em Ω, usando as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2\xi^2}{\alpha}\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{3\alpha^2}||\psi||^2_{L^6(\Omega)}||d(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^3(\Omega)} + \frac{1}{\alpha^2}||v||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando em $(0,t)$, com $t \in (0,T^*)$, tem-se

$$\max_{t\in[0,T^*]} ||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t ||\varphi_t(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau \leq$$

$$C_{12}T^*\Big((1+3R^2)||\psi||^2_{C([0,T^*],H^1_0(\Omega))} + ||v||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))}\Big), \tag{3.30}$$

com C_{12} dependendo de α, ξ^2.

Somando (3.29) e (3.30), obtemos

$$||\varphi||^2_{C([0,T^*],H^1_0(\Omega))} + \int_0^t ||\varphi(\tau)||^2_{H^1_0(\Omega)}\, d\tau + \int_0^t ||\varphi_t(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau \leq$$

$$C_{13}T^*\Big((1+3R^2)||\psi||^2_{C([0,T^*],H^1_0(\Omega))} + ||v||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))}\Big). \tag{3.31}$$

Multiplicando a equação (3.23) por u, integrando em Ω, usando as desigualdades de Hölder, Poincaré e Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + k||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_{14}||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando em $(0,t)$ com $t \in [0,T^*]$ e usando (3.31), tem-se

$$\max_{t\in[0,T^*]} ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_{14}T^*\Big((1+3R^2)||\psi||^2_{C([0,T^*],H^1_0(\Omega))} + ||v||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))}\Big). \tag{3.32}$$

Somando (3.31) e (3.32), resulta que

$$||\varphi||^2_{C([0,T^*];H^1_0(\Omega))} + ||u||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))} \leq C_{15}T^*\Big((1+3R^2)||\psi||^2_{C([0,T^*],H^1_0(\Omega))} + ||v||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))}\Big), \tag{3.33}$$

com C_{15} dependendo de $\Omega, \alpha, \xi^2, \ell, k$.

Escolhendo T^* tal que $C_{15}T^*(1+3R^2) \leq \frac{1}{4}$ e $C_{15}T^* \leq \frac{1}{4}$, tem-se

$$T^* \leq \frac{1}{4C_{15}(1+3R^2)} \quad \text{e} \quad T^* \leq \frac{1}{4C_{15}}.$$

Logo,, T^* satisfaz

$$T^*_2 \leq \min\left\{\frac{1}{4C_{15}(1+3R^2)}, \frac{1}{4C_{15}}\right\}. \tag{3.34}$$

Então, por (3.19) e (3.34) devemos escolher T^* tal que

$$T^* \leq \min\{T^*_1, T^*_2\}. \tag{3.35}$$

Assim, (3.33) torna-se

$$||\Phi(\psi, v)||_X = ||(\varphi, u)||_X \leq \frac{1}{2}||(\psi, v)||_X,$$

e concluímos que o operador Φ é uma contração.

Portanto, pelo teorema da contração, existe um único ponto fixo (φ, u) de Φ em X, ou seja, $(\varphi, u) = \Phi(\varphi, u)$ é a única solução local do problema (3.1)-(3.4) em $[0, T^*]$ com T^* dado em (3.35).

Além disso, aplicando-se os resultados da teoria das equações parabólicas lineares com $\varphi_t \in L^2(0, T^*; L^2(\Omega))$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$ tem-se $u \in C([0, T^*]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T^*; H_0^1(\Omega))$ tal que $u_t \in L^2(0, T^*; H^{-1}(\Omega))$. Aplicando-se novamente os resultados da teoria das equações parabólicas lineares com $\frac{1}{2}(\varphi - \varphi^3) + 2u \in C([0, T^*]; L^2(\Omega))$ e $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$ tem-se $\varphi \in C([0, T^*]; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T^*; H^2(\Omega))$.

E a prova do teorema 3.1 está completa. $\square$

3.2 Solução Global: prova do teorema 3.2

Para provarmos a existência de solução em $[0, T]$ precisamos obter estimativas uniformes das normas $||\varphi(t)||_{H^1(\Omega)}$ e $||u(t)||_{L^2(\Omega)}$. Para isto, multiplique a equação (3.1) por φ, integre em Ω, use as desigualdades de Hölder, Poincaré e Young e o fato de que $\max_{s\in\mathbb{R}}(s^2 - s^4) < \infty$ para obter

$$\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \widehat{C}_1(1 + ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}). \tag{3.36}$$

Multiplicando a equação (3.2) por $u + \frac{\ell}{2}\varphi$, integrando em Ω, usando desigualdade de Hölder e Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}||u(t) + \frac{\ell}{2}\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + k||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{k\ell^2}{4}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.37}$$

Multiplicando (3.36) por $\frac{k\ell^2}{2}$ e (3.37) por ξ^2, e somando o resultado obtemos

$$\frac{d}{dt}\Big(||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u(t) + \frac{\ell}{2}\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) + ||(\nabla\varphi(t), \nabla u(t))||^2_{(L^2(\Omega))^2} \leq \widehat{C}_2(1 + ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}). \tag{3.38}$$

Observe que:

$$||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \widehat{C}(||u(t) + \frac{\ell}{2}\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}). \tag{3.39}$$

Usando (3.39) em (3.38) tem-se

$$\frac{d}{dt}\left(||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u(t) + \frac{\ell}{2}\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) + ||(\nabla\varphi(t), \nabla u(t))||^2_{(L^2(\Omega))^2}$$

$$\leq \widehat{C}_3\left(1 + ||u(t) + \frac{\ell}{2}\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Usando a desigualdade de Gronwall tem-se

$$||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u(t) + \frac{\ell}{2}\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \widehat{C}_4 e^{\widehat{C}_3 T^*}(1 + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||u_0||^2_{L^2(\Omega)}). \tag{3.40}$$

Combinando (3.39) e (3.40), obtemos

$$\max_{t\in[0,T^*]} ||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T^*]} ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{C}_1 \tag{3.41}$$

com a constante $\widetilde{C}_1$ dependendo de T^*, ξ^2, α, ℓ, $||\varphi_0||_{L^2(\Omega)}$ e $||u_0||_{L^2(\Omega)}$.

Agora, multiplicando a equação (3.1) por φ_t, integrando em Ω, usando desigualdade de Hölder e Young, obtemos

$$||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2\xi^2}{\alpha}\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^4_{L^4(\Omega)} \leq \widehat{C}_5\Big(||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Integrando em $(0,t)$, com $t \in [0, T^*]$,

$$||\varphi_t||^2_{L^2(Q)} + ||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \widehat{C}_6\Big(||\varphi||^2_{L^2(Q)} + ||u||^2_{L^2(Q)}\Big). \tag{3.42}$$

Combinando (3.41) e (3.42) resulta

$$\max_{t\in[0,T^*]} ||\varphi(t)||_{H^1_0(\Omega)} + ||\varphi_t||^2_{L^2(Q)} \leq \widetilde{C}_2,$$

com $\widetilde{C}_2$ depedendo de T^*, $\xi^2, \alpha, \ell, \Omega, ||\varphi_0||_{H^1_0(\Omega)}, ||u_0||_{L^2(\Omega)}$.

E a prova do teorema 3.2 está completa. □

Capítulo 4

Modelo Penrose-Fife

Neste capítulo investigaremos a existência, unicidade e regularidade do sistema de equações diferenciais:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi = \varphi - \varphi^3 + \frac{a\,\varphi}{\theta} \quad \text{em} \quad Q, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\,\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -K\Delta \left(\frac{1}{\theta}\right) \quad \text{em} \quad Q, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{4.3}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \;\; \theta(x,0) = \theta_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{4.4}$$

com $\theta_0(x) > 0$ em Ω.

Do ponto de vista matemático, o modelo de Penronse-Fife é mais complicado do que o modelo de Caginalp. As principais dificuldades que aparecem em (4.1)-(4.4) são o termo $\dfrac{1}{\theta}$ que pode ser singular e o termo altamente não linear $a\,\varphi \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Para contornarmos a primeira dificuldade é mais conveniente reescrever a equação da temperatura em termos do inverso da temperatura $u = \dfrac{1}{\theta}$. Neste caso, o sistema (4.1)-(4.4) torna-se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi = \varphi - \varphi^3 + a\,\varphi\, u \quad \text{em} \quad Q, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Ku^2 \Delta u = -a\, u^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{em} \quad Q, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{4.7}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \;\; u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{4.8}$$

com $u_0 = \dfrac{1}{\theta_0} > 0$.

Vamos mostrar existência e unicidade de solução do sistema (4.5)-(4.8) aplicando o teorema de contração. Na definição do operador cujo ponto fixo será a solução do problema obteremos um sistema de equações linearizadas no qual o problema para a temperatura u não aparece usualmente no livros textos de equações diferenciais parabólicas. Por esta razão, este problema auxiliar será tratado separadamente na seção 4.1.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte teorema:

Teorema 4.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, um domínio limitado de classe C^2. Suponha que $\varphi_0 \in H^3(\Omega)$, $u_0 \in H^4(\Omega)$, $\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = \dfrac{\partial u_0}{\partial \eta} = 0$ em $\partial\Omega$ e $u_0(x) > 0$ em Ω.*

Então, existe um $0 < T^{**} < T$ tal que o problema (4.5)-(4.8) tem uma única solução local (φ, u) que satisfaz $(\varphi, u) \in (C([0, T^{**}]; H^2(\Omega)))^2$ com $(\varphi', u') \in (C([0, T^{**}]; H^1(\Omega)))^2$.

Além disso, $u(x,t) \geq \dfrac{m}{2} > 0$ em $\bar{\Omega} \times [0, T^{**}]$ com $m = \min\limits_{x \in \Omega} u_0(x)$.

4.1 Problema linear auxiliar

Nesta seção vamos investigar a existência, unicidade e regularidade do seguinte problema linear relacionado com o modelo de Penrose-Fife:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - J(x,t)\Delta u + b(x,t)\, u = g(x,t) \quad \text{em} \quad Q, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{4.10}$$

$$u(x,0) = u_0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{4.11}$$

Por toda esta seção vamos considerar a seguinte hipótese:

(H) Existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $0 < \alpha \leq J(\cdot)$ e $J \in C(\bar{Q})$, $\nabla J \in C([0,T], H^1(\Omega))$.

Vamos definir uma forma bilinear associada ao problema (4.9), (4.10), (4.11). Sejam $v, w \in H_0^1(\Omega)$. Multiplicando a equação diferencial em (4.9) por v, integrando em Ω e usando a fórmula de Green, obtemos

$$\int_\Omega u'(t) v(x)\, dx + a(u(t), v; t) = \int_\Omega f(t) v(x)\, dx,$$

com

$$a(w,v;t) := \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial J}{\partial x_i}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_j}(x)v(x)\,dx + \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega J(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\,dx$$

$$+ \int_\Omega b(x,t)w(x)v(x)\,dx, \tag{4.12}$$

quase sempre em $[0,T]$.

No seguinte lema, provaremos que a forma bilinear $a(w,v;t)$ dada em (4.12) é contíuna e coersiva:

Lema 4.1 *Para $b \in C(\bar{Q})$ e $t \in (0,T)$, a forma bilinear $a(\cdot,\cdot,t) : H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é contínua e coerciva, ou seja, existem constantes $\alpha, \beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ tais que*

$$|a(w,v;t)| \leq \alpha ||w||_{H_0^1(\Omega)}||v||_{H_0^1(\Omega)}, \tag{4.13}$$

$$a(v,v;t) + \gamma||v||^2_{L^2(\Omega)} \geq \beta||v||^2_{H_0^1(\Omega)}, \tag{4.14}$$

para todo $w, v \in H_0^1(\Omega)$, q.s. em $[0,T]$.

Demonstração: Pela hipósete **(H)** e o fato de $b \in C(\bar{Q})$ tem-se

$$\sup_{(x,t)\in\bar{Q}} |J(x,t)| \leq C_0\,, \quad ||J||_{C([0,T];H^1(\Omega))} \leq C_1\,, \quad \sup_{(x,t)\in\bar{Q}} |b(x,t)| \leq C_2.$$

Portanto, para $w, v \in H_0^1(\Omega)$ e q.s. $t \in [0,T]$ tem-se

$$|a(w,v;t)| = \left| \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial J}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}(x)v(x)\,dx + + \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega J(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\,dx \right.$$
$$\left. + \int_\Omega b(x,t)w(x)v(x)\,dx \right|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|a(w,v;t)| &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial J}{\partial x_i}(x)\right|^6 dx\right)^{1/6} \left(\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\right|^6\right)^{1/6} \\
&+ C_0\left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |v(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \\
&+ C_2\left(\int_\Omega |w(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |v(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \\
&\leq C_1||\nabla w||^2_{L^2(\Omega)}||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} + C_0||\nabla w||^2_{L^2(\Omega)}||v||^2_{L^2(\Omega)} + C_2||w||^2_{L^2(\Omega)}||v||^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

e pela desigualdade de Poincaré obtemos

$$|a(w,v;t)| \leq C(||w||^2_{H^1_0(\Omega)}||v||^2_{H^1_0(\Omega)}),$$

Logo, provamos que $a(w,v;t)$ é contínua em $H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ q.s em $[0,T]$.

Para mostrar a coercividade, usaremos novamente a hipótese **(H)** e o fato de $b \in C(\bar{Q})$. Assim, para $v \in H^1_0(\Omega)$ e q.s. $t \in [0,T]$ tem-se

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial J}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)v(x)\,dx\right| &\leq C_1\left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |v(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\\ &\leq \frac{\alpha}{2}||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C_1^2}{2\alpha}||v||^2_{L^2(\Omega)};\end{aligned}$$

$$\left|\int_\Omega b(x,t)|v(x)|^2\,dx\right| \leq C_2||v||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Então, escolhendo $\gamma - C_2 - \dfrac{C_1^2}{2\rho} > 0$, obtemos

$$a(v,v;t) + \gamma||v||^2_{L^2(\Omega)} > \frac{\alpha}{2}||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} + \left(\gamma - C_2 - \frac{C_1^2}{2\alpha}\right)||v||^2_{L^2(\Omega)} \geq \beta||v||^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

E a prova do lema 4.1 está completa. □

Portanto, podemos considerar a seguinte formulação variacional do problema (4.9), (4.10), (4.11):

Sejam $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))$. Queremos encontrar uma função $u \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ tal que

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + a(u(t),v;t) = (g(t),v) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}(0,T), \ \ \forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{4.15}$$

$$u(0) = u_0. \tag{4.16}$$

Observação 4.1 *Lembre-se que* (4.15) *é equivalente a:*

$$-\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\,dt + \int_0^T a(u(t),v;t)\psi(t)\,dt = \int_0^T (g(t),v)\psi(t)\,dt, \tag{4.17}$$

$\forall \psi \in \mathcal{D}(0,T), \forall v \in H^1_0(\Omega)$.

Além disso, podemos considerar o operador linear contínuo $A(t) : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ dado por

$$\langle A(t)u(t),v\rangle = a(u(t),v;t), \quad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

Portanto,

$$\sup_{0\leq t\leq T} ||A(t)||_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))} \leq \alpha. \tag{4.18}$$

com α a constante dada em (4.13).

Então podemos escrever (4.15), (4.16) na forma:

$$\begin{aligned} &u'(t) + A(t)u(t) = g(t) \ \text{ no sentido de } \ L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),\\ &u(0) = u_0. \end{aligned}$$

4.1.1 Existência e unicidade

Agora vamos provar o seguinte resultado de existência, unicidade e regularidade:

Teorema 4.2 *Seja Ω domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^2. Suponha que a hipótese* **(H)** *é válida. Se $u_0 \in H^1(\Omega)$, $g \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e $b \in C([0,T];H^2(\Omega))$. Então existe uma única solução do problema* (4.15), (4.16) *tal que $u \in C([0,T];H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$ e $u' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.*

Demonstração: Usaremos o Método de Galerkin para resolvermos o problema (4.15), (4.16). Sejam $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma base de $H_0^1(\Omega)$ definida em (2.14) e $V_m = [w_1, w_2, \cdots, w_m]$ então existe uma seqüência $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{0m} \in V_m \ \ ,\forall m \ \text{ e } \ u_{0m} \to u_0 \ \text{ em } \ L^2(\Omega). \tag{4.19}$$

Então, temos o seguinte problema aproximado: achar uma função $u_m : [0,T] \to V_m$ na forma

$$u_m(t) := \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k, \tag{4.20}$$

tal que

$$\begin{aligned} &(u_m'(t), v) + a(u_m(t), v; t) = (g(t), v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\\ &u_m(0) = u_{0m}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Primeiro vamos resolver o problema aproximado:

Lema 4.2 *Para cada m, existe uma única solução u_m do problema* (4.21) *tal que $u_m \in C([0,T];V_m)$ com $u' \in L^2(0,T;V_m)$.*

Observe que, $v = w_j$ e $1 \leq j \leq m$, temos

$$\begin{aligned}
(u'_m(t), w_j) &= \sum_{k=1}^{m} (d_m^k)'(t)(w_k, w_j),\\
a(u_m(t), w_j; t) &= a\left[\sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k, w_j; t\right] = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) a(w_k, w_j; t) = \sum_{k=1}^{m} a^{kj}(t) d_m^k(t),\\
(g(t), w_j) &= g^j(t),
\end{aligned}$$

com $a_{kj} = a(w_k, w_j; t)$. Então, o sistema (4.21) é equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais lineares de 1^a ordem:

$$\begin{aligned}
&K\beta'(t) + B(t)\beta(t) = G(t),\\
&\beta(0) = \beta_{0m}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$\beta(t)$, $G(t)$ vetores $m \times 1$ e K, $B(t)$ matrizes $m \times m$ cujos elementos $\beta_k(t)$, $G_j(t)$, z_{kj} e akj são definidos, respectivamente, por

$$\beta_k(t) = d_m^k(t),\ G_j(t) = g^j(t),\ z_{jk} = (w_k, w_j),\ akj(t) = a(u_k(t), u_j(t); t),$$

para $1 \leq k, j \leq m$.

Como $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ são LI então a matriz K é inversível. Além disso, os coeficientes da matriz $B(t)$ são dados pelos coeficientes da forma bilinear $a(u(t), v; t)$, e logo, pelas funções $J(x,t), b(x,t)$, Como $b \in C(\bar{Q})$, vale a hipótese **(H)** e a função $t \mapsto g^j(t)$ é uma função de $L^2(\Omega)$ então pela teoria clássica das equações diferenciais ordinárias (veja, por exemplo, [3, p. 97]), existe uma única solução contínua $\beta(t) = [d_m^1(t), d_m^2(t), ..., d_m^m(t)]$ do sistema (4.22) definida em $[0, T]$.

E a prova do Lema 4.2 está completa. □

4.1.1.1 Estimativas a priori

Escolhendo $v = u_m(t)$ em (4.21), usando as imersões $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ e $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(Q)$, a hipótese **(H)** e as desigualdades de Hölder e Young, tem-se

$$\frac{d}{dt}||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||g(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)}||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \\ + \frac{1}{\alpha}||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)}||u_m(t)||^2_{L^3(\Omega)}. \tag{4.23}$$

Aplicando em (4.23), a seguinte desigualdade de interpolação

$$||u_m(t)|_{L^3(\Omega)}^2 \leq C\Big(||u_m(t)||_{L^2(\Omega)}^2 + ||\nabla u_m(t)||_{L^2(\Omega)}||u_m(t)||_{L^2(\Omega)}\Big), \tag{4.24}$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}||u_m(t)||_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha||\nabla u_m(t)||_{L^2(\Omega)}^2 \leq$$
$$||g(t)||_{L^2(\Omega)}^2 + ||u_m(t)||_{L^2(\Omega)}^2 + ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)}||u_m(t)||_{L^2(\Omega)}^2 +$$
$$+C||\nabla J(t)||_{L^6(\Omega)}^2(||\nabla u_m(t)||_{L^2(\Omega)}||u_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||u_m(t)||_{L^2(\Omega)}^2).$$

Aplicando novamente a desigualdade de Young, tem-se

$$\frac{d}{dt}||u_m(t)||_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha||\nabla u_m(t)||_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1\Big(1 + ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)} + ||\nabla J(t)||_{L^6(\Omega)}^2 +$$
$$||\nabla J(t)||_{L^6(\Omega)}^4\Big)||u_m(t)||_{L^2(\Omega)}^2 + ||g(t)||_{L^2(\Omega)}^2. \tag{4.25}$$

Aplicando em (4.25) a desigualdade de Gronwall e usando que $||u_m(0)||_{L^2(\Omega)}^2 \leq ||u_0||_{L^2(\Omega)}^2$, obtemos

$$\max_{t\in[0,T]} ||u_m(t)||_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2\left(||u_0||_{L^2(\Omega)}^2 + ||g||_{L^2(Q)}^2\right), \tag{4.26}$$

com C_2 dependendo de $||b||_{L^\infty(Q)}, ||\nabla J||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}$.

Integrando (4.25) em $(0,t)$, $t \in [0,T]$ e usando a estimativa (4.26), temos

$$||\nabla u_m||_{L^2(Q)}^2 \leq C_3(||u_0||_{L^2(\Omega)}^2 + ||g||_{L^2(Q)}^2). \tag{4.27}$$

com C_3 dependendo de $\alpha, T, ||\nabla J||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}, ||b||_{L^\infty(Q)}$.

Escolhendo $v = -\Delta w_j$ em (4.21), usando a hipótese **(H)** e as desigualdades de Hölder e Young, temos

$$\frac{d}{dt}||\nabla u_m(t)||_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha||\Delta u_m(t)||_{L^2(\Omega)}^2 \leq$$
$$C_4\left(||b(t)||_{L^\infty(\Omega)}^2 + ||u_m(t)||_{L^2(\Omega)}^2 + ||g(t)||_{L^2(\Omega)}^2\right). \tag{4.28}$$

Integrando em $(0,t)$ com $t \in [0,T]$ e usando a estimativa obtida em (4.27), tem-se

$$\max_{t\in[0,T]} ||\nabla u_m(t)||_{L^2(\Omega)}^2 + ||u_m||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \leq C_5(||g||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + ||u_0||_{H^1(\Omega)}^2), \tag{4.29}$$

com C_5 dependendo de $\alpha, T, ||b||_{L^\infty(Q)}$.

Agora, escolhendo $v = u_m'(t)$ em (4.21), usando a hipótese **(H)** e as desigualdades de Hölder e Young tem-se

$$||u_m'(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_6\Big(||J(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\Delta u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||b(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||g(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Integrando em $(0,t)$ com $t \in [0,T]$ e usando as estimativas (4.26) e (4.29), obtemos

$$||u_m'||_{L^2(Q)} \leq C_7(||u_0||^2_{H^1(\Omega)} + ||g||^2_{L^2(Q)}), \tag{4.30}$$

com C_7 dependendo de $T, ||J||_{L^\infty(Q)}, ||b||_{L^\infty(Q)}$.

4.1.1.2 Passagem ao limite

Pelas estimativa (4.26), (4.29) e (4.30) concluímos que u_m é uniformemente limitada (com relação a m) no espaço $W = \{u;\, u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)),\;\; u' \in L^2(Q)\}$. Logo, pelo teorema da compacidade fraca, existe $u \in W$ e uma subsequência u_m (representada novamente por u_m) tal que, para $m \to \infty$, temos que as seguintes convergências:

$$\begin{aligned} u_m &\rightharpoonup u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(Q), \\ u_m' &\rightharpoonup u' \in L^2(Q). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Procedendo de modo análogo a subseção 2.1.2, p. 16 do capítulo 2, temos que as convergências (4.31) são suficientes para passarmos o limite no problema (4.21) e obtermos

$$-(u_0,v)\varphi(0) - \int_0^T (u(t),v)\varphi'(t)\,dt + \int_0^T (J(t)\Delta u(t),v)\varphi(t)\,dt = \int_0^T (g(t),v)\varphi(t)\,dt \tag{4.32}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \in C^1[0,T]$ com $\varphi(T) = 0$. Além disso, não é complicado mostrar que $u(0) = u_0$.

4.1.1.3 Unicidade da solução

Sejam u_1, u_2 duas soluções fracas do problema (4.15), (4.16). Fazendo $u = u_1 - u_2$ temos

$$\begin{aligned} &(u'(t),v) + a(u(t),v;t) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ &u(0) = 0. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Fazendo $v = u(t)$ em (4.33) e integrando em $(0,t)$ obtemos

$$||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_0^t a(u(\tau),u(\tau);\tau)\,d\tau = 0. \tag{4.34}$$

Usando em (4.34) a coersividade (4.14) com $\gamma = 0$ tem-se

$$||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} < 0 \Rightarrow u(t) = 0, \quad \forall t \in [0,T],$$

e concluímos a prova da unicidade de solução do problema (4.15), (4.16).

E a prova do teorema 4.2 está completa. $\square$

4.1.1.4 Regularidade da solução

Para obtermos mais reguralidade da solução, vamos provar o seguinte resultado:

Teorema 4.3 *Suponha que as hipóteses do teorema* 4.2 *são satisfeitas. Além disso, suponha que* $u_0 \in H^4(\Omega)$ *e* $g \in C([0,T]; H^1(\Omega))$, $g_t \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, $J_t \in C([0,T]; H^1(\Omega))$, $b_t \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, *então solução* $u(x,t)$ *do problema* (4.9), (4.10) (4.11) *satisfaz* $u \in C([0,T]; H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^3(\Omega)), u' \in C([0,T]; H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega))$.

Demonstração: Escolhendo $v = \Delta^2 u_m(t)$ em (4.21), integrando en Ω e aplicando a fórmula de Green, obtemos

$$(i) \int_\Omega u'_m(t)(\Delta(\Delta u_m(t))) = -\int_\Omega \nabla u'_m(t)(\nabla(\Delta u_m(t))) = \int_\Omega \Delta u'_m(t)\Delta u_m(t),$$
$$(ii) \ -\int_\Omega J(t)\Delta u_m(t)(\Delta(\Delta u_m(t))) = \int_\Omega \nabla J(t)(\Delta u_m(t))\nabla(\Delta u_m(t)) +$$
$$\int_\Omega J(t)|\nabla(\Delta u_m(t))|^2,$$
$$(iii) \ -\int_\Omega b(t)u_m(t)\Delta(\Delta u_m(t)) = \int_\Omega \nabla(b(t)u_m(t))\nabla(\Delta u_m(t)) =$$
$$= \int_\Omega \nabla b(t)(u_m(t))\nabla(\Delta u_m(t)) + \int_\Omega b(t)\nabla u_m(t)\nabla(\Delta u_m(t)),$$
$$(iv) \int_\Omega g(t)(\Delta(\Delta u_m(t))) = -\int_\Omega (\nabla g(t))\nabla(\Delta u_m(t)).$$

, logo,

$$\int_\Omega \Delta u'_m(t)\Delta u_m(t) + \int_\Omega \nabla J(t)(\Delta u_m(t))\nabla(\Delta u_m(t)) + \int_\Omega J(t)|\nabla \Delta u_m(t)|^2 =$$

$$\int_\Omega \nabla b(t)(u_m(t))\nabla(\Delta u_m(t)) + \int_\Omega b(t)\nabla u_m(t)\nabla(\Delta u_m(t)) - \int_\Omega (\nabla g(t))\nabla(\Delta u_m(t)).$$

Usando a hipótese **(H)** e as desigualdades de Hölder e Young, concluímos que

$$\frac{d}{dt}||\Delta u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla(\Delta u_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||\nabla b(t)||^2_{L^6(\Omega)}||u_m(t)||^2_{L^3(\Omega)} +$$

$$C_1\Big(||b(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla g(t)||^2_{L^2(\Omega)} + +||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)}||\Delta u_m(t)||^2_{L^3(\Omega)}\Big).$$

Usando as interpolações

$$\begin{aligned} ||\Delta u_m(t)||^2_{L^3(\Omega)} &\leq C\left(||\Delta u_m(t)||_{L^2(\Omega)}||\nabla(\Delta u_m(t))||_{L^2(\Omega)} + ||\Delta u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right), && (4.35)\\ ||u_m(t)||^2_{L^3(\Omega)} &\leq C\left(||u_m(t)||_{L^2(\Omega)}||\nabla u_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right), && (4.36)\end{aligned}$$

resulta que

$$\frac{d}{dt}||\Delta u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla(\Delta u_m(t))||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_2\Big((||\nabla b(t)||^4_{L^6(\Omega)} + 1)||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$(||b(t)||^2_{L^6(\Omega)} + 1)||\nabla u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla g||^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$(||\nabla J||^4_{L^6(\Omega)} + ||\nabla b||^2_{L^6(\Omega)})||\Delta u_m||^2_{L^2(\Omega)}\Big). \quad (4.37)$$

Usando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$||\Delta u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{C_2 T}\Big(||u_0||^2_{H^2(\Omega)} + C_3\int_0^t ||u_m(\tau)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u_m(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

E pelos estimativas (4.29) e (4.30), temos

$$\max_{t\in[0,T]}||\Delta u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_4\left(||u_0||^2_{H^2(\Omega)} + ||g||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right), \quad (4.38)$$

com C_4 dependendo de $T, \alpha, ||J||_{C(0,T;H^1(\Omega))}, ||b||_{C(0,T;H^1(\Omega))}, ||b||_{L^\infty(Q)}$.

Integrando a equação (4.37) em $(0,t)$ com $t \in [0,T]$, temos que

$$||\nabla(\Delta u_m)||^2_{L^2(Q)} \leq$$
$$C\int_0^t \Big((||\nabla b(\tau)||^4_{L^6(\Omega)} + 1)||u_m(\tau)||^2_{L^2(\Omega)} + (||b(\tau)||^2_{L^\infty(\Omega)} + 1)||\nabla u_m(\tau)||^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$||\nabla g(\tau)||^2_{L^2(\Omega)} + (||\nabla J(\tau)||^4_{L^6(\Omega)} + ||\nabla J(\tau)||^2_{L^6(\Omega)})||\Delta u_m(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)dt.$$

Assim,

$$||\nabla(\Delta u_m)||^2_{L^2(Q)} \leq C_5\left(||u_0||^2_{H^2(\Omega)} + ||g||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right). \quad (4.39)$$

e concluímos que

$$||u_m||^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leq C\left(||u_0||^2_{H^2(\Omega)} + ||g||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right). \quad (4.40)$$

Portanto, $u \in L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$.

Para obter mais regularidade da solução vamos supor que:

$$\begin{aligned} &u_0 \in H^4(\Omega),\ g \in C([0,T]; H^1(\Omega)),\ g_t \in L^2(0,T; L^2(\Omega)),\\ &b \in C([0,T]; H^2(\Omega)),\ b_t \in L^2(0,T; L^2(\Omega)),\ J_t \in C([0,T]; H^1(\Omega)). \end{aligned} \tag{4.41}$$

Por outro lado, pelas estimativas (4.26), (4.27) e (4.29), temos que $u \in C([0,T]; H^1(\Omega))$. Pelas estimativas (4.38) e (4.39), tem-se $\Delta u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$. Portanto, usando que $J \in C(\overline{Q}), b \in C([0,T]; H^2(\Omega))$ e $g \in C([0,T]; H^1(\Omega))$ e a equação (4.9), obtemos que $u_t \in C([0,T]; L^2(\Omega))$.

Derivando a equação (4.9) com relação ao tempo obtemos:

$$u'' - J_t \Delta u - J \Delta u' + b_t u + b u' = g_t. \tag{4.42}$$

Além disso, temos que

$$u'(0) = g(0) + J(0)\Delta u(0) - b(0)u(0) = w_0 \tag{4.43}$$

Portanto, usando as hipóteses sobre os dados do problema e os resultados já obtidos para u concluímos $u_t(0) \in L^2(\Omega)$. Logo, fazendo $w = u'$, temos que w satisfaz o seguinte problema:

$$(w'(t), v) + a(w(t), v; t) = (h(t), v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{4.44}$$

$$w(0) = w_0 \tag{4.45}$$

com $h(t) = g_t(t) + J_t(t)\Delta u(t) - b_t(t)u(t)$.

Escolhendo $v = w$ em (4.44), usando hipótese **(H)**, as desigualdades de Hölder e Young e as interpolações (4.35), (4.36), obtemos

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \\ C_6\Big(||\nabla J(t)||^4_{L^6(\Omega)} + ||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)} + ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)} + 3)||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \\ ||g_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||J_t(t)||^4_{L^6(\Omega)}(||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla(\Delta u(t))||^2_{L^2(\Omega)}) + \\ + ||J_t(t)||^2_{L^6(\Omega)}||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||b_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}||u(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}\Big). \end{gathered} \tag{4.46}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall, resulta que

$$||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_7\Big(||w_0||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T ||g_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||J_t(t)||^4_{L^6(\Omega)}(||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$||\nabla(\Delta u(t))||^2_{L^2(\Omega)}) + ||J_t(t)||^2_{L^6(\Omega)}||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||b_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}||u(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}\Big),$$

com C_7 dependendo de $||\nabla J||_{L^\infty(0,T;L^6(\Omega))}, ||b||_{L^\infty(Q)}$. Como $w_0 \in L^2(\Omega)$ (veja (4.43)), temos

$$\max_{t\in[0,T]} ||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_8 \left(1 + ||u_0||^2_{H^2(\Omega)} + ||g||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + ||b_t||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right), \tag{4.47}$$

com C_8 dependendo de $||\nabla J||_{L^\infty(0,T;L^6(\Omega))}, ||b||_{L^\infty(Q)}, ||g(0)||^2_{L^2(\Omega)}, ||b(0)||^2_{L^2(\Omega)}$ e $||J(0)||^2_{L^\infty(\Omega)}$.

Integrando a equação (4.46) em $(0,t)$, com $t \in [0,T]$, e usando a estimativa (4.47), obtemos

$$||\nabla w||^2_{L^2(Q)} \leq C_9 \left(1 + ||u_0||^2_{H^2(\Omega)} + ||g||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + ||b_t||^2_{L^2(Q)}\right). \tag{4.48}$$

Portanto, $u' \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

Escolhendo $v = -\Delta w$ em (4.44), integrando em Ω, usando a hipótese **(H)** e as desigualdades de Hölder e Young, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}||\Delta w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \\ C_{10}\Big(||b(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||J_t(t)||^2_{L^6(\Omega)}||\Delta u(t)||^2_{L^3(\Omega)} + \\ ||b_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}||u(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||g_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big). \end{aligned} \tag{4.49}$$

Observando que

$$\nabla w_0 = \nabla g(0) + \nabla J(0)\Delta u(0) + J(0)\nabla(\Delta u(0)) - \nabla b(0)u(0) - b(0)\nabla u(0),$$

e usando as seguintes hipóteses:

$$\left\{\begin{array}{rcl} g & \in & C([0,T];H^1(\Omega)), \\ J & \in & C([0,T];H^2(\Omega)), \\ u_0 & \in & H^3(\Omega) \text{ o que implica } \nabla(\Delta u(0)) \in L^2(\Omega), \\ b & \in & C([0,T];H^2(\Omega)), \end{array}\right.$$

tem-se $\nabla w_0 \in L^2(\Omega)$.

Integrando (4.49) em $(0,t)$, com $t \in [0,T]$, obtemos

$$\max_{t\in[0,T]} ||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\Delta w||^2_{L^2(Q)} \leq$$

$$C_{11}\Big(||b||^2_{L^\infty(Q)}||w||^2_{L^2(Q)} + ||J_t||^2_{L^\infty(0,T;L^6(\Omega))}||\Delta u||^2_{L^2(0,T;L^3(\Omega))}+$$
$$||b_t||^2_{L^2(Q)}||u||^2_{L^\infty(Q)} + ||g_t||^2_{L^2(Q)} + ||\nabla w_0||^2_{L^2(\Omega)}\Big). \tag{4.50}$$

Usando combinando (4.40), (4.47) e (4.50) temos

$$\max_{t\in[0,T]} ||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta w||^2_{L^2(Q)} \leq$$

$$C_{12}\Big(1 + ||u_0||_{H^3(\Omega)} + ||g||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + ||g_t||^2_{L^2(Q)} + ||b_t||^2_{L^2(Q)}\Big),$$

com a constante C_{12} dependendo de $||J||_{L^\infty(0,T;H^1\Omega))}$, $||b||_{L^\infty(Q)}$, $||b_t||_{L^2(Q)}$, $||g(0)||_{H^1(\Omega)}$, $||b(0)||_{W^1_\infty(\Omega)}$ e $||J(0)||_{W^1_\infty(\Omega)}$.

Portanto, $u' \in C([0,T];H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$ e a prova do teorema 4.3 está completa. $\square$

4.2 Solução local: prova do teorema 4.1

Nesta seção provaremos o teorema 4.1. Para isto, vamos substituir na equação (4.6) o inverso da temperatura $u = \dfrac{1}{\theta}$ e obter

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{u}\right) - a\,\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -K\Delta u \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - Ku^2\Delta u = -a\,u^2\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Deste modo, temos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2\Delta\varphi = \varphi - \varphi^3 + a\,\varphi\,u && \text{em} \quad Q,\\
&\frac{\partial u}{\partial t} - Ku^2\Delta u = -a\,u^2\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial t} && \text{em} \quad Q,\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 && \text{em} \quad S,\\
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \;\; u(x,0) = u_0(x) && \text{em} \quad \Omega,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

com $u_0 = \dfrac{1}{\theta_0} > 0$. Para aplicarmos o teorema da contração, vamos considerar o seguinte conjunto:

$$X = \left\{\begin{array}{l}
(\varphi,u)\,;\,(\varphi,u)\in (C([0,T];H^2(\Omega)))^2\,,\,(\varphi_t,u_t)\in (C([0,T];H^1(\Omega))^2\,,\\
||(\varphi,u)||_{(C([0,T];H^2(\Omega)))^2} \leq R\,,\; ||(\varphi_t,u_t)||_{(C([0,T];H^1(\Omega)))^2} \leq R\,,\\
u(x,t) \geq m > 0.
\end{array}\right\} \tag{4.52}$$

com $m = \dfrac{1}{2}\min_{\Omega} u_0(x) = \dfrac{m_0}{2}$.

Então, definimos o operador $\Phi : X \to X$ do seguinte modo: para $(\psi, v) \in X$ $(\varphi, u) = \Phi(\psi, v)$ é a única solução do problema linearizado:

$$\varphi_t - \xi^2 \Delta\varphi = \psi - \psi^3 + av\psi \quad \text{em} \quad Q, \tag{4.53}$$

$$u_t - Kv^2 \Delta u + av\psi\varphi_t u = 0 \quad \text{em} \quad Q, \tag{4.54}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \;\; \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{4.55}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \;\; u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{4.56}$$

com $u_0(x) \geq \min_{\Omega} u_0(x) = m_0 > 0$.

Vamos assumir que o operador Φ está bem definido. Ou seja, para $(\psi, v) \in X$ tem-se que $\Phi(\psi, v) = (\varphi, u) \in X$.

No que segue, faremos alguns comentários sobre esta hipótese.

Observemos que, para $\psi, v \in C([0,T]; H^2(\Omega))$ e $\psi_t, v_t \in C([0,T]; H^1(\Omega))$ temos que $\psi - \psi^3 + av\psi \in C([0,T]; L^\infty(\Omega))$ e $(\psi - \psi^3 + av\psi)_t = \psi_t - 3\psi^2\psi_t + av_t\psi + av\psi_t \in C([0,T]; H^1(\Omega))$. Portanto, pelos resultados da teoria das equações diferenciais parabólicas lineares (veja, por exemplo, teorema 2.4, p. 23), com $\varphi_0 \in H^3(\Omega)$ existe uma única solução φ tal que $\varphi \in C([0,T]; H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^3(\Omega))$, $\varphi_t \in C([0,T]; H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^3(\Omega))$ e $\varphi_{tt} \in L^2(0,T; H^2(\Omega))$.

Por outro lado, para $(\psi, v) \in (C([0,T]; H^2(\Omega)))^2$, $\varphi_t \in C([0,T]; H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^3(\Omega))$ e $\varphi_{tt} \in L^2(0,T; H^2(\Omega))$ tem-se $a\, v\psi\varphi_t \in C([0,T]; H^2(\Omega))$ e $(av\psi\varphi_t)_t = av_t\psi\varphi_t + av\psi_t\varphi_t + $ $+ av\psi\varphi_{tt} \in L^2(0,T; H^2(\Omega))$. Logo, pelo teorema 4.3, p. 45 temos que existe uma única solução u do problema (4.54) tal que $u \in C([0,T]; H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^3(\Omega))$, $u_t \in C([0,T]; H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega))$.

Além disso, aplicando o resultado [4, teorema 5.3, p. 320] com $v^2 \in C(\bar{Q})$, $v\psi\varphi_t \in C(\bar{Q})$ e $u_0 \in H^4(\Omega)$ obtemos que $u \in H^{2,1}(Q)$, com $H^{2,1}(Q)$ o espaço das funções Hölder contínuas com segunda derivada no espaço e primeira derivada no tempo também Hölder contínuas.

Agora vamos verificar que a solução u satisfaz $u(x,t) \geq m > 0$.

Lema 4.3 *Existe $T_0 > 0$ tal que a solução u do problema* (4.54) *satisfaz $u \geq m > 0$ em $t \in [0, T_0]$.*

Demonstração: Vamos primeiro mostrar que $u(x,t) > 0$ em Q. Para isso, mostraremos que a parte negativa de u, denotada por u^-, é zero. Multiplicando a equação (4.54) por u^-, integrando em Ω, usando a fórmula de Green e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)}+K\int_\Omega v^2|\nabla u^-(t)|^2 \leq a||v(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\varphi_t(t)||_{L^\infty(\Omega)}||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)}+$$

$$2K||v(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||_{L^6(\Omega)}||u^-(t)||_{L^3(\Omega)}||\nabla u^-(t)||_{L^2(\Omega)}.$$

Lembrando que $v^2 \geq m^2 = \alpha > 0$ (pois $v \in X$) e usando as desigualdades de Young e de interpolação (4.36), temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{K\alpha}{2}||\nabla u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$a||v(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\varphi_t(t)||_{L^\infty(\Omega)}||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||^2_{L^6(\Omega)}||u^-(t)||^2_{L^3(\Omega)}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} + K\alpha||\nabla u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$C_1\Big(||v(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\varphi_t(t)||_{L^\infty(\Omega)}||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)}+$$

$$||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||^2_{L^6(\Omega)}\Big(||u^-(t)||_{L^2(\Omega)}||\nabla u^-(t)||_{L^2(\Omega)} + ||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Usando novamente a desigualdade de Young, resulta que

$$\frac{d}{dt}||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} + K\alpha||\nabla u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$C_2||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big(||v(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\varphi_t(t)||_{L^\infty(\Omega)}+$$

$$||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||v(t)||^4_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||^4_{L^\infty(\Omega)}\Big).$$

Usando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$||u_0^-||^2_{L^2(\Omega)} \exp\Big(\int_0^T C_3\Big(||v(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\varphi_t(t)||_{L^\infty(\Omega)}+$$

$$||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||v(t)||^4_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||^4_{L^\infty(\Omega)}\Big)\Big).$$

Portanto,

$$||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||u_0^-||^2_{L^2(\Omega)}e^{\overline{C}T} \leq C_4||u_0^-||^2_{L^2(\Omega)},$$

com C_4 dependendo de $||v||_{L^\infty(Q)}, ||\psi||_{L^\infty(Q)}, ||\varphi_t||_{L^\infty(Q)}$. Mas, por hipótese, $u_0 \geq \min_\Omega u_0(x) = m_0 > 0$ e, logo, $u_0^- = 0$. Portanto,

$$||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq 0 \Longrightarrow u^-(t) = 0$$

em Q, o que implica $u(x,t) > 0$ em Q.

Agora, considere $b = a\, v\psi\varphi_t$ e $w = ue^{-\lambda t}$ com $\lambda = -(||b||_{L^\infty(Q)} + 1)$. Como $b \in C(\bar{Q})$ tem-se $b \leq ||b||_{\infty,Q} = \max\limits_{(x,t)\in\bar{Q}} |b(x,t)|$. Logo, $b < ||b||_{L^\infty} + 1 = -\lambda$. Portanto

$$b + \lambda < 0, \quad \text{em} \quad Q. \tag{4.57}$$

Por outro lado, substituindo $u = we^{\lambda t}$ na equação (4.54) obtemos

$$w_t - Kv^2\Delta w + (b+\lambda)w = 0.$$

Deste modo, $w(x,t)$ satisfaz o seguinte problema:

$$\begin{array}{rcll} w_t - Kv^2\Delta w + (b+\lambda)w & = & 0 & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} & = & 0 & \text{em } S, \\ w(x,0) & = & u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{array} \tag{4.58}$$

Como $u(x,t) > 0$ em Q então $w(x,t) > 0$ em Q. Além disso, usando (4.57) podemos aplicar o *princípio do mínimo* e concluir que o mínimo de $w(x,t)$ é atingido em $t = 0$ e $x \in \Omega$, ou seja,

$$\min_\Omega w(x,0) = u_0(x).$$

Observe que o mínimo de $w(x,t)$ não pode ser atingido em pontos da fronteira, pois $\dfrac{\partial w}{\partial \eta} = 0$ em S.

Portanto,

$$\min_Q u(x,t) \geq \min_Q w(x,t)e^{\lambda t} = u_0(x)e^{\lambda t} \geq m_0 e^{\lambda t},$$

com $m_0 = \min\limits_\Omega u_0$. Assim, escolhendo $T_0 = \dfrac{\ln 2}{||b||_{\infty,Q} + 1}$, temos que

$$\min_Q u(x,t) \geq m_0 e^{\lambda t} > \frac{m_0}{2} = m$$

E a prova do lema 4.3 está completa. $\square$

Para finalizar, devemos escolher $R > 0$ e impor algumas restrições em T para mostrar que: $\Phi(\psi, v) = (\varphi, u) \in X$ se $(\psi, v) \in X$. Este procedimento é análogo ao realizado na seção 3.1 do capítulo 3 com maior grau de complexidade e é obtido usando a teoria clássica das equações parabólicas lineares. Omitiremos os detalhes neste trabalho e assumiremos que existe um T^* tal que $R > 0$ está bem determinado.

Agora vamos provar que Φ é uma **contração**.

Sejam $(\psi_i, v_i) \in X,\ i = 1, 2,,\ \psi = \psi_1 - \psi_2, \varphi = \varphi_1 - \varphi_2, u = u_1 - u_2$ e $v = v_1 - v_2$. Queremos mostrar que existe $k \in (0, 1)$ tal que

$$||\Phi(\psi_1, v_1) - \Phi(\psi_2, v_2)||_X \leq k||(\psi_1, v_1) - (\psi_2, v_2)||_X.$$

Assim, pela definição de Φ, temos o seguinte problema:

$$\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi = (\psi_1 - \psi_1^3) - (\psi_2 - \psi_2^3) + a(v_1\psi_1 - v_2\psi_2) \quad \text{em} \quad Q, \tag{4.59}$$

$$u_t - Kv_1^2\Delta u_1 + Kv_2^2\Delta u_2 + av_1(\varphi_1)_t\psi_1 u_1 - av_2(\varphi_2)_t\psi_2 u_2 = 0 \quad \text{em} \quad Q, \tag{4.60}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\eta} = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{4.61}$$

$$\varphi(x, 0) = 0,\ u(x, 0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{4.62}$$

Fazendo $d(\psi_1, \psi_2) = 1 - (\psi_1^2 + \psi_1\psi_2 + \psi_2^2) \in L^\infty(Q)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
(\psi_1 - \psi_1^3) - (\psi_2 - \psi_2^3) + a(v_1\psi_1 - v_2\psi_2) &= d(\psi_1, \psi_2)\psi + a(v_1\psi_1 - v_2\psi_2) \\
&= d(\psi_1, \psi_2)\psi + a(v_1\psi_1 - v_1\psi_2 + v_1\psi_2 - v_2\psi_2) \\
&= d(\psi_1, \psi_2)\psi + a(v_1\psi + v\psi_2) \\
&= (d(\psi_1, \psi_2) + av_2)\psi + a\psi_1 v \\
&= \overline{d}(\psi_1, \psi_2)\psi + a\psi_1 v, \qquad (4.63)
\end{aligned}$$

com $\overline{d}(\psi_1, \psi_2) = d(\psi_1, \psi_2) + av_2 \in C([0, T]; H^2(\Omega)) \subset L^\infty(Q)$.

Além disso, observemos que

$$\begin{aligned}
-Kv_1^2\Delta u_1 + Kv_2^2\Delta u_2 &= -Kv_1\Delta u_1 + K(v_1^2\Delta u_2 - v_1^2\Delta u_2) + Kv_2^2\Delta u_2 \\
&= -Kv_1^2\Delta u - K(v_1^2 - v_2^2)\Delta u_2. \qquad (4.64)
\end{aligned}$$

Lembrando que $v_1^2 - v_2^2 = (v_1 + v_2)v$ e fazendo $\beta = (K(v_1 + v_2)\Delta u_2 - a(\varphi_1)_t\psi_1 u_2)$, temos que o segundo de (4.64) torna-se

$$K(v_1^2 - v_2^2)\Delta u_2 - av(\varphi_1)_t\psi_1 u_2 - a\varphi_t\psi_1 v_2 u_2 - a(\varphi_2)_t\psi v_2 u_2 =$$
$$(K(v_1 + v_2)\Delta u_2 - a(\varphi_1)_t\psi_1 u_2)v - a(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi)v_2 u_2 =$$
$$\beta v - a\Big(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi\Big)v_2 u_2. \tag{4.65}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u_1 - v_2(\varphi_2)_t\psi_2 u_2 &= v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u_1 - v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u_2 + v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u_2 - v_2(\varphi_2)_t\psi_2 u_2 \\
&= v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u + \Big(v_1(\varphi_1)_t\psi_1 - v_2(\varphi_2)_t\psi_2\Big)u_2 \\
&= v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u + \Big(v_1(\varphi_1)_t\psi_1 - v_2(\varphi_1)_t\psi_1 + v_2(\varphi_1)_t\psi_1 - \\
&- v_2(\varphi_2)_t\psi_2\Big)u_2 \\
&= v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u + \Big(v(\varphi_1)_t\psi_1 + \Big((\varphi_1)_t\psi_1 - (\varphi_2)_t\psi_2\Big)v_2\Big)u_2 \\
&= v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u + v(\varphi_1)_t\psi_1 u_2 + \Big((\varphi_1)_t\psi_1 - (\varphi_2)_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi_1 - \\
&- (\varphi_2)_t\psi_2\Big)v_2 u_2 \\
&= v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u + v(\varphi_1)_t\psi_1 u_2 + \varphi_t\psi_1 v_2 u_2 + (\varphi_2)_t\psi v_2 u_2. \qquad (4.66)
\end{aligned}$$

Desta forma, usando (4.63), (4.65) e (4.66) em (4.59)-(4.62), obtem-se:

$$\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi = \overline{d}(\psi_1, \psi_2)\psi + a\psi_1 v \quad \text{em} \quad Q, \tag{4.67}$$
$$u_t - Kv_1^2\Delta u + av_1(\varphi_1)_t\psi_1 u = \beta v - a(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi)v_2 u_2 \quad \text{em} \quad Q, \tag{4.68}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0, \frac{\partial u}{\partial\eta} = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{4.69}$$
$$\varphi(x,0) = 0, u(x,0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{4.70}$$

com $\beta \in C([0,T]; L^2(\Omega))$.

Além disso, notemos que $\overline{d}(\psi_1, \psi_2)\psi + a\psi_1 v \in C([0,T]; H^2(\Omega))$, $\overline{d_t}(\psi_1, \psi_2) = d_t + a(v_2)_t \in C([0,T]; H^1(\Omega))$, e ainda $(\overline{d}(\psi_1, \psi_2)\psi + a\psi_1 v)_t = \overline{d_t}(\psi_1, \psi_2)\psi + \overline{d}(\psi_1, \psi_2)\psi_t + a(\psi_1)_t v + a\psi_1 v_t \in \overline{d}(\psi_1, \psi_2)\psi + a\psi_1 v_t$ e portanto $(\overline{d}(\psi_1, \psi_2)\psi + a\psi_1 v)_t \in C([0,T]; H^1(\Omega))$.

Assim, pelo Teorema 2.4 do capítulo 2, p. 22, concluímos que existe uma única solução φ tal que $\varphi \in C([0,T]; H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^3(\Omega))$, $\varphi_t \in C([0,T]; H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^3(\Omega))$, $\varphi_{tt} \in L^2(0,T; H^2(\Omega))$.

Agora, multiplicando a equação (4.67) por φ, integrando em Ω, usando a fórmula de

Green e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 2\xi^2||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \overline{d}(\psi_1,\psi_2)\psi(t)\varphi(t) + a\int_\Omega \psi_1(t)v(t)\varphi(t)\\ &\leq ||\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^2(\Omega)}||\varphi(t)||_{L^2(\Omega)}+\\ &+ a||\psi_1(t)||_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||_{L^2(\Omega)}||\varphi(t)||_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 2\xi^2||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{2}(||\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} +\\ &+ a^2||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}) + \frac{1}{2}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{4.71}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall e lembrando que $\varphi(0) = 0$, temos que

$$||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$e^t\Big(\int_0^t \Big(||\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(\tau)||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||\psi_1(\tau)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\,d\tau\Big). \tag{4.72}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\max_{t\in[0,T^*]}||\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^\infty(\Omega)} &\leq C(||d(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^\infty(Q)} + a^2||v_2||^2_{L^\infty(Q)})\\ &\leq C(1 + ||\psi_1||^4_{L^\infty(Q)} + ||\psi_1\,\psi_2||^2_{L^\infty(Q)} + ||\psi_2||^4_{L^\infty(Q)} + ||v_2||^2_{L^\infty(Q)}).\end{aligned}$$

Logo,

$$\max_{t\in[0,T^*]}||\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^\infty(\Omega)} \leq C(1 + 3R^4 + R^2). \tag{4.73}$$

Usando (4.72) e (4.73), obtemos

$$\max_{t\in[0,T^*]}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 e^{T^*}T^*\left(\max_{t\in[0,T^*]}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T^*]}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{4.74}$$

com C_1 dependendo de a, R^2, R^4.

Integrando (4.71) em $(0,t)$ com $t \in [0,T^*]$, temos

$$\begin{aligned}2\xi^2||\nabla\varphi||^2_{L^2(Q)} &\leq \int_0^{T^*}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^{T^*}\Big(||\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} +\\ &+ a^2||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\,dt\end{aligned} \tag{4.75}$$

Usando o resultado de (4.74), obtemos

$$||\nabla\varphi||^2_{L^2(Q)} \leq C_2 e^{T^*}T^*(\max_{t\in[0,T^*]}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T^*]}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}). \tag{4.76}$$

com C_2 dependendo de a, R^2, R^4.

Agora, multiplicando a equação (4.67) por $-\Delta\varphi$ e integrando em Ω, tem-se

$$-\int_\Omega \varphi_t(t)\Delta\varphi(t) - \xi^2\int_\Omega |\Delta\varphi(t)|^2 = -\int_\Omega \overline{d}\psi(t)\Delta\varphi(t) + a\int_\Omega \psi_1(t)v(t)\Delta\varphi(t).$$

Usando a fórmula de Green e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_\Omega \nabla\varphi_t(t)\nabla\varphi(t) + \xi^2||\Delta\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||\overline{d}||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^2(\Omega)}||\Delta\varphi(t)||_{L^2(\Omega)} + a||\psi_1(t)||_{L^\infty(\Omega)} +$$
$$+||v(t)||_{L^2(\Omega)}||\Delta\varphi(t)||_{L^2(\Omega)}.$$

Usando a desigualdade de Young, tem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{2}||\Delta\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}(||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}).$$

Integrando em $(0,t)$ com $t \in [0,T^*]$, temos

$$||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\Delta\varphi||^2_{L^2(Q)} \leq ||\overline{d}||^2_{L^\infty(Q)}\int_0^{T^*} ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt + a^2||\psi_1||^2_{L^\infty(Q)}\int_0^{T^*} ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt.$$

Portanto,

$$\max_{t\in[0,T^*]}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\Delta\varphi||^2_{L^2(Q)} \leq C_3T^*(\max_{t\in[0,T^*]}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T^*]}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}), \tag{4.77}$$

com C_3 dependendo de a, R^2, R^4.

Agora, vamos multiplicar a equação (4.67) por φ_t, integrar em Ω, usar a fórmula de Green e a desigualdade de Hölder para obter

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi_t(t)\varphi_t(t) - \xi^2\int_\Omega \Delta\varphi(t)\varphi_t(t) &= \int_\Omega \overline{d}\psi(t)\varphi_t(t) + a\int_\Omega \psi_1(t)v(t)\varphi_t(t) \\
&\leq ||\overline{d}||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^2(\Omega)}||\varphi_t(t)||_{L^2(\Omega)} + \\
&+ a||\psi_1(t)||_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||_{L^2(\Omega)}||\varphi_t(t)||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Usando desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2\int_\Omega \nabla\varphi(t)\nabla\varphi_t(t) &\leq \frac{1}{2}(||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}) \\
&+ \frac{1}{2}||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

assim, temos

$$||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando em $(0,t)$ com $t \in [0,T^*]$, temos

$$\int_0^{T^*} ||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^{T^*} ||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^{T^*} a^2||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)},$$

que resulta,

$$||\varphi_t||^2_{L^2(Q)} \leq C_4 T^* \left(\max_{t\in[0,T^*]} ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T^*]} ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)} \right), \tag{4.78}$$

com C_4 dependendo de a, R^2, R^4.

Agora, multiplicando a equação (4.67) por $\Delta(\Delta\varphi) = \Delta^2\varphi$, integrando em Ω e aplicando a fórmula de Green, temos

$$\int_\Omega \varphi_t \Delta^2\varphi - \xi^2 \int_\Omega (\Delta\varphi)(\Delta^2\varphi) = \int_\Omega (\overline{d}\psi + a\psi_1 v)(\Delta^2\varphi) = -\int_\Omega \nabla(\overline{d}\psi + a\psi_1 v)(\nabla(\Delta\varphi)).$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\Delta\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{2}||\nabla(\Delta\varphi(t))||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{4\xi^2}(||\nabla\overline{d}||^2_{L^2(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+ ||\nabla\psi_1(t)||^2_{L^2(\Omega)}||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||^2_{L^2(\Omega)}).$$

Usando desigualdade de Gronwall, temos

$$\max_{t\in[0,T^*]} ||\Delta\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{T^*} C_5 T^* \Big(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} + \max_{t\in[0,T^*]} (||\nabla\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v(t)||^2_{L^2(\Omega)}) \Big), \tag{4.79}$$

com C_5 dependendo de a, R^2, R^4.

As estimativas acimas garantem que $\varphi \in C([0,T^*]; H^2(\Omega))$.

Dando prosseguimento, vamos derivar a equação (4.67) em t, o que resulta

$$\varphi_{tt} - \xi^2\Delta\varphi_t = (\overline{d}\psi + a\psi_1 v)_t = \overline{d_t}\psi + \overline{d}\psi_t + a(\psi_1)_t v + a\psi_1 v_t.$$

Lembrando que $\varphi(x,0) = 0 \Rightarrow \Delta\varphi(x,0) = 0$, a condição inicial fica

$$\varphi_t(0) = \overline{d}(0)\psi(0) + a\psi_1(0)v(0) = w_0,$$

que está bem definida, pois $\overline{d}, \psi, \psi_1, v \in C([0,T]; H^2(\Omega))$.

E como $\varphi_0, u_0 \in H^3(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, então $\varphi_t(0) \in L^\infty(\Omega)$. Fazendo $\varphi_t = w$, temos o sistema

$$\begin{cases} w_t - \xi^2\Delta w &= \overline{d_t}\psi + \overline{d}\psi_t + a(\psi_1)_t v + a\psi_1 v_t & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} &= 0 & \text{em } S, \\ w(x,0) &= w_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.80}$$

Multiplicando (4.80) por w, integrando em Ω, usando a fórmula de Green e as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega w_t w - \xi^2 \int_\Omega w\Delta w &= \int_\Omega \overline{d_t}\psi w + \int_\Omega \overline{d}\psi_t w + a\int_\Omega (\psi_1)_t v w + a\int_\Omega \psi_1 v_t w \\ &\leq ||\overline{d_t}||_{L^2(\Omega)}||\psi(t)||_{L^\infty(\Omega)}||w(t)||_{L^2(\Omega)} \\ &+ ||\overline{d}||_{L^\infty(\Omega)}||\psi_t(t)||_{L^2(\Omega)}||w(t)||_{L^2(\Omega)} \\ &+ a||(\psi_1)_t(t)||_{L^2(\Omega)}||v(t)||_{L^\infty(\Omega)}||w(t)||_{L^2(\Omega)} \\ &+ a||\psi_1(t)||_{L^\infty(\Omega)}||v_t(t)||_{L^2}||w(t)||_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

o que resulta,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\Big(||\overline{d_t}||^2_{L^2(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||(\psi_1)_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + a^2||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) + \frac{1}{2}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \quad (4.81)$$

Usando a desigualdade de Gronwall, temos

$$||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{T^*}\Big(||w_0||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^{T^*}\Big(||\overline{d_t}||^2_{L^2(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + + ||(\psi_1)_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\,dt\Big). \quad (4.82)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}||\overline{d}_t(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq ||d_t(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||(v_2)_t||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq ||2\psi_1(\psi_1)_t + (\psi_1)_t\psi_2 + \psi_1(\psi_2)_t + 2\psi_2(\psi_2)_t||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||(v_2)_t||^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

logo,

$$||\overline{d}_t(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)} \leq 10R^4 + a^2R^2. \quad (4.83)$$

Usando (4.73) e (4.83) em (4.82) e lembrando que $\varphi_t = w$, temos

$$||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_6 e^{T^*}T^*\left(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} + \max_{t\in[0,T^*]}(||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)})\right), \quad (4.84)$$

com C_6 dependendo de a, R^2, R^4.

Integrando em $(0,t)$ a expressão (4.81) e usando (4.84), temos

$$\xi^2||\nabla\varphi_t||^2_{L^2(Q)} \leq C_7 e^{T^*}T^*\left(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} + \max_{t\in[0,T^*]}(||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)})\right). \quad (4.85)$$

Portanto, obtemos $\varphi_t \in C([0,T^*];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T^*;H^1(\Omega))$.

Agora, multiplicando a equação (4.80) por $-\Delta w$,

$$-\int_\Omega w_t \Delta w + \xi^2 \int_\Omega |\Delta w|^2 = -\int_\Omega (\overline{d_t}\psi + \overline{d}\psi_t + a(\psi_1)_t v + a\psi_1 v_t)\Delta w.$$

Aplicando a fórmula de Green e as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 4\xi^2||\Delta w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \\
||\nabla w||^2_{L^2(\Omega)} + \Big(||\nabla\overline{d_t}||^2_{L^2(\Omega)}||\psi||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\overline{d_t}||^2_{L^6(\Omega)}||\nabla\psi||^2_{L^3(\Omega)} + \\
||\nabla\overline{d}||^2_{L^6(\Omega)}||\psi_t||^2_{L^3(\Omega)} + ||\nabla(\psi_1)_t||^2_{L^2(\Omega)}||v||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla\psi_t||^2_{L^2(\Omega)} + \\
||(\psi_1)_t||^2_{L^6(\Omega)}||\nabla v||^2_{L^3(\Omega)} + ||\nabla\psi_1||^2_{L^6(\Omega)}||v_t||^2_{L^3(\Omega)} + ||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v_t||^2_{L^2(\Omega)}\Big).
\end{gathered} \tag{4.86}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
||\nabla\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^6(\Omega)} &\leq ||\nabla d(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^6(\Omega)} + a^2||\nabla v_2||^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\leq ||2\psi_1\nabla(\psi_1) + \nabla(\psi_1)\psi_2 + \psi_1\nabla(\psi_2) + 2\psi_2\nabla(\psi_2)||^2_{L^6(\Omega)} + a^2||\nabla(v_2)||^2_{L^6(\Omega)},$$

logo,

$$||\nabla\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^6(\Omega)} \leq 10R^4 + a^2R^2. \tag{4.87}$$

e também,

$$\begin{aligned}
||\nabla\overline{d}_t(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq ||\nabla d_t(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||\nabla(v_2)_t||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq ||2\nabla\psi_1(\psi_1)_t + 2\psi_1\nabla(\psi_1)_t + \nabla\psi_1(\psi_2)_t + \psi_1(\psi_2)_t \\
&+ \nabla(\psi_1)t\psi_2 + (\psi_1)_t\nabla\psi_2 + 2\nabla\psi_2(\psi_2)_t + 2\psi_2\nabla(\psi_2)_t||^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ a^2||\nabla(v_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$||\nabla\overline{d}_t(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)} \leq 20R^4 + a^2R^2. \tag{4.88}$$

Assim, usando (4.73), (4.83), (4.87), (4.88) e a desigualdade de Gronwall em (4.86), temos

$$||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{T^*}C_8\int_0^{T^*}\Big(||\psi(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\nabla\psi(t)||^2_{L^3(\Omega)} + ||\psi_t(t)||^2_{L^3(\Omega)} + ||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} +$$

$$||\nabla\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v(t)||^2_{L^3(\Omega)} + ||v_t(t)||^2_{L^3(\Omega)} + ||\nabla v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\, dt, \tag{4.89}$$

com C_8 dependendo de a, R^2, R^4.

Usaremos as interpolações

$$\begin{aligned}
||\nabla\psi||^2_{L^3(\Omega)} &\leq C(||\nabla\psi||_{L^2(\Omega)}||\Delta\psi||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\psi||^2_{L^2(\Omega)}),\\
||\psi_t||^2_{L^3(\Omega)} &\leq C(||\psi_t||_{L^2(\Omega)}||\nabla\psi_t||_{L^2(\Omega)} + ||\psi_t||^2_{L^2(\Omega)}),\\
||v_t||^2_{L^3(\Omega)} &\leq C(||v_t||_{L^2(\Omega)}||\nabla v_t||_{L^2(\Omega)} + ||v_t||^2_{L^2(\Omega)}),\\
||\nabla v||^2_{L^3(\Omega)} &\leq C(||\nabla v||_{L^2(\Omega)}||\Delta v||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)}).
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando-as na desigualdade (4.89), obtemos

$$\begin{aligned}
||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{T^*} C_8 \int_0^{T^*} \Big(&||\psi||^2_{L^\infty(\Omega)} + (||\nabla\psi||_{L^2(\Omega)}||\Delta\psi||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\psi||^2_{L^2(\Omega)}) +\\
&(||\psi_t||_{L^2(\Omega)}||\nabla\psi_t||_{L^2(\Omega)} + ||\psi_t||^2_{L^2(\Omega)}) + ||v||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\nabla\psi_t||^2_{L^2(\Omega)} +\\
&(||\nabla v||_{L^2(\Omega)}||\Delta v||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)}) + (||v_t||_{L^2(\Omega)}||\nabla v_t||_{L^2(\Omega)} + ||v_t||^2_{L^2(\Omega)}) +\\
&+ ||\nabla v_t||^2_{L^2(\Omega)}\Big) dt,
\end{aligned}$$

e portanto, para $w = \varphi_t$, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}
||\nabla\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq e^{T^*} C_8 T^* \Big(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} + \max_{t\in[0,T^*]} (||\nabla\psi(t)||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v(t)||^2_{L^2(\Omega)} +\\
&+ ||\Delta v(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} +\\
&+ ||\nabla\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)})\Big).
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Logo, as estimativas acima garantem que $\varphi_t \in C([0,T^*]; H^1(\Omega))$.

Vamos agora multiplicar a equação (4.80) por w_t para obter

$$\int_\Omega w_t w_t - \xi^2 \int_\Omega \Delta w w_t = \int_\Omega (\overline{d_t}\psi + \overline{d}\psi_t + a(\psi_1)_t v + a\psi_1 v_t) w_t$$

Usando a fórmula de Green e as desigualdades de Hölder e Young, temos

$$\begin{aligned}
||w_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{2}\Big(||\overline{d_t}||^2_{L^2(\Omega)}||\psi||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi_t||^2_{L^2(\Omega)} +\\
&+ a^2||(\psi_1)_t||^2_{L^2(\Omega)}||v||^2_{L^\infty(\Omega)} + a^2||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}||v_t||^2_{L^2(\Omega)}\Big) +\\
&+ \frac{1}{2}||w_t||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Integrando em $(0,t)$ com $t \in [0,\overline{T}]$, para $w_t = \varphi_{tt}$, concluímos que

$$||\varphi_{tt}||^2_{L^2(Q)} \leq C_9 T^* \left(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} + \max_{t\in[0,T^*]} \left(||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} \right) \right) \quad (4.91)$$

com C_9 dependendo de a, R^2, R^4.

Assim, temos que $\varphi_{tt} \in L^2(Q_{T^*})$.

Precisamos agora obter algumas estimativas para $u(x,t)$. Para isto usaremos a equação (4.68) e o fato de que, para $v_1 \in X$, tem-se $K\, v_1^2 \geq K\, m^2 = \alpha > 0$. Considere $J = K v_1^2 \geq \alpha > 0$ e $b = a v_1 (\varphi_1)_t \psi_1$.

Multiplicando a equação (4.68) por u e integrando em Ω, tem-se

$$\int_\Omega u_t u - \int_\Omega J(\Delta u) u + \int_\Omega b u u = \int_\Omega (\beta v - a(\varphi_t \psi_1 + (\varphi_2)_t \psi) v_2 u_2) u.$$

Usando a fórmula de Green, observe que

$$\begin{aligned} -\int_\Omega J(\Delta u) u = \int_\Omega \nabla u \nabla (J u) &= \int_\Omega \nabla u ((\nabla J) u + J(\nabla u)) \\ &= \int_\Omega \nabla J (\nabla u) u + \int_\Omega J |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Desta forma, lembrando que $J \geq \alpha > 0$, e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega J(t)|\nabla u(t)|^2 \leq$$

$$||\nabla J(t)||_{L^6(\Omega)} ||\nabla u(t)||_{L^2(\Omega)} ||u(t)||_{L^3(\Omega)} + ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)} ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$\Big(||\beta(t)||_{L^2(\Omega)} ||v(t)||_{L^\infty(\Omega)} + ||\varphi_t(t)||_{L^2(\Omega)} ||\psi_1(t)||_{L^\infty(\Omega)} +$$

$$|(\varphi_2)_t(t)||_{L^\infty(\Omega)} ||\psi(t)||_{L^2(\Omega)} \Big) ||u_2(t)||_{L^\infty(\Omega)} ||v_2(t)||_{L^\infty(\Omega)} ||u||_{L^2(\Omega)},$$

Logo, usando a desigualdade de Young, temos

$$\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha ||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\frac{1}{\alpha} ||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)} ||u(t)||^2_{L^3(\Omega)} + ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)} ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$\Big(||\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)} ||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} ||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} +$$

$$||(\varphi_2)_t(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \Big) ||u_2(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} ||v_2(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Usando a desigualdade de interpolação (4.36), tem-se

$$||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)} ||u||^2_{L^3(\Omega)} \leq$$

$$C\Big(||u||_{L^2(\Omega)}||\nabla u||_{L^2(\Omega)} + ||u||^2_{L^2(\Omega)}\Big)||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)} \leq$$

$$C\Big(||\nabla J(t)||^4_{L^6(\Omega)}||u||^2_{L^2(\Omega)} + \Big(||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + ||u||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\,||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)}\Big).$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C\Big(||\nabla J(t)||^4_{L^6(\Omega)} + ||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)} + ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)} + 1\Big)||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\Big(||\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)}||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} +$$

$$+ ||(\varphi_2)_t(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)||u_2(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v_2(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}. \tag{4.92}$$

Notemos que

$$||\nabla J(t)||^2_{L^6} = 4K^2||v_1\nabla v_1||^2_{L^6} \leq CR^4, \tag{4.93}$$

$$||b(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} = ||av_1\varphi_1\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)} \leq a^2\,R^6 \tag{4.94}$$

$$||\nabla b(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq a^2||\nabla v_1\varphi_1\psi_1 + v_1\nabla\varphi_1\psi_1 + v_1\varphi_1\nabla\psi_1||^2_{L^2(\Omega)} \leq 3a^2R^6 \tag{4.95}$$

e também,

$$\begin{aligned}
||\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq K^2(||v_1||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_2||^2_{L^2(\Omega)})||\Delta u_2||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||(\varphi_1)_t||^2_{L^2(\Omega)}\psi_1\,u_2||^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leq C(K,a)\,((R^2+R^2)R^2 + R^2R^2R^2),
\end{aligned}$$

logo,

$$||\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C(K,a)(2R^4 + R^6). \tag{4.96}$$

Usando (4.93), (4.94), (4.96) e a desigualdade de Gronwall em (4.92), temos

$$||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{\overline{C}T^*}C_{10}\left(||v||^2_{L^\infty(Q)}T^* + ||\varphi_t(t)||^2_{L^2(Q)} + T^*\max_{t\in[0,T^*]}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{4.97}$$

com C_{10} dependendo de K, R^2, R^4, R^6.

Usando (4.78) em (4.97) obtemos que

$$||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{\overline{C}T^*}C_{10}T^*\left(\max_{t\in[0,T^*]}(||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}) + ||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)}\right). \tag{4.98}$$

Vamos agora multiplicar a equação (4.68) por $-\Delta u$ e integrar em Ω:

$$-\int_\Omega u_t\Delta u + \int_\Omega J|\Delta u|^2 - \int_\Omega b\Delta u u = -\int_\Omega(\beta v - a(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi)v_2u_2)\Delta u.$$

Lembrando que $J \geq \alpha > 0$ e usando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\Delta u(t)||_{L^2(\Omega)}||u(t)||_{L^2(\Omega)} +$$
$$+\Big(||\beta(t)||_{L^2(\Omega)}||v(t)||_{L^\infty(\Omega)} + \Big(||\varphi_t(t)||_{L^2(\Omega)}||\psi_1(t)||_{L^\infty(\Omega)} +$$
$$+||(\varphi_2)_t(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^2(\Omega)}\Big)||u_2(t)||_{L^\infty(\Omega)}||v_2(t)||_{L^\infty(\Omega)}\Big)||\Delta u(t)||_{L^2(\Omega)}.$$

Usando a desigualdade de Young,

$$\frac{d}{dt}||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$
$$\frac{1}{\alpha}(||b(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}) + \Big(||\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)}||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}\Big) + (||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} +$$
$$||(\varphi_2)_t(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)})||u_2(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v_2(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}. \tag{4.99}$$

Integrando em $(0,t)$, para $t \in [0,T^*]$, e usando (4.94), (4.96), obtemos

$$||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_{11}T^* \max_{t\in[0,T^*]}(||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}) + C_{11}(\max_{t\in[0,T^*]}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\overline{T} + ||\varphi_t||^2_{L^\infty(Q)}), \tag{4.100}$$

com C_8 dependendo de K, a, R^2, R^4, R^6. Usando (4.78), (4.98) em (4.100), temos

$$\begin{aligned} ||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta u||^2_{L^2(Q)} &\leq C_{11}T^*(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} + \\ &+ \max_{t\in[0,T^*]}(||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)})). \end{aligned} \tag{4.101}$$

Vamos multiplicar a equação (4.68) por $\Delta^2 u$ e integrar em Ω:

$$\int_\Omega u_t\Delta^2 u - \int_\Omega J\Delta u\Delta^2 u + \int_\Omega bu\Delta^2 u = \int_\Omega \Big(\beta v - a\left(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi\right)v_2u_2\Big)\Delta^2 u.$$

Usando a fórmula de Green, tem-se que:

$$\begin{aligned} -\int_\Omega J\Delta u\Delta^2 u &= \int_\Omega \nabla J\Delta u(\nabla(\Delta u)) + \int_\Omega J|\nabla(\Delta u)|^2, \\ \int_\Omega bu\Delta^2 u &= \int_\Omega (\nabla b)u(\nabla(\Delta u)) + \int_\Omega b\nabla u\nabla(\Delta u). \end{aligned}$$

Fazendo $F(t) = \Big(\beta v - a\Big(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi\Big)v_2u_2\Big)$ e usando as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla(\Delta u(t))||^2_{L^2(\Omega)} \leq \Big(||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)}||\Delta u(t)||^2_{L^3(\Omega)} +$$
$$||\nabla b(t)||^2_{L^2(\Omega)}||u(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||b(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$||\nabla F(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) + ||\nabla(\Delta u(t))||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Usando a interpolação,

$$||\Delta u||^2_{L^3(\Omega)} \leq C(||\Delta u||_{L^2(\Omega)}||\nabla(\Delta u)||_{L^2(\Omega)} + ||\Delta u||^2_{L^2(\Omega)}),$$

obtemos,

$$\frac{d}{dt}||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla(\Delta u(t))||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)}\Big(||\Delta u(t)||_{L^2(\Omega)}||\nabla(\Delta u(t))||_{L^2(\Omega)}+$$

$$+||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) + ||\nabla b(t)||^2_{L^2(\Omega)}||u(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}+$$

$$+||b(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla F(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla(\Delta u(t))||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)}||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla J(t)||^4_{L^6(\Omega)}||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)}+$$

$$||\nabla b(t)||^2_{L^2(\Omega)}||u(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||b(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla F(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.102}$$

Portanto, usando (4.93), (4.94), (4.95) e a desigualdade de Gronwall em (4.102), obtemos

$$||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla(\Delta u)||^2_{L^2(Q)} \leq$$

$$e^{\overline{C}T^*}C_{11}\left(\int_0^{\overline{T}} ||u(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla F(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt\right), \tag{4.103}$$

com C_{11} dependendo de K, a, R^2, R^4, R^6.

Agora, vamos estimar a norma $||\nabla F(t)||^2_{L^2(\Omega)}$. Observe que:
$||\nabla F(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||\nabla\beta||^2_{L^2(\Omega)}||v||^2_{L^2(\Omega)} + ||\beta||^2_{L^2(\Omega)}||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)}+$

$$\begin{aligned}
&+ \quad ||u_2||^2_{L^\infty(\Omega)}||v_2||^2_{L^\infty(\Omega)}\Big(||\nabla\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}+\\
&+ \quad ||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}||\nabla\psi_1||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla(\varphi_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}||\psi||^2_{L^2(\Omega)} + ||(\varphi_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}||\nabla\psi||^2_{L^2(\Omega)}\Big)+\\
&+ \quad ||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla u_2||^2_{L^2(\Omega)}||v_2||^2_{L^\infty(\Omega)}+\\
&+ \quad ||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}||u_2||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v_2||^2_{L^2(\Omega)}\\
&+ \quad ||(\varphi_2)_t||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi||^2_{L^2(\Omega)}||\nabla u_2||^2_{L^2(\Omega)}||v_2||^2_{L^\infty(\Omega)}\\
&+ \quad ||(\varphi_2)_t||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi||^2_{L^2(\Omega)}||u_2||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v_2||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
||\nabla\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)} \quad &\leq \quad ||K(\nabla v_1 + \nabla v_2)\Delta u_2 + K(v_1+v_2)\Delta u_2 +\\
&+ \quad a\nabla(\varphi_1)_t\psi_1 u_2 + a(\varphi)_t(\nabla\psi_1 u_2 + \psi_1\nabla u_2)||^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

e, logo,

$$||\nabla\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq (4K^2R^4 + 3a^2R^6). \tag{4.104}$$

Usando (4.96), (4.104), podemos concluir que

$$\begin{aligned}\int_0^{T^*} ||\nabla F(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq \widehat{C}\int_0^{T^*}\Big(||v(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \\ &+ ||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big),\end{aligned} \tag{4.105}$$

com $\widehat{C}$ dependendo de K, a, R^2, R^4, R^6.

Logo, substituindo a expressão (4.105) em (4.103) e usando as estimativas (4.84), (4.90), e (4.101), resulta que

$$\begin{aligned}||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla(\Delta u)||^2_{L^2(Q)} &\leq e^{\overline{C}T^*}C_{12}T^*\Big(||u||^2_{L^\infty(Q)} + ||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} + \\ &+ \max_{t\in[0,T^*]}(||v(t)||^2_{H^2(\Omega)} + ||\psi(t)||^2_{H^2(\Omega)} + ||\psi_t(t)||^2_{H^1(\Omega)} + \\ &+ ||v_t(t)||^2_{H^1(\Omega)})\Big)\end{aligned} \tag{4.106}$$

com C_{12} dependendo de K, a, R^2, R^4, R^6.

Portanto, $u \in C([0,T^*]; H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T^*; H^3(\Omega))$.

Vamos agora derivar a equação (4.68) em relação a t,

$$u_{tt} - J\Delta u_t - J_t\Delta u + bu_t + b_tu = \Big(\beta v - a\Big(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi\Big)u_2v_2\Big)_t.$$

Desenvolvendo o segundo membro, temos

$$\begin{aligned}(\beta v - a(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi)u_2v_2)_t &= \beta_tv + \beta v_t - a(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi)_t\, u_2v_2 - a(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi)(u_2v_2)_t \\ &= \beta_tv + \beta v_t - a(\varphi_{tt}\psi_1 + \varphi_t(\psi_1)_t + (\varphi_2)_{tt}\psi + (\varphi_2)_t\,\psi_t)u_2v_2 - \\ &- a(\varphi_t\psi_1(u_2)_tv_2 + \varphi_t\psi_1u_2(v_2)_t + (\varphi_2)_t\,\psi(u_2)_t\,v_2 + (\varphi_2)_t\,\psi u_2(v_2)_t) \\ &= G(t).\end{aligned}$$

Uma vez que $u(0) = 0 \Rightarrow \Delta u(0) = 0$ e $\beta(0) = K(v_1(0) + v_2(0))\Delta u_2(0) - a(\varphi_1)_t(0)u_2(0)$ então $u_t(0)$ está bem definido, tal que

$$u_t(0) = \beta(0)v(0) - a(\varphi_t(0)\psi_1(0) + (\varphi_2)_t(0)\psi(0))u_2(0)v_2(0) = \overline{w_0}$$

Portanto, fazendo $u_t = w$, temos o sistema

$$\begin{array}{rcll} w_t - J\Delta w - J_t\Delta u + bw + b_t u & = & G(t) & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} & = & 0 & \text{em } S, \\ w(x,0) & = & \overline{w_0} & \text{em } \Omega. \end{array} \tag{4.107}$$

Agora multiplicando a equação (4.107) por w e integrar em Ω:

$$\int_\Omega w_t w - \int_\Omega J(\Delta w)w - \int_\Omega J_t(\Delta u)w + \int_\Omega bw^2 + \int_\Omega b_t uw = \int_\Omega G(t)w.$$

Usando fórmula de Green, observe que

$$-\int_\Omega Jw\Delta w = \int_\Omega (\nabla J)w\nabla w + \int_\Omega J|\nabla w|^2.$$

Desta forma, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega J(t)|\nabla w(t)|^2 \leq$$

$$\int_\Omega J_t(t)(\Delta u(t))w(t) - \int_\Omega (\nabla J(t))w(t)\nabla w(t) - \int_\Omega b(t)w^2(t) -$$

$$-\int_\Omega b_t(t)u(t)w(t) + \int_\Omega G(t)w(t),$$

e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||J_t||_{L^6(\Omega)}||\Delta u(t)||_{L^2(\Omega)}||w(t)||_{L^3(\Omega)} +$$

$$+||\nabla J(t)||_{L^6(\Omega)}||w(t)||_{L^3(\Omega)}||\nabla w(t)||_{L^2(\Omega)} + ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+||b_t||_{L^2(\Omega)}||u(t)||_{L^\infty(\Omega)}||w(t)||_{L^2(\Omega)} + ||G(t)||_{L^2(\Omega)}||w(t)||_{L^2(\Omega)}.$$

Aplicando a desigualdade de Young e usando a interpolação (4.36), resulta que

$$\frac{d}{dt}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_0(t)||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \Big(||G(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ ||b_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}||u(t)|^2_{L^2(\Omega)} + +||w(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}\Big), \tag{4.108}$$

em que $C_0(t) = (2 + ||b||_{L^\infty(\Omega)} + ||J_t||^2_{L^6(\Omega)} + ||\nabla J||^2_{L^6(\Omega)} + ||J_t||^4_{L^6(\Omega)} + ||\nabla J||^4_{L^6(\Omega)})$.

Notemos que

$$||J_t(t)||^2_{L^6(\Omega)} \leq 4||K(v_1)_t||^2_{L^6(\Omega)} \leq 4K^2R^2, \tag{4.109}$$

e também,

$$||\beta_t||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$||K((v_1)_t\Delta u_2 + (v_2)_t\Delta u_2 + v_1\Delta(u_2)_t + v_2(\Delta u_2)_t) - a((\varphi_1)_t t - (\varphi_1)_t(u_2)_t)||^2_{L^2(\Omega)},$$

e logo,

$$||\beta_t||^2_{L^2(\Omega)} \leq 4K^2R^4 + 2a^2R^4. \tag{4.110}$$

Assim, usando (4.93), (4.94), (4.109) e a desigualdade de Gronwall em (4.108), temos

$$||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{\overline{C_0}\,T^*}\left(||\overline{w_0}||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta u||_{L^2(Q)} + \int_0^{T^*} ||G(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt\right), \tag{4.111}$$

com $\overline{C_0}$ dependendo de K, a, R^2, R^4.

Analisando o termo $||G||^2_{L^2(\Omega)}$, temos

$$\begin{aligned}
||G(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq ||\beta_t||^2_{L^2(\Omega)}||v||^2_{L^2(\Omega)} + ||\beta||^2_{L^2(\Omega)}||v_t||^2_{L^2(\Omega)} + a^2\Big(||\varphi_{tt}||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}+\\
&+ ||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}||(\psi_1)_t||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||(\varphi_2)_{tt}||^2_{L^2(\Omega)}||\psi||^2_{L^2(\Omega)}+\\
&+ ||(\varphi_2)_t||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi_t||^2_{L^2(\Omega)}\Big)||u_2||^2_{L^\infty(\Omega)}||v_2||^2_{L^\infty(\Omega)}-\\
&- a^2\Big(||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}||(u_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}||v_2||^2_{L^\infty(\Omega)}+\\
&+ ||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}||u_2||^2_{L^\infty(\Omega)}||(v_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}+\\
&+ ||(\varphi_2)_t||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi||^2_{L^2(\Omega)}||(u_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}||v_2||^2_{L^\infty(\Omega)}+\\
&+ ||(\varphi_2)_t||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi||^2_{L^2(\Omega)}||u_2||^2_{L^\infty(\Omega)}||(v_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}\Big).
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Usando (4.96), (4.110) e integrando (4.112) em $(0, t)$ com $t \in [0, T^*]$, temos que

$$\int_0^{T^*} ||G(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$C_{13}\int_0^{T^*}\Big(||v||^2_{L^2(\Omega)}+||v_t||^2_{L^2(\Omega)}+||\varphi_{tt}||^2_{L^2(\Omega)}+||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}+||\psi||^2_{L^2(\Omega)}+||\psi_t||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\,dt, \tag{4.113}$$

com C_{13} dependendo de K, a, R^2, R^4, R^6.

Logo, usando a estimativa obtida em (4.101), (4.91), (4.84) e a expressão (4.113), e aplicando em (4.111), obtemos

$$\begin{aligned}
||u_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq C_{13}T^*\Big(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} +\\
&+ \max_{t\in[0,T^*]}\Big(||v(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\Big).
\end{aligned} \tag{4.114}$$

com C_{13} dependendo de $||\overline{w_0}||^2_{L^2(\Omega)}, K, a, R^2, R^4, R^6$.

Vamos multiplicar a equação (4.107) por $-\Delta w$ e integrar em Ω:

$$-\int_\Omega w_t \Delta w - \int_\Omega J|\Delta w|^2 + \int_\Omega J_t \Delta u \Delta w - \int_\Omega bw\Delta w - \int_\Omega b_t u \Delta w = -\int_\Omega G\Delta w.$$

Usando que $J \geq \alpha > 0$ e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\Delta w(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq ||J_t||_{L^6(\Omega)}||\Delta u(t)||_{L^3(\Omega)}||\Delta w(t)||_{L^2(\Omega)} + \\
&+ ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)}||w(t)||_{L^2(\Omega)}||\Delta w(t)||_{L^2(\Omega)} + \\
&+ ||b_t||_{L^2(\Omega)}||u(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\Delta w(t)||_{L^2(\Omega)} + \\
&+ ||G(t)||_{L^2(\Omega)}||\Delta w(t)||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young, tem-se

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}||\Delta w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \\
\frac{1}{2}\Big(||J_t||^2_{L^6(\Omega)}||\Delta u(t)||^2_{L^3(\Omega)} + ||b(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \\
||b_t||^2_{L^\infty(\Omega)}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||G(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big).
\end{gathered} \tag{4.115}$$

Usando (4.109), (4.110), (4.94) e integrando (4.115) em $(0,t)$ com $t \in [0,T]$, temos

$$\begin{gathered}
||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\Delta w||^2_{L^2(Q)} \leq \\
C_{14}\Big(\int_0^{T^*} (||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta u||^2_{L^3(\Omega)} + ||w||^2_{L^2(\Omega)} + ||G||^2_{L^2(\Omega)})dt\Big),
\end{gathered}$$

em que C_{14} depende de K, a, R^2, R^4, R^6.

Usando o resultado de interpolação, observemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{T^{ast}} ||\Delta u||^2_{L^3(\Omega)} &\leq C\int_0^{T^{ast}} \Big(||\Delta u||_{L^2(\Omega)}||\nabla(\Delta u)||_{L^2(\Omega)} + ||\Delta u||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \\
&\leq C\int_0^{T^{ast}} \Big(||\Delta u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla(\Delta u)||^2_{L^2(\Omega)}\Big),
\end{aligned}$$

e assim, usando os resultados já obtido em (4.113), (4.106) e (4.101), resulta que

$$\begin{gathered}
||\nabla u_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\Delta u_t||^2_{L^2(Q)} \leq \\
C_{14}T^{ast}\Big(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} +
\end{gathered}$$

$$\max_{t\in[0,T^{ast}]}(||v(t)||^2_{H^2(\Omega)} + ||\psi(t)||^2_{H^2(\Omega)} + ||\psi_t(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||v_t(t)||^2_{H^1(\Omega)})\Big). \tag{4.116}$$

- **Prova da Contração**

Com estas estimativas obtidas, estamos em condições de provar que o operador Φ é uma contração em X.

Vamos considerar a seguinte norma em X:

$$||(\varphi, u)||^2_X = ||\varphi||^2_{X_\varphi} + ||u||^2_{X_u}$$

com

$$||\varphi||^2_{X_\varphi} = \max_{t\in[0,T]}\Big(||\varphi||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\varphi||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta\varphi||^2_{L^2(\Omega)}\Big) + \max_{t\in[0,T]}\Big(||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}\Big),$$

$$||u||^2_{X_u} = \max_{t\in[0,T]}\Big(||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta u||^2_{L^2(\Omega)}\Big) + \max_{t\in[0,T]}\Big(||u_t||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u_t||^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Das estimativas em (4.74), (4.77), (4.79), (4.84) e (4.90) tem-se

$$\max_{t\in[0,T^*]}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 e^{T^*}T^*\left(\max_{t\in[0,T^*]}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T^*]}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

$$\max_{t\in[0,T^*]}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_3 T^*\left(\max_{t\in[0,T^*]}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T^*]}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

$$\max_{t\in[0,T^*]}||\Delta\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_5 e^{T^*}T^*\Big(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} +$$

$$\max_{t\in[0,T^*]}(||\nabla\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v(t)||^2_{L^2(\Omega)})\Big),$$

$$\max_{t\in[0,T^*]}||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_6 e^{T^*}T^*\Big(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} +$$

$$\max_{t\in[0,T^*]}(||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)})\Big),$$

$$\max_{t\in[0,T^*]}||\nabla\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_8 e^{T^*}T^*\Big(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} +$$

$$\max_{t\in[0,T^*]}(||\nabla\psi(t)||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$||\Delta v(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$||\nabla\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)})\Big).$$

Fazendo $\widehat{C} = C_1 + C_3 + C_5 + C_6 + C_8$ e tomando $T_1^* = \ln 2$, obtemos que

$$\begin{aligned} ||\varphi||^2_{X_\varphi} &\leq \widehat{C}T^*\Big(\max_{t\in[0,T^*]} \Big(||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) + \\ &+ \max_{t\in[0,T^*]} \Big(||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) + \\ &+ \max_{t\in[0,T^*]} \Big(||v(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) + \\ &+ \max_{t\in[0,T^*]} \Big(||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\Big). \end{aligned}$$

Isto é,

$$||\varphi||^2_{X_\varphi} \leq \widehat{C}T^*||(\psi, v)||^2_X. \tag{4.117}$$

Além disso, considerando as estimativas (4.98), (4.101), (4.106), (4.114) e (4.116), e somando estas estimativas com (4.117), resulta que

$$||(\varphi, u)||^2_X = ||\varphi||^2_{X_\varphi} + ||u||^2_{X_u} \leq \widehat{C_0}T^*||(\psi, v)||^2_X.$$

Portanto, escolhendo $T_2^* = \dfrac{1}{4\widehat{C}_0}$ e $T^{**} = \min\{T_0, T_1^*, T_2^*, T^*\}$, com T_0 dado no Lema 4.3 e lembrando que $R > 0$ foi escolhido tal que $0 < T^* < T$. Então, para todo $t \leq T^{**}$,

$$||\Phi(\psi, v)||^2_X = ||(\varphi, v)||^2_X \leq \frac{1}{2}||(\psi, v)||^2_X,$$

ou seja, o operador Φ é uma contração sobre X. Pelo teorema da contração, Φ possui um único ponto fixo (φ, u), que é a solução local em $[0, T^{**}]$ do problema Penrose-Fife (4.51). $\square$

Considerações Finais

O fenômeno de mudança de fase tem muitas aplicações em várias áreas e em processos industriais. Por exemplo, a solidificação é um dos mais importantes processos nos ramos da Metalurgia e Ciências dos Materiais. Do ponto de vista tecnológico, é um processo muito utilizado na moderna tecnologia industrial. Por exemplo, na tecnologia eletrônica, a solidificação é empregada como processo de purificação de metais e semicondutores e na obtenção de monocristais de alta perfeição para a fabricação de microcircuitos de computadores, calculadoras, instrumentos de precisão *lasers* e equipamentos de telecomunicações. Na tecnologia metalúrgica, ela é empregada, por exemplo, no processo de conformação de metais por fundição (que é a modificação de um corpo metálico para outra forma definida) e na produção de lingotes (são massas de metais ou semicondutores que após fundição tomam formas de barras ou blocos). Estas aplicações são importantes motivações para se fazer um tratamento matemático teórico e numérico das equações que governam o fenômeno de mudança de fase.

Por isso, objetivou-se neste trabalho primeiramente fazer um estudo sobre a existência, unicidade e regularidade de soluções para algumas equações de evolução, para finalmente, trabalhar-se dois tipos de modelos de equações de mudança de fase: modelo Caginalp e modelo Penrose-Fife. Neste trabalho, destacamos os seguintes aspectos:

(i) a resolução dos principais problemas desta dissertação foi feita através do Teorema de Contração de Banach, um dos teoremas mais clássicos da Análise Funcional e que é, de certa forma, de entendimento simples;

(ii) o uso do método de Galerkin para resolução de equações parabólicas lineares, uma ferramenta potente tanto analítica como numericamente;

(iii) a análise matemática de dois modelos clássicos que governam fenômenos de mudança de fase com interface difusa: modelo Caginalp e modelo Penrose-Fife. Como destaque para o modelo de Penrose-Fife pelo seu maior grau de dificuldade matemática;

(iv) a resolução detalhada do problema Linear resultante do modelo de Penrose-Fife (seção 4.1 capítulo **??**), que não é um problema trivial;

Futuramente, a partir desde trabalho, pretende-se estudar outros tipos de modelos de interface difusa, como por exemplo, modelos que envolvam a equação de Cahn-Hillard. Outra linha de investigação é acoplar outras variáveis físicas aos problemas estudados tais como a concentração (problemas com ligas binárias) e a convecção (as equações de Navier-Stokes).

Bibliografia

[1] G. Caginalp, *An Analysis of phase field model of a free boundary*, Arch. Rat.Mech. Anal. 92, 1986, pp. 205-245.

[2] G. Caginalp, *Stefan and Hele-Shaw type model as asymptotic limits of the phase-field equations*, Phys. Rev. A, vol 39, No. 11, 1989, pp. 5887-5896.

[3] E.A. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations.* McGraw-Hill Book Company, Inc. 1955.

[4] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, V.A. and N.N. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, 1968.

[5] L. C. Evans, *Partial diferential equations*, American Mathematical Society, vol 19, 1998.

[6] A. Friedman, *Partial diferential equations of Parabolic type*, Prentice-Hall, 1969.

[7] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, vol 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] O. Penrose and P.C. Fife. *Thermodynamically consistent models of phase-field type for the kinetic phase transitions*. Phys D, vol 43(1990), pp. 44-62.

[9] N. Moelans, B. Blanpain and P. Wollants, *An introduction to phase-field modeling of microstruture evolution*, Comp. Coupl. Phase. Diag. and Thermochemistury, 32 (2008), pp. 268-294.

[10] O. Penrose and P.C. Fife, *On the relation between the standard phase-field model and a thermodynamically consistent phase-field model*, Phys. D, vol. 69(1993), pp. 107-113.

[11] M.H. Protter and H.F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations.* Springer, 1984.

[12] M. Renardy and R.C. Roger, *An introduction to partial differential equations.* Springer, 1992.

[13] E. Rocca, *Some phase transition models of Penrose-Fife*, Tese de doutorado, 2003.

[14] J. Sprekels and S. Zheng, *Global smooth solutions to a thermodynamically consitent model of phase field type in higher space dimensions*, J. Math. Anal. Appl., vol 176, No. 1(1993), pp. 200-223.

[15] S. Zheng, *Global existence for a thermodynamically consistent model of phase field type.* J. Diff. Integral Equations 5, 1992, p.p. 241-253.

[16] S. Zheng, *Nonlinear parabolic equations and hyperbolic- parabolic coupled systems*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematical, No. 76, Logman Scientific & Technical, 1995.