

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Paulo Sergio Rabelo de Souza

**EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES PARA
O SISTEMA DE VON KÁRMÁN COM MEMÓRIA
NA FRONTEIRA**

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Paulo Sergio Rabelo de Souza

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES PARA O SISTEMA DE VON
KÁRMÁN COM MEMÓRIA NA FRONTEIRA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado
em Matemática e Estatística da Universidade
Federal do Pará, como pré-requisito para a ob-
tenção do título de mestre em Matemática.

Belém, 08 de julho de 2010.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (Orientador)

PPGME - UFPA

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa Rocha

PPGME - UFPA

Prof. Dr. Jorge Ferreira

UFRPE

Dedicatória

*À minha mãe Ester Rabelo de Souza e a memória de
meu pai Odélio Lobato de Souza.*

Agradecimentos

À Deus, meu Senhor, por ter me iluminado para chegar ao final deste trabalho e principalmente pela vida;

À minha mãe Ester, pelo amor, força e apoio;

À Leila, minha esposa pelo incentivo e apoio durante minha caminhada;

Ao meus filhos Sérgio, Anna Paula e Alinho(Gabriela) e aos meus netinhos Jabulani(Heitor) e Fernandinha, fontes inesgotáveis de alegria na minha vida;

Aos meu tio Edésio que muito contribuiu para o meu crescimento científico e intelectual;

Aos meus colegas de curso, em especial Marco e João Carlos, por todos os momentos de companheirismo nas horas de dificuldades;

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará pela oportunidade de realização do curso de Mestrado;

Ao meu orientador, Prof. Mauro de Lima Santos, pela forma precisa e profissional, além da paciência, disponibilidade, atenção e confiança, que conduziu no decorrer deste trabalho;

Ao Programa de Pós-Graduação e a todos os professores do PPGME;

Enfim, todos aqueles aqui citados e aos demais que, direta ou indiretamente me ajudaram, rogo a Deus para abençoar seus caminhos.

Resumo

Nas últimas décadas, vários tipos de equações diferenciais parciais foram utilizadas como modelos matemáticos que descrevem propriedades físicas, químicas, biológicas e da engenharia, veja Lagnese [5] para detalhes. Entre eles, os estudos de modelos matemático de vibração associados as estruturas flexíveis, foram consideravelmente estimulados nos últimos anos por um número crescente de questões de preocupação prática, (veja [2, 3, 4, 6, 7, 8]). Investigação sobre sistemas distribuídos concentrou-se principalmente sobre a existência, unicidade e estabilização de modelos dinâmicos tais como cordas, membranas, placas e vigas (veja [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]).

Neste trabalho estamos considerando a equação dinâmica de Von Kármán para placas viscoelásticas na presença de um efeito memória na fronteira. Mostramos a existência e unicidade de soluções fracas e fortes para este sistema.

Abstract

For the last several decades, various types of equations have been employed as some mathematical model describing physical, chemical, biological and engineering systems (see [5]). Among them, the mathematical models of vibrating, flexible structures has been considerably stimulated in recent years by an increasing number of questions of practical concern (see [2, 3, 4, 6, 7, 8]). Research on stabilization of distributed parameter systems has largely focused on the stabilization of dynamic models of individual structural members such as strings, membranes, plates and beams (see [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]). In this work we consider the dynamic von Kármán system with boundary conditions of memory type. We show the existence and uniqueness of weak and global solutions of this system.

Conteúdo

Resumo	v
Abstract	vi
1 Preliminares	4
1.1 Teoria das Distribuições Escalares	4
1.2 Espaços de Sobolev	10
1.3 Equações de Volterra	13
1.4 Equação Resolvente	17
1.5 Outros Resultados Importantes	20
2 Existência e Unicidade de Soluções Regularidade de Soluções	24

Introdução

Para isto, seja Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^2 com fronteira Γ regular. Denotamos por $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ o vetor unitário normal exterior a Γ e por $\eta = (-\nu_2, \nu_1)$ o vetor unitário tangente orientado positivamente exterior a Γ . Finalmente, por $[\cdot, \cdot]$ denotamos o operador dado por

$$[u, v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Então as equações que descrevem as pequenas vibrações de uma placa homogênea isotrópica de densidades uniformes são dadas por:

$$u_{tt} + \Delta^2 u = [u, v] \quad \text{sobre } \Omega \times]0, \infty[, \quad (1)$$

$$\Delta^2 v = -[u, u] \quad \text{sobre } \Omega \times]0, \infty[, \quad (2)$$

com condições iniciais

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y); \quad u_t(x, y, 0) = u_1(x, y) \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3)$$

e condições de fronteiras

$$v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em } \Gamma \times]0, \infty[\quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \int_0^t g_1(t-s) \left(\mathcal{B}_1 u(s) + \rho_1 \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) \right) ds = 0 \quad \text{em } \Gamma \times]0, \infty[\quad (5)$$

$$u - \int_0^t g_2(t-s) (\mathcal{B}_2 u(s) - \rho_2 u(s)) ds \quad \text{em } \Gamma \times]0, \infty[. \quad (6)$$

Aqui por \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 estamos denotando os seguintes operadores

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \Delta u - (1 - \mu) B_1 u \\ \mathcal{B}_2 &= \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + (1 - \mu) \frac{\partial B_2 u}{\partial \tau} \end{aligned}$$

onde $\mu \in]0, \frac{1}{2}[$ é a constante de Poisson e

$$B_1 u = 2\nu_1\nu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$B_2 u = (\nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \nu_1\nu_2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}.$$

Em (2.1) e (2.2), $u = u(x, y, t)$ denota a posição da placa e $v = v(x, y, t)$ é a função stress de Airy's. Podemos interpretar a equação (2.2) dizendo que as tensões a qualquer momento depende do comportamento completo das tensões que o material sofreu. Denotamos por $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ uma função real positiva satisfazendo as seguintes condições:

$$g, g', g'' \in L^1(0, \infty), \quad \alpha = 1 - \int_0^\infty g(s) ds > 0, \quad (7)$$

$$g(t) \geq 0, \quad g'(t) \leq 0 \quad (8)$$

Assumiremos que existe uma ponto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\Gamma = \{x \in \Gamma : \nu(x) \cdot (x - x_0) > 0\}.$$

Denotando por $m(x) = x - x_0$, da compacidade de Γ temos que existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$m(x) \cdot \nu(x) \geq \delta_0 > 0.$$

O sistema de von Kármán com damping friccional no domínio ou na fronteira (ou em parte da fronteira) foi estudado por M. Horn and I. Lasiecka em [2, 3], M. Horn, A. Favini, I. Lasiecka and D. Tataru em [4] and J. Puel and M. Tucsnak [8]. Eles provaram que o sistema de von Kármán com damping friccional é exponencialmente estável.

O sistema acima foi estudado por Rivera, Portillo and Santos [7]. Eles mostraram que o sistema acima com memória na fronteira e exponencialmente e polinomialmente estável, com taxas de decaimento que depende do comportamento da função relaxamento. Rivera e Menzala [6] provaram a existência de solução global forte e fraca do sistema de von Kármán com memória em todo o domínio bem como a estabilidade exponencial e polinomial do referido sistema.

Para um perfeito significado fisico do problema estudado o leitor poderá consultar Lagnese [5]. Este trabalho foi dividido da seguinte forma. No primeiro capítulo apresentamos alguns

resultados preliminares importantes para a solução do problema proposto. No segundo capítulo 2 demonstraremos a existência e unicidade de soluções fortes e fracas para o modelo de von Kármán. Para isto usamos o método de Faedo Kalerkin.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo utilizaremos definições e noções básicas da Teoria das Equações Diferenciais, bem como alguns Teoremas, Lemas e Proposições que nos auxiliarão como pré-requisitos necessários para melhor compreensão dos capítulos posteriores. Sendo assim, não nos preocuparemos nas demonstrações de possíveis resultados utilizados preliminarmente, pois mencionaremos os referenciais onde poderão ser encontrados.

1.1 Teoria das Distribuições Escalares

1.1.1 Espaços das Funções Testes.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua. Denominamos suporte de φ , ao fecho em Ω , do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denotamos o suporte de φ por $supp(\varphi)$. Simbolicamente, temos que

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}} \quad \text{em } \Omega.$$

Usando a definição acima concluímos que $supp(\varphi)$ é o menor fechado do qual φ se anula e valem as seguintes relações

1. $supp(\varphi + \psi) \subset supp(\varphi) \cup supp(\psi)$
2. $supp(\varphi\psi) \subset supp(\varphi) \cap supp(\psi)$
3. $supp(\lambda\varphi) = \lambda supp(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Neste capítulo, daremos um destaque especial às funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω que, sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse objetivo definimos o espaço $C_0^\infty(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto contido em Ω . Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω .

Observação 1.1.1. *Por um multi-índice, entendemos, uma n -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de números inteiros não negativos. Denotamos por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ a ordem do multi-índice e por D^α o operador derivação parcial de ordem $|\alpha|$,*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \dots, 0)$, temos por definição $D^0\varphi = \varphi$.

1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$.

Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subset K \text{ e } \text{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) $D^\alpha\varphi_n \rightarrow D^\alpha\varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α .

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ e é denominado espaço das funções testes.

1.1.3 Espaços $L^p(\Omega)$.

Denota-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mensuráveis, tais que $|u|^p$ são Lebesgue integráveis em Ω . O espaço $L^p(\Omega)$, é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

Quando $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço de Banach de todas as funções reais essencialmente limitadas com norma

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|u(x)|$$

Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

e norma induzida

$$|u|^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

Observação 1.1.2. Sendo Ω limitado, obtemos $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo p , tal que $1 < p < \infty$, com imersão contínua e densa. De fato, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos que

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^p dx \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|^p \mu(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, suponhamos que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$.

Mostraremos que

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \rightarrow 0.$$

Notemos que,

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx. \\ &= \int_K \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = 0. \end{aligned}$$

Podemos ainda mostrar que a imersão anterior é densa. Para isso, ver [7]

1.1.3 Distribuições Escalares

Com o intuito de generalizar o conceito de funções sobre Ω , introduz-se o conceito de distribuições escalares.

Denominamos distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições

- (i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \alpha, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- (ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para φ , em $\mathcal{D}(\Omega)$, então

$$T(\varphi_\nu) \rightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ , é denotada por (T, φ) .

A sucessão $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, converge para T , quando a sucessão $((T_\nu, \varphi))_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para (T, φ) em \mathbb{R} para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O espaço de todas as distribuições sobre Ω , com esta notação de convergência será denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuições que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 1.1.1 Dizemos que uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω quando u é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolos temos

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |u(x)| dx < \infty$$

para todo compacto $K \subset \Omega$.

A distribuição T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u " e usando o *Lema Du Bois Raymond*, temos que T_u é univocamente determinada por u , no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω . neste sentido identificamos u com a

distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 1.1.1 (*Du Bois Raymond*). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .*

Demonstração: ver [7]

Vale ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Com a noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty.$$

1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o objetivo de estudar os espaços de Sobolev, introduzimos o conceito de derivada distribucional.

A motivação do conceito de derivada fraca, posteriormente, o conceito de derivada distribucional, dado por Sobolev, se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para as distribuições quaisquer em $\mathcal{D}(\Omega)$, por L. Schwartz. Veja [1].

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada no sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear

$$\mathcal{D}^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$(\mathcal{D}^\alpha T, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (T, \mathcal{D}^\alpha \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

segue da definição acima, que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

Observe que a aplicação

$$\mathcal{D}^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que

$$\lim_{v \rightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \rightarrow \infty} \mathcal{D}^\alpha T_v = \mathcal{D}^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observação 1.1.3 *Outro resultado interessante a ser mencionado é que a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, não é, em geral, uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo a seguir.*

Exemplo 1.1.1 *Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em \mathbb{R} e tem a seguinte forma*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$.

Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Como $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\Omega)$. Basta verificar que $u' = \delta_0$.

De fato

$$\begin{aligned} \langle u', \varphi \rangle &= \langle u, \varphi' \rangle \\ &= - \int_0^\infty \varphi'(x) dx \\ &= \int_\infty^0 \varphi'(x) dx \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle \delta_0, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev.

Observação 1.1.4 Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção derivada no sentido das distribuições, isto é,

$$\mathcal{D}^\alpha T_u = T_{\mathcal{D}^\alpha u}, \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

É uma consequência simples da fórmula de integração de Gauss.

1.2 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais. Esta classe é conhecida como espaços de Sobolev.

1.1.2 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^n com fronteira Γ regular. Foi observada na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observamos que $\mathcal{D}^\alpha u$, em geral, não é uma distribuição definida por uma função $L^p(\Omega)$. Estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p(\Omega)$. Tais espaços são denominados Espaços de Sobolev.

Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω , é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $\mathcal{D}^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$. Em símbolos temos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \mathcal{D}^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach . O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

Em particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, sendo denotado por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \mathcal{D}^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

O Traço em $H^1(\Omega)$

Foi demonstrado em [7] que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$, por função de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, onde $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ é o conjunto $\{\varphi|_{\bar{\Omega}}; \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ que se pode definir a restrição à fronteira Γ de Ω . Dado $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ com

$$\varphi_\nu \rightarrow \varphi \text{ em } H^1(\Omega).$$

Definimos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k|_{\Gamma}.$$

sendo este limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$.

O operador γ_0 denominado operador traço, que é contínuo e linear, cujo o núcleo é $H_0^1(\Omega)$. De forma mais simples, escrevemos $\varphi|_{\Gamma}$ em vez de $\gamma_0\varphi$. Assim, podemos caracterizar, o espaço $H_0^1(\Omega)$ por $H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_{\Gamma} = 0\}$. A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e, no caso $m = 2$, temos

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega); \varphi|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} |_{\Gamma} \right\}$$

O dual topológico do espaço $W^{m,p}(\Omega)$ representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi|_{\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Quando $p = 2$, $W^{-m,2}(\Omega)$ será denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é $H^{-m}(\Omega)$.

O teorema seguinte caracteriza o espaço $W^{-m,q}(\Omega)$.

Teorema 1.2.1 *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,q}(\Omega)$ se, e somente se, existirem $g_\alpha \in l^p(\Omega)$ tais que $T = \sum_{|\alpha| \leq m} \mathcal{D}^\alpha g_\alpha$.*

Demonstração: ver [2]

Proposição 1.2.1 (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$). *Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n + 1$ funções u_0, u_1, \dots, u_n de $L^2(\Omega)$, tais que*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Demonstração: ver [2]

De posse destes dois resultados concluímos que se $u \in H^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, linear, contínuo e isométrico.

Lema 1.2.1 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Demonstração: ver [1]

1.3 Equações de Volterra

Nesta seção será feita uma introdução à teoria das equações integrais de Volterra.

Definição 1.3.1 *Uma equação integral de Volterra linear de primeira ordem é toda equação da forma*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s)f(s)ds, \quad (1.1)$$

sendo $g(t)$ e $k(t, s)$ funções dadas.

Teorema 1.3.1 *Seja $k(t, s)$ uma função contínua em $0 \leq s \leq t \leq T, T > 0$ e $g(t)$ uma função contínua em $0 \leq s \leq T$. Então existe uma única solução contínua $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo,*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s)f(s)ds.$$

Demonstração: Existência

A prova é baseada nas aproximações sucessivas de Picard. Para isto, seja a seguinte sequência de funções

$$\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}.$$

Sendo

$$\begin{aligned}
f_0(t) &= g(t), \\
f_1(t) &= g(t) + \int_0^t k(t,s)f(s)ds, \\
&\vdots = \vdots \\
f_n(t) &= g(t) + \int_0^t k(t,s)f_{n-1}(s)ds,
\end{aligned}$$

com $n = 1, 2, \dots$. Desta forma

$$\begin{aligned}
f_n(t) &= g(t) + \int_0^t k(t,s)f_{n-1}(s)ds, \\
f_{n-1}(t) &= g(t) + \int_0^t k(t,s)f_{n-2}(s)ds.
\end{aligned}$$

Portanto

$$f_n(t) - f_{n-1}(t) = \int_0^t k(t,s)[f_{n-1}(s) - f_{n-2}(s)]ds.$$

Definindo a sequência $\varphi_n(t) = f_n(t) - f_{n-1}(t)$ com $\varphi_0(t) = g(t)$ temos

$$\varphi_n(t) = \int_0^t k(t,s)\varphi_{n-1}(s)ds.$$

Logo,

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t).$$

Sejam G, K constantes positivas, tais que

$$|g(t)| \leq G \quad \text{e} \quad 0 \leq t \leq T, \quad |k(s,t)| \leq K \quad \text{e} \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Mostraremos que

$$|\varphi_n(t)| \leq \frac{G(Kt)^n}{n!} \quad \text{com} \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{e} \quad n = 0, 1, \dots$$

A demonstração será feita por indução. Para $n = 0$, temos

$$|\varphi_0(t)| = |g(t)| \leq G = \frac{G(Kt)^0}{0!}.$$

Suponha que a propriedade seja válida para $n = l$. Resta mostrar que é válida para $n = l+1$, por hipótese, temos,

$$|\varphi_l(t)| \leq \frac{G(Kt)^l}{l!}.$$

Para $n = l + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} |\varphi_{l+1}(t)| &= \left| \int_0^t k(t, s) \varphi_l(s) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |k(t, s)| |\varphi_l(s)| ds \\ &\leq \int_0^t K \frac{G(Ks)^l}{(l)!} \\ &\leq \frac{GK^{l+1}}{(l)!} \int_0^t s^l ds. \end{aligned}$$

Assim

$$|\varphi_{l+1}(t)| \leq \frac{G(Ks)^{l+1}}{(l+1)!}.$$

o que conclui a demonstração.

Portanto, vale a seguinte desigualdade

$$\sum_{i=0}^n \frac{G(Kt)^i}{i!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G(KT)^n}{n!} = Ge^{KT}.$$

Desta forma, pelo teste de M. de Weirstrass, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)$ é absoluta e uniformemente convergente. Denotando $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)$, concluímos que f é contínua. De fato, seja $t_0 \in [0, T]$. Daí segue que,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t \rightarrow t_0} (\varphi_n(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t_0) = f(t_0).$$

O que mostra a continuidade de f . A função f é solução da equação integral de Volterra dada em (1.1). Com efeito,

$$\sum_{n=1}^m \varphi_n(t) + \int_0^t k(t, s) \left(\sum_{n=1}^m \varphi_{n-1}(s) \right) ds.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ e usando a convergência uniforme, obtemos que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \varphi_n(t) = \int_0^t k(t, s) \lim_{m \rightarrow \infty} (\varphi_{n-1}(s)) ds,$$

ou

$$f(t) - g(t) = \int_0^t k(t, s) f(s) ds,$$

isto é,

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s) f(s) ds.$$

Unicidade

Suponha que existam funções f_1, f_2 contínuas satisfazendo (1.1). Portanto

$$|f_1(t) - f_2(t)| = \left| \int_0^t k(t, s) (f_1(s) - f_2(s)) ds \right|. \quad (1.2)$$

Pela continuidade de f_1 e f_2 , existe $C > 0$ tal que

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq C, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Logo, substituindo em (1.2) vem

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq K C t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Repetindo este processo n -vezes em (1.2), obtemos

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq \frac{C(Kt)^n}{n!}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos que o

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C(Kt)^n}{n!} = 0.$$

Assim, concluímos que

$$f_1(t) = f_2(t).$$

1.4 Equação Resolvente

Vimos pelo teorema anterior que dada $g \in C[0, T]$ existe uma única $f \in C[0, T]$, tal que

$$f(t) - \int_0^t k(t, s)f(s)ds = g(t).$$

Desta forma, podemos considerar o seguinte operador

$$\begin{aligned} K : C[0, T] &\rightarrow C[0, T] \\ f &\mapsto K[f] = f(t) - \int_0^t k(t, s)f(s)ds. \end{aligned}$$

O operador K é linear e bijetivo. De fato,

K é linear.

$$\begin{aligned} K[f_1(t) - \lambda f_2(t)] &= f_1(t) - \lambda f_2(t) + \int_0^t k(t, s)(f_1(s) + \lambda f_2(s))ds \\ &= f_1(t) - \lambda f_2(t) + \int_0^t k(t, s)f_1(s)ds + \lambda \int_0^t k(t, s)f_2(s)ds \\ &= f_1(t) + \int_0^t k(t, s)f_1(s)ds + \lambda \left(f_2(t) + \int_0^t k(t, s)f_2(s)ds \right) \\ &= K[f_1] + \lambda K[f_2]. \end{aligned}$$

K é bijetivo.

A sobrejetividade segue do fato que, dada $g \in C[0, T]$, pelo teorema de existência e unicidade, existe uma única $f \in C[0, T]$ tal que $K[f] = g$. Concluimos a injetividade de maneira análoga, pois $K[f] = 0$ pode ser interpretada como a equação $K[f] = g$ sendo $g \equiv 0$ e pelo teorema de existência e unicidade, existe uma única $f \in C[0, T]$ que satisfaz esta equação, a saber $f(x) = 0$. A função $k(t, s)$ é chamada núcleo do operador de Volterra. Notemos que, como foi definido $\varphi_1(t) = \int_0^t k(t, s)\varphi_0(s)ds$, vem que

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= \int_0^t k(t, s)\varphi_1(s)ds \\ &= \int_0^t k(t, s) \int_0^s k(s, \tau)g(\tau)d\tau ds \\ &= \int_0^t \int_\tau^t k(t, s)k(s, \tau)g(\tau)d\tau ds \\ &= \int_0^t \int_\tau^t k(t, s)k(s, \tau)ds g(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

pois o integrando é contínuo em $0 \leq \tau \leq s \leq t$. Assim

$$\varphi_2(t) = \int_0^t k_2(t, \tau)g(\tau)d\tau,$$

sendo

$$k_2(t, \tau) = \int_\tau^t k(t, s)k(s, \tau)ds g(\tau).$$

Indubitavelmente

$$\varphi_n(t) = \int_0^t k_n(t, s)g(s)ds \text{ com } \forall n \geq 1,$$

sendo

$$\begin{aligned}k_1(t, s) &= k(t, s), \\ k_n(t, s) &= \int_s^t k(t, \tau)k_{n-1}(\tau, s)d\tau, \quad n \geq 2.\end{aligned}$$

Como

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i t,$$

temos

$$f_n(t) = \int_0^t \tau_n(t, s)g(s)ds,$$

sendo $\tau_n(t, s) = \sum_{i=1}^n k_i(t, s)$. Usando a continuidade da função k temos, $|k(t, s)| \leq K$ analogamente podemos mostrar que $|k_n(t, s)| \leq \frac{K^n(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$. Daí segue que a série $\tau(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t, s)$ é absoluta e, portanto, uniformemente convergente. A função $\tau(t, s)$ é chamada de núcleo resolvente de $k(t, s)$.

Teorema 1.4.1 *Se $k(t, s)$ e $g(t)$ são contínuas, então a única solução contínua de (1.1) é dada por*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t \tau(t, s)g(s)ds.$$

Demonstração: Das relações anteriores

$$\int_0^t \tau(t, s)g(s)ds = \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} k_i(t, s)g(s)ds.$$

Como a série converge uniformemente pode-se permutar a ordem da soma com integração, obtendo

$$\int_0^t \tau(t, s)g(s)ds = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t k_i(t, s)g(s)ds = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) = f(t) - g(t),$$

ou seja,

$$f(t) = g(t) + \int_0^t \tau(t, s)g(s)ds.$$

Observação 1.4.1. *O teorema anterior mostra que o operador inverso K^{-1} tem a forma de uma equação integral de Volterra, ou seja*

$$K^{-1} : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$$

$$g \mapsto K^{-1}[g] = g(t) + \int_0^t \tau(t, s)g(s)ds.$$

1.5 Outros Resultados Importantes

A seguir enunciaremos mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente.

Definição 1.5.1(Convergência Fraca) *Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E . Temos que $u \rightharpoonup u$ fracamente se, e somente se,*

$$\langle \varphi, u_\nu \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle, \quad \forall \varphi \in E'.$$

Definição 1.5.2(Convergência Fraca Estrela) *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E' . Temos que $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ fraco \star se, e somente se,*

$$\langle \varphi_\nu, u \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle, \quad \forall u \in E.$$

Lema 1.5.1 *Seja f uma função real positiva de classe C^1 . Se existirem constantes positivas c_0, c_1 e γ tais que*

$$f'(t) \leq -c_0 f(t) + c_1 e^{-\gamma t},$$

então

$$f(t) \leq c e^{-\gamma t}.$$

Demonstração: Definindo

$$F(t) = f(t) + \frac{2c_1}{\gamma}$$

temos que

$$F'(t) = f'(t) - 2c_1e^{-\gamma t} \leq -c_0f(t) - c_1e^{-\gamma t}.$$

Tomando $\gamma_0 = \min\{c_0, \frac{\gamma}{2}\}$, obtemos

$$\gamma_0 F(t) \leq c_1 f(t) + c_1 e^{-\gamma t}.$$

Segue que,

$$F'(t) \leq -\gamma_0 F(t).$$

Logo,

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \leq -\gamma_0.$$

Integrando de 0 a t . obtemos

$$\frac{F(t)}{F(0)} \leq e^{-\gamma_0 t} \Rightarrow F(t) \leq F(0)e^{-\gamma_0 t}.$$

Como $F(0) = f(0) + \frac{2c_1}{\gamma}$ e $f(t) \leq F(t)$

$$f(t) \leq ce^{-\gamma_0 t},$$

com $c = f(0) + \frac{2c_1}{\gamma}$.

Lema 1.5.2 *Seja f uma função real positiva de classe C^1 , satisfazendo*

$$f'(t) \leq -k_0[f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + \frac{k_1}{(1+t)^{p+1}},$$

com $p > 1$ e $k_0, k_1 > 0$. Então, existe uma constante $k_2 > 0$, tal que

$$f(t) \leq k_2 \frac{pf(0) + 2k_1}{(1+t)^p}.$$

Demonstração: Tomamos $h(t) = \frac{2k_1}{p(1+t)^p}$ e $g(t) = f(t) + h(t)$. Nestas condições temos

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(t) - \frac{2k_1}{(1+t)^{p+1}} \leq -k_0 \left\{ [f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + \frac{k_1}{k_0(1+t)^{p+1}} \right\} \\ &\leq k_0 \left\{ [f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + \left(\frac{p}{2}\right)^{1+\frac{1}{p}} \frac{1}{k_0 k_1^{\frac{1}{p}}} [h(t)]^{1+\frac{1}{p}} \right\} \end{aligned}$$

Seja $a_0 = \min \left\{ 1, \left(\frac{p}{2}\right)^{1+\frac{1}{p}} \frac{1}{k_0 k_1^{\frac{1}{p}}} \right\}$. Assim, $g'(t) \leq -k_0 a_0 \left\{ [f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + [h(t)]^{1+\frac{1}{p}} \right\}$. Como existe uma constante positiva a_1 , tal que

$$[f(t) + g(t)]^{1+\frac{1}{p}} \leq a_1 \left\{ [f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + [h(t)]^{1+\frac{1}{p}} \right\},$$

concluimos que

$$g'(t) \leq -\frac{k_0 a_0}{a_1} [g(t)]^{1+\frac{1}{p}} \Rightarrow \frac{g'(t)}{[g(t)]^{1+\frac{1}{p}}} \leq -\frac{k_0 a_0}{a_1}.$$

Integrando de 0 a t , temos

$$g(t) \leq \frac{p^p g(0)}{\left\{ p + \frac{k_0 a_0}{a_1} [g(0)]^{\frac{1}{p}} \right\}^t} \leq \frac{p^{p-1} [p f(0) + 2k_1]}{a_2^p (1+t)^p},$$

em que $a_2 = \min \left\{ p, \frac{k_0 a_0}{a_1} [g(0)]^{\frac{1}{p}} \right\}$. Tomando $k_2 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{p}{a^2}\right)^{p-1}$, se o resultado.

Lema 1.5.3 (Lema de Gronwall) *Sejam $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e não-negativas, $\alpha \geq 0$. Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) ds,$$

então,

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp \left[\int_a^t \psi(s) ds \right], \quad \forall t \in [a, b].$$

Em particular, $\psi(t)$ é limitada e se $\alpha = 0$, então $\varphi = 0$.

Demonstração: ver [1].

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Soluções Regularidade de Soluções

Estabeleceremos aqui a existência e unicidade de soluções fortes e fracas para o sistema de von Kármán das placas de Kirchhoff dado por

$$u_{tt} + \Delta^2 u = [u, v] \quad \text{sobre } \Omega \times]0, \infty[, \quad (2.1)$$

$$\Delta^2 v = -[u, u] \quad \text{sobre } \Omega \times]0, \infty[, \quad (2.2)$$

com condições iniciais

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y); \quad u_t(x, y, 0) = u_1(x, y) \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.3)$$

e condições de fronteiras

$$v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em } \Gamma \times]0, \infty[\quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \int_0^t g_1(t-s) \left(\mathcal{B}_1 u(s) + \rho_1 \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) \right) ds = 0 \quad \text{em } \Gamma \times]0, \infty[\quad (2.5)$$

$$u - \int_0^t g_2(t-s) (\mathcal{B}_2 u(s) - \rho_2 u(s)) ds = 0 \quad \text{em } \Gamma \times]0, \infty[. \quad (2.6)$$

Inicialmente, usaremos as condições (2.5)-(2.6) para obter uma expressão apropriada para \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 sobre a fronteira Γ . Derivando as equações (2.5)-(2.6) em relação a t e usando as equações

de Volterra obtemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_1 u + \rho_1 \frac{\partial u}{\partial \nu}) + \frac{1}{g_1(0)} g_1' * (\mathcal{B}_1 u + \rho_1 \frac{\partial u}{\partial \nu}) &= -\frac{1}{g_1(0)} \frac{\partial u_t}{\partial \nu}, \\ (\mathcal{B}_2 u + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \nu} - \rho_2 u) + \frac{1}{g_2(0)} g_2' * (\mathcal{B}_2 u + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \nu} - \rho_2 u) &= \frac{1}{g_2(0)} u_t. \end{aligned}$$

Invertendo o operador integral de Volterra encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 u + \rho_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} &= -\frac{1}{g_1(0)} \left\{ \frac{\partial u_t}{\partial \nu} + k_1 * \frac{\partial u_t}{\partial \nu} \right\}, \\ \mathcal{B}_2 u + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \nu} - \rho_2 u &= \frac{1}{g_2(0)} \{u_t + k_2 * u_t\}, \end{aligned}$$

onde os núcleos k_i , $i = 1, 2$ são as soluções da equação

$$k_i + \frac{1}{g_i(0)} g_i' * k_i = -\frac{1}{g_i(0)} g_i'.$$

Denotando por $\eta_1 = \frac{1}{g_1(0)}$ e $\eta_2 = \frac{1}{g_2(0)}$ obtemos

$$\mathcal{B}_1 u = -\rho_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} - \eta_1 \left\{ \frac{\partial u_t}{\partial \nu} + k_1(0) \frac{\partial u}{\partial \nu} - k_1(t) \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + k_1' * \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\}, \quad (2.7)$$

$$\mathcal{B}_2 u = -\alpha \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + \rho_2 u + \eta_2 \{u_t + k_2(0)u - k_2(t)u_0 + k_2' * u\}. \quad (2.8)$$

Como estamos interessados em função relaxamento do tipo exponencial ou polinomial e observando que as condições de fronteira (2.7)-(2.8) envolve as funções k_i , desejamos saber se estas matêm as mesmas propriedades das g_i . O Lema seguinte responde esta questão. Seja h uma função relaxamento e k o seu núcleo resolvente, isto é

$$k(t) - k * h(t) = h(t). \quad (2.9)$$

Lema 2.1. Se h é uma função contínua e positiva então k também será. Além disso,

(1) Se existem contantes positivas C_0 e γ com $C_0 < \gamma$ tal que

$$h(t) \leq C_0 e^{-\gamma t},$$

então a função k satisfaz

$$k(t) \leq \frac{C_0(\gamma - \epsilon)}{\gamma - \epsilon - C_0} e^{-\epsilon t},$$

para todo $0 < \epsilon < \gamma - C_0$.

(2) Dado $p > 1$, denotamos por

$$C_p := \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_0^t (1+t)^p (1+t-s)^{-p} (1+s)^{-p} ds.$$

Se existem constantes positivas C_0 com $C_0 C_p < 1$ tal que

$$h(t) \leq C_0 (1+t)^{-p},$$

então a função k satisfaz

$$k(t) \leq \frac{C_0}{1 - C_0 C_p} (1+t)^{-p}.$$

Demonstração: Veja M. L. Santos e C. Tavares [1].

Observação: Devido a esse Lema usaremos as condições (2.7)-(2.8) no lugar das condições (2.5)-(2.6).

A seguinte fórmula de Green será usada posteriormente.

Lema 2.2. Dados $u \in H^4(\Omega)$ e $v \in H^2(\Omega)$ temos

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u) v \, dx = a(u, v) + \int_{\Gamma} \left\{ (\mathcal{B}_2 u) v - (\mathcal{B}_1 u) \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\} d\Gamma.$$

A demonstração desse lema pode ser visto em [1].

Para facilitar nossa análise, introduzimos os seguintes operadores binários

$$\begin{aligned} (g \square \varphi)(t) &= \int_0^t g(t-s) |\varphi(t) - \varphi(s)|^2 \, ds, \\ (g * \varphi)(t) &= \int_0^t g(t-s) \varphi(s) \, ds, \end{aligned}$$

onde $*$ denota a convolução. Uma importante relação entre esses operadores é dada no próximo Lema.

Lema 2.3: Para $g, \varphi \in C^1([0, \infty[: \mathbb{R})$ temos

$$(g * \varphi) \varphi_t = \frac{1}{2} g' \square \varphi - \frac{1}{2} g(t) |\varphi|^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[g \square \varphi - \left(\int_0^t g(s) \, ds \right) |\varphi|^2 \right].$$

Demonstração: Derivando o termo $g \square \varphi$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g\Box\varphi &= \int_0^t g'(t-s)|\varphi(t) - \varphi(s)|^2 ds \\ &- 2 \int_0^t g(t-s)\varphi_t(t)\varphi(s) ds + \left(\int_0^t g(t-s) ds \right) \frac{d}{dt}|\varphi(t)|^2, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t g(t-s)\varphi_t(t)\varphi(s) ds &= -\frac{d}{dt}\{g\Box\varphi - \int_0^t g(t-s) ds|\varphi(t)|^2\} \\ &+ \int_0^t g'(t-s)|\varphi(t) - \varphi(s)|^2 ds - g(t)|\varphi(t)|^2. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova do Lema. \square

Seja G o inverso do operador biharmonico com condições de fronteira do tipo Dirichlet, isto é, $G(f) = w$, onde w é a solução do problema

$$\Delta^2 w = f \quad \text{em } \Omega, \quad w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma.$$

Lema 2.4: (i) A aplicação $(u, v) \in H^2(\Omega) \times H^3(\Omega) \rightarrow [u, v] \in L^2(\Omega)$ é limitada.

(ii) A aplicação $(u, v) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \rightarrow G(-[u, v]) \in H^3(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega) \cap W^{4,1}(\widehat{\Omega})$ para $\widehat{\Omega} \subset \Omega$ é limitada.

A prova deste resultado pode ser visto [2].

Definição: Diz-se que (u, v) é solução fraca do sistema (2.1)-(2.4) com condições de fronteira (2.7)-(2.8) quando

$$u \in C^0([0, T]; H^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)),$$

$$v \in C^0([0, T]; H_0^2(\Omega))$$

e satisfaz

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} u_t \theta_t dx dt + \int_0^T a(u, \theta) dt = \int_0^T \int_{\Omega} [(u, \theta)] v dx dt + \int_{\Omega} u_1 \theta(\cdot, 0) dx \\ & - \eta_1 \int_0^T \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} + \left(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0) \right) \frac{\partial u}{\partial \nu} - k_1(t) \frac{\partial u_1}{\partial \nu} + k_1 * \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Gamma dt \\ & - \eta_2 \int_0^T \int_{\Gamma} \left\{ u_t + \left(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0) \right) u - k_2(t) u_0 + k_2' * u \right\} \theta d\Gamma dt \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \Delta v \Delta \phi dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} [u, \phi] u dx dt, \tag{2.11}$$

para todas as funções $\theta \in C^0([0, T]; H^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ com $\theta(\cdot, T) = 0, \theta_t(\cdot, T) = 0$ e $\phi \in C^0([0, T]; H_0^2(\Omega))$.

Como consequência do Teorema do traço (veja Lions [5] para detalhes), temos que a forma bilinear

$$(u, w) \longrightarrow a(u, w) + \int_{\Gamma} \left(\rho_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial w}{\partial \nu} + \rho_2 u w \right) d\Gamma$$

é estritamente coerciva sobre $H^2(\Omega)$.

A energia modificada $E(t)$ do sistema (2.1)-(2.2) é dada por

$$\begin{aligned} E(t) = E(t; u, v) := & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} a(u, u) + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\rho_1 \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + \rho_2 |u|^2 \right) d\Gamma \\ & + \frac{\eta_1}{2} \int_{\Gamma} \left(k_1(t) \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 - k_1' \square \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\Gamma + \frac{\eta_2}{2} \int_{\Gamma} (k_2(t) |u|^2 - k_2' \square u) d\Gamma. \end{aligned}$$

O teorema seguinte mostra a existência de solução fraca para o problema (2.1)-(2.2).

Teorema 2.1 *Suponhamos que*

$$k_i \in C^2(0, \infty), \quad k_i, \quad -k_i', \quad k_i'' \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Se os dados iniciais $(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ então existe uma única solução fraca do sistema (2.1)-(2.2) com condições de fronteira (2.3) e (2.7)-(2.8).

Demonstração: A principal idéia aqui é para usar o método de Faedo-Galerkin. Para isso, seja $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma base de $H^2(\Omega)$ que é um sistema ortonormal completo em $L^2(\Omega)$. Considere $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ o subespaço de $H^2(\Omega)$ gerado pelos m primeiros vetores de $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Em V_m considere o problema aproximado.

Problema aproximado

Determinar u^m e v^m com

$$u^m(x, t) = \sum_{j=1}^m h_j(t) w_{j(x)}$$

$$v^m(x, t) = G(-[u^m, u^m])$$

solução do seguinte problema aproximado

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{tt}^m w_j dx + a(u^m, w_j) - \int_{\Omega} [u^m, w_j] v^m dx \\ &= \eta_1 \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} + \left(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0) \right) \frac{\partial u^m}{\partial \nu} - k_1(t) \frac{\partial u_{0,m}}{\partial \nu} + k_1' * \frac{\partial u^m}{\partial \nu} \right\} \frac{\partial w_j}{\partial \nu} d\Gamma \\ & - \eta_2 \int_{\Gamma} \left\{ u_t^m + \left(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0) \right) u^m - k_2(t) u_{0,m} + k_2' * u^m \right\} w_j d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.12)$$

para $j = 1, \dots, m$, com as condições iniciais

$$u^m(., 0) = u_{0,m} \longrightarrow u_0 \quad \text{em } H^2(\Omega) \quad (2.13)$$

$$u_t^m(., 0) = u_{1,m} \longrightarrow u_1 \quad \text{em } L^2(\Omega) \quad (2.14)$$

Segue do Teorema de Picard que o problema (2.12)-(2.14) tem uma única solução local (u^m, v^m) . A extensão da solução do problema aproximado é uma consequência da estimativa abaixo.

Estimativa a Priori

Multiplicando a equação (2.12) por $h_j'(t)$ e somando em j obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t^m|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u^m, u^m) - \int_{\Omega} [u^m, u_t^m] v^m dx \\ &= -\eta_1 \int_{\Gamma} \left\{ \left| \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} \right|^2 + \left(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0) \right) \frac{\partial u^m}{\partial \nu} \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} - k_1(t) \frac{\partial u_{0,m}}{\partial \nu} \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} \right. \\ & \left. + k_1' * \frac{\partial u^m}{\partial \nu} \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} \right\} d\Gamma - \eta_2 \int_{\Gamma} \left\{ |u_t^m|^2 + \left(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0) \right) u^m u_t^m \right. \\ & \left. - k_2(t) u_{0,m} u_t^m + k_2' * u^m u_t^m \right\} d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Usando o Lema 2.1 temos

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} k_1' * \frac{\partial u^m}{\partial \nu} \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} d\Gamma = -\frac{1}{2} k_1'(t) \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u^m}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} k_1'' \square \frac{\partial u^m}{\partial \nu} d\Gamma \\ & - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \left[k_1' \square \frac{\partial u^m}{\partial \nu} - \left(\int_0^t k_1'(s) ds \right) \left| \frac{\partial u^m}{\partial \nu} \right|^2 \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} k_2' * u^m u_t^m d\Gamma = -\frac{1}{2} k_2'(t) \int_{\Gamma} |u^m|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} k_2'' \square u^m d\Gamma \\ & - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \left[k_2' \square u^m - \left(\int_0^t k_2'(s) ds \right) |u^m|^2 \right] d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Notando que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [u^m, u_t^m] v^m dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} ([u^m, u^m]) v^m dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\Delta^2 v^m) v^m dx \\
-\frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta^2 v_t^m v^m dx &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta v^m \Delta v^m dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta v^m|^2 dx \\
&= -\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta v^m|^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Substituindo as equações (2.16)-(2.18) em (2.15), obtemos

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq c \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u_{0,m}}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma \leq c E(0, u_{0,m}, u_{1,m}).$$

Integrando a expressão acima sobre $]0, t[$, obtemos:

$$E(t) \leq C_1 E(0)$$

onde C_1 é uma constante positiva. Como $E(0)$ é limitado, existe uma constante $C_2 > 0$, independente de m e de t tal que

$$E(t) \leq C_2, \forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T]. \tag{2.19}$$

Da estimativa (2.19) concluímos que existem funções u e v tais que:

$$u^m \rightharpoonup^* u \quad \text{em } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)), \tag{2.20}$$

$$u_t^m \rightharpoonup^* u_t \quad \text{em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{2.21}$$

$$v^m \rightharpoonup^* v \quad \text{em } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)). \tag{2.22}$$

Multiplicando (2.12) por $\beta \in C^2([0, T])$, tal que $\beta(T) = \beta'(T) = 0$ e integrando sobre $[0, T]$ obtemos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega} u^m w_j \beta_{tt} dx dt + \int_0^T a(u^m, w_j) \beta dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} [u^m, w_j] v^m \beta dx dt - \int_{\Omega} u_{0,m} w_j \beta_t(0) dx + \int_{\Omega} u_{1,m} w_j \beta(0) dx \\
&- \eta_1 \int_0^T \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u^m}{\partial \nu} + \left(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0) \right) \frac{\partial u^m}{\partial \nu} - k_1(t) \frac{\partial u_{0,m}}{\partial \nu} + k_1' * \frac{\partial u^m}{\partial \nu} \right\} \frac{\partial w_j}{\partial \nu} \beta d\Gamma dt \\
&- \eta_2 \int_0^T \int_{\Gamma} \left\{ u_t^m + \left(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0) \right) u^m - k_2(t) u_{0,m} + k_2' * u^m \right\} w_j \beta d\Gamma dt.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Passagem ao limite no termo $[u^m, w_j]$.

Visto que

$$[u^m, w_j] \rightharpoonup [u, w_j] \quad \text{em} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

e

$$v^m \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

concluimos que

$$[u^m, w_j]v^m \rightharpoonup [u, w_j]v \quad \text{em} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.24)$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ na equação (2.23) e observando as convergências (2.20)-(2.22) e (2.24) e levando em consideração que o conjunto $\{w_j\beta : j \in \mathbb{N}, \beta \in C^2([0, T])\}$ é denso em $C^0([0, T]; H^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$, concluímos que (u, v) é solução fraca do problema (2.1)-(2.4) e (2.7)-(2.8).

UNICIDADE

Sejam (u_1, v_1) e (u_2, v_2) duas soluções do problema (2.1)-(2.4) e (2.7)-(2.8) com as mesmas condições iniciais. Então $u = u_1 - u_2$ e $v = v_1 - v_2$ são soluções do problema (2.1)-(2.4) e (2.7)-(2.8) com condições iniciais nulas. Logo u e v satisfazem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_0 t &= \int_{\Omega} ([u, v_1]u_t + [u_2, v]u_t) dx - \frac{\eta_1}{2} \int_{\Gamma} \left(2 \left| \frac{\partial u_t}{\partial \nu} \right|^2 + k_1'' \square \frac{\partial u}{\partial \nu} - k_1'(t) \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \right) d\Gamma \\ &\quad - \frac{\eta_2}{2} \int_{\Gamma} (2|u_t|^2 + k_2'' \square u - k_2'(t)|u|^2) d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde

$$\begin{aligned} E_0(t) &:= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} a(u, u) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho_1 \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + \rho_2 |u|^2 d\Gamma + \frac{\eta_1}{2} \int_{\Gamma} \left(k_1(t) \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 - k_1' \square \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\Gamma \\ &\quad + \frac{\eta_2}{2} \int_{\Gamma} (k_2(t)|u|^2 - k_2' \square u) d\Gamma. \end{aligned}$$

Usando o Lema 2.4 e a desigualdade de Cauchy-Schwars obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ([u, v_1]u_t + [u_2, v]u_t) dx &\leq \| [u, v_1] \|_{L^2(\Omega)} \| u_t \|_{L^2(\Omega)} + \| u_2, v \|_{L^2(\Omega)} \| u_t \|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c(\| u \|_{H^2(\Omega)} \| v_1 \|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \| u_t \|_{L^2(\Omega)} + \| u_2 \|_{H^2(\Omega)} \| v \|_{W^{2,\infty}(\Omega)} + \| u_t \|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq c(\| u \|_{H^2(\Omega)} \| v_1 \|_{H^2(\Omega)} \| u_t \|_{L^2(\Omega)} + \| u_2 \|_{H^2(\Omega)} \| v \|_{H^2(\Omega)} \| u_t \|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Visto que $\Delta^2 v = -[u, u_1 + u_2]$, então usando o mesmo argumento que utilizamos para obter a desigualdade anterior encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ([u, v_1]u_t + [u_2, v]u_t)dx &\leq c(\|u\|_{H^2(\Omega)}\|u_1\|_{H^2(\Omega)}\|u_t\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|u_2\|_{H^2(\Omega)}\|u\|_{H^2(\Omega)}\|u_1 + u_2\|_{H^2(\Omega)}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq c\|u\|_{H^2(\Omega)}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Substituindo as desigualdades anteriores em (2.25) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_0(t) &\leq c\left\{ \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + a(u, u) \right\} \\ &- \frac{\eta_1}{2} \int_{\Gamma} \left(2\left| \frac{\partial u_t}{\partial \nu} \right|^2 + k_1'' \square \frac{\partial u}{\partial \nu} - k_1'(t) \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \right) d\Gamma \\ &- \frac{\eta_2}{2} \int_{\Omega} (2|u_t|^2 + k_2'' \square u - k_2'(t)|u|^2) d\Gamma. \end{aligned}$$

Integrando sobre $[0, T]$, levando em conta que os dados iniciais são nulos e usando o lema de Granwall concluímos que

$$u = v = 0.$$

Portanto a solução é única.

Lema 2.5. Suponha que $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ e $h^{3/2} \in H^{3/2}(\Gamma)$. Então qualquer solução v de

$$a(v, w) = \int_{\Omega} fw \, dx + \int_{\Gamma} gw \, d\Gamma + \int_{\Gamma} h \frac{\partial w}{\partial \nu} \, d\Gamma, \quad \forall w \in H^2(\Omega)$$

tem a seguinte regularidade

$$v \in H^4(\Omega).$$

A demonstração deste lema pode ser vista em [5].

REGULARIDADE DE SOLUÇÕES

A regularidade de solução será estabelecida no próximo Teorema.

Teorema 2.2. Sejam $k_i \in C^2(0, \infty)$ tal que $k_i, -k'_i, k''_i \geq 0$ para $i = 1, 2$. Suponhamos que $(u_0, u_1) \in H^4(\Omega) \times H^2(\Omega)$ satisfaz as condições de compatibilidade,

$$\mathfrak{B}_1 u_0 = -\rho_1 \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \eta_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \quad \text{sobre } \Gamma,$$

$$\mathfrak{B}_2 u_0 = \rho_2 u_0 + \eta_2 u_1 \quad \text{sobre } \Gamma.$$

Então a solução do problema (2.1)-(2.4) e (2.7)-(2.8) tem a seguinte regularidade

$$u \in C^1([0, T]; H^2(\Omega)) \cap C^0([0, T]; H^4(\Omega)),$$

$$v \in C^0([0, T]; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)).$$

Demonstração: Derivando em relação a t a igualdade

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{tt}^m w_j dx + a(u^m, w_j) - \int_{\Omega} [u^m, w_j] v^m dx \\ &= \eta_1 \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} + \left(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0) \right) \frac{\partial u^m}{\partial \nu} - k_1(t) \frac{\partial u_{0,m}}{\partial \nu} + k'_1 * \frac{\partial u^m}{\partial \nu} \right\} \frac{\partial w_j}{\partial \nu} d\Gamma \\ & - \eta_2 \int_{\Gamma} \left\{ u_t^m + \left(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0) \right) u^m - k_2(t) v_{0,m} + k'_2 * u^m \right\} w_j d\Gamma, \end{aligned}$$

obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{ttt}^m w_j dx + a(u_t^m, w_j) - \int_{\Omega} [u_t^m, w_j] v^m dx - \int_{\Omega} [u^m, w_j] v_t dx \\ &= -\eta_1 \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u_{tt}^m}{\partial \nu} + \left(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0) \right) \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} - k'_1(t) \frac{\partial u_{0,m}}{\partial \nu} - k'_1(t) \frac{\partial u^m}{\partial \nu} + k'_1 * \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} \right\} \frac{\partial w_j}{\partial \nu} d\Gamma \\ & - \eta_2 \int_{\Gamma} \left\{ u_{tt}^m + \left(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0) \right) u_t^m - k'_2(t) u_{0,m} - k'_2(t) u^m + k'_2 * u_t^m \right\} w_j d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Multiplicando a equação (2.26) por $h_j''(t)$ e somando em j , obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_{ttt}^m|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u_t^m, u_t^m) \\ &= \int_{\Omega} [u_t^m, w_j] v^m dx + \int_{\Omega} [u^m, w_j] v_t^m dx \\ & - \eta_1 \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u_{tt}^m}{\partial \nu} + \left(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0) \right) \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} + k'_1 * \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} \right\} \frac{\partial u_{tt}^m}{\partial \nu} d\Gamma \\ & - \eta_2 \int_{\Gamma} \left\{ u_{tt}^m + \left(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0) \right) u_t^m + k'_2 * u_t^m \right\} u_{tt}^m d\Gamma. \end{aligned}$$

Usando o Lema 2.1, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{E(t, u_t^m, v_t^m)\} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_t^m, u_t^m] v_t^m dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{\Omega} [u_t^m, u_t^m] v_t^m dx - \frac{\eta_1}{2} \int_{\Omega} \left\{ 2 \left| \frac{\partial u_{tt}^m}{\partial \nu} \right|^2 - k_1'(t) \left| \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} \right|^2 + k_1'' \square \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} \right\} d\Gamma \\ & - \frac{\eta_2}{2} \int_{\Gamma} \{ 2 |u_{tt}^m|^2 - k_2'(t) |u_t^m|^2 + k_2'' \square u_t^m \} d\Gamma. \end{aligned}$$

Integrando esta igualdade sobre $]0, T[$ encontramos

$$E(t, u_t^m, v_t^m) \leq cE(0, u_t^m, v_t^m) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} [u_t^m, v_t^m] u_t^m dx - \frac{3}{2} \int_0^T \int_{\Omega} [u_t^m, v_t^m] u_t^m dx ds. \quad (2.27)$$

Do Lema 2.4 obtemos as seguintes estimativas

$$\int_0^T \int_{\Omega} [u_t^m, v_t^m] u_t^m dx \leq \varepsilon \int_0^T \|u_t^m\|_{H^2(\Omega)}^2 dt + C_\varepsilon \quad (2.28)$$

e

$$- \int_0^T \int_{\Omega} [u_t^m, v_t^m] u_t^m dx ds \leq c \int_0^T \|u_t^m\|_{H^2(\Omega)}^2 ds, \quad (2.29)$$

onde C_ε é uma constante positiva que depende de ε . Substituindo (2.28) e (2.29) em (2.27) e usando o Lema de Gronwall, obtemos:

$$E(t, u_t^m, v_t^m) \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad t \in [0, T].$$

Da estimativa acima obtemos

$$\begin{aligned} u_{tt}^m & \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ u_t^m & \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)), \\ v_t^m & \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Integrando por parte a equação (2.1) obtemos

$$\begin{aligned} a(u, w) &= - \int_{\Omega} \{u_{tt} - [u, v]\} w dx - \eta_2 \int_{\Gamma} \{u_t + k_2(0)u - k_2(t)u_0 + k_2' * u\} w d\Gamma \\ & + \eta_1 \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u_t}{\partial \nu} - k_1(0) \frac{\partial u}{\partial \nu} + k_1(t) \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - k_1' * \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\Gamma, \end{aligned}$$

para qualquer $w \in H^2(\Omega)$. Do **Lema 2.5** concluímos que $u \in L^\infty(0, T; H^4(\Omega))$.

A unicidade de solução forte é feita de modo análogo ao que foi feito para a unicidade de soluções fracas. \square

Conclusão: Nos últimos anos importantes progressos foram obtidos para a estabilização do sistema de von Kármán em especial para análise da estabilização de estruturas dinâmicas. Pesquisas nestas áreas foram dirigidas para problemas em estruturas modernas em engenharias que necessitam de ativos feedbacks para estabilizar estruturas que podem ser instável na ausência de controles (veja [5] para detalhes). Sendo assim a existência de solução do problema estudado aqui é de fundamental importância para análise de problemas de estabilização.

Bibliografia

- [1] C. C. S. Tavares and M. L. Santos, *On the Kirchhoff plates equations with thermal effects and memory boundary conditions. Applied Mathematics and Computation* 213 (2009) 25–38.
- [2] M. Horn, I. Lasiecka, *Uniform decay of weak solutions to a von Kármán plate with nonlinear boundary dissipation. Differential and Integral Equations*, 7 (1994), 885-908.
- [3] M. Horn, I. Lasiecka, *Global stabilization of a dynamical Von Kármán plate with Nonlinear Boundary Feedback. Appl. Math. Optimization*, 31 (1995), 57-84.
- [4] M. Horn, A. Favini, I. Lasiecka, D. Tataru, *Global existence, uniqueness and regularity to a Von Kármán system with nonlinear boundary dissipation. Differential and Integral Equations*, 9 (1996), 267-294.
- [5] J.E. Lagnese, *Boundary Stabilization of Thin Plates*. SIAM. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, (1989).
- [6] J. E. Muñoz Rivera and G.P. Menzala, *Decay rates of solutions of a von Kármán system for viscoelastic plates with memory. Quarterly of Applied Mathematics*, v. LVII, n. 1, (1999), p. 181-200.
- [7] J. E. Muñoz Rivera, H. Portillo Oquendo, M. L. Santos, *Asymptotic behavior to a von Kármán plate with boundary memory conditions. Nonlinear Analysis* 62, (2005), 1183-1205.
- [8] J. Puel and M. Tucsnak, *Boundary stabilization for the von Kármán equations. SIAM J. Control Optim.* 33(1), (1996), 255-273.