UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Willian Cintra da Silva

Princípio de concentração e compacidade para o operador $p(x)$ - laplaciano

BELÉM

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Willian Cintra da Silva

Princípio de concentração e compacidade para o operador $p(x)$ - laplaciano

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva

BELÉM

2014

Silva, Willian Cintra da, 1989-

Princípio de concentração e compacidade para o operador p(x)-laplaciano / Willian Cintra da Silva. -2014.

Orientadora: João Pablo Pinheiro da Silva Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2014.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Princípio de concentração e compacidade. 4. Sobolev, espaço de-Expoente variável. I. Título.

CDD 22. ed. 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Willian Cintra da Silva

Princípio de Concentração e Compacidade para o operador $p(x)$ - laplaciano

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Data da defesa: 27 de fevereiro de 2014.

Conceito: APROVADO

Banca Examinadora

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva (Orientador)
PPGME - UFPA

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa
PPGME - UFPA

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
PPGME - UFPA

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos
PPGMat - UFCG

Agradecimentos

À minha família, em especial à minha mãe (sem ela nada disso seria possível) e ao meu irmão Msc. Marcos Paulo

À minha noiva que sempre está comigo em todos os momentos. É minha inspiração e motivação.

Ao Professor Dr. João Pablo Pinheiro da Silva com quem aprendi muito sobre Análise Real, me fornecendo a base necessária para entrar no mestrado. E é claro, por ter aceitado me orientar.

Aos meus professores durante o Mestrado que contribuíram para minha formação, em especial: ao Dr. Marcos Diniz e sua fantástica visão geométrica, ao Dr. Giovany Figueiredo pelo exemplo de pesquisador e por ter aceito fazer parte da banca avaliadora deste trabalho, à Dra. Cristina Vaz com quem tive pouco contato mas é um exemplo de pessoa e de profissional, ao Dr. Rafael Abreu que teve a paciência de tirar algumas dúvidas sem mesmo sem me conhecer direito, ao Dr. Francisco Julio Corrêa que transborda conhecimento e por ter aceitado fazer parte da banca deste trabalho e ao Dr. Jefferson dos Santos que também aceitou fazer parte da banca.

Aos amigos que fiz na UFPA: Andréia, André, Bruno, Claudionei, Gelson, Ítalo, Jeziel, João, Jorsi, Julio, Leandro, Marly, Mirelson, Raimundo, Ryan e Tarcyana.

À UFPA e ao PPGME que me permitiram fazer pós graduação e sem sair da minha cidade.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho iremos apresentar e demonstrar o Princípio de Concentração e Compacidade para os espaços $L^{p(x)}$ e aplica-lo para estabelecer a existência de solução fraca para a seguinte classe de problemas elípticos

$$\begin{cases} -div(a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + b(x)|u|^{p(x)-2}u = c(x)|u|^{p^*(x)-2}u + \lambda f(x,u), & x \in \Omega; \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $0 < a_0 \leq a(x) \in L^\infty(\Omega), 0 < b_0 \leq b(x) \in L^\infty(\Omega), 0 < c_0 \leq c(x) \in L^\infty(\Omega)$, p é uma função lipschitziana definida em $\overline{\Omega}$ satisfazendo $1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < N$, $p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ e a função f satisfazendo hipóteses adequadas que serão apresentadas ao longo do trabalho.

Palavras-chave: Princípio de Concentração e Compacidade, expoente variável.

Abstract

In this work we will present and prove the principle of concentration compactness for $L^{p(x)}$ spaces and apply it to establish the existence of weak solution to the following class of elliptical problems

$$\begin{cases} -div(a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + b(x)|u|^{p(x)-2}u = c(x)|u|^{p^*(x)-2}u + \lambda f(x,u), & x \in \Omega; \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain, $0 < a_0 \leq a(x) \in L^\infty(\Omega), 0 < b_0 \leq b(x) \in L^\infty(\Omega), 0 < c_0 \leq c(x) \in L^\infty(\Omega)$, p is a Lipschitz function defined on $\overline{\Omega}$ satisfying $1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < N$, $p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ and function f satisfying suitable conditions that will be presented throughout the work.

keywords: Principle of Concentration Compactness, variable exponent.

Sumário

Introdução

O estudo dos espaços de Lebesgue e Sobolev com expoente variável é recente. As referências padrões sobre as propriedades básicas destes espaços são os artigos de O. Kováčik e J. Rákosník ([5], 1991) e X.L. Fan e D. Zhao ([2], 2001). O estudo destes espaços se intensificou na virada do século com a descoberta de aplicações na Física. Por exemplo os artigos K. R. Rajagopal e M. R$\mathring{u}\check{z}i\check{c}$ka ([6], 1996 e [7], 2001) fornecem aplicações em fluidos eletroreológicos. O artigo [13] de Peter A. Hästö aborda de maneira simples um pouco sobre algumas aplicações desses espaços. Além disso, recomendamos o site http://www.helsinki.fi/~pharjule/varsob/index.shtml de um grupo de pesquisa finlandês sobre os espaços com expoente variável e suas aplicações em processamentos de imagem.

Neste trabalho apresentaremos o Princípio de Concentração e Compacidade para os espaços $L^{p(x)}$ e aplica-lo para estudar a existência de solução fraca para a seguinte classe de problemas elípticos

$$\begin{cases} -div(a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + b(x)|u|^{p(x)-2}u = c(x)|u|^{p^*(x)-2}u + \lambda f(x,u), & x \in \Omega; \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $0 < a_0 \leq a(x) \in L^\infty(\Omega), 0 < b_0 \leq b(x) \in L^\infty(\Omega), 0 < c_0 \leq c(x) \in L^\infty(\Omega)$ e p é uma função lipschitziana definida em $\overline{\Omega}$ satisfazendo $1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < N$, $p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ e sobre a função f adotaremos as seguintes hipóteses

(H1) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, $f(x,t) > 0$ em $\Omega_0 \times (0, +\infty)$ para algum aberto não vazio $\Omega_0 \subseteq \Omega$ e $f(x,t) = 0$ para todo $x \in \Omega$ e $t \leq 0$.

(H2) $|f(x,t)| \leq C_1 + C_2|t|^{\alpha(x)}$, $\alpha \in C(\overline{\Omega})$ com $\widehat{a} = \inf_{x\in\Omega}[\alpha(x) - p(x) + 1] > 0$ e $a = \inf_{x\in\Omega}[p^*(x) - \alpha(x) - 1] > 0$. Onde C_1 e C_2 são constantes positivas.

(H3) $|f(x,t)| \leq \widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2|t|^{\beta(x)}$, $\beta \in \mathbf{P}(\Omega)$ com $0 \leq \beta(x)$ e $\widetilde{b} = \inf_{x\in\Omega}[p(x) - \beta(x) - 1] > 0$. Onde $\widetilde{C}_1$ e $\widetilde{C}_2$ são constantes positivas.

(H4) Existe uma função $\mu \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $p^*(x) > \mu > p(x)$, $l_1 = \inf_{x\in\Omega}[\mu(x) - p(x)] > 0$, $l_2 = \inf_{x\in\Omega}[p^*(x) - \mu(x)] > 0$, $\mu F(x,t) \leq tf(x,t)$ e $f(x,t) = o(t^{p(x)-1})$, quando $t \to 0^+$.

(H5) Existe uma função $\nu \in \mathbf{P}(\Omega)$ tal que $1 < \nu(x) < p(x)$ e $\nu F(x,t) \leq tf(x,t)$ para $x \in \Omega$.

Este trabalho é baseado no artigo de Fu Youngqiang [17] está estruturado da seguinte forma: No primeiro capítulo faremos uma revisão sobre os espaços de Lebesgue e Sobolev com expoente variável, apresentando as definições, resultados básicos, resultados de densidade e imersão que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

No Capítulo 2 provaremos o Princípio de Concentração e Compacidade que generaliza o resultado de Lions para os espaços de Lebesgue com expoente variável. Aqui vale ressaltar que fizemos uma modificação com relação ao trabalho do autor. No seu artigo, Fu prova um resultado com duas desigualdades (Veja corolário 3.1 em [17]) que serão utilizados mais adiante para provar a desigualdade generalizada de Sobolev para os átomos das medidas limites no Princípio de Concentração e Compacidade (veja Teorema 3.1 e sua demonstração em [17]), a primeira desigualdade usada para os átomos no interior de Ω e a segunda para os átomos em $\partial\Omega$. Porém resolvemos o problema de outra maneira: primeiramente provamos o Lema 2.2 para $x \in \Omega$ (o autor faz apenas para $x \in \Omega$, veja Lema 3.1 em [17]), com isso foi possível dispensar a segunda desigualdade, utilizando apenas uma desigualdade (veja nosso Corolário 2.1) para chegar ao mesmo resultado.

Em seguida, no Capítulo 3, iremos provaremos a existência de solução fraca para o problema apresentado usando métodos variacionais e Teorema do Passo da Montanha. Para contornar a falta de compacidade proveniente da potência crítica usaremos o Princípio de Concentração provando dois teoremas de existência de solução, um sob as hipóteses (H1), (H2) e (H4) e outro sob as hipóteses (H1), (H3) e (H5). Cabe ressaltar que as hipóteses (H4) e (H5) aparecem para mostrar que o funcional associado satisfaz as geometrias do Teorema do Passo da Montanha.

Por fim, apresentaremos alguns apêndices: a regularidade do funcional associado, uma breve revisão sobre Medidas de Radon (o espaço $\mathbb{M}(\overline{\Omega}) := (C(\overline{\Omega}))'$) e alguns resultados de Análise Funcional, Teoria da Medida e Distribuições que foram utilizados ao longo do trabalho.

Notações

$\|\cdot\|_{p(x)}$	-	Norma do espaço $L^{p(x)}(\Omega)$
$\|\cdot\|_{p,A}$	-	Norma do espaço $L^{p(x)}(A)$
$\|\cdot\|_{1,p(x)}$	-	Norma do espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$
$\|\cdot\|_{1,p,A}$	-	Norma do espaço $W^{1,p(x)}(A)$
$\rho_{p,A}(u)$	-	função modular no espaço $L^{p(x)}(A)$
$\hookrightarrow$	-	Imersão contínua
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	-	Imersão compacta
$W^{1,\infty}(\Omega)$	$:=$	$\{u \in L^{\infty}(\Omega); \|\nabla u\| \in L^{\infty}(\Omega)\}$
$W^{-1,p(x)}(\Omega)$	$:=$	$(W^{1,p(x)}(\Omega))'$
$L^0(\Omega)$	$:=$	$\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; u$ é mensurável em $\Omega\}$
$\mathbf{P}(\Omega)$	$:=$	$\{u \in L^0(\Omega); u \geq 1\}$
C^*	$:=$	$\left\{\int_{\Omega} \|u\|^* dx; u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega),\ \|\nabla\|_p \leq 1\right\}$

Capítulo 1

Os Espaços de Lebesgue e Sobolev com expoente variável

O estudo dos espaços de Lebesgue e Sobolev com expoente variável tem crescido de maneira significativa nos últimos anos. Por exemplo, uma pesquisa por *variable exponent* no *Mathematical Rieviews* aponta 15 artigos publicados antes de 2000, 31 artigos entre 2000 e 2004 e 242 artigos entre 2005 e 2010. As referências padrões sobre as propriedades básicas dos espaços $L^{p(x)}$ e $W^{m,p(x)}$ são os artigos [**?**], de O. kovácik e J. Rákosník,, publicado em 1991 e [2], de X.-L Fan e D. Zhao de 2001 que apresenta as mesmas propriedades por métodos diferentes. Sugerimos também o livro [10], de Lars Diening. Apresentaremos aqui essas propriedades que servirão de base para todo o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 $L^{p(x)}(\Omega)$ - Definições e primeiras propriedades

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável com $|\Omega| > 0$. Considere:

$$L^0(\Omega) \;\; := \;\; \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\; u \text{ é mensurável em } \Omega\}$$

Os elementos de $L^0(\Omega)$ que são iguais quase sempre são considerados como um único elemento. Além disso, seja $p \in L^0(\Omega)$, definimos

$$\varphi(x,s) = s^{p(x)} \quad \forall x \in \Omega,\; s \geq 0 \tag{1.1}$$

$$\rho(u) = \rho_{p(x)}(u) := \int_\Omega \varphi(x,|u|)dx = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx \tag{1.2}$$

$$\mathbf{P}(\Omega) = \big\{u \in L^0(\Omega);\; u \geq 1\big\} \tag{1.3}$$

$$L^\infty_+(\Omega) = L^\infty(\Omega) \cap \mathbf{P}(\Omega) \tag{1.4}$$

A função ρ em (1.2) é chamada *função modular*. Um elemento $p \in \mathbf{P}(\Omega)$ é chamado *função expoente*. Para $p \in L^\infty_+(\Omega)$, adotaremos a seguinte notação

$$1 \leq p_1 := \inf \operatorname{ess} p \leq \sup \operatorname{ess} p =: p_2 < \infty.$$

Definição 1.1 *Seja $p \in L^\infty_+(\Omega)$, definimos os espaço de Lebesgue com expoente variável $L^{p(x)}(\Omega)$ por:*

$$L^{p(x)}(\Omega) := \left\{ u \in L^0(\Omega); \lim_{\lambda \to 0^+} \rho(\lambda u) = 0 \right\} \tag{1.5}$$

Observação: O espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ pode ser definido para casos mais gerais, supondo por exemplo apenas que $p \in \mathbf{P}(\Omega)$, mas as propriedades de $L^{p(x)}(\Omega)$ se tornam melhores quando exigimos também que $p \in L^\infty(\Omega)$. Além disso, essas hipóteses são suficientes para os objetivos deste trabalho. Daqui em diante, p representará uma função expoente em $L^\infty_+(\Omega)$.

Vajamos algumas propriedades da função ρ:

Proposição 1.1 *Para todos $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$, tem-se:*

(a) $\rho(u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

(b) $\rho(-u) = \rho(u)$

(c) *ρ é convexa, isto é*

$$\rho(tu + (1-t)v) \leq t\rho(u) + (1-t)\rho(v), \quad \forall t \in [0,1]$$

(d) $\rho(u+v) \leq 2^{p_2}[\rho(u) + \rho(v)]$

(e) *Se $\lambda > 1$ temos*

$$\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \lambda^{p_1}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p_2}\rho(u)$$

e se $0 < \lambda < 1$, temos

$$\lambda^{p_2}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p_1}\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \rho(u)$$

(f) Para cada $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ a função

$$\begin{aligned} \rho(\cdot u) : [0,+\infty) &\longrightarrow [0,+\infty) \\ \lambda &\longmapsto \rho(\lambda u) \end{aligned}$$

é crescente, contínua e convexa.

Demonstração: Sejam $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$

(a) De fato,

$$\begin{aligned} \rho(u) = 0 &\Leftrightarrow \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx = 0 \Leftrightarrow |u(x)|^{p(x)} = 0, \text{ q.s. em } \Omega \\ &\Leftrightarrow u(x) = 0, \text{ q.s. em } \Omega \Leftrightarrow u = 0 \end{aligned}$$

(b) Segue de $|-u(x)| = |u(x)|$ e das propriedades de integral.

(c) Segue da convexidade da função $\varphi(x, s) = s^{p(x)}$ em s e da linearidade da integral.

(d) De fato,

$$\begin{aligned} |u(x) + v(x)|^{p(x)} &\leq 2^{p(x)}[|u(x)|^{p(x)} + |v(x)|^{p(x)}] \quad \text{q.s. em } \Omega \\ &\leq 2^{p_2}[|u(x)|^{p(x)} + |v(x)|^{p(x)}] \quad \text{q.s. em } \Omega \end{aligned}$$

integrando ambos os lados dessa desigualdade temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u(x) + v(x)|^{p(x)} dx &\leq 2^{p_2}[\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx + \int_\Omega |v(x)|^{p(x)} dx] \\ \rho(u + v) &\leq 2^{p_2}[\rho(u) + \rho(v)] \end{aligned}$$

(e) Se $\lambda > 1$, temos

$$|u(x)|^{p(x)} \leq \lambda |u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p_1} |u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p_2} |u(x)|^{p(x)} \quad \text{q.s. em } \Omega$$

integrando estas desigualdades obtemos

$$\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \leq \lambda \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p_1} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \leq \int_\Omega |\lambda u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p_2} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}$$

e portanto

$$\rho(u) \leq \lambda \rho(u) \leq \lambda^{p_1} \rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p_2} \rho(u)$$

Por outro lado, caso $0 < \lambda < 1$ temos

$$\lambda^{p_2} |u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p_1} |u(x)|^{p(x)} \leq \lambda |u(x)|^{p(x)} \leq |u(x)|^{p(x)} \quad \text{q.s. em } \Omega$$

E novamente por integração obteremos

$$\lambda^{p_2}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p_1}\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \rho(u)$$

(f) Para cada $u \in L^{p(x)} \setminus \{0\}$ temos:

$p(\cdot u)$ é crescente:

De fato, dados $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, +\infty)$ tais que $\lambda_1 < \lambda_2$, segue que

$$|\lambda_1|^{p(x)} < |\lambda_2|^{p(x)} \quad \text{q.s em } \Omega \Longrightarrow |\lambda_1|^{p(x)}|u(x)|^{p(x)} < |\lambda_2|^{p(x)}|u(x)|^{p(x)} \quad \text{q.s em } \Omega$$

Integrando ambos os membros da desigualdade obtemos

$$\rho(\lambda_1) < \rho(\lambda_2)$$

Continuidade:

Seja $(\lambda_n), \lambda \in [0, +\infty)$ tais que $\lambda_n \to \lambda$. É claro que, q.s. em Ω

$$|\lambda_n u(x)|^{p(x)} \to |\lambda u(x)|^{p(x)}$$

Por outro lado, (λ_n) é limitada e então podemos encontrar um $k > 1$ tal que

$$|\lambda_n| \leq k \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

assim

$$\begin{aligned} |\lambda_n|^{p(x)} \leq k^{p(x)} \leq k^{p_2} \quad &\text{q.s. em } \Omega \\ |\lambda_n u(x)|^{p(x)} \leq k^{p_2}|u(x)|^{p(x)} \quad &\text{q.s. em } \Omega \end{aligned}$$

Definindo $\varphi_n := |\lambda_n u(x)|^{p(x)}$ e $\varphi := |\lambda u(x)|^{p(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \varphi_n \leq k^{p_2}|u(x)|^{p(x)} \in L^1(\Omega) \quad &\text{q.s. em } \Omega \\ \varphi_n \to \varphi \quad &\text{q.s. em } \Omega \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi_n dx \quad &\to \quad \int_\Omega \varphi dx \\ \int_\Omega |\lambda_n u(x)|^{p(x)} \quad &\to \quad \int_\Omega |\lambda u(x)|^{p(x)} dx \\ \rho(\lambda_n u) \quad &\to \quad \rho(\lambda u) \end{aligned}$$

Convexidade:

Segue novamente da convexidade de $\varphi(x, s) = s^{p(x)}$ e da linearidade da integral.

■

Como $L^{p(x)}(\Omega) \subset L^0(\Omega)$ e este é um espaço vetorial, segue dos itens (a), (d) e (e) que

Corolário 1.1 *$L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço vetorial*

Vejamos agora um resultado que permite definir o espaço de Lebesgue com expoente variável de forma mais "natural"que a definição dada em 1.5

Proposição 1.2 *As seguintes afirmações são equivalentes para $u \in L^0(\Omega)$:*

(a) $\rho(\lambda u) < +\infty, \quad \forall \lambda > 0,$

(b) $\rho(u) < +\infty,$

(c) $u \in L^{p(x)}(\Omega)$

Demonstração:

$(a) \Rightarrow (b)$ Segue de das definição e módulo.

$(b) \Rightarrow (c)$ Segue da continuidade de $\rho(\lambda u)$ em λ (Proposição 1.1, item (f)). $(c) \Rightarrow (a)$ Se $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, então $\lim_{\lambda \to 0^+} \rho(\lambda u) = 0$. Segue da definição de limite que para $\varepsilon > 0$, existe $0 < \lambda_0 < 1$ tal que

$$\rho(\lambda_0 u) = \int_\Omega |\lambda_0 u(x)|^{p(x)} dx < \varepsilon$$

assim, pela Proposição 1.1, item (e), temos

$$\lambda_0^{p_2} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \varepsilon,$$

e portanto

$$\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < +\infty.$$

Assim, para todo $\lambda > 0$, novamente da Proposição 1.1 item (e), obtemos que

$$\rho(\lambda u) \leq \max\{\lambda^{p_1} \rho(u), \lambda^{p_2} \rho(u)\} < +\infty.$$

■

Observação 1: Esta proposição nos permite definir os espaços $L^{p(x)}(\Omega)$ da seguinte forma

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^0(\Omega); \rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < +\infty \right\}. \tag{1.6}$$

Note a semelhança desta definição com a definição dos espaços de Lebesgue clássicos. Daqui em diante, usaremos 1.6 como definição de $L^{p(x)}(\Omega)$.

Observação 2: Note que para mostrar a implicação de (c) para (a) foi necessário usar a hipótese de que $p \in L^\infty(\Omega)$. E de fato, é possível mostrar que se (apenas) $p \in \mathbf{P}(\Omega)$, então existe $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ que não verifica a condição (a). Para mais detalhes, veja [2], Teorema 1.1.

Nosso próximo passo é definir uma norma sobre $L^{p(x)}(\Omega)$, mas para isso precisamos conhecer algumas propriedades do conjunto

$$I_u = \left\{\lambda > 0; \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$$

onde $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Será útil, também, considerarmos a função

$$\begin{aligned} \theta_u : (0, +\infty) &\longrightarrow [0, +\infty) \\ \lambda &\longmapsto \theta_u(\lambda) = \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Proposição 1.3 *Para cada $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ temos*

(a) $I_u = (0, +\infty) \Longleftrightarrow u = 0$

(b) Se $u \neq 0$, então $I_u = [a, +\infty)$ com $a > 0$. Além disso, $a = \theta_u^{-1}(1)$.

Demonstração:

(a) ($\Rightarrow$) Supondo por contradição que $u = 0$. Como $I_u = (0, +\infty)$, então $\inf I_u = 0$ e existe uma sequência (minimizante) $(\lambda_n) \subset (0, 1)$ tal que

$$\lambda_n \to 0 \ \text{ e } \ \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

assim

$$1 \geq \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) = \int_\Omega \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} dx > \left(\frac{1}{\lambda_n}\right) \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx$$

como $\rho(u) > 0$, segue que

$$\rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \longrightarrow +\infty, \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow +\infty,$$

contradição. Portanto $u = 0$.

($\Leftarrow$) Se $u = 0$ então

$$I_0 = \left\{\lambda > 0; \rho\left(\frac{0}{\lambda}\right) = 0 \leq 1\right\} = (0, +\infty)$$

(b) Mostraremos primeiramente que I_u é um intervalo da forma $[a,+\infty)$. De fato, se $a \in I_u$, então para $\lambda > a$, do item (f) da Proposição 1.1

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{a} \Rightarrow \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) < \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1$$

assim $\lambda \in I_u$. Portanto I_u é um intervalo da forma $(a,+\infty)$ ou $[a,+\infty)$. Provemos então que $I_u = [a,+\infty)$. Com efeito, se $I_u = (a,+\infty)$, então $a \notin I_u$, isto é, $\rho(\frac{u}{a}) > 1$. Da continuidade de $\rho(\lambda u)$ em λ (Proposição 1.1, item (f)), existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho\left(\frac{u}{\lambda}\right), \quad \forall \lambda \in (a-\delta, a+delta), \lambda \neq 0,$$

em particular

$$\rho\left(\frac{u}{a+\frac{\delta}{2}}\right) > 1.$$

Contradição, pois $a + \frac{\delta}{2} \in I_u$. Portanto $I_u = [a,\infty)$. Pelo mesmo argumento, não podemos ter $\rho(\frac{u}{a}) < 1$. Assim,

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1 \Rightarrow a \in \theta_u^{-1}(1).$$

■

Agora podemos demonstrar o próximo resultado, que mostra a norma usual no espaço $L^{p(x)}(\Omega)$. Mostraremos em seguida algumas propriedades dessa norma.

Proposição 1.4 $\|u\|_{p(x)} = \inf\left\{\lambda > 0;\ \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$ *é uma norma em* $L^{p(x)}(\Omega)$. *Isto é, para todos* $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$,

(i) $\|u\|_{p(x)} \geq 0$,

(ii) $\|u\|_{p(x)} = 0 \Leftrightarrow u = 0$,

(iii) $\|\alpha u\|_{p(x)} = |\alpha|\|u\|_{p(x)}$,

(iv) $\|u+v\|_{p(x)} \leq \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)}$

Demonstração: Sejam $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

(i) É imediato.

(ii) Segue do item (a) da Proposição 1.3.

(iii) Se $u = 0$ a igualdade é imediata. Para $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$, segue do item (b) da Proposição 1.3

$$\|\alpha u\|_{p(x)} = \inf I_{\alpha u} = \inf[a, +\infty) = a \Rightarrow \rho\left(\frac{\alpha u}{a}\right) = 1.$$

Analogamente,

$$\|u\|_{p(x)} = b \Rightarrow \rho\left(\frac{u}{b}\right) = 1.$$

Então

$$\rho\left(\frac{\alpha u}{a}\right) \quad = \quad \rho\left(\frac{u}{b}\right),$$

como $\rho(\lambda u)$ é estritamente crescente (Proposição 1.1, item f), segue que

$$\frac{|\alpha|}{a} = \frac{1}{b} \Rightarrow \|\alpha u\|_{p(x)} = |\alpha|\|u\|_{p(x)}.$$

(iv) Considere o conjunto

$$C = \left\{u \in L^{p(x)}(\Omega); \rho(u) \leq 1\right\}.$$

Assim $I_u = \{\lambda > 0; (u/\lambda) \in C\}$. Além disso, como ρ é convexo, C é convexo. Denotando $\|u\|_{p(x)} = a$ e $\|v\|_{p(x)} = b$, temos

$$\frac{u}{a+\epsilon}, \frac{v}{b+\epsilon} \in C, \quad \forall \epsilon > 0$$

Desde que C é convexo temos

$$\frac{tu}{a+\epsilon} + \frac{(1-t)v}{b+\epsilon} \in C, \quad \forall t \in [0,1].$$

Em particular, para

$$t = \frac{a+\epsilon}{a+b+\epsilon},$$

temos

$$\frac{u+v}{a+b+\epsilon} \in C.$$

Assim $a+b+\epsilon \in I_{u+v}$, daí

$$\inf I_{u+v} = \|u+v\|_{p(x)} \leq \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)} + \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ segue que

$$\|u+v\|_{p(x)} \leq \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)}$$

■

Proposição 1.5 *Se $p(x) = p$ é constante com $1 \leq p \leq +\infty$, então*

$$\| \cdot \|_{p(x)} = \| \cdot \|_p$$

onde é a norma usual em $L^p(\Omega)$.

Demonstração: Se $u = 0$ a igualdade é imediata. Para $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ temos:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{p(x)} &= \inf \left\{ \lambda > 0; \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ \lambda > 0; \int_\Omega \left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ \lambda > 0; \frac{1}{\lambda^p} \int_\Omega |u(x)|^p dx \leq 1 \right\} \\
&= \inf \{ \lambda > 0; \|u\|^p \leq \lambda^p \} \\
&= \inf \{ \lambda > 0; \|u\| \leq \lambda \} \\
&= \|u\|_p
\end{aligned}$$

■

Observação: Com este resultado, os espaços $L^{p(x)}(\Omega)$ podem ser encarados como uma generalização dos espaços de Lebesgue clássicos.

A função modular ρ está fortemente relacionada com a norma $\|.\|_{p(x)}$. Os próximos resultados mostram essa relação.

Proposição 1.6 *Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$. Então*

$$\|u\|_{p(x)} = a \Leftrightarrow \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

Demonstração: Se $\|u\|_{p(x)} = a$, segue do item (b) da Proposição 1.3 que $\rho(\frac{u}{a}) = 1$. Reciprocamente se $a > 0$ é tal que

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1,$$

então $a \in I_u$ e portanto $\|u\|_{p(x)} \leq a$. Se $b = \|u\|_{p(x)} < a$, como $\rho(\lambda u)$ é estritamente crescente em λ (Proposição 1.1, item (f)), teríamos $\rho(\frac{u}{a}) < \rho(\frac{u}{b}) = 1$. contradição, pois $b \notin I_u$. Assim, só podemos ter $\|u\|_{p(x)} = a$.

■

O próximo resultado será largamente utilizado ao longo dos próximos capítulos.

Teorema 1.1 (Relação Norma - Modular) *Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Então* *(i)* $\|u\|_{p(x)} < 1(= 1; > 1) \Longleftrightarrow \rho(u) < 1(= 1; > 1)$

(ii) $\|u\|_{p(x)} > 1 \Longrightarrow \|u\|_{p(x)}^{p_1} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p_2}$

(iii) $\|u\|_{p(x)} < 1 \Longrightarrow \|u\|_{p(x)}^{p_2} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p_1}$

Demonstração: Se $u = 0$ todas as afirmações são imediatas, por isso consideraremos $u \neq 0$.

(i) Do resultado anterior, segue que

$$\|u\|_{p(x)} = 1 \Leftrightarrow \rho(u) = 1.$$

Se $a = \|u\|_{p(x)} < 1$, segue da Proposição anterior que $\rho(\frac{u}{a}) = 1$. Assim, como $\rho(\lambda u)$ é crescente em λ (Proposição 1.1, item (f)), segue que

$$a < 1 \Leftrightarrow \rho(u) < \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

Caso $a = \|u\|_{p(x)} > 1$, a demonstração é análoga.

(ii) Se $a = \|u\|_{p(x)} > 1$, temo que

$$\begin{aligned} a^{p_1} \leq a^{p(x)} \leq a^{p_2} \quad &\text{q.s. em } \Omega \\ \frac{1}{a^{p_2}} \leq \frac{1}{a^{p(x)}} \leq \frac{1}{a^{p_1}} \quad &\text{q.s. em } \Omega \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{1}{a^{p_2}} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx \leq \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)} dx \leq \frac{1}{a^{p_1}} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx$$

isto é

$$\frac{1}{a^{p_2}} \rho(u) \leq \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1 \leq \frac{1}{a^{p_1}} \rho(u).$$

De onde segue o resultado.

(iii) É análogo ao item (ii).

■

Como consequência do Teorema 1.1, temos o próximo resultado que nos diz que a topologia gerada pela norma é equivalente à topologia gerada pela função modular.

Proposição 1.7 *Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e uma sequência $\{u_n\} \subset L^{p(x)}(\Omega)$. As seguintes afirmações são equivalentes* *(i)* $\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \rho(u_n - u) = 0$

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) Se $\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$, então para n suficientemente grande temos que $\|u_n - u\|_{p(x)} < 1$. Do item (3) do Teorema 1.1, temos que

$$\rho(u_n - u) \leq \|u_n - u\|_{p(x)}^{p_2}.$$

Logo $\rho(u_n - u) \to 0$ quando $n \to \infty$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Se $\lim_{n\to+\infty} \rho(u_n - u) = 0$, então para nn suficientemente grande temos que $\rho(u_n - u) < 1$. Do item (1) do Teorema anterior, segue que $\|u_n - u\|_{p(x)} < 1$. Assim, do item (3) do mesmo Teorema obtemos

$$\|u_n - u\|_{p(x)}^{p_1} \leq \rho(u_n - u)$$

e portanto $\|u_n - u\|_{p(x)} \to 0$, quando $n \to \infty$.

$\blacksquare$

Teorema 1.2 *$L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L^{p(x)}(\Omega)$. Podemos extrair uma subsequência $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ tal que

$$\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\|_{p(x)} \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \geq 1.$$

De fato, como $\{u_n\}$ é de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_\varepsilon \Rightarrow \|u_m - u_n\|_{p(x)} \leq \varepsilon. \tag{1.7}$$

Assim, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, tome $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_1 \Rightarrow \|u_m - u_n\|_{p(x)} \leq \frac{1}{2}.$$

Para $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, tome $n_2 \geq n_1$ tal que

$$m, n \geq n_2 \Rightarrow \|u_m - u_n\|_{p(x)} \leq \frac{1}{2^2}.$$

Para $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, tome $n_k > n_{k-1}$ tal que

$$m, n \geq n_k \Rightarrow \|u_m - u_n\|_{p(x)} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Desta forma, obtemos uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ (ou por simplicidade, $\{u_k\}$) satisfazendo (1.7). Definindo

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1}(x) - u_k(x)|, \quad x \in \Omega$$

Temos que $v_n \leq v_{n+1}$ e $\{v_n\} \subset L^{p(x)}(\Omega)$ com

$$\begin{aligned}
\|v_n\|_{p(x)} &= \left\| \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1} - u_k| \right\|_{p(x)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \|u_{k+1} - u_k\|_{p(x)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 1.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.1 item (i), temos que

$$\int_\Omega |v_n(x)|^{p(x)} dx \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

. Então, pelo Teorema da Convergência Monótona (C.3), segue que

$$v_n(x) \to v(x), \quad \text{q.s. em} \ \ \Omega$$

e $v \in L^{p(x)}(\Omega)$. Por outro lado, para $m \geq n \geq 2$, temos que

$$\begin{aligned}
|u_m(x) - u_n(x)| &\leq |u_m(x) - u_{m-1}(x)| + ... + |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \\
&\leq v(x) - v_{n-1}(x) \leq v(x), \quad \text{q.s. em} \ \ \Omega
\end{aligned}$$

Segue que, para x q.s. em Ω $\{u_n(x)\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Então

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{q.s. em} \ \ \Omega$$

Segue então que

$$|u(x) - u_n| \leq v(x) \in L^{p(x)}(\Omega), \quad n \geq 2, \ \text{q.s. em} \ \ \Omega,$$

logo $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e ainda

$$|u_n(x) - u(x)|^{p(x)} \to 0 \quad \text{q.s. em} \ \ \Omega.$$

Assim, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (C.4), segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n(x) - u(x)|^{p(x)} dx = 0$$

ou seja

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u_n - u) = 0.$$

Pela Proposição 1.7, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$$

■

Como consequência (da demonstração), temos o seguinte resultado:

Teorema 1.3 *Seja (f_n) uma sequência em $L^{p(x)}(\Omega)$ e $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_{p(x)} \to 0$. Então existe uma sequência (f_{n_k}) e $h \in L^{p(x)}(\Omega)$ tais que*

(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.s. em* Ω

(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *q.s. em* Ω

Dado $p \in L_+^\infty(\Omega)$, nos definimos sua função expoente conjugada $p'(x)$ como:

$$p'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \Omega_1 = \{x \in \Omega; p(x) = 1\}; \\ \dfrac{p(x)}{p(x)-1}, & \text{se} \quad x \in \Omega \setminus \Omega_1. \end{cases}$$

Note que, se $p_1 > 1$ então Ω_1 tem medida nula e $p'(x)$ fica definida como sendo uma função em $L_+^\infty(\Omega)$ tal que

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$$

.

Para finalizar esta seção, apresentaremos uma versão da Desigualdade de Hölder para os espaços de Lebesgue com expoente variável.

Teorema 1.4 (Desigualdade de Hölder) *Seja $p \in L_+^\infty(\Omega)$ tal que $p_1 > 1$. Então, para $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ temos que*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'}\right) \|u\|_{p(x)} \|v\|_{p'(x)}$$

Demonstração: Se $u = 0$ ou $v = 0$ a desigualdade é imediata. Supondo $u, v \neq 0$ e pondo $\|u\|_{p(x)} = a$ e $\|v\|_{p'(x)} = b$. Aplicando a desigualdade de Young (2.1) para $\alpha = |u(x)|/a$ e

$\beta = |v(x)|/b$ temos, q.s. em Ω:

$$\begin{aligned}
\frac{|u(x)|}{a}\frac{|v(x)|}{b} &\leq \frac{1}{p(x)}\left(\frac{|u(x)|}{a}\right)^{p(x)} + \frac{1}{p'(x)}\left(\frac{|v(x)|}{b}\right)^{p'(x)} \\
\int_\Omega \frac{|u(x)|}{a}\frac{|v(x)|}{b}dx &\leq \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(\frac{|u(x)|}{a}\right)^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{p'(x)}\left(\frac{|v(x)|}{b}\right)^{p'(x)} dx \\
\int_\Omega \frac{|u(x)|}{a}\frac{|v(x)|}{b}dx &\leq \frac{1}{p_1}\int_\Omega \left(\frac{|u(x)|}{a}\right)^{p(x)} dx + \frac{1}{p_1'}\int_\Omega \left(\frac{|v(x)|}{b}\right)^{p'(x)} dx
\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.6, temos que $\displaystyle\int_\Omega \left(\frac{|u(x)|}{a}\right)^{p(x)} dx = \int_\Omega \left(\frac{|v(x)|}{b}\right)^{p'(x)} dx = 1$, e segue o resultado. ∎

1.2 Separabilidade, Reflexibilidade e dual de $L^{p(x)}(\Omega)$

Teorema 1.5 (Representação de Riesz) *Seja $p_1 > 1$. Então $(L^{p(x)}(\Omega))^* = L^{p'(x)}(\Omega)$, isto é*

(i) Para todo $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$, f definido por

$$f(v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \forall u \in L^{p(x)}(\Omega), \tag{1.8}$$

é um funcional linear contínuo sobre $L^{p(x)}(\Omega)$.

(ii) Para todo funcional linear contínuo f definido em $L^{p(x)}(\Omega)$, existe um único elemento $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ tal que f é definido exatamente por (1.8).

Demonstração: Veja [2], Teorema 1.14.

∎

Corolário 1.2 *Se $p_1 > 1$ então $L^{p(x)}(\Omega)$ é reflexivo.*

Teorema 1.6 *$L^{p(x)}(\Omega)$ é separável.*

Demonstração: Veja [?], Corolário 2.12.

1.3 Densidade e resultados de Imersão em $L^{p(x)}(\Omega)$

Teorema 1.7 *O conjunto* $C(\Omega) \cap L^{p(x)}(\Omega)$ *é denso em* $L^{p(x)}(\Omega)$. *Se, além disso,* Ω *é aberto, então o conjunto* $C_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^{p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Veja [?], Teorema 2.11.

Teorema 1.8 *Seja* $0 < |\Omega| < \infty$ *e* $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$. *Então*

$$L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega),$$

se, e somente se,

$$p(x) \leq q(x), \quad \textit{q.s. em } \Omega.$$

E a norma do operador identidade $I : L^{q(x)}(\Omega) \to L^{p(x)}(\Omega)$ *não excede* $|\Omega| + 1$.

1.4 Espaços $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ e $p \in L_+^\infty(\Omega)$. O espaço de Sobolev com expoente variável $W^{1,p(x)}(\Omega)$, é definido como

$$W^{1,p(x)}(\Omega) := \{u \in L^{p(x)}(\Omega); |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\},$$

onde o operador $\nabla : W^{1,p(x)}(\Omega) \to (L^{p(x)}(\Omega))^N$ é dado por

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$$

e

$$|\nabla u| = \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|$$

As derivadas $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ são tomadas no sentido das distribuições.
É fácil ver que $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é um subespaço vetorial de $L^{p(x)}(\Omega)$. De [2], a norma em $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{1,p(x)} = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}. \tag{1.9}$$

Onde, por simplicidade, escreveremos $\|\nabla u\|_{p(x)}$ ao invés de $\||\nabla u|\|_{p(x)}$.
Por $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ denotamos o subespaço de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ que é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma dada em (1.9). Veremos a seguir as principais propriedades desses espaços e que serão utilizados constantemente ao longo dos próximos capítulos.

Teorema 1.9 *Os espaços $W^{1,p(x)}(\Omega)$ e $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ são espaços de Banach, que são separáveis. Além disso, são reflexives se $p_1 > 1$.*

Demonstração: Veja [?], Teorema 3.1.

Teorema 1.10 (Imersões de Sobolev) *Se $p, q \in C(\overline{\Omega})$ com $p_1 > 1$ e $p_2 < N$ tais que $1 < q(x) \leq p^*(x) := \frac{Np(x)}{N-p(x)}$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Então*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega).$$

Isto é, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^{q(x)}(\Omega)$. Além disso, se $\inf_{x\in\Omega}[p^*(x) - q(x)] > 0$, então a imersão é compacta.

Teorema 1.11 (Desigualdade de Poincaré) *Se $p \in C(\overline{\Omega}) \cap L_+^{\infty}(\Omega)$, então existe $C > 0$ (que depende apenas de Ω) tal que, para todo $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$,*

$$\|u\|_{p(x)} \leq C\|\nabla u\|_{p(x)}.$$

Como consequência deste teorema, temos que as normas $\|\nabla u\|_{p(x)}$ e $\|u\|_{1,p(x)}$ são equivalentes em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Capítulo 2

Princípio de Concentração e Compacidade

Neste capítulo iremos apresentar e demonstrar o Princípio de Concentração e Compacidade para os espaços $L^{p(x)}(\Omega)$, resultado devido a Fu, em [17]. A partir deste capítulo, por simplicidade, usarmos as notações $\|.\|_p$ para a norma em $L^{p(x)}(\Omega)$ e $\|.\|_{1,p}$ para a norma em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Notemos primeiramente que, para todo $w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ com $\|\nabla w\|_p \leq 1$, da imersão contínua $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*(x)}(\Omega)$ (Teorema 1.10) e do Teorema 1.1 (itens (i) e (ii)), temos que:

$$\int_\Omega |w|^{p^*(x)}dx \leq \max\{\|w\|_{p^*}^{p_1^*}, \|w\|_{p^*}^{p_2^*}\} \leq \max\{(K\|w\|_{1,p})^{p_1^*}, (K\|w\|_{1,p})^{p_2^*}\},$$

onde $p_1^* = \inf p^*(x) \leq \sup p^*(x) = p_2^*$. Pela desigualdade de Poincaré (Teorema 1.11), segue que

$$\int_\Omega |w|^{p^*(x)}dx \leq \max\{(KC\|\nabla w\|_p)^{p_1^*}, (KC\|\nabla w\|_p)^{p_2^*}\} \leq \max\{(KC)^{p_1^*}, (KC)^{p_2^*}\}$$

Assim, podemos considerar

$$C^* = \sup\left\{\int_\Omega |\omega|^{p^*(x)}dx;\ \omega \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \|\nabla u\|_p \leq 1\right\}$$

e $0 < C^* < \infty$. Observe que esta é a melhor constante para a desigualdade

$$\int_\Omega |w|^{p^*(x)}dx \leq C\max\{\|\nabla w\|_p^{p_1^*}, \|\nabla w\|_p^{p_2^*}\}. \tag{2.1}$$

Antes de enunciar e demonstrar o Princípio de Concentração e Compacidade, vamos apresentar alguns lemas que serão usados em sua demonstração

2.1 Resultados Auxiliares

Vejamos alguns resultados que serão usados para demonstrar o teorema principal deste capítulo.

Proposição 2.1 *Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ e $p \geq 1$, temos:*

$$|a+b|^p \leq (1+\beta)^{p-1}|a|^p + \left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p-1}|b|^p$$

Demonstração: Caso $b = 0$ a igualdade é imediata. Para $b \neq 0$, considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (x+1)^p - (1+\beta)^{p-1}x^p - \left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p-1},$$

Mostremos que $f(x) \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\begin{aligned} f'(x) = p(x+1)^{p-1} - p(1+\beta)^{p-1}x^{p-1} &= 0 \\ (x+1)^{p-1} &= (1+\beta)^{p-1}x^{p-1} \\ x &= \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

Assim, o ponto crítico de f é $x = \frac{1}{\beta}$. Por um calculo direto temos que

$$f(1/\beta) = 0.$$

Além disso, notemos que $f'(x) \geq 0$ se $x \leq \frac{1}{\beta}$ e $f'(x) \leq 0$ se $x \geq \frac{1}{\beta}$. Assim, $x = \frac{1}{\beta}$ é ponto de máximo e portanto $f(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim:

$$\begin{aligned} (x+1)^p &\leq (1+\beta)^{p-1}x^p + \left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p-1} \\ |x+1|^p &\leq (1+\beta)^{p-1}|x|^p + \left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p-1} \end{aligned}$$

Em particular, para $x = \frac{a}{b}$, temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{a}{b}+1\right|^p &\leq (1+\beta)^{p-1}\left|\frac{a}{b}\right|^p + \left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p-1} \\ |a+b|^p &\leq (1+\beta)^{p-1}|a|^p + \left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p-1}|b|^p. \end{aligned}$$

■

Lema 2.1 (Brezis-Lieb) *Seja (f_n) uma sequência limitada em $L^{p(x)}(\Omega)$ com $f_n \to f \in L^{p(x)}(\Omega)$ q.s. em Ω. Se $p(x)$ satisfaz*

$$1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < +\infty,$$

então

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega [|f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)}]dx = \int_\Omega |f|^{p(x)}dx$$

Demonstração: Definindo a função, para cada $x \in \Omega$ fixo,

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto h(y) = y^{p(x)} \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para esta função, existe um $\xi = \xi(x)$ entre $|f_n|$ e $|f_n - f|$ tal que

$$\begin{aligned} |h(|f_n|) - h(|f_n - f|)| &= |h'(\xi)(|f_n| - |f_n - f|)| \\ ||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)}| &= p(x)\xi^{p(x)-1}||f_n| - |f_n - f|| \\ ||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)}| &\leq p(x)\xi^{p(x)-1}|f|, \end{aligned}$$

além disso, como $\xi(x)$ assume valores entre $|f_n(x)|$ e $|f_n(x) - f(x)|$, então:

$$||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)}| \leq p(x)(|f_n| + |f_n - f|)^{p(x)-1}|f|$$

mas

$$\begin{aligned} |f_n| - |f| &\leq |f_n - f| \\ |f_n| - |f_n - f| &\leq |f| \\ |f_n| + |f_n - f| &\leq |f| + 2|f_n - f|, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} ||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)}| &\leq p(x)(|f_n| + 2|f_n - f|)^{p(x)-1}|f| \\ &\leq p(x)2^{p(x)-1}(|f|^{p(x)} + (2|f_n - f|)^{p(x)-1}|f|) \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Por outro lado, fixando $\varepsilon_1 \in (0,1)$, e usando a Desigualdade de Young (C.1) para $\alpha = \varepsilon_1^{\frac{1-p(x)}{p(x)}}|f|$ e $\beta = \varepsilon_1^{\frac{p(x)-1}{p(x)}}|f_n - f|^{p(x)-1}$, temos:

$$\begin{aligned} |f_n - f|^{p(x)-1}|f| &\leq \frac{(p(x)-1)}{p(x)}\left(\varepsilon_1^{\frac{p(x)-1}{p(x)}}|f_n - f|^{p(x)-1}\right)^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} + \frac{1}{p(x)}\left(\varepsilon_1^{\frac{1-p(x)}{p(x)}}|f|\right)^{p(x)} \\ &\leq \frac{(p(x)-1)\varepsilon_1}{p(x)}|f_n - f|^{p(x)} + \frac{\varepsilon_1^{1-p(x)}|f|^{p(x)}}{p(x)} \end{aligned}$$

Note que $\frac{p(x)-1}{p(x)} \leq 1$, $\frac{1}{p(x)} \leq 1$ e $\varepsilon_1^{1-p(x)} \leq \varepsilon_1^{1-p_2}$, então

$$|f_n - f|^{p(x)-1}|f| \leq \varepsilon_1|f_n - f|^{p(x)} + \varepsilon_1^{1-p_2}|f|^{p(x)} \tag{2.3}$$

De (2.2) e (2.3), temos que

$$\begin{aligned}
||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)}| &\leq p(x)2^{p(x)-1}(|f|^{p(x)} + 2^{p(x)-1}\varepsilon_1|f_n - f|^{p(x)} + 2^{p(x)-1}\varepsilon_1^{1-p_2}|f|^{p(x)}) \\
&\leq p(x)2^{p(x)-1}(2^{p(x)-1}\varepsilon_1|f_n - f|^{p(x)} + (1 + 2^{p(x)-1}\varepsilon_1^{1-p_2})|f|^{p(x)}) \\
&\leq p_2 2^{p_2-1}(2^{p_2-1}\varepsilon_1|f_n - f|^{p(x)} + (1 + 2^{p_2-1}\varepsilon_1^{1-p_2})|f|^{p(x)}) \\
&\leq p_2 2^{2p_2-2}\varepsilon_1|f_n - f|^{p(x)} + (p_2 2^{p_2-1} + p_2 2^{2p_2-2}\varepsilon_1^{1-p_2})|f|^{p(x)}
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon = p_2 2^{2p_2-2}\varepsilon_1$, temos

$$||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)}| \leq \varepsilon|f_n - f|^{p(x)} + C(\varepsilon)|f|^{p(x)}. \tag{2.4}$$

Seja

$$W_{\varepsilon,n}(x) = \left[||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)} - |f|^{p(x)}| - \varepsilon|f_n - f|^{p(x)}\right]_+,$$

onde $[a]_+ = \max[a, 0]$. Note que $W_{\varepsilon,n}(x) \to 0$ q.s. em Ω quando $n \to +\infty$. Por outro lado, pela desigualdade triangular e por (2.4),

$$\begin{aligned}
||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)} - |f|^{p(x)}| &\leq ||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)}| + |f|^{p(x)} \\
&\leq \varepsilon|f_n - f|^{p(x)} + C(\varepsilon)|f|^{p(x)} + |f|^{p(x)} \\
&\leq (C(\varepsilon) + 1)|f|^{p(x)} \\
||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)} - |f|^{p(x)}| - \varepsilon|f_n - f|^{p(x)} &\leq C(\varepsilon)|f|^{p(x)}.
\end{aligned}$$

Daí, concluímos que $W_{\varepsilon,n}(x) \leq C(\varepsilon)|f|^{p(x)} \in L^{p(x)}$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_\Omega W_{\varepsilon,n}(x) \to 0, \qquad \text{se } n \to +\infty.$$

A Da definição de $W_{\varepsilon,n}(x)$ temos que

$$\begin{aligned}
||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)} - |f|^{p(x)}| - \varepsilon|f_n - f|^{p(x)} &\leq W_{\varepsilon,n}(x) \\
||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)} - |f|^{p(x)}| &\leq W_{\varepsilon,n}(x) + \varepsilon|f_n - f|^{p(x)}.
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
\int_\Omega ||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)} - |f|^{p(x)}|dx &\leq \int_\Omega (W_{\varepsilon,n}(x) + \varepsilon|f_n - f|^{p(x)})dx \\
\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega ||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)} - |f|^{p(x)}|dx &\leq \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega (W_{\varepsilon,n}(x)dx + \varepsilon|f_n - f|^{p(x)})dx \\
\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega ||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)} - |f|^{p(x)}|dx &\leq \varepsilon K,
\end{aligned}$$

onde $K = \limsup \int_\Omega |f_n - f|^{p(x)} \geq 0$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, segue que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega ||f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)} - |f|^{p(x)}|dx = 0,$$

e portanto

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (|f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)} - |f|^{p(x)})dx = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega [|f_n|^{p(x)} - |f_n - f|^{p(x)}]dx = \int_\Omega |f|^{p(x)}dx$$

como queríamos demonstrar.

■

O lema 2.1 é uma versão modificada do Lema de Brezis-Lieb de [3].

Lema 2.2 *Dado $x_0 \in \overline{\Omega}$, seja $B_r(x_0)$ a bola de raio r centrada em x_0. Para todo $\delta > 0$ existe uma constante $k(\delta) > 0$ independente de $x \in \overline{\Omega}$ com a seguinte propriedade: se $0 < r < R < 1$ com $\frac{r}{R} \leq k(\delta)$, então existe uma função corte $\eta \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ tal que $\eta = 1$ em $B_r(x_0)$, $\eta = 0$ fora de $B_R(x_0)$ e*

$$\int_{B_R(x_0)\cap\Omega} |\nabla(\eta u)|^{p(x)}dx \leq \int_{B_R(x_0)\cap\Omega} |\nabla u|^{p(x)}dx + \delta \max\left\{\|\nabla u\|_p^{p_2}, \|\nabla u\|_p^{p_1}\right\} \tag{2.5}$$

para todo $u \in W_0^{p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Para $x_0 \in \Omega$, escolhemos R suficientemente pequeno de modo que $B_R(x_0) \subset \Omega$. Seja

$$\eta_R^r(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 0 \leq |x - x_0| \leq r; \\ \dfrac{k(|x - x_0|) - k(R)}{k(r) - k(R)}, & \text{se} \quad r \leq |x - x_0| \leq R; \\ 0, & \text{se} \quad R \leq |x - x_0|, \end{cases}$$

onde $k(r) = -|s^{N-1}|^{\frac{1}{1-N}} \ln r$ e $|s^{N-1}|$ denota a área de superfície da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$. Neste caso usaremos $\eta = \eta_R^r$.

Primeiramente, note que para $0 < r \leq |x - x_0|$ temos

$$k(|x - x_0|) \leq k(r),$$

assim

$$\frac{k(|x - x_0|) - k(R)}{k(r) - k(R)} \leq 1.$$

Então, tento em vista a definição de η_R^r, segue que

$$|\eta_R^r| \leq 1. \tag{2.6}$$

Usando o Teorema 2.1 para $a = \eta_R^r \nabla u$ e $b = u\nabla \eta_R^r$, temos

$$\int_{B_R(x_0)} |\eta_R^r \nabla u + u\nabla \eta_R^r|^{p(x)} dx \leq$$
$$\int_{B_R(x_0)} (1+\beta)^{p(x)-1} |\eta_R^r|^{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{B_R(x_0)} \left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p(x)-1} |u|^{p(x)} |\nabla \eta_R^r|^{p(x)} dx$$

Da imersão contínua $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*(x)}(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega |u|^{p^*(x)} dx < \infty \Rightarrow \int_{B_R(x_0)} (|u|^{p(x)})^{\frac{N}{N-p(x)}} dx < \infty \Leftrightarrow |u|^{p(x)} \in L^{\left(\frac{N}{p(x)}\right)'}(B_R(x_0)),$$

onde $(N/p(x))' = N/(N-p(x))$. Além disso é claro que $|\nabla \eta_R^r|^{p(x)} \in L^{\frac{N}{p(x)}}(B_R(x_0))$. Assim, pela Desigualdade de Hölder (Teorema 1.4), a desigualdade (2.6) e do item (e) da Proposição 1.1, obtemos:

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla(\eta_R^r u)|^{p(x)} dx \leq$$
$$(1+\beta)^{p_2-1} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^{p(x)} dx + r_p \left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p_2-1} \||u|^{p(x)}\|_{\left(\frac{N}{p}\right)', B_R(x_0)} \||\nabla \eta_R^r|^{p(x)}\|_{\frac{N}{p}, B_R(x_0)} \tag{2.7}$$

Vamos determinar uma estimativa para $\||\nabla \eta_R^r|^{p(x)}\|_{\frac{N}{p}, B_R(x_0)}$, para isso vamos calcular a integral $\int_{B_R(x_0)} |\nabla \eta_R^r|^N dx$.Note que, para $r \leq |x-x_0| \leq R$ temos:

$$\begin{aligned} \eta_R^r(x) &= \frac{k(|x-x_0|)}{k(r)-k(R)} - \frac{k(R)}{k(r)-k(R)} \\ &= \frac{\ln|x-x_0|}{\ln r - \ln R} - b \\ &= a \ln|x-x_0| - b \end{aligned}$$

onde $a = -\ln\frac{R}{r}$ e $b = \frac{k(R)}{k(r)-k(R)}$. Daí:

$$\frac{\partial \eta_R^r}{\partial x_i} = \frac{a(x_i - x_{0i})}{|x-x_0|^2},$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ e $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0N})$. E portanto

$$\begin{aligned} \nabla \eta_R^r &= \frac{a(x-x_0)}{|x-x_0|^2} \\ |\nabla \eta_R^r| &= \frac{|a|}{|x-x_0|}. \end{aligned}$$

Além disso
$$|\nabla \eta_R^r| = 0, \quad \text{se} \quad |x-x_0| \leq r \text{ ou } R \leq |x-x_0|$$
Assim, pondo $f(y) = \frac{|a|}{|y|}$ em $r \leq |y| \leq R$ e $f \equiv 0$ se $r \geq |y| \geq R$, onde $y = x - x_0$, segue que
$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta_R^r|^N dx = \int_{B_R(x_0)} |\nabla \eta_R^r|^N dx = \int_{B_R(0)} f(y)dy$$
Então, aplicando o Teorema C.2, temos
$$\begin{aligned}\int_{B_R(0)} f(y)dy &= |s^{N-1}| \int_r^R \frac{|a|^N}{t} dt \\ &= |s^{N-1}||a|^N \ln \frac{R}{r}.\end{aligned}$$

Substituindo o valor de a temos
$$\begin{aligned}\int_{B_R(x_0)} (|\nabla \eta_R^r|^{p(x)})^{\frac{N}{p(x)}} dx = \int_{B_R(0)} |\nabla \eta_R^r|^N dy &= |s^{N-1}| \left(\ln \frac{R}{r}\right)^{1-N} \\ \rho_{\frac{N}{p}, B_R(x_0)}(|\nabla \eta_R^r|^{p(x)}) &= |s^{N-1}| \left(\ln \frac{R}{r}\right)^{1-N}.\end{aligned}$$

Assim, se $\frac{r}{R} < e^{-|s^{N-1}|^{\frac{1}{N-1}}}$, teremos
$$\begin{aligned}|s^{n-1}| \left(\ln \frac{R}{r}\right)^{1-N} &< 1 \\ \rho_{\frac{N}{p}, B_R(x_0)}(|\nabla \eta_R^r|^{p(x)}) &< 1,\end{aligned}$$

do Teorema 1.1 - (i), temos
$$\| |\nabla \eta_R^r|^{p(x)} \|_{\frac{N}{p}, B_R(x_0)} < 1.$$
Pelo Teorema 1.1 - (iii), como $\frac{N}{p_2} \leq \frac{N}{p(x)} \leq \frac{N}{p_1}$,
$$\begin{aligned}\|(\nabla \eta_R^r)^{p(x)}\|_{\frac{N}{p}, B_R(x_0)}^{\frac{N}{p_1}} &\leq \rho_{\frac{N}{p}, B_R(x_0)}(|\nabla \eta_R^r|^{p(x)}) \\ \|(\nabla \eta_R^r)^{p(x)}\|_{\frac{N}{p}, B_R(x_0)} &\leq \left(|s^{N-1}| \left(\ln \frac{R}{r}\right)^{1-N}\right)^{\frac{p_1}{N}} \qquad (2.8)\end{aligned}$$

E agora vamos determinar uma estimativa para $\| |u|^{p(x)} \|_{(\frac{N}{p})', B_R(x_0)}$. Consideremos dois caso:

Se $\|u\|_{p^*, B_R(x_0)} \geq 1$, como $p(x) \leq p_2$, segue que
$$\begin{aligned}\|u\|_{p^*, B_R(x_0)}^{p(x)} &\leq \|u\|_{p^*, B_R(x_0)}^{p_2} \\ \frac{|u|^{p(x)}}{\|u\|_{p^*, B_R(x_0)}^{p_2}} &\leq \frac{|u|^{p(x)}}{\|u\|_{p^*, B_R(x_0)}^{p(x)}}\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x_0)} \left(\frac{|u|^{p(x)}}{\|u\|^{p_2}_{p^*,B_R(x_0)}} \right)^{\frac{N}{N-p(x)}} dx &\leq \int_{B_R(x_0)} \left(\frac{|u|^{p(x)}}{\|u\|^{p(x)}_{p^*,B_R(x_0)}} \right)^{\frac{N}{N-p(x)}} dx \\ &\leq \int_{B_R(x_0)} \left(\frac{|u|}{\|u\|_{p^*,B_R(x_0)}} \right)^{p^*} dx = \rho_{p^*,B_R(x_0)} \left(\frac{|u|}{\|u\|_{p^*,B_R(x_0)}} \right) \\ &\leq 1\end{aligned}$$

e portanto

$$\rho_{\left(\frac{N}{p}\right)',B_R(x_0)} \left(\frac{|u|^{p(x)}}{\|u\|^{p_2}_{p^*,B_R(x_0)}} \right) \leq 1$$

pelo Teorema 1.1 - (i),

$$\left\| \frac{|u|^{p(x)}}{\|u\|^{p_2}_{p^*,B_R(x_0)}} \right\|_{\left(\frac{N}{p}\right)',B_R(x_0)} \leq 1 \tag{2.9}$$

Assim, pela desigualdade (2.9), a imersão contínua $L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*(x)}(\Omega)$ (Teorema 1.10) e a Desigualdade de Poincaré (Teorema 1.11), obtemos

$$\||u|^{p(x)}\|_{\left(\frac{N}{p}\right)',B_R(x_0)} \leq \|u\|^{p_2}_{p^*,B_R(x_0)} \leq \|u\|^{p_2}_{p^*} \leq (C\|\nabla u\|_p)^{p_2}. \tag{2.10}$$

Se $\|u\|_{p^*,B_R(x_0)} < 1$, procedendo de maneira análoga, teremos

$$\||u|^{p(x)}\|_{\left(\frac{N}{p}\right)',B_R(x_0)} \leq \|u\|^{p_1}_{p^*,B_R(x_0)} \leq \|u\|^{p_1}_{p^*} \leq (C\|\nabla u\|_p)^{p_1}. \tag{2.11}$$

Substituindo as desigualdades (2.8), (2.10) e (2.11) em (2.7) teremos

$$\int_{B_R(x_0)} |\eta_R^r u|^{p(x)} \leq \begin{cases} (1+\beta)^{p_2-1} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^{p(x)} dx \\ +C^{p_2} \left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p_2-1} \left(|s^{N-1}| \left(\ln \frac{R}{r}\right)^{1-N} \right)^{\frac{p_1}{N}} \|\nabla u\|_p^{p_2} \\ \text{se} \quad \frac{r}{R} < e^{-|s^{N-1}|^{\frac{1}{N-1}}}, \quad \|u\|_{p^*,B_R(x_0)} \geq 1; \\ (1+\beta)^{p_2-1} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^{p(x)} dx \\ +C^{p_1} \left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p_2-1} \left(|s^{N-1}| \left(\ln \frac{R}{r}\right)^{1-N} \right)^{\frac{p_1}{N}} \|\nabla u\|_p^{p_1} \\ \text{se} \quad \frac{r}{R} < e^{-|s^{N-1}|^{\frac{1}{N-1}}}, \quad \|u\|_{p^*,B_R(x_0)} < 1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Por outro lado, pondo $A = \max\{\|\nabla u\|_p^{p_1}, \|\nabla u\|_p^{p_2}\}$ temos que

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p(x)} dx = \rho_p(|\nabla u|) \leq A,$$

assim,

$$\left[(1+\beta)^{p_2-1}-1\right]\int_{B_R(x_0)}|\nabla u|^{p(x)}dx \leq \left[(1+\beta)^{p_2-1}-1\right]A,$$

ou seja

$$(1+\beta)^{p_2-1}\int_{B_R(x_0)}|\nabla u|^{p(x)}dx \leq \int_{B_R(x_0)}|\nabla u|^{p(x)}dx+(1+\beta)^{p_2-1}A-A \tag{2.13}$$

e ainda

$$C^{p_2}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p_2-1}\left(|s^{N-1}|\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{1-N}\right)^{\frac{p_1}{N}}\|\nabla u\|_p^{p_2} \leq C^{p_2}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p_2-1}\left(|s^{N-1}|\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{1-N}\right)^{\frac{p_1}{N}}A \tag{2.14}$$

$$C^{p_1}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p_2-1}\left(|s^{N-1}|\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{1-N}\right)^{\frac{p_1}{N}}\|\nabla u\|_p^{p_2} \leq C^{p_1}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p_2-1}\left(|s^{N-1}|\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{1-N}\right)^{\frac{p_1}{N}}A \tag{2.15}$$

Somando as desigualdades (2.13) com (2.14) e (2.13) com (2.15), tendo em vista a desigualdade (2.12), concluímos que

$$\int_{B_R(x_0)}|\nabla\eta_R^r u|^{p(x)} \leq \int_{B_R(x_0)}|\nabla u|^{p(x)}dx+\delta\max\{\|\nabla u\|_p^{p_1},\|\nabla u\|_p^{p_2}\},$$

onde

$$\delta(\beta)\leq\begin{cases}(1+\beta)^{p_2-1}-1+C^{p_2}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p_2-1}\left(|s^{N-1}|\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{1-N}\right)^{\frac{p_1}{N}}\\ \text{se}\quad \frac{r}{R}<e^{-|s^{N-1}|^{\frac{1}{N-1}}},\quad \|u\|_{p^*,B_R(0)}\geq 1;\\ (1+\beta)^{p_2-1}-1+C^{p_1}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{p_2-1}\left(|s^{N-1}|\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{1-N}\right)^{\frac{p_1}{N}}\\ \text{se}\quad \frac{r}{R}<e^{-|s^{N-1}|^{\frac{1}{N-1}}},\quad \|u\|_{p^*,B_R(0)}<1.\end{cases}$$

Assim, tomando β tal que $(1+\beta)^{p_2-1}-1=\frac{\delta}{2}$ ou $\beta=(1+\frac{\delta}{2})^{\frac{1}{p_2-1}}-1$ e nos podemos encontrar $\delta(\beta)\leq\delta$, fornecendo

$$\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{\frac{p_1(1-N)}{N}} \leq \frac{\frac{\delta}{2}}{\left(\frac{1}{(1+\frac{\delta}{2})^{\frac{1}{p_2-1}}-1}+1\right)^{p_2-1}\max\{C^{p_1},C^{p_2}\}|s^{N-1}|^{\frac{p_1}{N}}},$$

como $\frac{r}{R} < 1$, isolando este fator, obtemos

$$\frac{r}{R} \leq \exp\left(-\left(\frac{\frac{\delta}{2}}{\left(\frac{1}{(1+\frac{\delta}{2})^{\frac{1}{p_2-1}}-1}+1\right)^{p_2-1}\max\{C^{p_1},C^{p_2}\}|s^{N-1}|^{\frac{p_1}{N}}}\right)^{\frac{N}{p_1(1-N)}}\right) = M$$

assim, basta por

$$k(\delta) = \min\{M, e^{-|s^{N-1}|^{\frac{1}{N-1}}}\}.$$

Provando a desigualdade para $x \in \Omega$.

No caso em que $x \in \partial\Omega$, consideremos a mesma função η_R^r, mas agora temos que $\eta_R^r \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, consideremos a função regularizante padrão ρ_ε com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que supp $\rho_\varepsilon \subset B_R(x_0)$ e definamos

$$\eta = \rho_\varepsilon * \eta_R^r.$$

Note que neste caso temos que $\rho_\varepsilon * \eta_R^r = \eta_R^r * \rho_\varepsilon$. Além disso,

$$\nabla\eta = \nabla(\rho_\varepsilon * \eta_R^r) = \rho_\varepsilon * \nabla\eta_R^r.$$

Então, pelo Teorema C.7, para $p = N$ temos que

$$\begin{aligned}\int_{B_R\cap\Omega} |\nabla\eta|^N dx &\leq \|\rho_\varepsilon * \nabla\eta_R^r\|_{L^N(B_R)}^N \\ &\leq \|\rho_\varepsilon\|_{L^1(B_R)}^N \|\nabla\eta_R^r\|_{L^N(B_R)}^N \\ &\leq \int_\Omega |\nabla\eta_R^r|^N dx, \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde escrevemos por simplicidade $B_R = B_R(x_0)$.

Assim, repetimos os mesmo passos para o caso em que $x_0 \in \Omega$ agora para a função $\eta = \rho_\varepsilon * \eta_R^r$ e calculando as integrais sobre $B_R \cap \Omega$. Desta forma, usando a estimativa (2.16), obtemos o mesmo resultado. ∎

Corolário 2.1 *Fixado $\delta > 0, 0 < r < R < 1$ e $\frac{r}{R} < k(\delta)$ com $k(\delta)$ como no resultado anterior. Então*

$$\int_{B_r(x_0)\cap\Omega} |u|^{p^*(x)}dx \leq C^* \max\left\{\left(\int_{B_R(x_0)\cap\Omega} |\nabla u|^{p(x)}dx + \delta\max\{\|\nabla u\|_p^{p_1}, \|\nabla u\|_p^{p_2}\}\right)^{\frac{p_2^*}{p_1}},\right.$$
$$\left.\left(\int_{B_R(0)\cap\Omega} |\nabla u|^{p(x)}dx + \delta\max\{\|\nabla u\|_p^{p_1}, \|\nabla u\|_p^{p_2}\}\right)^{\frac{p_1^*}{p_2}}\right\},$$

para todo $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Tomando η_R^r como no lema 2.2, pela desigualdade (2.1):

$$\begin{aligned}\int_{B_r(x_0)} |u|^{p^*(x)}dx &\leq \int_{B_R(x_0)} |u\eta_R^r|^{p^*(x)}dx \\ &\leq C^* \max\{\|\nabla(u\eta_R^r)\|_p^{p_1^*}, \|\nabla(u\eta_R^r)\|_p^{p_2^*}\}\end{aligned}$$

Se $\displaystyle\int_{B_r(x_0)} |\nabla u\eta_R^r|^{p(x)}dx > 1$, pelo Teorema 1.1 obtemos

$$\|\nabla(u\eta_R^r)\|_p \leq \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u\eta_R^r|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

e então:

$$\int_{B_r(x_0)} |u|^{p^*(x)}dx \;\leq\; C^* \max\left\{\left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u\eta_R^r|^{p(x)}dx\right)^{\frac{p_1^*}{p_1}}, \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u\eta_R^r|^{p(x)}dx\right)^{\frac{p_2^*}{p_1}}\right\}$$

e como $\frac{p_1^*}{p_1} < \frac{p_2^*}{p_1}$, segue que

$$\int_{B_r(x_0)} |u|^{p^*(x)}dx \leq C^* \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u\eta_R^r|^{p^*(x)}dx\right)^{\frac{p_2^*}{p_1}}. \tag{2.17}$$

Caso $\displaystyle\int_{B_r(x_0)} |\nabla u\eta_R^r|^{p^*(x)}dx \leq 1$, pelo Teorema 1.1, obtemos

$$\|\nabla(u\eta_R^r)\|_p \leq \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u\eta_R^r|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

e então:

$$\int_{B_r(x_0)} |u|^{p^*(x)}dx \;\leq\; C^* \max\left\{\left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u\eta_R^r|^{p(x)}dx\right)^{\frac{p_1^*}{p_2}}, \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u\eta_R^r|^{p(x)}dx\right)^{\frac{p_2^*}{p_2}}\right\}$$

e como $\frac{p_1^*}{p_2} < \frac{p_2^*}{p_2}$, segue que

$$\int_{B_r(x_0)} |u|^{p^*(x)}dx \leq C^* \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u\eta_R^r|^{p(x)}dx\right)^{\frac{p_1^*}{p_2}}. \tag{2.18}$$

Assim, de (2.17) e (2.18) concluímos

$$\int_{B_r(x_0)} |u|^{p^*(x)}dx \leq C^* \max\left\{\left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u\eta_R^r|^{p^*(x)}dx\right)^{\frac{p_2^*}{p_1}}, \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u\eta_R^r|^{p^*(x)}dx\right)^{\frac{p_1^*}{p_2}}\right\}$$

Então, pela desigualdade (2.5) do lema anterior segue o resultado.

Caso $x_0 \in \partial\Omega$, notemos que para usar a desigualdade (2.1) é necessário que $\eta u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Com efeito, como $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, então existe $\{g_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|g_n - u\|_{1,p} \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Por outro lado, como $\eta = \rho_\varepsilon * \eta_R^r \in C_0\infty(\mathbb{R}^N)$, então temos que $\eta g_n \in C_0^\infty(\Omega)$. E neste é claro que

$$\|\eta g_n - \eta u\|_{1,p} \to 0.$$

Portanto $\eta u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, basta usar os mesmos argumentos para o caso anterior e segue o resultado.

■

Lema 2.3 *Para toda $\eta \in C(\overline{\Omega})$, temos que os funcionais*

$$\begin{aligned} J_1 : W_0^{1,p(x)}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \eta dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} J_2 : W_0^{1,p(x)}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int_\Omega |u|^{p(x)} \eta dx \end{aligned}$$

são diferenciáveis à Gateaux e convexos.

Demonstração: Demonstraremos o resultado apenas para o funcional J_1. De maneira inteiramente análoga demonstra-se o resultado para o funcional J_2.

Derivada de Gateaux

Calculemos a derivada de Gateaux de J,

$$\begin{aligned} DJ(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega \left(|\nabla(u+tv)|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}\right)\eta dx}{t} \end{aligned}$$

Note que, pondo $G(s) = |\nabla(u+stv)|^{p(x)}\eta, \quad s \in [0,1]$, pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$\begin{aligned} G(1) - G(0) &= G'(\lambda), \quad \lambda \in (0,1) \\ \frac{\left(|\nabla(u+tv)|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}\right)\eta}{t} &= p(x)|\nabla(u+\lambda tv)|^{p(x)-2}(\nabla(u+tv))(\nabla v)\eta \end{aligned}$$

Observe que

$$\varphi := p(x)|\nabla(u+\lambda tv)|^{p(x)-2}(\nabla(u+tv))(\nabla v)\eta \longrightarrow p(x)|\nabla u|^{p(x)-2}(\nabla u)(\nabla v)\eta, \quad (2.19)$$

q.s. em Ω, quando $t \to 0$. Além disso

$$|\varphi| \leq |p(x)|(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v||\eta| \leq C(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v|,$$

e

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega),$$

pois, $|\nabla u|, |\nabla v| \in L^{p(x)}(\Omega)$. Então, pela Desigualdade de Hölder (1.4), temos

$$|\varphi| \leq C(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v| \in L(\Omega). \tag{2.20}$$

De (2.19) e (2.20), aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (C.4), segue que

$$DJ(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega \left(|\nabla(u+tv)|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}\right)\eta dx}{t} = \int_\Omega p(x)|\nabla u|^{p(x)-2}(\nabla u \cdot \nabla v)\eta$$

Convexidade

Segue da convexidade da função $f(t) = |t|^p$, $t \in \mathbb{R}$ e da linearidade de integral.

■

2.2 O Princípio de Concentração e Compacidade

Agora estamos em condições de demonstrar o

Teorema 2.1 (Princípio de Concentração e Compacidade) *Assumindo que p é Lipschitziana em $\overline{\Omega}$ e satisfaz*

$$1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < N \tag{2.21}$$

e Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$. Seja (ω_n) uma sequência em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ com norma $\|\nabla \omega_n\|_p \leq 1$ tal que

$$\begin{aligned} \omega_n &\rightharpoonup \omega \quad \text{em } W_0^{1,p(x)}(\Omega). \\ |\nabla\omega_n|^{p(x)} &\overset{*}{\rightharpoonup} \mu \quad \text{em } \mathbb{M}(\overline{\Omega}). \\ |\omega_n|^{p^*(x)} &\overset{*}{\rightharpoonup} \nu \quad \text{em } \mathbb{M}(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Então o limite das medidas são da forma

$$\begin{aligned} \mu &= |\nabla\omega|^{p(x)} + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j} + \widetilde{\mu}, \quad \mu(\overline{\Omega}) \leq 1, \\ \nu &= |\omega|^{p^*(x)} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \nu(\overline{\Omega}) \leq C^*. \end{aligned}$$

onde $x_j \in \overline{\Omega}$, J é um conjunto finito ou enumerável e $\widetilde{\mu} \in \mathbb{M}(\overline{\Omega})$ é uma medida não atômica positiva. Os átomos e as partes regulares satisfazem a desigualdade generalizada de Sobolev

$$\begin{aligned} \nu(\overline{\Omega}) &\leq C^* \max\left\{ \mu(\overline{\Omega})^{\frac{p_2^*}{p_1}},\ \mu(\overline{\Omega})^{\frac{p_1^*}{p_2}} \right\}, \\ \nu_j &\leq C^* \max\left\{ \mu_j^{\frac{p_2^*}{p_1}},\ \mu_j^{\frac{p_1^*}{p_2}} \right\}. \end{aligned}$$

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que a medida limite μ é da forma

$$\mu = |\nabla \omega|^{p(x)} + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j} + \widetilde{\mu}, \quad \mu(\overline{\Omega}) \leq 1,$$

onde J é um conjunto contável (finito ou enumerável) e $\widetilde{\mu} \in \mathbb{M}(\overline{\Omega})$ é uma medida não atômica positiva.

De fato, pelo Lema 2.3, para todo $\eta \in C(\overline{\Omega})$ o funcional

$$J_1(u) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \eta dx$$

é diferenciável a Gateaux e convexo. Desde que $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável e reflexivo então, pelo Teorema C.13, J_1 é sequencialmente semi-contínuo inferiormente de onde obtemos que

$$J_1(\omega) \leq \liminf_{n \to 0} J_1(\omega_n),$$

ou seja

$$\int_\Omega |\nabla \omega|^{p(x)} \eta dx \leq \liminf_{n \to 0} \int_\Omega |\nabla \omega_n|^{p(x)} \eta dx, \quad \forall \eta \in C(\overline{\Omega})$$

logo

$$|\nabla \omega|^{p(x)} \leq \mu$$

Assim, pondo $\widehat{\mu} = \mu - |\nabla \omega|^{p(x)} \geq 0$, temos que $\mu = |\nabla \omega|^{p(x)} + \widehat{\mu}$. Extraindo os átomos de $\widehat{\mu}$ (Teorema C.9), concluímos que

$$\mu = |\nabla \omega|^{p(x)} + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j} + \widetilde{\mu},$$

onde $\widetilde{\mu}$ é uma medida não atômica e $x_j \in \overline{\Omega}$, para todo $j \in J$. Note ainda que, da convergência

$$|\nabla \omega_n|^{p(x)} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \quad \text{em } \mathbb{M}(\overline{\Omega}),$$

desde que $\eta \equiv 1 \in C(\overline{\Omega})$, segue que

$$\int_{\overline{\Omega}} d\mu = \lim_{n\to 0} \int_{\Omega} |\nabla \omega_n|^{p(x)} dx.$$

Como por hipótese $\|\nabla \omega_n\|_{p(x)} \leq 1$, pelo Teorema 1.1 - (i), temos que $\int_{\Omega} |\nabla \omega_n|^{p(x)} dx \leq 1$ e portanto

$$\mu(\overline{\Omega}) = \int_{\overline{\Omega}} d\mu \leq 1.$$

Finalmente, como $\mu(\overline{\Omega}) < \infty$, então J tem que ser contável, pois caso contrário $\sum_{j\in J} \mu_j = +\infty$ e assim não teríamos $\mu(\overline{\Omega}) < \infty$.

Mostremos agora que a medida ν é da forma

$$\nu = |\omega|^{p^*(x)} + \sum_{j\in J'} \nu_j \delta_{x_j}$$

com

$$\nu(\overline{\Omega}) \leq C^* \max\left\{\mu(\overline{\Omega})^{\frac{p_2^*}{p_1}}, \mu(\overline{\Omega})^{\frac{p_1^*}{p_2}}\right\}.$$

E além disso

$$|\omega_\varepsilon - \omega|^{p^*(x)} \overset{*}{\rightharpoonup} \sum_{j\in J'} \nu_j \delta_{x_j}.$$

Com efeito, de maneira análoga à argumentação feita para a medida μ, temos que

$$\nu = |\omega|^{p^*(x)} + \sum_{j\in J'} \nu_j \delta_{x_j} + \widetilde{\nu},$$

onde $x_j \in \overline{\Omega}$, J' é contável e $\widetilde{\nu}$ é uma medida não atômica positiva. Pelo Lema 2.1 temos que

$$\liminf_{n\to 0} \int_{\Omega} \eta^{p^*(x)} |\omega_n|^{p^*(x)} dx - \int_{\Omega} \eta^{p^*(x)} |\omega|^{p^*(x)} dx = \liminf_{n\to 0} \int_{\Omega} \eta^{p^*(x)} |\omega_n - \omega|^{p^*(x)} dx,$$

para todo $\eta \in C(\overline{\Omega})$. Portanto

$$|\omega_\varepsilon - \omega|^{p^*(x)} \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\nu} := \nu - |\omega|^{p^*(x)} = \sum_{j\in J'} \nu_j \delta_{x_j} + \widetilde{\nu}. \tag{2.22}$$

Mas note que, para $x \in \overline{\Omega}$, seja $\phi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \phi_\varepsilon \leq 1, \phi_\varepsilon \equiv 1$ em $B_r(x)$ e $\phi_\varepsilon \equiv 0$ em $B_{(1+\varepsilon)r}(x)^c$. É claro que $\phi_\varepsilon \in C(\overline{\Omega})$, e então

$$\begin{aligned}
\nu(\{x\}) &\leq \nu(B_r(x) \cap \overline{\Omega}) = \int_{B_r(x)\cap\overline{\Omega}} d\nu \\
&\leq \int_{\overline{\Omega}} \phi_\varepsilon d\nu = \liminf_{n\to\infty} \int_{\overline{\Omega}} \phi_\varepsilon |\omega_n|^{p^*(x)} dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\overline{B}_{(1+\varepsilon)r}(x)} |u_n|^{p^*(x)} dx
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 2.1 temos que

$$\nu(\{x\}) \leq C^* \max \left\{ \left(\limsup_{n\to\infty} \int_{\overline{B}_{(1+\varepsilon)R}(x)} |\nabla \omega_n|^{p(x)} dx + \delta \right)^{\frac{p_2^*}{p_1}}, \right.$$
$$\left. \left(\limsup_{n\to\infty} \int_{\overline{B}_{(1+\varepsilon)R}(x)} |\nabla \omega_n|^{p(x)} dx + \delta \right)^{\frac{p_1^*}{p_2}} \right\}.$$

Pelo Teorema C.6, segue que

$$\nu(\{x\}) \leq C^* \max \left\{ \left(\mu(\overline{B}_{(1+\varepsilon)R}(x)) + \delta\right)^{\frac{p_2^*}{p_1}}, \ \left(\mu(\overline{B}_{(1+\varepsilon)R}(x)) + \delta + \delta\right)^{\frac{p_1^*}{p_2}} \right\}$$

E então, $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ e $R \to 0$, temos que

$$\nu(\{x\}) \leq C^* \max \left\{ \mu(\{x\})^{\frac{p_2^*}{p_1}}, \mu(\{x\})^{\frac{p_1^*}{p_2}} \right\},$$

$$\nu(\{x\}) \leq C^* \max \left\{ \mu(\{x\})^{\frac{p_2^*}{p_1}}, \mu(\{x\})^{\frac{p_1^*}{p_2}} \right\}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Em particular, $\nu_j \leq C^* \max\{\mu(\{x_j\})^{\frac{p_2^*}{p_1}}, \mu(\{x_j\})^{\frac{p_1^*}{p_2}}\}$, para todo $j \in J'$. Portanto todo átomo de ν é também um átomo de μ.

Mostremos agora que $\widetilde{\nu} = 0$. Considere $\overline{\omega}_n = \omega_n - \omega$. Então, pelos teoremas C.14 e C.15, a menos de subsequência, $\overline{\omega}_n \rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e $|\nabla \overline{\omega}_n|^{p(x)} \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\mu}$ em $\mathbb{M}(\overline{\Omega})$. Seja η a função corte de B_r com respeito a B_R Assim, da desigualdade (2.1) e do Teorema 1.1 temos que

$$\int_{B_R} \eta |\overline{\omega}_n|^{p^*(y)} dy \leq C^* \max \left\{ \left(\int_{B_R} |\nabla(\eta^{\frac{1}{p^*(y)}} \overline{\omega}_n)|^{p(y)} dy \right)^{\frac{p_2^*}{p_1}}, \left(\int_{B_R} |\nabla(\eta^{\frac{1}{p^*(y)}} \overline{\omega}_n)|^{p(y)} dy \right)^{\frac{p_1^*}{p_2}} \right\}.$$

Quando $n \to 0$ obtemos

$$\overline{\nu}(\overline{B_r}) \leq \int_{\overline{B_R}} \eta d\overline{\nu} \leq C^* \max \left\{ \left(\int_{\overline{B_R}} \eta^{\frac{n-p(y)}{n}} d\overline{\mu} \right)^{\frac{p_2^*}{p_1}}, \left(\int_{\overline{B_R}} \eta^{\frac{n-p(y)}{n}} d\overline{\mu} \right)^{\frac{p_1^*}{p_2}} \right\}$$

Assim, fazendo $r \to R$ teremos

$$\overline{\nu}(\overline{B_R}) \leq C^* \max \left\{ \overline{\mu}(\overline{B_R})^{\frac{p_2^*}{p_1}}, \overline{\mu}(\overline{B_R})^{\frac{p_1^*}{p_2}} \right\}.$$

Em particular, $\overline{\nu}$ é absolutamente contínua com respeito a $\overline{\mu}$. Pelo Teorema de Radon - Nikodym (C.16), existe $f \in L^1(\overline{\Omega}, d\overline{\mu})$ tal que $d\overline{\nu} = f d\overline{\mu}$. Para $x \in \overline{\Omega}$, como p é contínua em $\overline{\Omega}$, para $\varepsilon > 0$ podemos tomar $B_R(x) = \{y;\ |y-x| < R\}$ tal que $|p(y) - p(x)| < \varepsilon$ sempre que $y \in B_R(x) \cap \overline{\Omega}$. Assim, escolhendo $\varepsilon = \min\left\{\frac{p^2(x)}{4n}, 1\right\}$, então

$$p_{x_1} = \inf_{y \in B_R(x) \cap \overline{\Omega}} p(y) \leq p_{x_2} = \sup_{y \in B_R(x) \cap \overline{\Omega}} p(y) < p_{x_1}^* = \inf_{y \in B_R(x) \cap \overline{\Omega}} p^*(y).$$

Pelo Teorema C.17, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{R \to 0} \frac{\overline{\nu}(\overline{B_R(x)})}{\overline{\mu}(\overline{B_R(x)})} \\ &\leq C^* \lim_{R \to 0} \max\left\{\overline{\mu}(\overline{B_R(x)})^{\frac{p_{x_2}^*}{p_{x_1}} - 1}, \overline{\mu}(\overline{B_R(x)})^{\frac{p_{x_1}^*}{p_{x_2}} - 1}\right\} \\ &= C^* \max\left\{\overline{\mu}(\{x\})^{\frac{p_{x_2}^*}{p_{x_1}} - 1}, \overline{\mu}(\{x\})^{\frac{p_{x_1}^*}{p_{x_2}} - 1}\right\} \end{aligned}$$

Note que o lado direito se anula exceto se x é um átomo de $\overline{\mu}$. Em particular, $f(x) = 0$ exceto se x é um átomo de $\overline{\nu}$. Mas, da igualdade (2.22), os átomos de ν e $\overline{\nu}$ são os mesmo. Concluímos então que $f(x) = 0$ é uma função em $L^1(\overline{\Omega} \setminus \{x_j\}_{j \in J'}, d\overline{\mu})$. Então $\overline{\nu} = 0$ em $\overline{\Omega} \setminus \{x_j\}_{j \in J'}$. Então $\widetilde{\nu} = 0$.

Por último, mostremos que as integrais de μ e ν satisfazem

$$\nu(\overline{\Omega}) \leq C^* \max\left\{\mu(\overline{\Omega})^{\frac{p_2^*}{p_1}}, \mu(\overline{\Omega})^{\frac{p_1^*}{p_2}}\right\}$$

Com efeito, pela desigualdade (2.1) e Teorema 1.1 temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\omega_n|^{p^*(x)} dx &\leq C^* \max\{\|\nabla \omega_n\|^{p_2^*}, \|\nabla \omega_n\|^{p_1^*}\} \\ &\leq C^* \max\left\{\left(\int_{\Omega} |\nabla \omega_n|^{p(x)} dx\right)^{\frac{p_2^*}{p_1}}, \left(\int_{\Omega} |\nabla \omega_n|^{p(x)} dx\right)^{\frac{p_1^*}{p_2}}\right\} \end{aligned}$$

Fazendo $n \to 0$ segue-se a desigualdade.

■

Capítulo 3

Existência de solução para um problema envolvendo o $p(x)$-Laplaciano

Neste capítulo iremos aplicar o Princípio de Concentração e Compacidade (Teorema 2.1) para resolver um problema envolvendo o $p(x)$-Laplaciano com crescimento crítico. Este problema foi estudado por Fu em [17].

3.1 O Problema envolvendo o $p(x)$-Laplaciano com crescimento crítico

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -div(a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + b(x)|u|^{p(x)-2}u = c(x)|u|^{p^*(x)-2}u + \lambda f(x,u), & x \in \Omega; \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Onde:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado;
- $0 < a_0 \leq a(x) \in L^\infty(\Omega)$
- $0 < b_0 \leq b(x) \in L^\infty(\Omega)$
- $0 < c_0 \leq c(x) \in L^\infty(\Omega)$
- $p^*(x) = \frac{np(x)}{n-p(x)}$
- $p(x)$ é uma função lipschitziana em $\overline{\Omega}$ satisfazendo

$$1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < N \tag{3.2}$$

Uma solução fraca de (3.1) é uma função $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\phi + b(x)|u|^{p(x)-2}u\phi dx = \int_\Omega c(x)|u|^{p^*(x)-2}u\phi + \lambda f(x,u)\phi dx,$$

para toda $\phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Para estudar a existência de solução para este problema, vamos impor algumas condições sobre f:

(H1) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, $f(x,t) > 0$ em $\Omega_0 \times (0,+\infty)$ para algum aberto não vazio $\Omega_0 \subseteq \Omega$ e $f(x,t) = 0$ para todo $x \in \Omega$ e $t \leq 0$.

(H2) $|f(x,t)| \leq C_1 + C_2|t|^{\alpha(x)}$, $\alpha \in C(\overline{\Omega})$ com $\widehat{a} = \inf_{x\in\Omega}[\alpha(x) - p(x) + 1] > 0$ e $a = \inf_{x\in\Omega}[p^*(x) - \alpha(x) - 1] > 0$. Onde C_1 e C_2 são constantes positivas.

(H3) $|f(x,t)| \leq \widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2|t|^{\beta(x)}$, $\beta \in \mathbf{P}(\Omega)$ com $0 \leq \beta(x)$ e $\widetilde{b} = \inf_{x\in\Omega}[p(x) - \beta(x) - 1] > 0$. Onde $\widetilde{C}_1$ e $\widetilde{C}_2$ são constantes positivas.

Seja

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_\Omega \frac{a(x)}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)} + \frac{b(x)}{p(x)}|u|^{p(x)} - \frac{c(x)}{p^*(x)}|u|^{p^*(x)} - \lambda F(x,u)dx, \\ F(x,u) &= \int_0^u f(x,t)dt, \qquad (3.3) \\ K(u) &= \int_\Omega F(x,u)dx. \end{aligned}$$

Os pontos críticos de J, isto é

$$\begin{aligned} 0 &= J'(u)(\phi) \qquad (3.4) \\ 0 &= \int_\Omega a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\phi + b(x)|u|^{p(x)-2}u\phi - c(x)|u|^{p^*(x)-2}u\phi - \lambda f(x,u)\phi dx \end{aligned}$$

para todo $\phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, são soluções fracas do problema (3.1). Vamos considerar apenas a existência de pontos críticos não triviais de $J(u)$. Para isso vamos investigar uma condição de compacidade para o problema (3.1).

3.2 Condição de compacidade

O Teorema seguinte garante que, sobre certas condições, uma sequência $\{u_n\} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ possui subsequência convergindo para uma solução (fraca) de (3.1).

Teorema 3.1 *Supondo que as condições do Teorema 2.1 são satisfeitas. Supondo ainda que $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ satisfaz $(H1)$ e $(H2)$ (ou $(H3)$). Então para toda sequência $\{u_n\} \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $J'(u_n) \to 0$ em $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ quando $n \to \infty$, existe $C_0 > 0$ tal que, sempre que $c(x) \le C_0$, $\{u_n\}$ possui uma subsequência convergindo para uma solução de (3.1).*

Demonstração: Pelo Teorema 2.1, existe $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, $\mu, \nu \in \mathbb{M}(\overline{\Omega})$ e uma sequência $\{x_j\}_{j \in J}$ em $\overline{\Omega}$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } W_0^{1,p(x)}(\Omega) \tag{3.5}$$

$$u_n \to u \quad \text{em } L^{p(x)}(\Omega) \tag{3.6}$$

$$u_n \to u \quad \text{q.s. em } \Omega \tag{3.7}$$

$$|u_n|^{p^*(x)} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu = |u|^{p^*(x)} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j} \quad \text{em } \mathbb{M}(\overline{\Omega}) \tag{3.8}$$

$$|\nabla u_n|^{p^*(x)} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu = |\nabla u|^{p^*(x)} + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j} + \widetilde{\mu} \quad \text{em } \mathbb{M}(\overline{\Omega}) \tag{3.9}$$

$$\nu_j \le C^* \max\left(\mu_j^{\frac{p_2^*}{p_1}}, \mu_j^{\frac{p_1^*}{p_2}} \right) \tag{3.10}$$

Agora vamos provar este teorema em 4 passos.

Passo 1. $\mu(\{x_j\}) = \nu(\{x_j\}) = 0$, para todo $j \in J$. Note que é suficiente provar que qualquer que seja $x \in \overline{\Omega}$ existe $r_0 > 0$ tal que $\mu(\{x_j\}) = \nu(\{x_j\}) = 0$, para todos $x_j \in B_r(x) \cap \overline{\Omega}$ para $r \le r_0$. Para qualquer $x \in \overline{\Omega}$, como p é Lipschitziana, existe r_0 tal que

$$p_{x_1} = \inf_{y \in B_r(x) \cap \overline{\Omega}} p(y) \le p_{x_2} = \sup_{y \in B_r(x) \cap \overline{\Omega}} p(y) < p^*_{x_1} = \inf_{y \in B_r(x) \cap \overline{\Omega}} p^*(y) \le p^*_{x_2} = \sup_{y \in B_r(x) \cap \overline{\Omega}} p^*(y) \tag{3.11}$$

para $r = r_0$. É claro que a desigualdade (3.11) também é valida para $r < r_0$. Para todo $\varepsilon > 0$, considere $\phi_\varepsilon(x) = \phi(\frac{x - x_j}{\varepsilon})$, $x \in \Omega$, onde $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \le \phi \le 1$, $\phi \equiv 1$ em $B_1(0)$ e $\phi \equiv 0$ em $\Omega \setminus B_2(0)$. Desde que $J'(u_n) \to 0$ em $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ e $\{\phi_\varepsilon u_n\}$ é uma sequência limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, temos

$$J'(u_n)\phi_\varepsilon u_n = o_n(1)$$

assim

$$\int_\Omega a(x)|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla(\phi_\varepsilon u_n)dx + \int_\Omega b(x)|u_n|^{p(x)-2}u_n\phi_\varepsilon u_n dx$$
$$= \int_\Omega c(x)|u_n|^{p^*(x)-2}u_n\phi_\varepsilon u_n dx + \lambda\int_\Omega f(x,u_n)\phi_\varepsilon u_n dx + o(1)$$

usando a condição de crescimento $(H2)$, temos

$$a_0\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla(\phi_\varepsilon u_n)dx + \int_\Omega b(x)|u_n|^{p(x)-2}u_n\phi_\varepsilon u_n dx$$
$$\leq c_1\int_\Omega |u_n|^{p^*(x)}\phi_\varepsilon dx + \lambda\int_\Omega \phi_\varepsilon(C_1|u_n| + C_2|u_n|)^{\alpha(x)+1}dx \quad (3.12)$$

e então:

$$\limsup_{n\to\infty} a_0\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla(\phi_\varepsilon u_n)dx + b(x)|u_n|^{p(x)-2}u_n\phi_\varepsilon u_n dx$$
$$\leq \limsup_{n\to\infty} c_1\int_\Omega |u_n|^{p^*(x)}\phi_\varepsilon dx + \limsup_{n\to\infty}\lambda\int_\Omega \phi_\varepsilon(C_1|u_n| + C_2|u_n|)^{\alpha(x)+1}dx \quad (3.13)$$

onde $c_1 = \sup_{x\in\Omega} c(x)$. Vamos analisar o comportamento de cada parcela da desigualdade (3.13). Note que, da convergência (3.9),

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla(\phi_\varepsilon u_n)dx$$
$$= \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}\phi_\varepsilon dx + \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\nabla\phi_\varepsilon u_n dx$$
$$= \int_{\overline{\Omega}}\phi_\varepsilon d\mu + \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\nabla\phi_\varepsilon u_n dx.$$

Por outro lado, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (C.4), temos:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega b(x)|u_n|^{p(x)-2}u_n\phi_\varepsilon u_n dx = \int_\Omega b(x)|u|^{p(x)}\phi_\varepsilon dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\lambda\int_\Omega \phi_\varepsilon(C_1|u_n| + C_2|u_n|)^{\alpha(x)+1}dx = \lambda\int_\Omega \phi_\varepsilon(C_1|u| + C_2|u|)^{\alpha(x)+1}dx$$

De (3.8):

$$\lim_{n\to\infty} c_1\int_\Omega |u_n|^{p^*(x)}\phi_\varepsilon dx = c_1\int_{\overline{\Omega}}\phi_\varepsilon d\nu.$$

Assim, usando estas convergências na desigualdade (3.13) obtemos

$$a_0\int_{\overline{\Omega}}\phi_\varepsilon d\mu + \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\nabla\phi_\varepsilon u_n dx + \int_\Omega b(x)|u|^{p(x)}\phi_\varepsilon dx$$
$$\leq c_1\int_{\overline{\Omega}}\phi_\varepsilon d\nu + \lambda\int_\Omega \phi_\varepsilon(C_1|u| + C_2|u|)^{\alpha(x)+1}dx.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, como $\phi_\varepsilon \to \chi_{\{x_j\}}$, temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \phi_\varepsilon d\mu = \mu_j\phi_\varepsilon(x_j) = \mu_j, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \phi_\varepsilon d\nu = \nu_j\phi_\varepsilon(x_j) = \nu_j$$

e

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega b(x)|u|^{p(x)}\phi_\varepsilon dx = 0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\lambda\int_\Omega \phi_\varepsilon(C_1|u| + C_2|u|)^{\alpha(x)+1}dx.$$

Com estas convergências e pelo Teorema C.18, concluímos que

$$\mu(\{x_j\}) \le C\nu(\{x_j\}) \text{ ou } \mu_j \le C\nu_j \tag{3.14}$$

onde $C = \frac{c_1}{a_0}$. De maneira análoga obtém-se o mesmo resultado se f satisfaz $(H3)$. Supondo agora que $\mu(\{x_j\}) > 0$ para algum j, como $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, seja M uma constante tal que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx \le M < +\infty$, para todo n. Se $\mu(\{x_j\}) \ge 1$, então $\max\left(\mu_j^{\frac{p^*_{x_2}}{p_{x_1}}}, \mu_j^{\frac{p^*_{x_1}}{p_{x_2}}}\right) = \mu_j^{\frac{p^*_{x_2}}{p_{x_1}}}$. Assim, das desigualdades (3.10) e (3.14) segue que

$$\nu_j \le C^*\mu_j^{\frac{p^*_{x_2}}{p_{x_1}}} \le C^*(C\nu_j)^{\frac{p^*_{x_2}}{p_{x_1}}}$$

e portanto

$$\nu_j \ge \left(\frac{1}{C(C^*)^{\frac{p_{x_1}}{p^*_{x_2}}}}\right)^{\frac{1}{1-\frac{p_{x_1}}{p^*_{x_2}}}}.$$

Analogamente, se $\mu(\{x_j\}) < 1$ temos

$$\nu_j \ge \left(\frac{1}{C(C^*)^{\frac{p_{x_2}}{p^*_{x_1}}}}\right)^{\frac{1}{1-\frac{p_{x_2}}{p^*_{x_1}}}}.$$

Mas por (3.10), temos que

$$\sum_{\mu(\{x_j\})\ge 1}((C^*)^{-1}\nu_j)^{\frac{p_{x_1}}{p^*_{x_2}}} + \sum_{\mu(\{x_j\})<1}((C^*)^{-1}\nu_j)^{\frac{p_{x_2}}{p^*_{x_1}}} \le \sum_{j\in J}\mu(\{x_j\}) \le M,$$

de modo que, se $C = \dfrac{c_1}{a_0}$ for suficientemente pequeno a desigualdade acima não ocorrerá, o que é uma contradição. Assim, existe um C_0 tal que se $c(x) \le C_0$ teremos $\mu(\{x_j\}) = \nu(\{x_j\}) = 0$, para todo j.

Passo 2. Se K' é um subconjunto compacto de Ω, então

$$u_n \to u, \quad \text{em } L^{p^*(x)}(K'),$$

quando $n \to \infty$. De fato, seja $K'_\varepsilon = \{x \in \Omega;\ d(x, K') < \varepsilon\}$. Escolhendo $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \le \psi \le 1$, $\psi \equiv 1$ em $K'_{\frac{\varepsilon}{2}}$ e $\psi \equiv 0$ sobre $\Omega \setminus K'_\varepsilon$. Então, como $\chi_{K'} \le \psi \le \chi_\Omega$, temos

$$\int_{K'} |u_n|^{p^*(x)} dx \le \int_{K'} \psi |u_n|^{p^*(x)} dx \le \int_\Omega |u_n|^{p^*(x)} dx.$$

De 3.8, segue que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{K'} |u_n|^{p^*(x)} dx \le \int_\Omega \psi d\nu = \int_\Omega \psi |u|^{p^*(x)} dx \le \int_{K'_\varepsilon} |u|^{p^*(x)} dx.$$

Assim, fazendo $\varepsilon \to 0$, como

$$\begin{aligned} &\chi_{K'_\varepsilon} |u|^{p^*(x)} \to \chi_{K'} |u|^{p^*(x)} \quad \text{q.s. em } \Omega, \\ &|\chi_{K'_\varepsilon} |u|^{p^*(x)}| \le |u|^{p^*(x)} \in L^1(\Omega), \end{aligned}$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (C.4), temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{K'_\varepsilon} |u|^{p^*(x)} dx = \int_{K'} |u|^{p^*(x)} dx,$$

e então

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{K'} |u_n|^{p^*(x)} dx \le \int_{K'} |u|^{p^*(x)} dx.$$

Por outro lado, da convergência (3.7) e pelo Lema de Fatou (C.8), temos que

$$\int_{K'} |u|^{p^*(x)} dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_{K'} |u_n|^{p^*(x)} dx.$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K'} |u_n|^{p^*(x)} dx \le \int_{K'} |u|^{p^*(x)} dx. \tag{3.15}$$

De 3.7 e 3.15, temos que

$$2^{p_2^*}(|u|^{p^*(x)} + |u_n|^{p^*(x)} - |u - u_n|^{p^*(x)}) \to 2^{p_2^*+1} |u|^{p^*(x)} \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

E como $|u - u_n|^{p^*(x)} \le 2^{p_2^*}(|u|^{p^*(x)} + |u_n|^{p^*(x)})$, pelo Lema de Fatou (C.8)

$$\begin{aligned} \int_{K'} 2^{p_2^*+1} |u|^{p^*(x)} dx &\le \liminf_{n\to\infty} \int_{K'} 2^{p_2^*}(|u|^{p^*(x)} + |u_n|^{p^*(x)}) - |u - u_n|^{p^*(x)} dx \\ &\le \int_{K'} 2^{p_2^*+1} |u|^{p^*(x)} dx - \limsup_{n\to\infty} \int_{K'} |u - u_n|^{p^*(x)} dx, \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{K'} |u - u_n|^{p^*(x)} dx \le 0,$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K'}|u-u_n|^{p^*(x)}dx = 0.$$

Assim, pelo Teorema 1.7, temos que

$$\|u_n - u\|_{p^*,K'} \to 0,$$

como queríamos demonstrar.

Passo 3. $\nabla u_n \to \nabla u$ q.s. em $\overline{\Omega}$, quando $n \to \infty$.

Seja K um compacto de Ω. Dividimos K em duas partes

$$K_1 = \{x \in \Omega;\ p(x) \geq 2\} \quad \text{e} \quad K_2 = \{x \in \Omega;\ p(x) < 2\}.$$

Escolhendo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi \equiv 1$ em K, e usando a desigualdade de Simon (Teorema C.19)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_K a(x)(|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &\leq \int_\Omega a(x)(|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\nabla(u_n - u)\phi dx \\ &\leq \int_\Omega a(x)|\nabla u_n|^{p(x)}\phi - a(x)|\nabla u_n|^{p(x)-2}(\nabla u_n \cdot \nabla u)\phi + \\ &\qquad\qquad a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}(\nabla u \cdot \nabla(u - u_n))\phi dx. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Como $J'(u_n) \to 0$ em $W_0^{-1,p'(x)}(\Omega)$, então

$$J'(u_n)\phi u \to 0. \tag{3.17}$$

E como $\{\phi u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} |J'(u_n)\phi u_n| &\leq \|J'(u_n)\|_{-1,p'(x)}\|\phi u_n\|_{1,p(x)} \\ &\leq k\|J'(u_n)\|_{-1,p'(x)} \to 0, \end{aligned}$$

Assim

$$J'(u_n)\phi u_n \to 0. \tag{3.18}$$

quando $n \to 0$. Assim, de (3.17) e (3.18) temos que $J'(u_n)(u_n - u)\phi \to 0$, e portanto

$$J'(u_n)(u_n - u)\phi = o(1),$$

onde $o(1) \to 0$ quando $n \to 0$. Isto é:

$$\int_\Omega a(x)|\nabla u_n|^{p(x)}\phi + a(x)|\nabla u_n|^{p(x)-2}(\nabla u_n \cdot \nabla\phi)(u_n - u) - a(x)|\nabla u_n|^{p(x)-2}(\nabla u_n \cdot \nabla u)\phi +$$

$$b(x)|u_n|^{p(x)-2}u_n(u_n - u)\phi + c(x)|u_n|^{p^*(x)-2}u_n(u - u_n)\phi + \lambda\phi f(x,u_n)(u - u_n)dx = o(1).9$$

Somando $\int_\Omega a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}(\nabla u \cdot (\nabla(u - u_n))\phi dx$ a ambos os lados da igualdade acima e usando a desigualdade (3.16), segue que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_K a(x)(|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\nabla(u_n - u)dx \\ &\leq \int_\Omega a(x)|\nabla u_n|^{p(x)-2}(\nabla u_n \cdot \nabla\phi)(u - u_n) + a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}(\nabla u \cdot (\nabla(u - u_n))\phi + \\ &\qquad b(x)|u_n|^{p(x)-2}u_n(u - u_n)\phi + c(x)|u_n|^{p^*(x)-2}u_n(u_n - u)\phi + \\ &\qquad \lambda\phi f(x,u_n)(u_n - u)dx + o(1). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Por outro lado, das imersões contínuas de Sobolev (Teorema 1.10), segue que $\{u_n\}$ é limitada em $L^{p^*(x)}(\Omega)$. Se f satisfaz $(H2)$ temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x,u_n)^{\frac{p^*(x)}{p^*(x)-1}}dx &\leq \int_\Omega (C_1 + C_2|u_n|^\alpha)^{\frac{p^*(x)}{p^*(x)-1}}dx \\ &\leq C_3\int_\Omega (1 + |u_n|^\alpha)^{\frac{p^*(x)}{p^*(x)-1}}dx. \end{aligned}$$

Observemos que a função

$$g(t) = \frac{1+t^a}{(1+t)^a}, \quad a,t \geq 0$$

é limitada. Assim

$$1 + |u_n(x)|^{\alpha(x)} \leq K(1 + |u_n(x)|)^{\alpha(x)}, \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

Então

$$C_3\int_\Omega (1 + |u_n|^\alpha)^{\frac{p^*(x)}{p^*(x)-1}}dx \leq C\int_\Omega (1 + |u_n|)^{\alpha(x)\frac{p^*(x)}{p^*(x)-1}}dx,$$

portanto

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x,u_n)^{\frac{p^*(x)}{p^*(x)-1}}dx &\leq C\int_\Omega (1 + |u_n|)^{p^*(x)}dx \\ &\leq C\left(|\Omega| + \int_\Omega |u_n|^{p^*(x)}\right)dx \end{aligned}$$

desde que $\alpha(x) < p^*(x) - 1$. Então $\{f(x,u_n)\}$ é limitada em $L^{(p^*(x)')}(\Omega)$, onde $(p^*(x)') = \frac{p^*(x)}{p^*(x)-1}$. Da convergência fraca dada em (3.5) e como

$$I_u(v) = \int_\Omega a(x)|\nabla u|^{p^*(x)-2}\nabla u \cdot (\nabla v)\phi dx \in W_0^{-1,p'(x)}(\Omega),$$

então

$$I_u(u_n) - I_u(u) \to 0, \quad \text{quando } n \to +\infty, \tag{3.20}$$

isto é

$$\int_\Omega a(x)|\nabla u|^{p^*(x)-2}\nabla u \cdot \nabla(u_n - u)\phi dx \to 0, \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Assim, retomando à desigualdade (3.19) teremos

$$\begin{aligned}
0 \leq & \int_K a(x)(|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\nabla(u_n - u)dx \\
& \leq a_1 \left| \int_{K'} |\nabla u_n|^{p(x)-2}(\nabla u_n \cdot \nabla \phi)(u - u_n)dx \right| + |I_u(u_n) - I_u(u)| + \\
& b_1 \left| \int_{K'} |u_n|^{p(x)-2} u_n (u - u_n)\phi dx \right| + c_1 \left| \int_{K'} |u_n|^{p^*(x)-2} u_n (u_n - u)\phi dx \right| + \\
& \lambda \left| \int_{K'} \phi f(x, u_n)(u_n - u)dx \right| + o(1).
\end{aligned}$$

Onde $a_1 = \sup\limits_{x\in\Omega} a(x)$, $b_1 = \sup\limits_{x\in\Omega} b(x)$, $c_1 = \sup\limits_{x\in\Omega} c(x)$, e $K' = \operatorname{supp} \phi$. Pela desigualdade de Hölder (Teorema 1.4) temos

$$\begin{aligned}
0 \leq & \int_K a(x)(|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\nabla(u_n - u)dx \\
& \leq r_p \left(a_1 \|\nabla\phi\|_{\infty,K'} \||\nabla u_n|^{p(x)-1}\|_{p'} \|u - u_n\|_{p,K'} + |I_u(u_n) - I_u(u)| + \right. \\
& \left. b_1 \||u_n|^{p(x)-1}\|_{p'} \|u_n - u\|_{p,K'} + c_1 \||u_n|^{p(x)-1}\|_{(p^*)'} \|u_n - u\|_{p^*,K'} \right).
\end{aligned}$$

Assim, pelo **Passo 2** e pela convergência (3.20), concluímos

$$\int_K (|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\nabla(u_n - u)dx \to 0, \quad \text{quando } n \to 0.$$

De maneira análoga, tem-se o mesmo resultado se f satisfaz $(H3)$. Então em K_1 temos, usando a desigualdade de Simon (Teorema C.19) de Holder (1.4),

$$c_p \int_{K_1} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \leq \int_{K_1} (|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\nabla(u_n - u)dx \to 0 \tag{3.21}$$

quando $n \to 0$. Em K_2, novamente pela desigualdade de Simon (Teorema C.19), temos

$$\begin{aligned}
c_p \int_{K_2} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \leq & \int_{K_2} ((|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u))^{\frac{p(x)}{2}} \\
& \times (|\nabla u_n|^{p(x)} + |\nabla u|^{p(x)})^{\frac{2-p(x)}{2}} dx \\
\leq & \left\| ((|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u))^{\frac{p(x)}{2}} \right\|_{\frac{2}{p},K_2} \\
& \times \left\| (|\nabla u_n|^{p(x)} + |\nabla u|^{p(x)})^{\frac{2-p(x)}{2}} \right\|_{\frac{2}{2-p},K_2}.
\end{aligned}$$

De (3.21) e do Teorema 1.7, teremos

$$\left\| ((|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u))^{\frac{p(x)}{2}} \right\|_{\frac{2}{p},K_2} \to 0.$$

Como $\left\{ \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p(x)} + |\nabla u|^{p(x)})^{\frac{2-p(x)}{2}\cdot\frac{2}{2-p(x)}} dx \right\}$ é limitada, da convergência acima e do Teorema 1.7, concluímos

$$\int_{K_2} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \to 0.$$

E portanto $\nabla u_n \to \nabla u$ em $L^{p(x)}(K)$, onde

$$\nabla u_n \to \nabla u \quad \text{q.s. em } \overline{\Omega}.$$

Passo 4. Agora vamos completar a prova do Teorema 3.1. Dado $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, nos temos

$$|f(x,t)\phi| \leq (C_1 + C_2|t|^{\alpha(x)})\phi \;\text{ ou }\; (\widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2|t|^{\beta(x)})\phi \quad \forall x \in \text{supp } \phi. \tag{3.22}$$

De (3.5), (1.3), (3.22) e pelo **Passo 3** segue que, a menos de subsequência, $\{f(x,u_n)\phi\}$, $\{|u_n|^{p(x)-2}u_n\phi\}$, $\{|u_n|^{p^*(x)-2}u_n\phi\}$ e $\{|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla\phi\}$ são limitadas em $L^1(\Omega)$ e convergem quase sempre em Ω. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (C.4), segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x,u_n)\phi dx &= \int_\Omega f(x,u)\phi dx \\
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{p(x)-2}u_n\phi dx &= \int_\Omega |u|^{p(x)-2}u\phi dx \\
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{p^*(x)-2}u_n\phi dx &= \int_\Omega |u|^{p^*(x)-2}u\phi dx \\
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla\phi dx &= \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla\phi dx
\end{aligned}$$

Consequentemente, de (3.5) e $J'(u_n) \to 0$ em $W_0^{-1,p'(x)}(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\phi + b(x)|u|^{p(x)-2}u\phi - c(x)|u|^{p^*(x)-2}u\phi - \lambda f(x,u)\phi dx = 0,$$

$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$. E a prova do teorema está completa. ■

3.3 Existência de solução para o problema envolvendo o $p(x)$ - laplaciano

Nesta seção vamos provar a existência de solução não trivial para o problema (3.1). Serão dois resultados, uma envolvendo o crescimento $(H2)$ e outra com o crescimento $(H3)$. Para estabelecer a existência de solução, nós iremos introduzir as seguintes condições adicionais:

(H4) Existe uma função $\mu \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $p^*(x) > \mu > p(x)$, $l_1 = \inf_{x\in\Omega}[\mu(x)-p(x)] > 0$, $l_2 = \inf_{x\in\Omega}[p^*(x) - \mu(x)] > 0$, $\mu F(x,t) \leq tf(x,t)$ e $f(x,t) = o(t^{p(x)-1})$, quando $t \to 0^+$.

(H5) Existe uma função $\nu \in \mathbf{P}(\Omega)$ tal que $1 < \nu(x) < p(x)$ e $\nu F(x,t) \leq tf(x,t)$ para $x \in \Omega$.

Mostremos solução para o problema (3.1) sob as hipóteses $(H1)$, $(H2)$, e $(H4)$ e em seguida sob as hipóteses $(H1)$, $(H3)$ e $(H5)$,

Teorema 3.2 *Supondo que f satisfaz $(H1)$, $(H2)$ e $(H4)$. Então existe C_0 tal que, se $c(x) \leq C_0$ para todo $\lambda > 0$, o problema (3.1) possui uma solução não trivial.*

Demonstração: Vamos mostrar que o funcional J verifica as duas geometrias do Teorema do Passo da Montanha. De $(H4)$ temos dado $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t|^{p(x)-1}, \tag{3.23}$$

sempre que $0 < t < \delta$. Por outro lado, para $|t| > \delta$, da condição $(H2)$, temos que existe $A > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq A|t|^{\alpha(x)}. \tag{3.24}$$

Com efeito, para que esta desigualdade ocorra, devemos ter que

$$|f(x,t)| \leq C_1 + C_2|t|^{\alpha(x)} \leq A|t|^{\alpha(x)}$$

ou ainda:

$$\frac{C_1}{|t|^{\alpha(x)}} + C_2 \leq \frac{C_1}{\delta^{a_1}} + C_2 \leq A$$

Assim, para $A \geq \frac{C_1}{\delta^{a_1}} + C_2$, a desigualdade (3.24) ocorre. Logo combinando esta desigualdade e a desigualdade (3.23), temos que

$$|f(x,t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t|^{p(x)-1} + A|t|^{\alpha(x)}. \tag{3.25}$$

Por outro lado note que, como $p(x)-1 < \alpha(x) < p^*(x)-1$, então existe $s = s(x) \in (0,1)$ tal que $\alpha(x) = s(p(x)-1) + (1-s)(p^*(x)-1)$ e daí, usando a desigualdade de Young (Teorema 2.1),

$$\begin{aligned} A|t|^{\alpha(x)} &= \widehat{\varepsilon}^s|t|^{s(p(x)-1)} \cdot \frac{A}{\widehat{\varepsilon}^s}|t|^{(1-s)(p^*(x)-1)} \\ &\leq \frac{\widehat{\varepsilon}}{s}|t|^{p(x)-1} + \frac{A^{\frac{1}{1-s}}}{\widehat{\varepsilon}^{\frac{s}{1-s}}}|t|^{p^*(x)-1} \end{aligned}$$

fazendo $\widehat{\varepsilon} = \frac{s\varepsilon}{2}$, obtemos

$$A|t|^{\alpha(x)} \leq \frac{\varepsilon}{2}|t|^{p(x)-1} + C(\varepsilon)|t|^{p^*(x)-1}$$

e substituindo esta desigualdade em (3.25) segue que

$$|f(x,t)| \leq \varepsilon|t|^{p(x)-1} + C(\varepsilon)|t|^{p^*(x)-1}$$

e por integração

$$|F(x,t)| \leq \varepsilon|t|^{p(x)} + C(\varepsilon)|t|^{p^*(x)}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_\Omega \frac{a(x)}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)} + \frac{b(x)}{p(x)}|u|^{p(x)} - \frac{c(x)}{p^*(x)}|u|^{p^*(x)} - \lambda F(x,u)dx \\ &\geq \frac{a_0}{p_2}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \frac{b_0}{p_2}\int_\Omega |u|^{p(x)}dx - \frac{c_1}{p_1}\int_\Omega |u|^{p^*(x)}dx - \\ &\qquad \lambda\int_\Omega \varepsilon|u|^{p(x)} + C(\varepsilon)|u|^{p^*(x)}dx \end{aligned}$$

Escolhendo ε suficientemente pequeno tal que

$$\lambda\varepsilon\int_\Omega |u|^{p(x)}dx \leq \frac{b_0}{p_2}\int_\Omega |u|^{p(x)}dx.$$

Então

$$J(u) \geq \frac{a_0}{p_2}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - C\int_\Omega |u|^{p^*(x)}dx, \tag{3.26}$$

onde $C = \frac{c_1}{p_1} + C(\varepsilon)$.

Das imersões contínuas (Teorema 1.10) e da desigualdade de Poincaré (Teorema 1.11), temos que $\|u\|_{p^*} \leq C\|\nabla u\|_p$. Se $\|\nabla u\|_p$ é suficientemente pequeno de modo que $\|\nabla u\|_p \leq 1$ e $C\|\nabla u\|_p \leq 1$, então $\|u\|_{p^*} \leq 1$. Para cada $x \in \overline{\Omega}$, como $p \in C(\overline{\Omega})$ e satisfaz (3.2), podemos tomar $Q_R(x) = \{y = (y^1, y^2, ..., y^N);\ |y^i - x^i| < R, i = 1, ..., N\}$ tal que $|p(y) - p(x)| < \varepsilon$, sempre que $y \in Q_R(x) \cap \overline{\Omega}$. Escolhendo $\varepsilon = \frac{1}{4}(p^*(x) - p(x))$, teremos

$$p_{x_2} = \sup_{y \in Q_R(x)\cap\overline{\Omega}} p(y) < p^*_{x_1} = \inf_{y \in Q_R(x)\cap\overline{\Omega}} p^*(y).$$

Note que $\{Q_R(x)\}_{x\in\overline{\Omega}}$ é uma cobertura por abertos de $\overline{\Omega}$. Como $\overline{\Omega}$ é compacto, pelo Teorema de Borel - Lebesgue (C.21), podemos extrair uma subcobertura finita $\{Q_R(x_i)\}_{i=1}^m$ de $\overline{\Omega}$. Se $Q_R(x_i) \not\subset \Omega$, definimos $u = 0$ sobre $Q_R(x_i) \setminus \Omega$ e então as imersões contínuas e compactas (Teorema 1.10) continuam válidas para $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ sobre $Q_R(x_i)$. Podemos considerar todos os hiperplanos que contenham pelo menos uma hipersuperfície de $Q_R(x_i)$ sobre ele. Dividimos então $\bigcup_{i=1}^m Q_R(x_i)$ em finitos hipercubos $\{Q_j\}_{j=1}^J$ que não possuem pontos comuns (isto é, $Q_j \cap Q_i = \{\emptyset\}$, se $j \neq i$). É claro que $\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{j=1}^J \overline{Q_j}$ e para cada Q_j existe pelo menos um $Q_R(x_i)$ tal que $Q_j \subseteq Q_R(x_i)$. Desde que $\|u\|_{p^*,Q_j\cap\Omega} < 1$, do Teorema 1.1 e da imersão contínua $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*(x)}(\Omega)$ (Teorema 1.10), temos que

$$\int_{Q_j\cap\Omega} |u|^{p^*(x)}dx \leq \|u\|^{p^*_{j1}}_{p^*,Q_j\cap\Omega} \leq (C\|u\|_{1,p,Q_j\cap\Omega})^{p^*_{j1}}, \tag{3.27}$$

onde $p^*_{j1} = \inf_{x\in Q_j\cap\Omega} p^*(x)$. Da desigualdade de Poincaré (Teorema 1.11) temos

$$\|u\|^{p_{j2}}_{1,p,Q_j\cap\Omega} \leq (C+1)^{p_{j2}}\|\nabla u\|^{p_{j2}}_{p,Q_j\cap\Omega}$$

onde $p_{j2} = \sup_{x\in Q_j\cap\Omega} p(x)$. Do Teorema 1.1, como $\|\nabla u\|_{p,Q_j\cap\Omega} < 1$, segue que

$$\|\nabla u\|^{p_{j2}}_{p,Q_j\cap\Omega} \leq \int_{Q_j\cap\Omega} |\nabla u|^{p(x)}dx$$

e portanto

$$\frac{1}{(C+1)^{p_{j2}}}\|u\|^{p_{j2}}_{1,p,Q_j\cap\Omega} \leq \int_{Q_j\cap\Omega} |\nabla u|^{p(x)}dx. \tag{3.28}$$

De (3.27) e (3.28) temos

$$\frac{a_0}{p_2}\int_{Q_j\cap\Omega} |\nabla u|^{p(x)}dx - C\int_{Q_j\cap\Omega} |u|^{p^*(x)}dx \geq C_1\|u\|^{p_{j2}}_{1,p,Q_j\cap\Omega} - C_2\|u\|^{p^*_{j1}}_{1,p,Q_j\cap\Omega}$$

Como $p^*_{p1} > p_{j2}$, existe r_j tal que

$$C_1\|u\|^{p_{j2}}_{1,p,Q_j\cap\Omega} - C_2\|u\|^{p^*_{j1}}_{1,p,Q_j\cap\Omega} \geq C_r > 0, \tag{3.29}$$

se $\|u\|_{1,p,Q_j\cap\Omega} = r$ e $0 < r \leq r_j$. Escolhendo $\|u\|_{1,p} = r_0 = \min\limits_{1\leq j\leq J}\{r_j\}$, teremos

$$\|u\|_{1,p,Q_j\cap\Omega} \leq \|u\|_{1,p} = r_0 \leq r_j,$$

e a desigualdade (3.29) ocorre para todo $j = 1, 2, ..., J$. Então, de (3.26) e (3.29), temos que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \sum_{j=1}^{J}\left(\frac{a_0}{p_2}\int_{Q_j\cap\Omega}|\nabla u|^{p(x)}dx - C\int_{Q_j\cap\Omega}|u|^{p^*(x)}dx\right) \\ &\geq \sum_{j=1}^{J}\left(C_1\|u\|_{1,p,Q_j\cap\Omega}^{p_{j2}} - C_2\|u\|_{1,p,Q_j\cap\Omega}^{p_{j1}^*}\right) > 0 \end{aligned}$$

Mostraremos agora que o funcional J satisfaz a Segunda Geometria do Teorema do Passo da Montanha (C.3). De $(H1)$ e $(H4)$ temos que

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{\mu(x)}{s}ds &\leq \int_1^t \frac{f(x,s)}{F(x,s)}ds \\ \mu(x)\ln t &\leq \ln F(x,t) - \ln F(x,1) \\ \ln t^{\mu(x)} &\leq \ln\frac{F(x,t)}{F(x,1)} \end{aligned}$$

e portanto

$$F(x,t) \geq d_1 t^{\mu(x)}, \tag{3.30}$$

onde $(x,t) \in \Omega_0 \times [0,+\infty)$ e $d_1 > 0$ é uma constante. Fixado $x_0 \in \Omega_0$, como μ e p não contínuas em $\overline{\Omega}$ e da condição $(H4)$, então existe $0 < 2R < 1$ tal que $\mu_{x_0 1} = \inf_{x\in B_{2R}(x_0)}\mu(x) > p_{x_0 2} = \sup_{x\in B_{2R}(x_0)}p(x)$, para $B_{2R}(x_0) \subset \Omega_0$. Seja $\phi \in C_0^\infty(B_{2R}(x_0))$ tal que $\phi \equiv 1$ em $B_{2R}(x_0)$, $0 \leq \phi(x) \leq 1$ e $|\nabla\phi| \leq \frac{1}{R}$. Então, para $s > 1$ e usado a desigualdade (3.30),

$$\begin{aligned} J(s\phi) &= \int_\Omega \frac{a(x)}{p(x)}|\nabla(s\phi)|^{p(x)} + \frac{b(x)}{p(x)}|s\phi|^{p(x)} - \frac{c(x)}{p^*(x)}|s\phi|^{p^*(x)} - \lambda F(x,s\phi)dx \\ &\leq \int_{B_{2R}(x_0)} \frac{a(x)s^{p(x)}}{p(x)}\left(\frac{1}{R}\right)^{p(x)} + \frac{b(x)s^{p(x)}}{p(x)}|\phi|^{p(x)}dx - \lambda\int_{B_{2R}(x_0)} s^{\mu(x)}d_1|\phi|dx \\ &\leq \left(\frac{C_1}{R^{p_2}} + C_2\right)\int_{B_{2R}(x_0)} s^{p(x)}dx - \lambda d_1\int_{B_{2R}(x_0)} s^{\mu(x)}|\phi|dx \\ &= \int_{B_{2R}(x_0)} s^{p(x)}\left(\frac{C_1}{R^{p_2}} + C_2 - \widehat{C}s^{\mu_{x_0 1}-p(x)}\right)dx \\ &\leq \int_{B_{2R}(x_0)} s^{p(x)}\left(\frac{C_1}{R^{p_2}} + C_2 - \widehat{C}s^{k}\right)dx < 0 \end{aligned}$$

se s é suficientemente grande. Onde

$$\widehat{C} = \frac{\lambda d_1 \int_{B_{2R}(x_0)} |\phi|^{\mu(x)} dx}{|B_{2R}(x_0)|}$$

e $k = \mu_{x_0 1} - p_{x_0 2}$. Assim, pelo Teorema do Passo da Montanha (C.20), existe uma sequência $\{u_n\} \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ $(PS)_C$, isto é

$$J(u_n) \to C \quad \text{e} \quad J'(u_n) \to 0 \text{ em } W_0^{-1,p'(x)}(\Omega).$$

Mostraremos então que $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. De $(H4)$ temos

$$\begin{aligned} \mu(x)F(x,t) &\leq tf(x,t) \\ -\lambda F(x,t) &\geq -\lambda \frac{1}{\mu(x)} f(x,t)t \end{aligned}$$

assim,

$$-\lambda \int_\Omega F(x,u_n) \geq -\lambda \int_\Omega \frac{1}{\mu(x)} f(x,u_n)u_n.$$

Então

$$\begin{aligned} J(u_n) &\geq \int_\Omega \frac{a(x)}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)} + \frac{b(x)}{p(x)}|u_n|^{p(x)} - \frac{c(x)}{p^*(x)}|u_n|^{p^*(x)} - \lambda \frac{1}{\mu(x)} f(x,u_n)u_n dx \\ &= \int_\Omega \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{\mu(x)}\right) a(x)|\nabla u_n|^{p(x)} dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{\mu(x)}\right) b(x)|u_n|^{p(x)} dx \\ &\quad + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu(x)} - \frac{1}{p^*(x)}\right) c(x)|u_n|^{p^*(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{\mu(x)}(a(x)|\nabla u_n|^{p(x)} + b(x)|u_n|^{p(x)} \\ &\quad - c(x)|u_n|^{p^*(x)} - \lambda f(x,u_n)u_n) dx \\ &\geq \frac{l_1 a_0}{\mu_2 p_2} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \frac{l_1 b_0}{\mu_2 p_2} \int_\Omega |u_n|^{p(x)} dx + \frac{l_1 c_0}{\mu_2 p_2^*} \int_\Omega |u_n|^{p^*(x)} dx \\ &\quad + \int_\Omega a(x)|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla \left(\frac{u_n}{\mu(x)}\right) + b(x)|u_n|^{p(x)-2} u_n \frac{u_n}{\mu(x)} \\ &\quad - c(x)|u_n|^{p^*(x)-2} u_n \frac{u_n}{\mu(x)} - \lambda f(x,u_n) \frac{u_n}{\mu(x)} dx + \int_\Omega \frac{a(x)}{\mu^2(x)} |\nabla u_n|^{p(x)-2} u_n \nabla u_n \nabla \mu dx \\ &= \frac{l_1 a_0}{\mu_2 p_2} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \frac{l_1 b_0}{\mu_2 p_2} \int_\Omega |u_n|^{p(x)} dx + \frac{l_1 c_0}{\mu_2 p_2^*} \int_\Omega |u_n|^{p^*(x)} dx \\ &\quad + J'(u_n) \frac{u_n}{\mu(x)} + \int_\Omega \frac{a(x)}{\mu^2(x)} |\nabla u_n|^{p(x)-2} u_n \nabla u_n \nabla \mu dx \\ &\geq \frac{l_1 a_0}{\mu_2 p_2} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \frac{l_1 b_0}{\mu_2 p_2} \int_\Omega |u_n|^{p(x)} dx + \frac{l_1 c_0}{\mu_2 p_2^*} \int_\Omega |u_n|^{p^*(x)} dx \\ &\quad - \|J'(u_n)\|_{-1,p'} \left\| \frac{u_n}{\mu} \right\|_{1,p} - \frac{a_1 M}{\mu_1^2} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-1} |u_n| dx, \end{aligned} \tag{3.31}$$

onde $\mu_1 = \inf_{x\in\Omega} \mu(x)$, $\mu_1 = \sup_{x\in\Omega} \mu(x)$, $M = \sup_{x\in\Omega} |\nabla \mu(x)|$.

Vamos agora obter estimativas para as duas últimas parcelas da desigualdade acima.

Notemos que

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &\leq \mu \\
\frac{\frac{|u_n|}{\mu}}{\frac{\|u_n\|_p}{\mu_1}} &\leq \frac{|u_n|}{\|u_n\|_p}
\end{aligned}
$$

e portanto

$$\int_\Omega \left(\frac{\frac{u_n}{\mu}}{\frac{\|u_n\|_p}{\mu_1}} \right)^{p(x)} dx \leq \int_\Omega \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_p} \right)^{p(x)} dx \leq 1$$

assim, pelo Teorema 1.1, segue que

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\frac{u_n}{\mu}}{\frac{\|u_n\|_p}{\mu_1}} \right\|_p &\leq 1 \\
\left\| \frac{u_n}{\mu} \right\|_p &\leq \frac{\|u_n\|_p}{\mu_1}. \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

Analogamente, temos que

$$\frac{\frac{|u_n||\nabla \mu|}{\mu^2}}{\frac{M\|u_n\|_p}{\mu_1^2}} \leq \frac{|u_n|}{\|u_n\|_p},$$

e então

$$\int_\Omega \left(\frac{\frac{u_n \nabla \mu}{\mu^2}}{\frac{M\|u_n\|_p}{\mu_1^2}} \right)^{p(x)} dx \leq \int_\Omega \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_p} \right)^{p(x)} dx \leq 1.$$

E novamente pelo Teorema 1.1, segue que

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\frac{u_n \nabla \mu}{\mu^2}}{\frac{M\|u_n\|_p}{\mu_1^2}} \right\|_p &\leq 1 \\
\left\| u_n \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) \right\|_p = \left\| \frac{u_n}{\mu^2} \nabla \mu \right\|_p &\leq \frac{M}{\mu_1^2} \|u_n\|_p \leq \frac{M}{\mu_1^2} \|u_n\|_{1,p}
\end{aligned}
$$

Com um raciocínio análogo obtemos também

$$\left\| \frac{\nabla u_n}{\mu} \right\|_p \leq \frac{\|\nabla u_n\|_p}{\mu_1}$$

E assim, teremos

$$
\begin{aligned}
\left\| \nabla \left(\frac{u_n}{\mu} \right) \right\|_p &= \left\| u_n \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) + \frac{\nabla u_n}{\mu} \right\|_p \\
&\leq \left\| u_n \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) \right\|_p + \left\| \frac{\nabla u_n}{\mu} \right\|_p \\
&\leq \frac{M}{\mu_1^2} \|u_n\|_{1,p} + \frac{\|\nabla u_n\|_p}{\mu_1}. \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

Então, usando as desigualdades (3.32) e (3.33) segue que

$$\left\|\frac{u_n}{\mu}\right\|_{1,p} = \left\|\frac{u_n}{\mu}\right\|_p + \left\|\nabla\left(\frac{u_n}{\mu}\right)\right\|_p \leq \frac{M+\mu_1}{\mu_1^2}\|u_n\|_{1,p}. \tag{3.34}$$

E ainda, usando a Desigualdade de Young (C.1) para $\alpha = \varepsilon_1^{\frac{p(x)-1}{p(x)}}|\nabla u_n|^{p(x)-1}$ e $\beta = \varepsilon_1^{\frac{1-p(x)}{p(x)}}|u_n|$, temos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-1}|u_n|dx &\leq \int_\Omega \frac{p(x)-1}{p(x)}\varepsilon_1|\nabla u_n|^{p(x)} + \frac{\varepsilon_1^{1-p(x)}}{p(x)}|u_n|^{p(x)}dx \\
&\leq \frac{p_2-1}{p_2}\varepsilon_1\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx + \frac{\varepsilon_1^{1-p_2}}{p_1}\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon_1 < 1$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{a_1 M}{\mu_1^2}\frac{a_1 M}{p_2-1}\varepsilon_1 < \frac{l_1 a_0}{2\mu_2 p_2},$$

assim

$$\begin{aligned}
-\frac{a_1 M}{\mu_1^2}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-1}|u_n|dx &\geq -\frac{a_1 M}{\mu_1^2}\frac{p_2-1}{p_2}\varepsilon_1\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx - \frac{a_1 M}{\mu_1^2}\frac{\varepsilon_1^{1-p_2}}{p_1}\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx \\
&\geq -\frac{l_1 a_0}{2\mu_2 p_2}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx - \frac{a_1 M}{\mu_1^2}\frac{\varepsilon_1^{1-p_2}}{p_1}\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Young (C.1) novamente para $0 < \varepsilon_2 < 1$, $\alpha = \varepsilon_2^{\frac{p(x)}{p^*(x)}}|u_n|^{p(x)}$, $\beta = \varepsilon_2^{-\frac{p(x)}{p^*(x)}}$ e $p = \frac{p^*(x)}{p(x)}$, obtemos

$$\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx \leq \int_\Omega \frac{p(x)}{p^*(x)}\varepsilon_2|u_n|^{p^*(x)} + \frac{p^*(x)-p(x)}{p^*(x)}\varepsilon_2^{\frac{p(x)}{p(x)-p^*(x)}}dx,$$

como $\frac{p^*(x)-p(x)}{p^*(x)}\varepsilon_2^{\frac{p(x)}{p(x)-p^*(x)}} \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx &\leq \frac{p_2}{p_1^*}\varepsilon_2\int_\Omega |u_n|^{p^*(x)}dx + |\Omega| \\
\frac{a_1 M}{\mu_1^2}\frac{\varepsilon_1^{1-p_2}}{p_1}\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx &\leq \frac{a_1 M}{\mu_1^2}\frac{\varepsilon_1^{1-p_2}}{p_1}\frac{p_2}{p_1^*}\varepsilon_2\int_\Omega |u_n|^{p^*(x)}dx + \frac{a_1 M}{\mu_1^2}\frac{\varepsilon_1^{1-p_2}}{p_1}|\Omega|
\end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon_2 < 1$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{a_1 M}{\mu_1^2}\frac{\varepsilon_1^{1-p_2}}{p_1}\frac{p_2}{p_1^*}\varepsilon_2 < \frac{l_2 c_0}{2\mu_2 p_2^*}$$

segue que

$$-\frac{a_1 M}{\mu_1^2}\frac{\varepsilon_1^{1-p_2}}{p_1}\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx \geq -\frac{l_2 c_0}{2\mu_2 p_2^*}\int_\Omega |u_n|^{p^*(x)}dx - K|\Omega|. \tag{3.36}$$

Assim, substituindo a desigualdade (3.36) em (3.35), concluímos que

$$\begin{aligned} -\frac{a_1 M}{\mu_1^2}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-1}|u_n|dx \geq \\ -\frac{l_1 a_0}{2\mu_2 p_2}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx - \frac{l_2 c_0}{2\mu_2 p_2^*}\int_\Omega |u_n|^{p^*(x)}dx - K|\Omega|. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Finalmente, usando as estimativas (3.34) e (3.37) em (3.31), concluímos que

$$\begin{aligned} J(u_n) \geq \frac{l_1 a_0}{2\mu_2 p_2}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx + \frac{l_1 b_0}{\mu_2 p_2}\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx + \frac{l_1 c_0}{2\mu_2 p_2^*}\int_\Omega |u_n|^{p^*(x)}dx \\ - \frac{M+\mu_1}{\mu_1^2}\|J'(u_n)\|_{-1,p'}\|u_n\|_{1,p} - K|\Omega| \end{aligned}$$

e portanto

$$J(u_n) \geq \frac{l_1 a_0}{2\mu_2 p_2}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx - \frac{M+\mu_1}{\mu_1^2}\|J'(u_n)\|_{-1,p'}\|u_n\|_{1,p} - K|\Omega| \tag{3.38}$$

Se $\|\nabla u_n\|_p \leq 1$ da desigualdade de Poincaré, é imediato que $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Então precisamos considerar apenas o caso em que $\|\nabla u_n\|_p > 1$. Assim, se $\|\nabla u_n\|_p > 1$, pelo Teorema 1.1 e da desigualdade de Poincaré (Teorema 1.11), temos

$$\|u_n\|_{1,p} \leq K_1\|\nabla u_n\|_p \leq K_1\|\nabla u_n\|_p^{p_1} \leq K_1\rho_p(|\nabla u_n|)$$

e portanto

$$\|u_n\|_{1,p} \leq K_1\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx. \tag{3.39}$$

Tomando n suficientemente grande de modo que

$$K_1\frac{M+\mu_1}{\mu_1^2}\|J'(u_n)\|_{-1,p'} < \frac{l_1 a_0}{4\mu_2 p_2}, \tag{3.40}$$

então, combinando as desigualdades (3.39) e (3.40) e substituindo em (3.38), segue que

$$J(u_n) \geq \frac{l_1 a_0}{4\mu_2 p_2}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx - C|\Omega|.$$

Tendo em vista que $J(u_n) \to C$, temos que $\{\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx\}$ é limitada e da desigualdade 3.39, $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. E pelo Teorema 3.1 completamos a prova deste resultado.

■

Teorema 3.3 *Suponha que f satisfaça $(H1), (H3)$ e $(H5)$. Então existe C_0 e $\Lambda > 0$ tais que se $c(x) \leq C_0$ e $\lambda \in (0, \Lambda)$, o problema (3.1) possui solução não trivial.*

Demonstração: Mostremos que o funcional J satisfaz as geometrias do Teorema do Passo da Montanha (C.20). De $(H3)$, temos

$$|F(x,t)| \leq \widetilde{C}_1|t| + \widetilde{C}_2|t|^{\beta(x)+1}.$$

Então

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_\Omega \frac{a(x)}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)} + \frac{b(x)}{p(x)}|u|^{p(x)} - \frac{c(x)}{p^*(x)}|u|^{p^*(x)} - \lambda F(x,u)dx \\ &\geq \int_\Omega \frac{a_0}{p_2}|\nabla u|^{p(x)} + \frac{b_0}{p_2}|u|^{p(x)} - \frac{c_1}{p_1}|u|^{p^*(x)} - \lambda\left(\widetilde{C}_1|u| + \widetilde{C}_2|u|^{\beta(x)+1}\right)dx \end{aligned} \tag{3.41}$$

Procedendo de maneira análoga ao Teorema 3.2, tomando os hipercubos $\{Q_j\}_{j=1}^J$ dois a dois disjuntos e $\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{j=1}^J \overline{Q_j}$. Em Q_j temos

$$p_{j2} = \sup_{x \in Q_j \cap \overline{\Omega}} p(x) < p_{j1}^* \inf_{x \in Q_j \cap \overline{\Omega}} p^*(x)$$

Então existe $r_0 > 0$ tal que

$$\frac{a_0}{p_2}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \frac{c_1}{p_1}\int_\Omega |u|^{p^*(x)}dx \geq C_{r_0} > 0 \tag{3.42}$$

se $\|u\|_{1,p} = r_0 < 1$. Por outro lado, usando a Desigualdade de Holder (1.4) temos

$$\int_\Omega |u|dx \leq C\|u\|_p\|\chi_\Omega\|_{p'} \leq \widehat{C}\|u\|_{1,p} \tag{3.43}$$

E ainda, se $|u(x)| \leq 1$ então

$$|u(x)|^{\beta(x)+1} \leq 1 \leq 1 + |u(x)|.$$

Se $|u(x)| > 1$, como por (H3) temos que $\beta(x) + 1 < p(x)$, então

$$|u(x)|^{\beta(x)+1} < |u(x)|^{p(x)} < |u(x)|^{p(x)} + 1.$$

Assim $|u(x)|^{\beta(x)+1} < |u(x)|^{p(x)} + 1$ q.s. em Ω, portanto

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^{\beta(x)+1}dx &\leq \int_\Omega (1+|u(x)|^{p(x)})dx \\ &\leq |\Omega| + \|u\|_{1,p}^{p_1} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Combinando as desigualdades (3.43) e (3.44) temos

$$-\lambda \int_\Omega \widetilde{C}_1|u| + \widetilde{C}_2|u|^{\beta(x)+1} \geq -\lambda(\widetilde{C}_1\widehat{C}\|u\|_{1,p} + \widetilde{C}_2|\Omega| + \widetilde{C}_2\|u\|_{1,p}^{p_1}) \tag{3.45}$$

Assim, substituindo as estimativas (3.42) e (3.45) em (3.41) obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &\geq C_{r_0} - \lambda(\widetilde{C}_1\widehat{C}\|u\|_{1,p} + \widetilde{C}_2|\Omega| + \widetilde{C}_2\|u\|_{1,p}^{p_1}) \\ &\geq C_{r_0} - \lambda(\widetilde{C}_1\widehat{C}\|u\|_{1,p} + \widetilde{C}_2|\Omega| + \widetilde{C}_2 r_0^{p_1}) \end{aligned}$$

Então, tomando Λ suficientemente pequeno temos

$$J(u) \geq \frac{C_{r_0}}{2} > 0$$

sempre que $\lambda \in (0,\Lambda)$, mostrando que J satisfaz a primeira geometria do Teorema do Passo da Montanha. (C.2).

Verifiquemos que J satisfaz a segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha (C.3). Com efeito, fixado $x_0 \in \Omega_0$, como p é contínua em $\overline{\Omega}$, existe $0 < 2R < 1$ tal que

$$p_{x_01}^* = \inf_{x\in B_{2R}(x_0)} p^*(x) > p_{x_02} = \sup_{x\in B_{2R}(x_0)} p(x),$$

para $B_{2R}(x_0) \subset \Omega_0$. Seja $\phi \in C_0^\infty(B_{2R}(x_0))$ tal que $\phi \equiv 1$ se $x \in B_R(x_0)$, $0 \leq \phi(x) \leq 1$ e $|\nabla\phi| \leq \frac{1}{R}$. Então, para $s > 1$

$$\begin{aligned} J(s\phi) &= \int_\Omega \frac{a(x)}{p(x)}|\nabla(s\phi)|^{p(x)} + \frac{b(x)}{p(x)}|s\phi|^{p(x)} - \frac{c(x)}{p^*(x)}|s\phi|^{p^*(x)} - \lambda F(x,s\phi)dx \\ &\leq C\int_{B_{2R}(x_0)} s^{p(x)}\left(\frac{1}{R}\right)^{p(x)} + s^{p(x)}dx - \frac{c_0}{p_2}s^{p_{x_01}^*}\int_{B_{2R}(x_0)} |\phi|^{p^*(x)}dx \\ &= \int_{B_{2R}(x_0)s^{p(x)}} \left(C\left(\frac{1}{R^{p_2}}+1\right) - \widetilde{C}s^{p_{x_01}^*-p(x)}\right)dx \\ &\leq \int_{B_{2R}(x_0)s^{p(x)}} \left(C\left(\frac{1}{R^{p_2}}+1\right) - \widetilde{C}s^l\right)dx < 0 \end{aligned}$$

se s é suficientemente grande,

$$\widetilde{C} = \frac{c_0\int_{B_{2R}(x_0)}|\phi|^{p^*(x)}dx}{p_2|B_{2R}(x_0)|}$$

e $l = p^*_{x_0 1} - p_{x_0 2} > 0$.

Por fim, mostraremos agora que se $\{u_n\}$ é uma sequência em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $J(u_n) \to C$ e $J'(u_n) \to 0$ em $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ quando $n \to \infty$, então $\{u_n\}$ é limitada em $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$. Escolhendo $\mu \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$
\begin{aligned}
&p(x) < \mu(x) < p^*(x)\\
&l_1 = \inf_{x\in\Omega}[\mu(x) - p(x)] > 0\\
&l_2 = \inf_{x\in\Omega}[p^*(x) - \mu(x)] > 0
\end{aligned}
$$

Por $(H5)$ temos que

$$F(x,t) \leq \frac{t}{\nu(x)} f(x,t),$$

assim

$$
\begin{aligned}
J(u_n) &= \int_\Omega \frac{a(x)}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)} + \frac{b(x)}{p(x)}|u_n|^{p(x)} - \frac{c(x)}{p^*(x)}|u_n|^{p^*(x)} - \lambda F(x,u_n)dx\\
&\geq \int_\Omega \frac{a(x)}{p(x)}|\nabla u_n|^{p(x)} + \frac{b(x)}{p(x)}|u_n|^{p(x)} - \frac{c(x)}{p^*(x)}|u_n|^{p^*(x)} - \frac{\lambda}{\nu(x)} f(x,u_n)u_n dx\\
&= \int_\Omega \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{\mu(x)}\right) a(x)|\nabla u_n|^{p(x)}dx + \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{\mu(x)}\right) b(x)|u_n|^{p(x)}dx\\
&\quad + \left(\frac{1}{\mu(x)} - \frac{1}{p^*(x)}\right) c(x)|\nabla u_n|^{p^*(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{\mu(x)}(a(x)|\nabla u_n|^{p(x)} + b(x)|u_n|^{p(x)}\\
&\quad -c(x)|u_n|^{p^*(x)} - \lambda f(x,u_n)u_n)dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu(x)} - \frac{1}{\nu(x)}\right) f(x,u_n)u_n dx\\
&\geq \frac{l_1 a_0}{\mu_2 p_2}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx + \frac{l_1 b_0}{\mu_2 p_2}\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx + \frac{l_1 c_0}{\mu_2 p_2^*}\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx\\
&\quad + \int_\Omega a(x)|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla\left(\frac{u_n}{\mu(x)}\right) + b(x)|u_n|^{p(x)-2}u_n\frac{u_n}{\mu(x)}\\
&\quad -c(x)|u_n|^{p^*(x)-2}u_n\frac{u_n}{\mu(x)} - \lambda f(x,u_n)\frac{u_n}{\mu(x)}dx + \int_\Omega \frac{a(x)}{\mu^2(x)}|\nabla u_n|^{p(x)-2}u_n\nabla u_n\nabla\mu dx\\
&\quad +\lambda\int_\Omega \left(\frac{1}{\mu(x)} - \frac{1}{\nu(x)}\right) f(x,u_n)u_n dx\\
&\geq \frac{l_1 a_0}{\mu_2 p_2}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx + \frac{l_1 b_0}{\mu_2 p_2}\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx + \frac{l_1 c_0}{\mu_2 p_2^*}\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx\\
&\quad - \|J'(u_n)\|_{-1,p'}\left\|\frac{u_n}{\mu}\right\|_{1,p} - \frac{a_1 M}{\mu_1^2}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-1}|u_n|dx\\
&\quad -\lambda\int_\Omega \left(\frac{1}{\mu(x)} + \frac{1}{\nu(x)}\right) f(x,u_n)u_n dx
\end{aligned}
$$

Procedendo como no Teorema 3.2, supondo que $\|u\|_{1,p} > 1$ temos que

$$
\begin{aligned}
J(u_n) &\geq \frac{l_1 a_0}{4\mu_2 p_2}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx + \frac{l_1 b_0}{\mu_2 p_2}\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx - C|\Omega| \\
&\quad -\lambda \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu(x)} + \frac{1}{\nu(x)}\right) f(x,u_n)u_n dx \\
&\geq \frac{l_1 a_0}{4\mu_2 p_2}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx + \frac{l_1 b_0}{\mu_2 p_2}\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx - C|\Omega| \\
&\quad -2\lambda \int_\Omega (\widetilde{C}_1|u_n| + \widetilde{C}_2|u_n|^{\beta(x)+1})dx. \qquad (3.46)
\end{aligned}
$$

Dado $0 < \varepsilon_1 < 1$, usando a desigualdade de Young (Teorema C.1) para $\alpha = \varepsilon_1^{\frac{1}{p(x)}}|u_n|$, $\beta = \varepsilon_1^{-\frac{1}{p(x)}}$ e $p = p(x)$ temos que

$$
|u_n(x)| \leq \frac{\varepsilon_1 |u_n(x)|^{p(x)}}{p(x)} + \varepsilon_1^{\frac{1}{1-p(x)}}\frac{p(x)-1}{p(x)} \quad \text{q.s. em } \Omega
$$

e assim

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u_n|dx &\leq \int_\Omega \left(\varepsilon_1 |u_n|^{p(x)} + \varepsilon_1^{\frac{1}{1-p(x)}}\right)dx \\
&\leq \int_\Omega \varepsilon_2 |u_n|^{p(x)} + K_1|\Omega|. \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

Dado $0 < \varepsilon_2 < 1$, usando novamente a desigualdade de Young (Teorema C.1) para $\alpha = \varepsilon_2^{\frac{p(x)-1}{p(x)}}|u_n|^{\beta(x)+1}$ e $\beta = \varepsilon_2^{-\frac{\beta(x)+1}{p(x)}}$ e $p = \frac{p(x)}{\beta(x)+1}$ cujo expoente conjugado é $q = \frac{p(x)}{p(x)-(\beta(x)+1)}$, assim temos

$$
|u_n(x)|^{\beta(x)+1} \leq \varepsilon_2 |u_n(x)|^{p(x)} + \varepsilon_2^{\frac{\beta(x)+1}{\beta(x)+1-p(x)}}, \quad \text{q.s. em } \Omega
$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u_n|^{\beta(x)+1}dx &\leq \int_\Omega \left(\varepsilon_2 |u_n|^{p(x)} + \varepsilon_2^{\frac{\beta(x)+1}{\beta(x)+1-p(x)}}\right)dx \\
&\leq \int_\Omega \varepsilon_2 |u_n|^{p(x)} + K_2|\Omega|, \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

Escolhendo ε_1 e ε_2 suficientemente pequeno tais que

$$
2\lambda\widetilde{C}_1\varepsilon_1 < \frac{l_1 b_0}{2\mu_2 p_2} \quad \text{e} \quad 2\lambda\widetilde{C}_2\varepsilon_2 < \frac{l_1 b_0}{2\mu_2 p_2}
$$

Logo, temos em (3.47) e (3.47)

$$
\begin{aligned}
-2\lambda\widetilde{C}_1 \int_\Omega |u_n|dx &\geq -2\lambda\widetilde{C}_1\varepsilon_1 \int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx - \widetilde{K}_1|\Omega| \\
&\geq -\frac{l_1 b_0}{2\mu_2 p_2}\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx - \widetilde{K}_1|\Omega| \qquad (3.49)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
-2\lambda\widetilde{C}_2\int_\Omega |u_n|^{\beta(x)+1}dx &\geq -2\lambda\widetilde{C}_2\varepsilon_2\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx - \widetilde{K}_2|\Omega| \\
&\geq -\frac{l_1 b_0}{2\mu_2 p_2}\int_\Omega |u_n|^{p(x)}dx - \widetilde{K}_2|\Omega|. \qquad (3.50)
\end{aligned}
$$

Portanto, usando as desigualdades (3.49) e (3.50) em (3.46), obtemos

$$
J(u_n) \geq \frac{l_1 a_0}{4\mu_2 p_2}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx - (C + \widetilde{K}_1 + \widetilde{K}_2)|\Omega|
$$

e de maneira análoga ao Teorema 3.2, temos que $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e pelo Teorema 3.1, o problema (3.1) possui uma solução não trivial para $\lambda \in (0, \Lambda)$.

$\blacksquare$

Apêndice A

Regularidade do funcional associado

Neste capitulo mostraremos que o funcional associado ao problema 3.1, isto é

$$J(u) = \int_\Omega \frac{a(x)}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{b(x)}{p(x)}|u|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{c(x)}{p^*(x)}|u|^{p^*(x)} - \lambda F(x,u)dx,$$

com f satisfazendo as hipóteses (H1)e (H2) (ou (H3)) é de classe $C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega),\mathbb{R})$. Para isso, vamos considerar os funcionais

$$\begin{aligned} J_1(u) &= \int_\Omega \frac{a(x)}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx, \\ J_2(u) &= \int_\Omega \frac{b(x)}{p(x)}|u|^{p(x)}dx, \\ J_3(u) &= \int_\Omega \frac{c(x)}{p^*(x)}|u|^{p^*(x)}dx \end{aligned}$$

e

$$K(u) = \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Deste modo temos que

$$J(u) = J_1(u) + J_2(u) - J_3(u) - \lambda K(u)$$

e para mostrar que J é de classe C^1 devemos verificar que os funcionais J_1, J_2, J_3 e K são de classe C^1. Mas a regularidade dos funcionais J_1, J_2 e J_3 é conhecida e segue o mesmo argumento do caso em que $p(x) = p$ é constante. Por isso dedicaremos o estudo apenas ao funcional K.

Lema A.1 *Suponha que f satisfaça (H1) e (H2) (ou (H3)). Então $K(u)$ é diferenciável em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ com*

$$K'(u)\phi = \int_\Omega f(x,u)\phi dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Demonstração:

Derivada de Geateaux. Para todo $\phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ temos

$$DK(u)\phi = \lim_{t\to 0} \frac{K(u+t\phi)+K(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega F(x,u+t\phi) - F(x,u)dx}{t}.$$

Pondo $G(s) = F(x, u+st\phi)$, pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$\begin{aligned} G(1) - G(0) &= G'(\lambda), \quad \lambda \in (0,1) \\ \frac{F(x,u+t\phi) - F(x,u)}{t} &= f(x, u+\lambda t\phi)\phi. \end{aligned}$$

Assim:

$$DK(u)\phi = \lim_{t\to 0} \int_\Omega f(x, u+\lambda t\phi)\phi dx. \tag{A.1}$$

Por outro lado, da continuidade de f, temos que

$$f(x, u+\lambda t\phi)\phi \to f(x,u)\phi, \quad \text{quando } t \to 0. \tag{A.2}$$

Além disso, supondo que f satisfaça $(H2)$, então

$$\begin{aligned} |f(x, u+\lambda t\phi)| &\leq C_1 + C_2|u+\lambda t\phi|^{\alpha(x)} \\ &\leq C_1 + C_2(|u|+|\phi|)^{\alpha(x)} \in L^1(\Omega), \end{aligned} \tag{A.3}$$

desde que $|t| \leq 1$ e $u, \phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{\alpha(x)}(\Omega)$. Então, de A.2, A.3 e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (C.4), segue que

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega f(x, u+\lambda t\phi)\phi dx = \int_\Omega f(x,u)\phi dx,$$

tendo em vista a igualdade A.1

$$DK(u)\phi = \int_\Omega f(x,u)\phi dx$$

.

Continuidade da derivada de Geateaux. Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tais que

$$u_n \to u, \quad \text{em } W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Temos que

$$\begin{aligned} |DK(u_n)\phi - DK(u)\phi| &= \left| \int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u))\phi dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)||\phi| dx. \end{aligned}$$

Como

$$
\begin{aligned}
|f(x,u_n)-f(x,u)|^{\frac{p^*(x)}{p^*(x)-1}} &\leq (C_1+C_2|u_n|^{\alpha(x)}+C_1+C_2|u|^{\alpha(x)})^{\frac{p^*(x)}{p^*(x)-1}}\\
&\leq C(1+|u_n|)^{\alpha(x)\frac{p^*(x)}{p^*(x)-1}}+C(1+|u|)^{\alpha(x)\frac{p^*(x)}{p^*(x)-1}}\\
&\leq C(1+|u_n|)^{p^*(x)}+C(1+|u|)^{p^*(x)}
\end{aligned}
$$

desde que $\alpha(x)<p^*(x)-1$. Assim, como $u_n,u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\subset L^{p^*(x)}(\Omega)$, temos que

$$
|f(x,u_n)-f(x,u)|\in L^{\frac{p^*(x)}{p^*(x)-1}}(\Omega) \quad \text{e} \quad |\phi|\in L^{p^*(x)}(\Omega), \tag{A.4}
$$

então, pela Desigualdade de Hölder (Teorema 1.4), segue que

$$
|DK(u_n)\phi-DK(u)\phi|\leq r_p\|f(x,u_n)-f(x,u)\|_{(p^*)'}\|\phi\|_{p^*}.
$$

Da imersão contínua $W_0^{1,p(x)}(\Omega)\hookrightarrow L^{p^*(x)}(\Omega)$ (Teorema 1.10)

$$
|DK(u_n)\phi-DK(u)\phi|\leq c\|f(x,u_n)-f(x,u)\|_{(p^*)'}\|\phi\|_{1,p}
$$

logo

$$
\|DK(u_n)\phi-DK(u)\phi\|\leq C\|f(x,u_n)-f(x,u)\|_{(p^*)'}. \tag{A.5}
$$

Por outro lado, como $u_n\to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, do Teorema 1.3, a menos de subsequência, $u_n\to u$ q.s. em Ω e portanto

$$
|f(x,u_n)-f(x,u)|^{\frac{p^*(x)}{p^*(x)-1}}\to 0 \quad \text{q.s. em } \Omega, \tag{A.6}
$$

Assim, de A.4 - A.6 e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (C.4), segue que

$$
\|DK(u_n)\phi-DK(u)\phi\|\leq C\|f(x,u_n)-f(x,u)\|_{(p^*)'}\to 0
$$

Mostrado a continuidade do operador DK, então, pelo teorema C.22, segue o resultado. Analogamente, o resultado continua valido se f satisfaz $(H1)$ e $(H2)$. ∎

Apêndice B

Revisão sobre medidas de Radon

Aqui neste capitulo faremos uma breve revisão sobre o espaço das Medidas de Radon, explicando as identificações e convergências que ocorrem neste espaço.

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com a medida de Lebesgue. Considere o espaço $E = C(\overline{\Omega})$ com a norma

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Denotaremos por $\mathbb{M}(\overline{\Omega})$ o dual de $C(\overline{\Omega})$ (isto é, $\mathbb{M}(\overline{\Omega}) := (C(\overline{\Omega}))'$), chamado de espaço das *medidas de Radon* sobre $\overline{\Omega}$.

Iremos identificar o espaço $L^1(\Omega)$ com um subespaço de $\mathbb{M}(\overline{\Omega})$. Para isso, considera a aplicação

$$L^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{M}(\overline{\Omega})$$

tal que, para cada $u \in L^1(\Omega)$, associamos ao funcional linear $T_u \in \mathbb{M}(\overline{\Omega})$ dado por

$$T_u(\phi) = \int_\Omega u\phi dx, \quad \forall \phi \in E = C(\overline{\Omega}).$$

Note que esta aplicação é linear e isométrica, isto é:

$$\|T_u\|_{\mathbb{M}(\overline{\Omega})} = \sup_{\|\phi\|_\infty \leq 1} |T_u(\phi)| = \|u\|_\infty.$$

Mas esta aplicação não é sobrejetora isto é, existem funcionais em $\mathbb{M}(\overline{\Omega})$ que não podem ser definidos por nenhuma função em $L^1(\Omega)$ através desta aplicação. Com efeito, dado $a \in \overline{\Omega}$, definamos o funcional chamado *delta de Dirac* concentrado no ponto a, $\delta_a : C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\delta_a(\phi) = \phi(a),$$

claramente $\delta_a \in \mathbb{M}(\overline{\Omega})$ porém sabemos da teoria das distribuições que este funcional não pode ser identificado com nenhuma função em $L^1(\Omega)$.

Além disso, desde que $C(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach separável, $\mathbb{M}(\overline{\Omega})$ goza de algumas propriedades importantes da topologia fraca*. De fato, pelo teorema C.12, toda sequência $\{\mu_n\}$ limitada em $E' = \mathbb{M}(\overline{\Omega})$ possui subsequência $\{\mu_{n_k}\}$ convergente na topologia fraca* $\sigma(E', E)$, em símbolos escrevemos

$$\mu_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \quad \text{em } \sigma(E', E)$$

ou

$$\mu_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \quad \text{em } \mathbb{M}(\overline{\Omega}).$$

Por outro lado, o item (i) do Teorema C.11 nos fornece uma caracterização para a convergência na topologia fraca*, assim:

$$\mu_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \quad \text{em } \mathbb{M}(\overline{\Omega}) \Leftrightarrow \mu_{n_k}(\phi) \to \mu(\phi), \quad \forall \phi \in E.$$

Em particular, dado uma sequência de funções $\{u_n\} \in L^1(\Omega)$ limitada, como a aplicação acima é uma isometria, esta sequência define uma sequência de funcionais $\{T_{u_n}\} \subset \mathbb{M}(\overline{\Omega})$ que também é limitada. Logo, existe uma subsequência $\{T_{u_{n_k}}\}$ tal que

$$T_{u_{n_k}}(\phi) \to \mu(\phi) \quad \forall \phi \in E$$

usando a definição de $T_{u_{n_k}}$ temos

$$\int_\Omega u_{n_k} \phi dx \to \mu(\phi) \quad \forall \phi \in E.$$

Assim, uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ pode convergir na topologia fraca* para o funcional delta de Dirac, por exemplo. Por convenção, usaremos apenas a letra u para nos referir ao funcional T_u. Desta forma, dado $u \in L^1(\Omega)$, a menos de identificação, $u \in \mathbb{M}(\overline{\Omega})$ e

$$u(\phi) = \int_\Omega u \phi dx, \quad \forall \phi \in C(\overline{\Omega})$$

Consideremos por exemplo uma sequência $\{u_n\} \subset L^1(\Omega)$ de modo que, para alguma $u \in L^1(\Omega)$ tenhamos, a menos de identificação,

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } \mathbb{M}(\overline{\Omega}).$$

Pelo item (i) do Teorema C.11,

$$u_n(\phi) \to u(\phi), \quad \forall \phi \in C(\overline{\Omega}) \Leftrightarrow \int_\Omega u_n \phi dx \to \int_\Omega u \phi dx, \quad \forall \phi \in C(\overline{\Omega}).$$

Para justificar o termo "medidas"temos o

Teorema B.1 (Representação de Riesz) *Seja μ uma medida de Radon em $\overline{\Omega}$ (isto é, $\mu \in \mathbb{M}(\overline{\Omega})$). Então existe uma única medida de Borel com sinal ν (ou seja, uma medida com sinal definida sobre os conjuntos de Borel de $\overline{\Omega}$) tal que*

$$\mu(\phi) = \int_{\Omega} \phi d\nu, \quad \phi \in C(\overline{\Omega}).$$

Este teorema pode ser encontrado em [1], Teorema 4.31.

Por este teorema, dado uma sequência de funcionais $\{\mu_n\} \subset \mathbb{M}(\overline{\Omega})$ e $\mu \in \mathbb{M}(\overline{\Omega})$ tais que

$$\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \quad \text{em } \mathbb{M}(\overline{\Omega}) \Leftrightarrow \mu_n(\phi) \to \mu(\phi), \quad \forall \phi \in C(\overline{\Omega})$$

assim, para cada μ_n e μ, existem ν_n e ν medidas de Borel com sinal e para μ tais que

$$\mu_n(\phi) = \int_{\overline{\Omega}} \phi d\nu_n \quad \text{e} \quad \int_{\overline{\Omega}} \phi d\nu,$$

desde modo

$$\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \quad \text{em } \mathbb{M}(\overline{\Omega}) \Leftrightarrow \int_{\overline{\Omega}} \phi d\nu_n \to \int_{\overline{\Omega}} \phi d\nu.$$

Por convenção, usaremos novamente o mesmo símbolo para representar funcionais em $\mathbb{M}(\overline{\Omega})$ e suas respectivas medidas de Borel com sinal, de modo que podemos escrever, a menos de identificação,

$$\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \quad \text{em } \mathbb{M}(\overline{\Omega}) \Leftrightarrow \int_{\overline{\Omega}} \phi d\mu_n \to \int_{\overline{\Omega}} \phi d\mu, \quad \forall \phi \in C(\overline{\Omega}) \tag{B.1}$$

em particular, como $\phi \equiv 1 \in C(\overline{\Omega})$, temos que

$$\mu_n(\overline{\Omega}) \to \mu(\overline{\Omega}).$$

Por fim, queremos responder à seguinte pergunta: o funcional delta de Dirac δ_a é identificado com qual medida com sinal de Borel? E a resposta é a *medida de Dirac*, dada por, usando o mesmo símbolo:

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in A \\ 0, & \text{se } a \notin A \end{cases},$$

para todo conjunto de Borel A. Com efeito, afirmamos que para esta medida de Borel com sinal temos:

$$\delta_a(\phi) = \phi(a) = \int_{\overline{\Omega}} \phi d\delta_a, \quad \forall \phi \in C(\overline{\Omega}).$$

De fato,

$$\int_{\overline{\Omega}} \phi d\delta_a = \int_{\{a\}} \phi d\delta_a + \int_{\overline{\Omega}\setminus\{a\}} \phi d\delta_a,$$

como $\delta_a(\overline{\Omega} \setminus \{a\}) = 0$ concluímos que

$$\int_{\overline{\Omega}} \phi d\delta_a = \int_{\{a\}} \phi d\delta_a = \phi(a)\delta_a(\{a\}) = \phi(a).$$

Observação: Os resultados apresentados acima podem ser generalizado para o espaço $C(X)$, onde X é um espaço de Hausdorff compacto. Para maiores detalhes, sugerimos [9].

Apêndice C

Resultados Utilizados na Dissertação

Mostraremos os teoremas básicos utilizados ao longo do texto, indicando onde encontrar sua demonstração.

Teorema C.1 (Desigualdade de Young) *Para $1 < p < \infty$, q o conjugado de p, e dois números positivos α, β quaisquer,*

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

Demonstração: Veja **Young's Inequality** em [9].

Teorema C.2 *Se f é uma função mensurável em $\mathbb{R}^N$, não-negativa ou integrável, tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma função g em $(0, \infty)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = |s^{N-1}| \int_0^\infty g(t)t^{N-1}dt$$

onde $|s^{N-1}|$ denota a área de superfície da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$.

Demonstração: Veja [12], Teorema 2.49 e Corolário 2.5.

Teorema C.3 (Teorema da Convergência Monótona) *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em L^1 tal que*

(a) $0 \geq f_n \geq f_{n+1}, \forall n$

(b) $\sup_n \int f_n dx < \infty$ *Então $f_n(x)$ converge q.s. em Ω para um limite finito que denotaremos por $f(x)$ e $f \in L^1$ com*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f$$

Demonstração: Veja [1], Teorema 4.1.

Teorema C.4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções em L^1 tal que*

(a) $f_n \to f$ q.s.,

(b) Existe uma função não negativa $g \in L^1$ tal que $|f_n| \leq g$ q.s., para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então, $f \in L^1$ e

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f$$

Demonstração: Veja [12], Teorema 2.24.

Teorema C.5 *Sejam $f \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então $\eta f \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$*

Teorema C.6 *Seja $\mu, \mu_k (k = 1, 2, ...)$ medidas de Radon sobre $\mathbb{R}^N$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu, \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R}^N)$

(ii) $\displaystyle\limsup_{k\to\infty} \mu_k(K) \leq \mu(K)$, *para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ e $\mu(U) \leq \displaystyle\liminf_{k\to\infty} \mu_k(U)$, para cada conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^N$.*

(iii) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \mu_k(B) = \mu(B)$, *para cada conjunto de Borel limitado $B \subset \mathbb{R}^N$ com $\mu(\partial B) = 0$*

Demonstração: Veja [**?**], Teorema 1, página 54.

Teorema C.7 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então para $x \in \mathbb{R}^N$ q. s. a função $y \mapsto f(x-y)g(y)$ é integrável sobre $\mathbb{R}^N$ e definimos*

$$(f * g)(x) = \int_\Omega f(x-y)g(y)dy.$$

Além disso $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

Demonstração: Veja [1], Teorema 4.15.

Teorema C.8 (Lema de Fatou) *Se $\{f_n\}$ é uma sequência não negativa em L^1. Então*

$$\int (\liminf f_n) \leq \liminf \int f_n.$$

Demonstração: Veja [12], Teorema 2.18.

Teorema C.9 *Para toda medida μ definida em uma σ-álgebra $\mathfrak{A}$ existem medidas μ_1 e μ_2 tais que $\mu = \mu_1 + \mu_2$, onde μ_1 é uma medida não-atômica e μ_2 é uma medida puramente atômica, isto é, formada apenas por átomos. Em particular, no caso em que $\mathfrak{A}$ é a σ-álgebra de Borel do $\mathbb{R}^N$ temos*

$$\mu = \mu_1 + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j},$$

onde $x_j \in \mathbb{R}^N$, $\mu_j = \mu(\{x_j\})$ e $j \in J$.

Demonstração: Veja [14], Teorema 2.1.

Teorema C.10 *Seja $\{x_n\}$ uma sequência em espaço de Banach E. Então*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E') \Leftrightarrow < f, x_n > \to < f, x >$, $\forall f \in E'$.

(ii) Se $x_n \to x$ fortemente, então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E')$.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E')$, então $(\|x_n\|)$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

Onde $\sigma(E, E')$ é a topologia fraca em E.

Demonstração: Veja [1], Proposição 3.5.

Teorema C.11 *Seja E um espaço de Banach e $\{f_n\}$ uma sequência em E', então*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E) \Leftrightarrow < f_n, x > \to < f, x >$, $\forall x \in E$.

(ii) Se $f_n \to f$ fortemente, então $f_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E', (E')')$.
Se $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $\sigma(E', (E')')$, então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$.

(iii) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$, então $(\|f_n\|)$ é limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

Onde $\sigma(E', E)$ é a topologia fraca* sobre E'.

Demonstração: Veja [1], Proposição 3.13.

Teorema C.12 *Seja E um espaço de Banach separável e $\{f_n\}$ uma sequência limitada em $E^\star$. Então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ que converge na topologia topologia $\sigma(E', E)$.*

Demonstração: Veja [1], Corolário 3.30.

Teorema C.13 *Supondo que* X *é um espaço de Banach separável e reflexivo e que* $f : M \subseteq X \to \overline{\mathbb{R}}$ *é diferenciável à Gateaux sobre o conjunto convexo e fechado* M. *Então se* f *é convexo,* f *é fracamente sequencialmente semi-contínuo inferiormente.*

Demonstração: Veja [8], Teorema 7.2.3.

Teorema C.14 (Banach - Alaoglu - Bourbaki) *Seja* E *um espaço de Banach. A bola unitária fechada*

$$B_{E^*} = \{f \in E^*;\ \|f\| \leq 1\}$$

*é compacta na topologia fraco** $\sigma(E^*, E)$. *Em particular, toda sequência limitada possui uma subsequência convergente na topologia fraco** $\sigma(E^*, E)$.

Demonstração: Veja [1], Teorema 3.16.

Teorema C.15 (Kakutani) *Seja* E *um espaço de Banach. Então* E *é reflexivo se, e somente se, a bola*

$$B_E = \{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}$$

é fracamente compacto na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$.

Demonstração: Veja [1], Teorema 3.17.

Teorema C.16 (Radon - Nikodym) *Seja* ν *uma medida com sinal* σ*-finita e* μ *uma medida* σ*-finita definida em uma* σ*-álgebra* $(X, \mathfrak{X})$ *tais que* $\nu << \mu$, *isto é,* ν *é absolutamente contínua com respeito à* μ. *Então existe uma função* $f \in L^1(X, d\mu)$ *tal que*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad \forall A \subset \mathfrak{X}.$$

e escrevemos $d\nu = f d\mu$.

Demonstração: Veja [12], Teorema 3.8

Teorema C.17 *Seja* ν *uma medida regular com sinal definido na* σ*-álgebra de Borel de* $\mathbb{R}^N$, *e seja* $d\nu = f d\mu$ *a representação de Radon - Nikodym do Teorema anterior. Então para* $x \in \mathbb{R}^N$ μ*-quase sempre*

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{\mu(B_r(x))}$$

Demonstração: Veja [12], Teorema 3.22.

Teorema C.18 *Seja $\{u_n\}$ uma sequência limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$ e*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in B_1(0) \\ 0, & se \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus B_1(0). \end{cases}$$

Dado $\varepsilon > 0$, $x_j \in \Omega$ e $\phi_\varepsilon(x) := \phi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)$ de modo que $B_{2\varepsilon}(x_j) \subset \Omega$. Então

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}u_n\nabla u_n\nabla\phi_\varepsilon dx\right] = 0$$

Demonstração: Desde que $\{u_n\} \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e $\phi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, então

$$|\nabla u_n|^{p(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega) \quad \text{e} \quad u_n\nabla\phi_\varepsilon \in L^{p(x)}(\Omega),$$

então, pela desigualdade de Holder (Teorema 1.4),

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}u_n\nabla u_n\nabla\phi_\varepsilon dx\right| \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-1}|u_n||\nabla\phi_\varepsilon|dx \leq C\||\nabla u_n|^{p(x)-1}\|_{p'}\|u_n\nabla\phi_\varepsilon\|_p.$$

Mas, como $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$,

$$\rho_{p'}(||\nabla u_n|^{p(x)-1}) = \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p(x)-1})^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}dx = \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim, $\{\||\nabla u_n|^{p(x)-1}\|_{p'}\}$ é limitada. Então, a menos de constante,

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}u_n\nabla u_n\nabla\phi_\varepsilon dx\right| \leq C\|u_n\nabla\phi_\varepsilon\|_p.$$

Do Teorema 1.1, temos

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}u_n\nabla u_n\nabla\phi_\varepsilon dx\right|$$
$$\leq C\max\left\{\left(\int_\Omega |u_n\nabla\phi_\varepsilon|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{p_1}}, \left(\int_\Omega |u_n\nabla\phi_\varepsilon|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{p_2}}\right\}. \quad \text{(C.1)}$$

Por outro lado, das Imersões Compactas de Sobolev (Teorema 1.10), a menos de subsequência temos que

$$u_n \to u, \quad \text{em } L^{p(x)}(\Omega)$$

e do Teorema 1.3, a menos de subsequência, existe $h \in L^1(\Omega)$ tal que

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{q.s. em } \Omega$$

e

$$|u_n(x)| \leq h(x) \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

Como $\phi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$|u_n(x)|^{p(x)}|\nabla\phi_\varepsilon(x)|^{p(x)} \to |u|^{p(x)}|\nabla\phi_\varepsilon(x)|^{p(x)} \quad \text{q.s. em } \Omega$$

quando $n \to \infty$ e

$$|u_n(x)|^{p(x)}|\nabla\phi_\varepsilon(x)|^{p(x)} \leq A|h(x)|^{p(x)} \quad \text{q.s. em } \Omega,$$

onde $A > 0$ é tal que $|\nabla\phi_\varepsilon(x)|^{p(x)} < A$.Então, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (C.4), segue que

$$\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}|\nabla\phi_\varepsilon(x)|^{p(x)}dx \to \int_\Omega |u|^{p(x)}|\nabla\phi_\varepsilon(x)|^{p(x)}dx$$

Usando essa convergência na desigualdade C.1 concluímos que

$$\limsup_{n\to 0}\left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}u_n\nabla u_n\nabla\phi_\varepsilon dx\right| \\ \leq C\max\left\{\left(\int_\Omega |u|^{p(x)}|\nabla\phi_\varepsilon|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{p_1}}, \left(\int_\Omega |u|^{p(x)}|\nabla\phi_\varepsilon|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{p_2}}\right\}.$$

Note que, da imersão contínua $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*(x)}(\Omega)$ (Teorema 1.10) e como $\phi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, segue que

$$|u|^{p(x)} \in L^{\frac{N}{N-p(x)}}(\Omega) \quad \text{e} \quad |\nabla\phi_\varepsilon|^{p(x)} \in L^{\frac{N}{p(x)}}(\Omega),$$

então, da desigualdade de Holder (Teorema 1.4) temos que

$$\int_\Omega |u|^{p(x)}|\nabla\phi_\varepsilon|^{p(x)}dx \leq c_1\||u|^{p(x)}\|_{\left(\frac{N}{p}\right)'}\||\nabla\phi_\varepsilon|^{p(x)}\|_{\frac{N}{p}} \leq c_2\||\nabla\phi_\varepsilon|^{p(x)}\|_{\frac{N}{p}}$$

Assim

$$\limsup_{n\to 0}\left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}u_n\nabla u_n\nabla\phi_\varepsilon dx\right| \\ \leq C\max\left\{\left(\||\nabla\phi_\varepsilon|^{p(x)}\|_{\frac{N}{p}}\right)^{\frac{1}{p_1}}, \left(\||\nabla\phi_\varepsilon|^{p(x)}\|_{\frac{N}{p}}\right)^{\frac{1}{p_2}}\right\}.$$

Mas

$$\rho_{\frac{N}{p}}(|\nabla\phi_\varepsilon|^{p(x)}) = \int_\Omega (|\nabla\phi_\varepsilon|^{p(x)})^{\frac{N}{p(x)}}dx = \int_\Omega |\nabla\phi_\varepsilon|^N dx$$

E é fácil ver que, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (C.4), temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\rho_{\frac{N}{p}}(|\nabla\phi_\varepsilon|^{p(x)}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |\nabla\phi_\varepsilon|^N dx = 0$$

e do Teorema 1.6,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \| |\nabla \phi_\varepsilon|^{p(x)} \|_{\frac{N}{p}} = 0$$

Concluímos então

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\limsup_{n\to 0} \left| \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2} u_n \nabla u_n \nabla \phi_\varepsilon dx \right| \right] = 0.$$

De onde segue o resultado.

$\blacksquare$

Teorema C.19 (Desigualdade de Simon) *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno usual em $\mathbb{R}^N$. Então*

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \rangle \geq \begin{cases} c_p |x-y|^p, & se \quad p \geq 2 \\ c_p \dfrac{|x-y|^2}{|x| + |y|^{2-p}}, & se \quad 1 < p < 2 \end{cases}$$

Demonstração: Veja [16], Lema A.0.5.

Teorema C.20 (Teorema do Passo da Montanha - M. Willem) *Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que existem $\alpha, \rho > 0$ tais que*

$$I(u) \geq \alpha > 0, \quad \forall u \in E, \|u\| = \rho \tag{C.2}$$

e existe $e \in E$ tal que $\|e\| > \rho$ e

$$I(e) < 0. \tag{C.3}$$

Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in E$ tal que

(a) $c - 2\varepsilon \leq I(u_\varepsilon) \leq c + 2\varepsilon$

(b) $\|I'(u_\varepsilon)\| < 4\varepsilon$

onde

$$0 < c = \inf_{\lambda \in \Gamma} \max_{[0,1]} I(\gamma(t)),$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \ \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração: Veja [11], Teorema 7.1.

Teorema C.21 (Borel - Lebesgue) *Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto (isto é, limitado e fechado). Toda cobertura aberta $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ admite uma subcobertura finita $K \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup ... A_{\lambda_i}$*

Demonstração: Veja [15], Teorema 23.

Teorema C.22 *Sejam E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional tal que I tem derivada de Gateaux contínua em $A \subset E$, então $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e as derivadas de Geateaux e Fréchet coincidem.*

Demonstração: Veja [4], Teorema 1.9.

Referências Bibliográficas

[1] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Sapaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.

[2] Xianling Fan e Dun Zhai. On the spaces $\mathrm{L}^{p(x)}(\omega)$ and $\mathrm{W}^{m,p(x)}(\omega)$. *Jornal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001.

[3] H. Brezis e E. Lieb. A relation between pointwise convergence of functions and convergences of functionals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1983.

[4] A. Ambrosetti e G. Prodi. *A Primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge University Press, 1993.

[5] O. Koávacik e J. Rákosnik. On spaces $\mathrm{L}^{p(x)}$ and $\mathrm{W}^{k,p(x)}$. *Czechoslovak Mathematical Jornal*, 41(4), 1991.

[6] K. R. Rajagopal e M. Ruzicka. On the modeling of electrorheological materials. *Mech. Research Comm.*, 23:401–407, 1996.

[7] K. R. Rajagopal e M. Ruzicka. Mathematical modeling of electrorheological materials. *Cont. Mech. and Thermodynamics*, 13:59–78, 2001.

[8] Andrew J. Kurdila e Michael Zabarankin. *Convex Functional Analysis*. Birkhäuser, 2005.

[9] H.L. Royden e P.M. Fitzpatrick. *Real Analysis*. Pearson Education, 4 edition, 2010.

[10] Lars Diening et. al. *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*. Springer's, 2010.

[11] Giovany M. Figueiredo. *Uma introdução à Teoria dos Pontos Críticos*. ., Agosto 2012.

[12] Gerald B. Folland. *Real Analysis. Modern techniques and their applications*. Wiley-Interscience, 1999.

[13] Peter A. Hästö. The $p(x)$-laplacian and applications. *J. Anal.*, 15:53–62, 2007.

[14] Roy A. Johnson. Atomic and nonatomic measures. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 25(3):650–655, Jul. 1970.

[15] Elon Lages Lima. *Curso de Análise*, volume 2. IMPA, 11 edition, 2011.

[16] Ireneo Peral. *Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian.* ;, 21 abril - 9 maio 1997.

[17] Fu Youngqiang. The principle of concentration compactness in $L^{p(x)}$ spaces and its application. *Nonlinear Analysis*, (71):1876–1892, 2009.