UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Um problema de transmissão no $\mathbb{R}^2$ com crescimento exponencial crítico

Ryan Henrique Freitas Moura

BELÉM

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Um problema de transmissão no $\mathbb{R}^2$ com crescimento exponencial crítico

Ryan Henrique Freitas Moura

ORIENTADOR: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

BELÉM

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Ryan Henrique Freitas Moura

Um problema de transmissão no $\mathbb{R}^2$ com crescimento exponencial crítico

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Data da defesa: 13 de Março de 2014.

Conceito:______________

Banca Examinadora

____

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)
PPGME - UFPA

____

Prof. Dr.ª Amanda Suellen Sena Corrêa Leão
PPGME - UFPA

____

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria
Universidade Federal de Juiz de Fora-UFJF

____

Prof. Dr.ª Rúbia Gonçalves Nascimento
PPGME - UFPA

Dedicatória

Aos meus pais Rosinaldo e Darly

e aos meus avós Orlando e Darcy.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter iluminado o meu caminho no mundo acadêmico e por ter me dado força diante das dificuldades. Agradeço também à todos que direta ou indiretamente me apoiaram na minha trajetória.

Em especial aos meus pais Darly Lage de Freitas e Rosinaldo Conceição Moura, que sempre lutaram para que eu e as minhas irmãs, Fernanda Rafaelly e Roberta Kayelli, tivessem uma boa educação. Aos meus avós e aos meus tios que sempre tiveram torcendo pelo meu sucesso.

À minha esposa Paula Pinon pela compreensão, pelo carinho e pelo suporte que tive durante essa trajetória.

Ao meu orientador professor Giovany Figueiredo, pelas orientações, pelos ensinamentos e principalmente pela maturidade que eu obtive estudando com esse excelente matemático.

Agradeço aos professores do PPGME dos quais tive o privilégio de estudar: Marcos Monteiro Diniz, Dilberto Almeida Júnior, Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa, João Pablo Pinheiro da Silva. De todos levei ensinamentos e experiência, que contribuiram para eu realizar este trabalho.

Aos professores Rúbia Gonçalves Nascimento, Luiz Fernando de Oliveira Faria e Amanda Suellen Sena Corrêa Leão, por terem aceito gentilmente participar da banca examinadora e pelas sugestões que enriqueceram o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas de turma do mestrado, em especial, à Tarcyana do Socorro Figueiredo de sousa minha querida amiga pela grande amizade, pelo apoio e pelos momentos que compartilhamos.

Resumo

Neste trabalho provaremos um resultado de existência de solução para um problema de transmissão no $\mathbb{R}^2$ com crescimento exponencial crítico, isto é, a não-linearidade se comporta como $e^{\alpha_0 s^2}$ quando $|s|\to\infty$ para algum $\alpha_0 > 0$.

Palavras-chaves: Transmissão não-linear, crescimento exponencial crítico, desigualdade de Trudinger-Moser.

Abstract

In this work we prove an existence result for a transmission problem in $\mathbb{R}^2$ with critical exponential growth, that is, the nonlinearity is as $e^{\alpha_0 s^2}$ when $|s|\to\infty$ for some $\alpha_0 > 0$.
keywords: Nonlinear transmission, critical exponential growth, Trudinger-Moser inequality.

Conteúdo

Introdução **1**

Notação **3**

1 Estrutura variacional **4**

2 Geometria do Passo da Montanha **17**

3 Teorema principal **26**

3.1 Prova do Teorema 0.1 33

A Regularidade do funcional I **40**

1.1 Diferenciabilidade do funcional associado 40

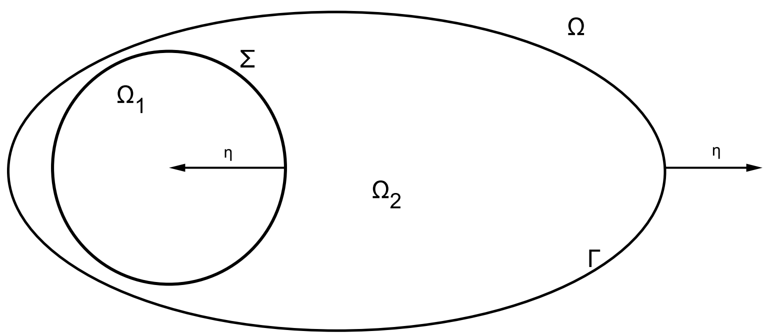
B Resultados importantes **49**

C Desigualdade de Trudinger-Moser **58**

Referências **58**

Introdução

Neste trabalho estudaremos o seguinte problema de transmissão: Seja Ω um domínio suave limitado do $\mathbb{R}^2$ e $\Omega_1 \subset \Omega$ um subdomínio com fronteira suave Σ satisfazendo $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$. Escrevendo $\Gamma = \partial\Omega$ e $\Omega_2 = \Omega \backslash \overline{\Omega}_1$ temos, $\Omega = \overline{\Omega}_1 \cup \Omega_2$ e $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \Gamma$. Também denotaremos por η o vetor unitário normal a fronteira de Ω_2, como podemos observar na figura ilustrativa abaixo:



Com as condições acima, este trabalho está relacionado com a existência de solução não trivial utilizando o método variacional, para o seguinte problema de transmissão eliptico não linear

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \ \ em \ \ \Omega_1, \\ -\Delta v = h(x,v) \ \ em \ \ \Omega_2, \\ v = 0 \ \ em \ \ \Gamma, \\ u = v \ \ em \ \ \Sigma, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \ \ em \ \ \Sigma. \end{cases}$$

Mostraremos a existência de solução não trivial para o problema (P) usando o Teorema do Passo da Montanha [3]. Para contornar a falta de compacidade, usaremos estimativas que envolvem a função de Moser.

Esta dissertação é um estudo do artigo *A transmission problem on* $\mathbb{R}^2$ *with critical exponential growth*, devido a G. Figueiredo e M. Montenegro [6], onde os autores usaram técnicas variacionais para tratar o problema, as quais descreveremos posteriormente.

O resultado principal nesta dissertação é o:

Teorema 0.1 *Suponha* $(f_1) - (f_4)$ *e* $(h_1) - (h_3)$, *então o problema (P) tem uma solução não trivial.*

Veremos as hipóteses $(f_1) - (f_4)$ e $(h_1) - (h_3)$ no Capítulo 1. Este trabalho está dividido da seguinte forma:

No Capítulo 1, faremos um estudo de normas que serão usadas ao longo do texto, estudaremos o espaço de Sobolev em que trabalharemos e definiremos o funcional associado ao problema (P).

No Capítulo 2, mostraremos que o funcional associado satisfaz a Geometria do Teorema do Passo da Montanha, usaremos a desigualdade de Trudinger-Moser nesta etapa. Também defiremos a função de Moser, fundamental para controlar o nível crítico adequado para o Teorema do Passo da Montanha.

No Capítulo 3, mostraremos que o nível crítico c_* é positivo e limitado por $\dfrac{2\pi}{\alpha_0}$, para isso usaremos a função de Moser. Provaremos também que, desde que o funcional I satisfaz as condições do Teorema do Passo da Montanha, podemos encontrar uma sequência (u_n, v_n) tal que $I(u_n, v_n)$ converge para c_*. Estes fatos implicarão que (u_n, v_n) converge, o limite é não-trivial e é solução do problema (P).

No Apêndice A, estudaremos a diferenciabilidade do funcional associado ao problema (P).

No Apêndice B, apresentaremos alguns resultados básicos que foram utilizados ao longo deste trabalho e que são fundamentais para uma boa compreensão do mesmo.

No Apêndice C, será apresentada uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser para um domínio limitado do $\mathbb{R}^2$, que terá um papel importante no desenvolvimento desta dissertação.

Notação

$\square$=:fim de uma demonstração,

$\Delta u := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$,

$\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$,

$|u|_{p,\Omega} := \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$,

$||u|| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$,

$||u||_{1,2;\Omega} := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$,

$||(u,v)||_D := ||u||_{1,2;\Omega_1} + ||v||_{1,2;\Omega_2}$,

$\rightharpoonup$:= convergência fraca,

$\rightarrow$:= convergência forte,

$B_r(x)$:= bola aberta de centro x e raio r,

$|\Omega|$:= medida de Lebesgue do conjunto Ω,

$\overline{\Omega}$:= fecho do conjunto Ω,

χ_A:= função característica do conjunto A,

C, C_1, C_2, C_3... são constantes arbitrárias maior que zero.

Capítulo

1

Estrutura variacional

Neste capítulo apresentaremos o espaço onde se dá nosso estudo. Faremos também um estudo de normas que serão úteis nesse trabalho e definiremos o funcional associado ao problema (P).

Definição 1.1 *Dizemos que um número real r é o raio interno de um conjunto Ω, quando r é o raio da maior bola aberta contida em Ω.*

Definição 1.2 *Dizemos que uma função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ possui crescimento exponencial subcrítico em $+\infty$ quando,*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{|f(x,t)|}{e^{\alpha t^2}} = 0, \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad \alpha > 0$$

e f possui crescimento exponencial crítico em $+\infty$ quando, existe $\alpha_0 > 0$ com a seguinte condição

$$(C)_{\alpha_0} \qquad \lim_{s \to +\infty} \frac{|f(x,s)|}{e^{\alpha s^2}} = \begin{cases} \textit{0 se } \alpha > \alpha_0 \textit{ uniformemente em } \overline{\Omega} \\ +\infty \textit{ se } \alpha < \alpha_0 \textit{ uniformemente em } \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Analogamente, definimos crescimento exponencial subcrítico e crítico em $-\infty$.

Exemplo 1.1 *A função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,t) = g(x)e^t$, onde a função $g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, possui crescimento exponencial subcrítico em $\pm\infty$.*

Exemplo 1.2 *Fixado $\alpha_0 > 0$. A função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,t) = e^{\alpha_0 t^2}$ possui crescimento exponencial crítico em $\pm\infty$.*

Nesse trabalho f e h são funções contínuas com crescimento exponencial crítico em $+\infty$ e satisfazem as seguintes hipóteses:

$$(f_1)\begin{cases} \text{Existem } \ R>0 \ \text{ e } \ M>0 \ \text{ tais que, para todo } \ s\geq R \ \ e \ \ x\in\Omega_1, \ \text{ temos} \\ \qquad\qquad 0<F(x,s)=\displaystyle\int_0^s f(x,t)dt\leq Mf(x,s). \end{cases}$$

$$(f_2)\begin{cases} \text{Para todo } \ s\in[0,+\infty) \ \text{ e para todo } \ x\in\Omega_1, \ \text{ obtemos} \\ \qquad\qquad f(x,s)\geq 0 \ \ e \ \ f(x,0)=0. \end{cases}$$

$$(f_3)\begin{cases} \text{Para todo } \ x\in\Omega_1, \ \text{ assumimos} \\ \displaystyle\lim_{s\to 0^+} sup\frac{2F(x,s)}{s^2}<\lambda_{11}, \end{cases}$$

onde λ_{11} é o primeiro autovalor de $(-\triangle, H_0^1(\Omega_1))$.

Agora definiremos

$$\mathcal{M}=\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 e^{n(s^2-s)}ds,$$

que é um número real maior ou igual a 2. Denotamos por r o raio interno do conjunto Ω_1. Assim podemos formular a última hipótese da função f.

$$(f_4)\begin{cases} \text{Existe } \ \beta_0>0 \ \text{ tal que, para todo } \ x\in\Omega_1, \ \text{ temos} \\ \displaystyle\lim_{s\to+\infty}\frac{sf(x,s)}{e^{\alpha_0 s^2}}\geq\beta_0>\left(\frac{2}{r}\right)^2\frac{1}{\alpha_0\mathcal{M}}. \end{cases}$$

Os resultados na função h são semelhantes às hipóteses prescritas para a função f, isto é,

$$(h_1)\begin{cases} \text{Existem } \ R>0 \ \text{ e } \ M>0 \ \text{ tais que, para todo } \ s\geq R \ \ e \ \ x\in\Omega_2, \ \text{ temos} \\ \qquad\qquad 0<H(x,s)=\displaystyle\int_0^s h(x,t)dt\leq Mh(x,s). \end{cases}$$

$$(h_2)\begin{cases} \text{Para todo } \ s\in[0,+\infty) \ \text{ e para todo } \ x\in\Omega_2, \ \text{ obtemos} \\ \qquad\qquad h(x,s)\geq 0 \ \ e \ \ h(x,0)=0. \end{cases}$$

$$(h_3)\begin{cases} \text{Para todo } \ x\in\Omega_2, \ \text{ assumimos} \\ \displaystyle\lim_{s\to 0^+} sup\frac{2H(x,s)}{s^2}<\lambda_{12}, \end{cases}$$

onde λ_{12} é o primeiro autovalor de $(-\triangle, H_0^1(\Omega_1))$.

Nosso estudo se dá nos espaços de Sobolev:

$$E=\{(u,v)\in H^1(\Omega_1)\times H^1_\Gamma(\Omega_2); u=v \ \ em \ \ \Sigma\},$$

onde

$$H^1_\Gamma(\Omega_2) = \{v \in H^1(\Omega_2); v = 0 \ \ em \ \ \Gamma\}.$$

Agora observe que, sendo $\partial\Omega_2 = \Gamma \cup \Sigma$ regular, se $v \in H^1_\Gamma(\Omega_2)$ está bem definido o operador traço de v sobre Γ, isto é, $v|_\Gamma$, o qual pertence a $L^2(\Gamma)$. A aplicação $v \longrightarrow v|_\Gamma$ é contínua de $H^1(\Omega_2)$ em $L^2(\Gamma)$. Logo o subsepaço $H^1_\Gamma(\Omega_2)$ é fechado em $H^1(\Omega_2)$ com a norma induzida pela de $H^1(\Omega_2)$. Temos também

$$H^1_0(\Omega_2) \subset H^1_\Gamma(\Omega_2) \subset H^1(\Omega_2).$$

A aplicação $v \longrightarrow |\nabla v|_{2,\Omega_2}$ de $H^1_\Gamma(\Omega_2)$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$|\nabla v|_{2,\Omega_2} = \left(\int_{\Omega_2} |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

define uma norma em $H^1_\Gamma(\Omega_2)$.

Com efeito,

$i)$ para todo $v \in H^1_\Gamma(\Omega_2)$, temos

$$|\nabla v|_{2,\Omega_2} = \left(\int_{\Omega_2} |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0.$$

$ii)$ Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in H^1_\Gamma(\Omega_2)$, segue que

$$\begin{aligned}
|\lambda \nabla v|_{2,\Omega_2} &= \left(\int_{\Omega_2} |\lambda \nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega_2} |\lambda|^2 |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(|\lambda|^2 \int_{\Omega_2} |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\int_{\Omega_2} |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda|.|\nabla v|_{2,\Omega_2}.
\end{aligned}$$

$iii)$ Seja u e $v \in H^1_\Gamma(\Omega_2)$, temos

$$\begin{aligned} |\nabla u + \nabla v|^2_{2,\Omega_2} &= \int_{\Omega_2} |\nabla u + \nabla v|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega_2} |\nabla u + \nabla v|.|\nabla u + \nabla v| dx \\ &\leq \int_{\Omega_2} |\nabla u + \nabla v|.|\nabla u| dx + \int_{\Omega_2} |\nabla u + \nabla v|.|\nabla v| dx. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz (Corolário B.1), obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla u + \nabla v|^2_{2,\Omega_2} &\leq |\nabla u + \nabla v|_{2,\Omega_2} |\nabla u|_{2,\Omega_2} + |\nabla u + \nabla v|_{2,\Omega_2} |\nabla v|_{2,\Omega_2} \\ &= |\nabla u + \nabla v|_{2,\Omega_2} (|\nabla u|_{2,\Omega_2} + |\nabla v|_{2,\Omega_2}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\nabla u + \nabla v|_{2,\Omega_2} \leq |\nabla u|_{2,\Omega_2} + |\nabla v|_{2,\Omega_2}.$$

$iv)$ Se $|\nabla v|_{2,\Omega_2} = 0$ então $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} = 0$, logo v é constante nas componentes conexas de Ω_2, sendo $v|_\Gamma = 0$, resulta que $v = 0$ em Ω_2.

Portanto a aplicação acima define uma norma em $H^1_\Gamma(\Omega_2)$.

Na proposição abaixo segue um resultado de normas equivalentes que usaremos ao longo deste texto.

Proposição 1.1 *Em $H^1_\Gamma(\Omega_2)$ as normas $|\nabla v|_{2,\Omega_2}$ e $||v||_{1,2;\Omega_2}$ são equivalentes, isto é, existem constantes $C_1, C_2 > 0$, tais que*

$$C_1 ||v||_{1,2;\Omega_2} \leq |\nabla v|_{2,\Omega_2} \leq C_2 ||v||_{1,2;\Omega_2}, \quad \textit{para todo} \quad v \in H^1_\Gamma(\Omega_2).$$

Demonstração: Temos que

$$|\nabla v|^2_{2,\Omega_2} \leq |\nabla v|^2_{2,\Omega_2} + |v|^2_{2,\Omega_2} = ||v||^2_{1,2;\Omega_2}.$$

Assim,

$$|\nabla v|_{2,\Omega_2} \leq ||v||_{1,2;\Omega_2}, \quad \textit{para todo} \quad v \in H^1_\Gamma(\Omega_2), \tag{1.1}$$

onde neste caso $C_2 = 1$.

Provaremos o outro lado da desigualdade. Suponha por contradição, que não existe constante $C_1 > 0$ tal que

$$C_1 ||v||_{1,2;\Omega_2} \leq |\nabla v|_{2,\Omega_2}, \quad para \;\; todo \;\; v \in H^1_\Gamma(\Omega_2).$$

Portanto, fixado $C_1 > 0$ qualquer, existe ao menos um vetor v_1 de $H^1_\Gamma(\Omega_2)$ tal que

$$C_1 ||v_1||_{1,2;\Omega_2} > |\nabla v_1|_{2,\Omega_2}. \tag{1.2}$$

Logo, fixadas as constantes $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$, existe uma sequência $(\tilde{v}_m) \subset H^1_\Gamma(\Omega_2)$ tal que

$$\frac{1}{m} ||\tilde{v}_m||_{1,2;\Omega_2} > |\nabla \tilde{v}_m|_{2,\Omega_2} \quad para \;\; m = 1, 2, ...$$

Fazendo

$$v_m = \frac{\tilde{v}_m}{||\tilde{v}_m||_{1,2;\Omega_2}},$$

obtemos

$$||v_m||_{1,2;\Omega_2} = 1 \quad para \;\; m = 1, 2, ...$$

e

$$|\nabla v_m|_{2,\Omega_2} = \frac{|\nabla \tilde{v}_m|_{2,\Omega_2}}{||\tilde{v}_m||_{1,2;\Omega_2}} < \frac{1}{m} \quad para \;\; m = 1, 2, ...$$

Desde que a sequência (v_m) é limitada em $H^1(\Omega_2)$ (Teorema B.7), existe $(v_\nu) \subset (v_m)$ tal que

$$v_\nu \rightharpoonup v \quad em \quad H^1(\Omega_2). \tag{1.3}$$

Sendo a fronteira $\Gamma \cup \Sigma$ de Ω_2 suposta bem regular, segue do Teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema B.5), que a imersão $H^1(\Omega_2) \hookrightarrow L^2(\Omega_2)$ é compacta. Assim obtemos

$$v_\nu \to v \quad em \quad L^2(\Omega_2). \tag{1.4}$$

Por outro lado, sabemos que

$$|\nabla v_\nu|_{2,\Omega_2} < \frac{1}{\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3, ...$$

Logo a sequência numérica $|\nabla v_\nu|_{2,\Omega_2}$ converge para zero. Donde obtemos que,

$$\left(\frac{\partial v_\nu}{\partial x_i}\right) \to 0 \;\; em \;\; L^2(\Omega_2), \quad 0 \leq i \leq N. \tag{1.5}$$

Desde que $H^1_\Gamma(\Omega_2)$ é completo com a norma de $H^1(\Omega_2)$, segue da convergência dada em (1.3), que $v \in H^1_\Gamma(\Omega_2)$. Assim, $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega_2)$ e de (1.5) $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} = 0$, concluindo desse modo que v é constante em Ω_2. Como $v \in H^1_\Gamma(\Omega_2), v|_\Gamma = 0$, temos que

$$v = 0 \;\; em \;\; \Omega_2.$$

Assim as sequências (v_ν) e $\left(\dfrac{\partial v_\nu}{\partial x_i}\right)$ convergem forte para zero em $L^2(\Omega_2)$. Portanto

$$v_\nu \to 0 \;\; em \;\; H^1(\Omega_2).$$

O que é uma contradição, já que

$$||v_\nu||_{1,2;\Omega_2} = 1, \quad para \;\; \nu = 1, 2, 3, ...$$

E desse modo fica provado a equivalência entre as normas $|\nabla v|_{2,\Omega_2}$ e $||v||_{1,2;\Omega_2}$. $\square$

Lema 1.1 *A aplicação* $|||.||| : H^1(\Omega_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$|||u||| = |\nabla u|_{2,\Omega_1} + |u|_{2,\Sigma}$$

define uma norma equivalente à norma usual de $H^1(\Omega_1)$*, ou seja, existem constantes* $K_1, K_2 > 0$ *tais que*

$$|||u||| \leq K_1||u||_{1,2;\Omega_1} \;\; (I) \quad e \quad K_2||u||_{1,2;\Omega_1} \leq |||u||| \;\; (II). \tag{1.6}$$

Demonstração: De fato como podemos observar $|||.|||$ define uma norma. Da teoria do traço das funções de $H^1(\Omega_1)$ sobre a fronteira Σ, de um aberto limitado Ω_1 do $\mathbb{R}^N$(ver [11], página 71-87), temos que a aplicação

$$\gamma_0 : H^1(\Omega_1) \to L^2(\Sigma)$$
$$u \to \gamma_0(u) = u|_\Sigma$$

é linear contínua, ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u|_{2,\Sigma} \leq C||u||_{1,2;\Omega_1}, \quad para \quad todo \quad u \in H^1(\Omega_1).$$

Donde segue que

$$|||u||| = |\nabla u|_{2,\Omega_1} + |u|_{2,\Sigma} \leq |\nabla u|_{2,\Omega_1} + C||u||_{1,2;\Omega_1}.$$

Portanto, da euqivalência entre as normas $|\nabla u|_{2,\Omega_1}$ e $||u||_{1,2;\Omega_1}$, concluimos

$$|||u||| \leq K_1||u||_{1,2;\Omega_1}. \tag{1.7}$$

Por outro lado, do Teorema B.3, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\Omega_1} |u|^2 dx \leq C\left(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx + \int_\Sigma |u|^2 ds\right), \quad para \quad todo \quad u \in H^1(\Omega_1).$$

Assim

$$||u||^2_{1,2;\Omega_1} = \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_1} |u|^2 dx \leq C(|\nabla u|^2_{2,\Omega_1} + |u|^2_{2,\Sigma}),$$

e desde que, $|\nabla u|^2_{2,\Omega_1} + |u|^2_{2,\Sigma} \leq |\nabla u|^2_{2,\Omega_1} + |u|^2_{2,\Sigma} + 2|\nabla u|_{2,\Omega_1}|u|_{2,\Sigma}$, temos

$$||u||^2_{1,2;\Omega_1} \leq C(|\nabla u|_{2,\Omega_1} + |u|_{2,\Sigma})^2.$$

Donde concluimos que existe uma constante $K_2 > 0$ tal que

$$K_2||u||_{1,2;\Omega_1} \leq |||u|||. \tag{1.8}$$

Juntando (1.7) e (1.8) obtemos (1.6), mostrando assim o Lema. □

Lema 1.2 *O conjunto E é um subespaço fechado de $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ e a aplicação*

$$||.|| : \quad H^1(\Omega_1) \times H^1_\Gamma(\Omega_2) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1.9}$$

$$(u, v) \longrightarrow ||(u, v)||^2 = |\nabla u|^2_{2,\Omega_1} + |\nabla v|^2_{2,\Omega_2} \tag{1.10}$$

define uma norma em E equivalente a norma usual de $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$.

Demonstração: Note que (1.9) define uma seminorma. Resta apenas mostrar que

$$||(u, v)|| = 0 \quad \Leftrightarrow u = 0 \ \ e \ \ v = 0.$$

De fato, primeiramente se $u = 0$ e $v = 0$, temos claramente que $||(u, v)|| = 0$.

Agora suponha que $||(u, v)|| = 0$, logo por definição, $|\nabla v|_{2,\Omega_2} = |\nabla u|_{2,\Omega_1} = 0$.

Como vimos anteriormente, a aplicação $|\nabla v|_{2,\Omega_2}$ define uma norma em $H^1_\Gamma(\Omega_2)$, então

$$v = 0 \ \ em \ \ \overline{\Omega}_2.$$

Logo pela condição de transmissão, segue que

$$u = 0 \ \ sobre \ \ \Sigma = \partial\Omega_1.$$

Por outro lado, vimos no Lema 1.1 que a aplicação

$$\gamma_0 : H^1(\Omega_1) \to L^2(\Sigma)$$
$$u \to \gamma_0(u) = u|_\Sigma$$

é linear e contínua, ou seja,

$$|\gamma_0(u)|_{2,\Sigma} \leq C||u||_{1,2;\Omega_1}, \quad para \ \ todo \ \ u \in H^1(\Omega_1).$$

Além disso, $Ker(\gamma_0) = H^1_0(\Omega_1)$.

Assim, $u \in H^1_0(\Omega_1)$ e consequentemente

$$u = 0 \ \ em \ \ \Omega_1.$$

Portanto mostramos que (1.9) define uma norma em E.

Agora vamos provar a equivalência entre as normas. Inicialmente observe que

$$||(u,v)||_D^2 = (||u||_{1,2;\Omega_1} + ||v||_{1,2;\Omega_2})^2 \geq ||u||_{1,2;\Omega_1}^2 + ||v||_{1,2;\Omega_2}^2 \geq |\nabla u|_{2,\Omega_1}^2 + |\nabla v|_{2,\Omega_2}^2.$$

O que implica,

$$||(u,v)|| \leq ||(u,v)||_D. \tag{1.11}$$

Note que aplicando a teoria do traço de funções de $H^1(\Omega_2)$ sobre a fronteira $\Gamma \cup \Sigma$ de Ω_2, tem-se que

$$||v||_{1,2;\Omega_2} \geq C|v|_{2,\Gamma\cup\Sigma}, \quad para \quad todo \quad v \in H^1(\Omega_2), \tag{1.12}$$

em particular

$$||v||_{1,2;\Omega_2} \geq C|v|_{2,\Sigma} \quad para \quad todo \quad v \in H^1_\Gamma(\Omega_2). \tag{1.13}$$

Pela Proposição 1.1, segue que

$$C||v||_{1,2;\Omega_2} \leq |\nabla v|_{2,\Omega_2} \quad para \quad todo \quad v \in H^1_\Gamma(\Omega_2). \tag{1.14}$$

Assim combinando essas duas últimas desigualdades, temos

$$|\nabla v|_{2,\Omega_2} \geq C_1|v|_{2,\Sigma}. \tag{1.15}$$

Agora usando a deigualdade (II) dada no Lema 1.1, obtemos

$$\begin{aligned} ||(u,v)||_D^2 &\leq C_2(|\nabla u|_{2,\Omega_1} + |u|_{2,\Sigma})^2 + 2C_3(|\nabla u|_{2,\Omega_1} + |u|_{2,\Sigma})||v||_{1,2;\Omega_2} + ||v||_{1,2;\Omega_2}^2 \\ &= C_2|\nabla u|_{2,\Omega_1}^2 + 2C_2|\nabla u|_{2,\Omega_1}|u|_{2,\Sigma} + C_2|u|_{2,\Sigma}^2 \\ &+ 2C_3|\nabla u|_{2,\Omega_1}||v||_{1,2;\Omega_2} + 2C_3|u|_{2,\Sigma}||v||_{1,2;\Omega_2} + ||v||_{1,2;\Omega_2}^2. \end{aligned}$$

Donde usando a condição de transmissão e substituindo as desigualdades (1.14) e (1.15), tem-se que

$$||(u,v)||_D^2 \leq C_4|\nabla u|_{2,\Omega_1}^2 + 2C_5|\nabla u|_{2,\Omega_1}|\nabla v|_{2,\Omega_2} + C_6|\nabla v|_{2,\Omega_2}^2,$$

o que implica devido a uma simples desigualdade de números reais, que

$$||(u,v)||_D^2 \leq C_7|\nabla u|_{2,\Omega_1}^2 + C_8|\nabla v|_{2,\Omega_2}^2.$$

Logo,

$$||(u,v)||_D^2 \leq C_{10}||(u,v)||^2.$$

Portanto

$$C||(u,v)||_D \leq ||(u,v)||.$$

Essa última desigualdade juntamente com (1.11) resulta na equivalência das normas.

Provaremos agora que E é um subspaço fechado. De fato, inicialmente observamos que E é um subespaço de $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$. Então, resta mostrar que E é fechado em $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$, para isto, vamos considerar uma sequência $(w_n) = (u_n, v_n) \subset E$ tal que

$$w_n \to w_0 = (u_0, v_0) \ \ em \ \ H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2).$$

Logo

$$u_n = v_n \ \ sobre \ \ \Sigma = \partial\Omega_1$$

e

$$v_n = 0 \ \ sobre \ \ \Gamma = \partial\Omega, \tag{1.16}$$

temos também que

$$u_n \to u_0 \ \ em \ \ H^1(\Omega_1)$$

e

$$v_n \to v_0 \ \ em \ \ H^1(\Omega_2). \tag{1.17}$$

Observe que, usando a desigualdade (1.12), temos

$$||v_n - v_0||_{1,2;\Omega_2} \geq C|v_n - v_0|_{2,\Sigma\cup\Gamma},$$

o que implica devido a (1.16), que

$$||v_n - v_0||_{1,2;\Omega_2} \geq C|v_0|_{2,\Gamma},$$

ou seja,

$$|v_0|_{2,\Gamma} \leq C_2||v_n - v_0||_{1,2;\Omega_2}.$$

Decorre da convergência dada em (1.17) que o lado direito desta última desigualdade tende a zero. Assim,

$$v_0 = 0 \quad sobre \quad \Gamma,$$

ou seja,

$$v_0 \in H^1_\Gamma(\Omega_2).$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
|u_0 - v_0|_{2,\Sigma} &= |(u_0 - u_n) + (v_n - v_0)|_{2,\Sigma} \\
&\leq |u_0 - u_n|_{2,\Sigma} + |v_n - v_0|_{2,\Sigma} \\
&\leq |\nabla u_0 - \nabla u_n|_{2,\Omega_1} + |u_0 - u_n|_{2,\Sigma} + |v_n - v_0|_{2,\Sigma},
\end{aligned}$$

donde, devido a desigualdade dada em (1.13), resulta que

$$|u_0 - v_0|_{2,\Sigma} \leq |||u_0 - u_n||| + C||v_n - v_0||_{1,2;\Omega_2}.$$

Da desigualdade (I) dada no Lema 1.1, resulta que

$$|u_0 - v_0|_{2,\Sigma} \leq K_1||u_0 - u_n||_{1,2;\Omega_1} + C||v_n - v_0||_{1,2;\Omega_2} \to 0 \quad quando \quad n \to +\infty.$$

Consequentemente,

$$\int_\Sigma |u_0 - v_0|^2 ds = 0.$$

Donde segue-se que

$$u_0 = v_0 \quad sobre \quad \Sigma.$$

Mostrando desse modo que

$$w_0 = (u_0, v_0) \in E.$$

Assim concluimos a demonstração do lema. $\square$

Afirmação: Dado $\beta > \alpha_0$, existe $C = C(\beta) > 0$ tal que

$$max\{|f(x,s)|; |F(x,s)|; |h(x,s)|; |H(x,s)|\} \leq Ce^{\beta s^2}, \tag{1.18}$$

para cada $x \in \overline{\Omega}_i, i = 1, 2$ e $s \geq 0$.

Com efeito, segue da condição $(C)_{\alpha_0}$ que para todo $\beta > \alpha_0$, temos

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{|f(x,s)|}{e^{\beta s^2}} = 0.$$

Logo, para $\varepsilon = 1$, existe $M > 0$, tal que

$$|f(x,s)| \leq e^{\beta s^2}, \quad se \quad s \geq M \quad e \quad x \in \Omega_1. \tag{1.19}$$

Desde que $\dfrac{|f(x,s)|}{e^{\beta s^2}}$ é contínua podemos tomar

$$C_1 = \max_{(x,s) \in \overline{\Omega}_1 \times [-M,M]} \frac{|f(x,s)|}{e^{\beta s^2}}.$$

Dai, obtemos

$$|f(x,s)| \leq C_1 e^{\beta s^2}, \quad se \quad s \leq |M| \quad e \quad x \in \overline{\Omega}_1. \tag{1.20}$$

De (1.19) e (1.20), concluimos

$$|f(x,s)| \leq C_2 e^{\beta s^2}, \tag{1.21}$$

para todo $x \in \overline{\Omega}_1$ e $s \in \mathbb{R}$.

De modo análogo, segue que

$$|g(x,s)| \leq C_3 e^{\beta s^2}, \tag{1.22}$$

para todo $x \in \overline{\Omega}_2$ e $s \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, da condição (f_1), temos

$$0 < F(x,s) \leq C_4 f(x,s),$$

para todo $s \geq 0$ e para todo $x \in \Omega_1$.

O que implica

$$|F(x,s)| \leq C_1 |f(x,s)| \leq C_4 e^{\beta s^2}.$$

Donde obtemos

$$|F(x,s)| \leq C_4 e^{\beta s^2}, \tag{1.23}$$

para todo $s \geq 0$ e para todo $x \in \Omega_1$.

Analogamente, tem-se

$$|H(x,s)| \leq C_5 e^{(\beta s^2)}, \tag{1.24}$$

para todo $s \geq 0$ e para todo $x \in \Omega_2$.

Assim de (1.21),(1.22),(1.23) e (1.24) concluimos que, dado $\beta > \alpha_0$, existe $C = C(\beta) > 0$ que satisfaz (1.18).

Em vista das condições $(f_1) - (f_2)$ e $(h_1) - (h_2)$ o problema (P) tem uma estrutura variacional, pois o funcional associado

$$I(u,v) = \frac{1}{2}||(u,v)||^2 - \int_{\Omega_1} F(x,u)dx - \int_{\Omega_2} H(x,v)dx$$

é de classe C^1 (ver apêndice A).

Além disso temos que

$$I^{'}(u,v)(\phi,\psi) = \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla \phi dx + \int_{\Omega_2} \nabla v \nabla \psi dx - \int_{\Omega_1} f(x,u)\phi dx - \int_{\Omega_2} h(x,v)\psi dx,$$

para todo $(\phi, \psi) \in$ E. Portanto os pontos críticos de I são soluções fracas de (P).

Capítulo

2

Geometria do Passo da Montanha

Afim de utilizar o método variacional, neste capítulo veremos alguns resultados relacionados com a condição de compacidade Palais-Smale. Veremos também os Lemas 2.1 e 2.2, os quais tratam da Geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Definição 2.1 *Sejam E um espaço de Banach e $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Dizemos que a sequência (x_n) em E é uma sequência Palais-Smale para o funcional I no nível $d \in \mathbb{R}$, ou simplesmente, uma sequência $(PS)_d$ para o funcional I, quando*

$$I(x_n) \to d \quad em \quad \mathbb{R} \quad e \quad I^{'}(x_n) \to 0 \quad em \quad E^{'}.$$

Definição 2.2 *Sejam E um espaço de Banach e $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Dizemos que o funcional I verifica a condição Palais-Smale no nível $d \in \mathbb{R}$ quando toda sequência $(PS)_d$ admite uma subsequência convergente em E.*
Se I verifica a condição $(PS)_d$ para todo $d \in \mathbb{R}$, então dizemos que I verifica a condição Palais-Smale, ou simplesmente, que I verifica a condição (PS).

Em seguida veremos mais propriedades sobre as funções f e h. Primeiramente de (f_1) e (f_2), tem-se que

$$0 < F(x,s) \leq Mf(x,s) \quad e \quad f(x,0) = 0,$$

donde obtemos $F(x,s) \geq 0$, para todo $x \in \Omega_1$ e $s \in \mathbb{R}$.
Analogamente, de (h_1) e (h_2), temos $H(x,s) \geq 0$, para todo $x \in \Omega_2$ e $s \in \mathbb{R}$.

Agora observe que de (f_1), temos

$$\frac{F(x,s)}{f(x,s)} \leq M \Longrightarrow \left|\frac{F(x,s)}{f(x,s)}\right| \leq M.$$

Passando o limite em $\left|\frac{F(x,s)}{sf(x,s)}\right|$ quando $|s| \to +\infty$, obtemos

$$\lim_{|s|\to+\infty} \left|\frac{F(x,s)}{sf(x,s)}\right| = 0.$$

Assim, dado $\theta > 2$ existe $R_0 > 0$ tal que para todo $|s| \geq R_0$, temos

$$\left|\frac{F(x,s)}{sf(x,s)}\right| \leq \frac{1}{\theta}.$$

Donde obtemos

$$\frac{F(x,s)}{sf(x,s)} \leq \frac{1}{\theta} \Longrightarrow \theta F(x,s) \leq sf(x,s), \tag{2.1}$$

para todo $|s| \geq R_0$ e para todo $x \in \Omega_1$.

Analogamente

$$\theta H(x,s) \leq sh(x,s), \tag{2.2}$$

para todo $|s| \geq R_0$ e para todo $x \in \Omega_2$.

Nos próximos Lemas desse capítulo, provaremos que o funcional I tem a Geometria do Passo da Montanha.

Lema 2.1 *Suponha $(f_1) - (f_3)$ e $(h_1) - (h_3)$, então existem números positivos ρ e τ tal que,*

$$I(u,v) \geq \tau > 0, \quad para \quad todo \quad (u,v) \in E \quad com \quad ||(u,v)|| = \rho.$$

Demonstração: Segue de (f_3) que

$$\frac{2F(x,u)}{u^2} < \lambda_{11}.$$

Pondo $\lambda < min\{\lambda_{11}, \lambda_{12}\}$, de modo que

$$\frac{2F(x,u)}{u^2} \leq \lambda,$$

obtemos

$$F(x,u) \leq \frac{\lambda}{2}|u|^2. \tag{2.3}$$

Por outro lado, para $q > 2$ e usando a desigualdade (1.18), temos

$$F(x,u) \leq Ce^{\beta u^2} \leq C|u|^q e^{\beta u^2}. \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4), segue que

$$F(x,u) \leq \frac{\lambda}{2}|u|^2 + C|u|^q e^{\beta u^2}.$$

Assim

$$\int_{\Omega_1} F(x,u)dx \leq \int_{\Omega_1} \frac{\lambda}{2}|u|^2 dx + \int_{\Omega_1} C|u|^q e^{\beta u^2} dx.$$

Da desigualdade de Hölder (Teorema B.8), temos

$$\int_{\Omega_1} F(x,u)dx \leq \int_{\Omega_1} \frac{\lambda}{2}|u|^2 dx + C|u|^q_{qr',\Omega_1} \left(\int_{\Omega_1} e^{r\beta ||u||^2 (\frac{u}{||u||})^2} dx \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Analogamente

$$\int_{\Omega_2} H(x,v)dx \leq \int_{\Omega_2} \frac{\lambda}{2}|v|^2 dx + C|v|^q_{qr',\Omega_2} \left(\int_{\Omega_2} e^{r\beta ||v||^2 (\frac{v}{||v||})^2} dx \right)^{\frac{1}{r}},$$

onde

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1.$$

Então

$$\begin{aligned}
I(u,v) &= \frac{1}{2}||(u,v)||^2 - \int_{\Omega_1} F(x,u)dx - \int_{\Omega_2} H(x,v)dx \\
&\geq \frac{1}{2}||(u,v)||^2 - \int_{\Omega_1} \frac{\lambda}{2}|u|^2dx - C|u|^q_{qr',\Omega_1}\left(\int_{\Omega_1} e^{r\beta||u||^2\left(\frac{u}{||u||}\right)^2}dx\right)^{\frac{1}{r}} \\
&- \int_{\Omega_2} \frac{\lambda}{2}|v|^2dx - C|v|^q_{qr',\Omega_2}\left(\int_{\Omega_2} e^{r\beta||v||^2\left(\frac{v}{||v||}\right)^2}dx\right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Agora pondo $||(u,v)|| = \rho \leq \dfrac{4\pi}{\beta r}$, segue que

$$\beta r||u||^2 \leq 4\pi \quad e \quad \beta r||v||^2 \leq 4\pi.$$

Da desigualdade de Trudinger-Moser (Teorema C.1), temos

$$I(u,v) \geq \frac{1}{2}||(u,v)||^2 - \frac{\lambda}{2}\left(\int_{\Omega_1}|u|^2dx + \int_{\Omega_2}|v|^2dx\right) - C_1(|u|^q_{qr',\Omega_1} + |v|^q_{qr',\Omega_2}).$$

Pela caracterização variacional de λ_{11} e λ_{12} e supondo sem perda de generalidade, $\lambda_{11} \geq \lambda_{12}$ da desigualdade de Poincaré (Teorema B.9), obtemos

$$\begin{aligned}
I(u,v) &\geq \frac{1}{2}||(u,v)||^2 - \frac{\lambda}{2\lambda_{11}}\int_{\Omega_1}|\nabla u|^2dx - \frac{\lambda}{2\lambda_{12}}\int_{\Omega_2}|\nabla v|^2dx - C_1(|u|^q_{qr',\Omega_1} + |v|^q_{qr',\Omega_2}) \\
&\geq \frac{1}{2}||(u,v)||^2 - \frac{\lambda}{2\lambda_{12}}||(u,v)||^2 - C_1(|u|^q_{qr',\Omega_1} + |v|^q_{qr',\Omega_2}) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{12}}\right)||(u,v)||^2 - C_1(|u|^q_{qr',\Omega_1} + |v|^q_{qr',\Omega_2}).
\end{aligned}$$

Das imersões contínuas de Sobolev (Teorema B.6), segue que

$$
\begin{aligned}
I(u,v) &\geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{12}}\right)||(u,v)||^2 - C_2(||u||^q_{1,2;\Omega_1} + ||v||^q_{1,2;\Omega_2}) \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{12}}\right)||(u,v)||^2 - C_3[(|\nabla u|^2_{2,\Omega_1})^{\frac{q}{2}} + (|\nabla v|^2_{2,\Omega_2})^{\frac{q}{2}}] \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{12}}\right)||(u,v)||^2 - C_3(|\nabla u|^2_{2,\Omega_1} + |\nabla v|^2_{2,\Omega_2})^{\frac{q}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{12}}\right)||(u,v)||^2 - C_3(||(u,v)||^2)^{\frac{q}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{12}}\right)||(u,v)||^2 - C_3||(u,v)||^q.
\end{aligned}
$$

Sendo $2 < q$ e $||(u,v)|| = \rho \leq \dfrac{4\pi}{\beta r}$, observe que

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{12}}\right)\rho^2 - C_3\rho^q > 0 \Leftrightarrow C_3\rho^q < \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{12}}\right)\rho^2 \Leftrightarrow \frac{\rho^q}{\rho^2} < \frac{1}{2C_3}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{12}}\right).$$

Donde concluimos que

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{12}}\right)\rho^2 - C_3\rho^q > 0 \Leftrightarrow \rho < \sqrt[q-2]{C_4\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{12}}\right)}.$$

Agora tomando

$$\rho < \min\left\{\frac{4\pi}{\beta r},\ \sqrt[q-2]{C_4\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{12}}\right)}\right\}$$

e pondo

$$\tau = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{12}}\right)\rho^2 - C_3\rho^q,$$

obtemos

$$I(u,v) \geq \tau > 0.$$

$\square$

Lema 2.2 *Suponha* $(f_1)-(f_2)$ *e* $(h_1)-(h_2)$, *então existe* $(e_1,e_2) \in E$ *com* $I(e_1,e_2) < 0$ *e* $||(e_1,e_2)|| > \rho$.

Demonstração: De (2.1) existem $R_0 > 0$ e $\theta > 2$ tais que

$$\theta F(x,s) \leq sf(x,s),$$

para todo $|s| \geq R_0$ e para todo $x \in \Omega_1$.
O que implica

$$\int_{R_0}^{s} \frac{\theta}{\tau} d\tau \leq \int_{R_0}^{s} \frac{f(x,\tau)}{F(x,\tau)} d\tau.$$

Calculando os valores das integrais, obtemos

$$\theta \ln \tau \Big|_{R_0}^{s} \leq \ln F(x,\tau) \Big|_{R_0}^{s}.$$

Das Propriedades da função logaritmica, segue que

$$\frac{s^\theta}{R_0^\theta} \leq \frac{F(x,s)}{F(x,R_0)}.$$

Assim,

$$F(x,s) \geq \frac{F(x,R_0)}{R_0^\theta} s^\theta.$$

Agora pondo

$$C = \min_{x \in \overline{\Omega}_1} \frac{F(x,R_0)}{R_0^\theta} > 0.$$

Concluimos

$$F(x,s) \geq C s^\theta.$$

Escolhendo arbitrariamente $u_0 \in H_0^1(\Omega_1) \setminus \{0\}$ com $u_0 > 0$ em Ω_1 e $||u_0|| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
I(tu_0, 0) &= \frac{1}{2}||(tu_0,0)||^2 - \int_{\Omega_1} F(x,tu_0)dx - \int_{\Omega_2} H(x,0)dx \\
&\leq \frac{t^2}{2}|\nabla u_0|^2_{2,\Omega_1} - \int_{\Omega_1} C(tu_0)^\theta dx \\
&= \frac{t^2}{2}||u_0||^2 - Ct^\theta \int_{\Omega_1} |u_0|^\theta dx \\
&= \frac{t^2}{2} - Ct^\theta \int_{\Omega_1} |u_0|^\theta dx.
\end{aligned}$$

Assim

$$I(tu_0,0) \leq \frac{t^2}{2} - Ct^\theta \int_{\Omega_1} |u_0|^\theta dx.$$

Desde que $\theta > 2$, passando o limite na desigualdade acima quando $t \to +\infty$, temos que $I(tu_0,0) \to -\infty$ e este limite implica que existe $t_* > 0$ suficientemente grande tal que pondo $(e_1 = t_* u_0, e_2 = 0)$ temos $I(e_1,e_2) < 0$ e $||(e_1,e_2)|| > \rho$. $\square$

Vimos que E é um espaço de Banach e que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$, temos também que $I(0,0) = 0$.
Do Lema 2.1, existem $\rho, \tau > 0$ tal que $I(u,v) \geq \tau > 0$ para todo $(u,v) \in E$, com $||(u,v)|| = \rho$, no Lema 2.2 existe $(e_1,e_2) \in E$, tal que $||(e_1,e_2)|| > \rho$ e $I(e_1,e_2) < 0$. Assim, usando uma versão do Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti e Rabinowitz (Teorema B.13), existe uma sequência $(u_n,v_n) \subset E$ satisfazendo

$$I(u_n,v_n) \to c_* \ \ e \ \ I^{'}(u_n,v_n) \to 0,$$

onde

$$c_* = \inf_{\gamma \in \Upsilon} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) > 0$$

e

$$\Upsilon := \{\gamma \in C([0,1],E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Afim de controlar o nível c_*, seguiremos o método usado em [2] e [4]. Antes de afirmar nossa estimativa, definiremos a função de Moser. Seja

$$\widetilde{M}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} (\ln n)^{\frac{1}{2}} \ \ se \ \ |x| \leq \dfrac{1}{n}, \\ \dfrac{\ln \frac{1}{|x|}}{(\ln n)^{\frac{1}{2}}} \ \ se \ \ \dfrac{1}{n} \leq |x| \leq 1, \\ 0 \ \ se \ \ |x| \geq 1, \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.
Veremos que $\widetilde{M}_n \in H_0^1(B_1(0))$.

- Se $0 \leq |x| \leq \dfrac{1}{n}$, temos

$$\widetilde{M}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\ln n)^{\frac{1}{2}} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x}[\widetilde{M}_n(x)] = 0.$$

Assim
$$\int_{0\leq|x|\leq\frac{1}{n}} |\widetilde{M}_n(x)|^2 dx = \int_{0\leq|x|\leq\frac{1}{n}} \left|\frac{(\ln n)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right|^2 dx = \frac{\ln n}{2\pi}\int_{0\leq|x|\leq\frac{1}{n}} dx = \frac{\ln n}{2\pi}\frac{\pi}{n^2}.$$

Sabendo que $\dfrac{\ln n}{n^2} \to 0$ quando $n \to \infty$, concluimos

$$\int_{0\leq|x|\leq\frac{1}{n}} |\widetilde{M}_n(x)|^2 dx < \infty \quad e \quad \int_{0\leq|x|\leq\frac{1}{n}} |\nabla\widetilde{M}_n(x)|^2 dx < \infty.$$

- Se $\dfrac{1}{n} \leq |x| \leq 1$, temos

$$\widetilde{M}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\ln\frac{1}{|x|}}{(\ln n)^{\frac{1}{2}}} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x}[\widetilde{M}_n(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-\dfrac{x}{|x|^2}}{(\ln n)^{\frac{1}{2}}}.$$

Observe que

$$\int_{\frac{1}{n}\leq|x|\leq1} |\widetilde{M}_n(x)|^2 dx = \int_{\frac{1}{n}\leq|x|\leq1} \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\ln\frac{1}{|x|}}{(\ln n)^{\frac{1}{2}}}\right|^2 dx = \frac{\ln n}{2n^2} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4n^2\ln n} - \frac{1}{4\ln n}.$$

Como $\left(\dfrac{\ln n}{2n^2} + \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{4n^2\ln n} - \dfrac{1}{4\ln n}\right) \to 0$ quando $n \to \infty$, obtemos

$$\int_{\frac{1}{n}\leq|x|\leq1} |\widetilde{M}_n(x)|^2 dx < \infty.$$

Por outro lado, veja que

$$\int_{\frac{1}{n}\leq|x|\leq1} |\nabla\widetilde{M}_n(x)|^2 dx = \int_{\frac{1}{n}\leq|x|\leq1} \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-\dfrac{x}{|x|^2}}{(\ln n)^{\frac{1}{2}}}\right|^2 dx = 1.$$

Portanto

$$\int_{\frac{1}{n}\leq|x|\leq 1} |\nabla \widetilde{M}_n(x)|^2 dx < \infty.$$

- Se $|x| \geq 1$, então $\widetilde{M}_n(x) = 0$.

Assim,

$$\widetilde{M}_n \in H_0^1(B_1(0)) \ \ para \ \ todo \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Mostraremos agora que $||\widetilde{M}_n|| = 1$. De fato, observe que

$$||\widetilde{M}_n||^2 = \int_{\Omega_1} |\nabla \widetilde{M}_n|^2 dx = \int_{0\leq|x|\leq\frac{1}{n}} |\nabla \widetilde{M}_n|^2 dx + \int_{\frac{1}{n}\leq|x|\leq 1} |\nabla \widetilde{M}_n|^2 dx + \int_{|x|\geq 1} |\nabla \widetilde{M}_n|^2 dx.$$

Donde segue que

$$||\widetilde{M}_n||^2 = \int_{\frac{1}{n}\leq|x|\leq 1} |\nabla \widetilde{M}_n|^2 dx = 1.$$

Logo,

$$||\widetilde{M}_n|| = 1 \ \ para \ \ todo \ \ n \in \mathbb{N},$$

onde $B_1(0)$ é a bola unitária centrada na origem do $\mathbb{R}^2$ e r denota o raio interno de Ω_1 conforme definição 1.1.

Agora, definindo uma nova sequência de funções não-negativas

$$M_n(x, x_0, r) = \widetilde{M}_n\left(\frac{x - x_0}{r}\right), \ \ para \ \ todo \ \ n \in \mathbb{N},$$

onde $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega_1$.

Note que $M_n \in H_0^1(B_1(0))$ e $||M_n|| = 1$ com $supp(M_n) \subset B_r(x_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo

3

Teorema principal

Neste capítulo veremos que o valor crítico é limitado e finalmente demonstraremos o resultado principal deste trabalho, que nos garante a existência de solução não trivial para o prblema.

Lema 3.1 *Suponha* $(f_1) - (f_4)$ *e* $(h_1) - (h_3)$, *então* c_* *pertence ao intervalo* $\left(0, \dfrac{2\pi}{\alpha_0}\right)$.

Demonstração: Considerando $u_0 = M_n = \widetilde{M}_n\left(\dfrac{x - x_0}{r}\right)$ no Lema 2.2, segue que

$$c_* \leq \max_{t>0} I(tM_n, 0).$$

Assim é suficiente mostrar que

$$\max_{t>0} I(tM_n, 0) < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

Suponha, por contradição, que

$$\max_{t>0} I(tM_n, 0) \geq \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

Em vista da Geometria do Passo da Montanha e pelo funcional I, para todo n existe t_n tal que

$$I(t_n M_n, 0) = \max_{t>0} I(tM_n, 0).$$

Assim

$$\begin{aligned} I(t_nM_n,0) &= \frac{1}{2}||(t_nM_n,0)||^2 - \int_{\Omega_1} F(x,t_nM_n)dx - \int_{\Omega_2} H(x,0)dx \\ &= \frac{1}{2}|\nabla(t_nM_n)|^2_{2,\Omega_1} - \int_{\Omega_1} F(x,t_nM_n)dx \\ &= \frac{1}{2}t_n^2|\nabla(M_n)|^2_{2,\Omega_1} - \int_{\Omega_1} F(x,t_nM_n)dx \\ &= \frac{1}{2}t_n^2 - \int_{\Omega_1} F(x,t_nM_n)dx \geq \frac{2\pi}{\alpha_0}. \end{aligned}$$

Desde que $F(x,s) \geq 0$ para todo $x \in \Omega_1$ e para $s \in \mathbb{R}$ temos

$$\frac{1}{2}t_n^2 - \frac{2\pi}{\alpha_0} \geq \int_{\Omega_1} F(x,t_nM_n)dx \geq 0.$$

Portanto

$$t_n^2 \geq \frac{4\pi}{\alpha_0}. \tag{3.1}$$

Como $I(tM_n,0)$ assume máximo global em $t = t_n$, temos que $\frac{d}{dt}I[t_nM_n,0] = 0$, isto é,

$$t_n - \int_{\Omega_1} f(x,t_nM_n)M_ndx = 0.$$

O que implica

$$t_n^2 \geq \int_{B_r(x_0)} f(x,t_nM_n)t_nM_ndx. \tag{3.2}$$

Segue de (f_4) que dado $\varepsilon > 0$, existe $S_\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x,s)s \geq (\beta_0 - \varepsilon)e^{\alpha_0 s^2}, \tag{3.3}$$

para todo $s \geq S_\varepsilon$.
Fazendo a mudança de variáveis $y = \dfrac{x - x_0}{r}$ em (3.2), temos

$$\begin{aligned} t_n^2 &\geq r^2 \int_{B_1(0)} f(x_0 + ry, t_n \widetilde{M}_n(y)) t_n \widetilde{M}_n(y) dy \\ &\geq r^2 \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} f(x_0 + ry, \frac{t_n}{\sqrt{2\pi}} (\ln n)^{\frac{1}{2}}) \frac{t_n}{\sqrt{2\pi}} (\ln n)^{\frac{1}{2}} dy. \end{aligned}$$

De (3.1) segue que $\dfrac{t_n}{\sqrt{2\pi}} (\ln n)^{\frac{1}{2}} \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, assim obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(x_0 + ry, \frac{t_n}{\sqrt{2\pi}} (\ln n)^{\frac{1}{2}}) \frac{t_n}{\sqrt{2\pi}} (\ln n)^{\frac{1}{2}} \geq (\beta_0 - \varepsilon) e^{(\alpha_0 \frac{t_n^2}{2\pi} \ln n)} \quad para \;\; todo \;\; n \geq n_0.$$

Logo

$$\begin{aligned} t_n^2 &\geq r^2 \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} (\beta_0 - \varepsilon) e^{(\alpha_0 \frac{t_n^2}{2\pi} \ln n)} dy \\ &= r^2 (\beta_0 - \varepsilon) e^{(\alpha_0 \frac{t_n^2}{2\pi} \ln n)} \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} dy = r^2 (\beta_0 - \varepsilon) e^{(\alpha_0 \frac{t_n^2}{2\pi} \ln n)} \pi \frac{1}{n^2} \\ &= (\beta_0 - \varepsilon) \pi \frac{r^2}{n^2} e^{(\alpha_0 \frac{t_n^2}{2\pi} \ln n)} = (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 e^{[-2 \ln n + \alpha_0 \frac{t_n^2}{2\pi} \ln n]} \\ &= (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 e^{[2(\frac{\alpha_0 t_n^2}{4\pi} - 1) \ln n]}. \end{aligned}$$

Portanto

$$t_n^2 \geq (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 e^{[2(\frac{\alpha_0 t_n^2}{4\pi} - 1) \ln n]}. \tag{3.4}$$

Agora veja que de (3.1), temos

$$\frac{\alpha_0 t_n^2}{4\pi} - 1 \geq 0.$$

Suponhamos que $t_n \to +\infty$, assim teriamos

$$\frac{t_n^2}{e^{[2(\frac{\alpha_0 t_n^2}{4\pi} - 1) \ln n]}} \to 0.$$

O que contradiz (3.4). Logo t_n é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, assim existe uma subsequência $t_n \to t_0 \geq \sqrt{\dfrac{4\pi}{\alpha_0}}$.

Além disso, usando novamente (3.4) teremos $\dfrac{\alpha_0 t_0^2}{4\pi} - 1 \leq 0$, donde segue que

$$t_n^2 \to \frac{4\pi}{\alpha_0}. \tag{3.5}$$

Agora escrevendo

$$A_n = \{x \in B_r(x_0) : t_n M_n(x) \geq s_\varepsilon\} \ \ e \ \ B_n = B_r(x_0) \backslash A_n.$$

Segue de (3.2), que

$$t_n^2 \geq \int_{B_r(x_0)} f(x, t_n M_n) t_n M_n dx = \int_{A_n} f(x, t_n M_n) t_n M_n dx + \int_{B_n} f(x, t_n M_n) t_n M_n dx.$$

O que implica

$$t_n^2 \geq (\beta_0 - \varepsilon) \int_{B_r(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^2 M_n^2} dx + \int_{B_n} f(x, t_n M_n) t_n M_n dx - (\beta_0 - \varepsilon) \int_{B_n} e^{\alpha_0 t_n^2 M_n^2} dx. \tag{3.6}$$

Desde que $t_n M_n < s_\varepsilon$ para $x \in B_n$, temos

$$\mathcal{X}_{B_n} \to 0 \ \ q.t.p \ \ em \ \ B_r(x_0) \ \ quando \ \ n \to \infty.$$

Por outro lado, da desigualdade (1.18), obtemos

$$|f(x, t_n M_n) t_n M_n| \leq C e^{\beta (t_n M_n)^2} . t_\varepsilon \leq C t_\varepsilon e^{\beta {t_\varepsilon}^2}.$$

Assim

$$f(x, t_n M_n) t_n M_n \chi_{B_n} \to 0 \ \ q.t.p \ \ em \ \ B_r(x_0).$$

Temos também

$$e^{\alpha_0 t_n^2 M_n^2} \chi_{B_n} \to 0 \ \ q.t.p \ \ em \ \ B_r(x_0).$$

Desde que M_n é limitada, usando a desigualdade de Trudinger-Moser, segue que

$$|f(x, t_n M_n) t_n M_n \chi_{B_n}| \leq C t_\varepsilon e^{\beta t_n^2 M_n^2} \leq C t_\varepsilon e^{\beta \left(\frac{4\pi}{\alpha_0} + \varepsilon\right) C_1} \in L^1(B_r(x_0))$$

e

$$|e^{\alpha_0 t_n^2 M_n^2}\chi_{B_n}| \leq e^{\left(\frac{4\pi}{\alpha_0}+\varepsilon\right)C_2} \in L^1(B_r(x_0)).$$

Passando o limite em (3.6), do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\frac{4\pi}{\alpha_0} \geq (\beta_0 - \varepsilon)\lim_{n\to\infty}\int_{B_r(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^2 M_n^2}dx \geq (\beta_0 - \varepsilon)\lim_{n\to\infty}\int_{B_r(x_0)} e^{4\pi M_n^2}dx \tag{3.7}$$

A última integral em (3.7), denotada por I_n é calculada como segue:

$$I_n = r^2\int_{B_1(0)} e^{4\pi\widetilde{M}_n^2}dy = r^2\left\{\frac{\pi}{n^2}e^{4\pi\frac{1}{2\pi}\ln n} + 2\pi\int_{\frac{1}{n}}^{1} e^{4\pi\frac{1}{2\pi}\frac{(\ln\frac{1}{r})^2}{\ln n}}rdr\right\}. \tag{3.8}$$

Fazendo a mudança de variáveis na integral com $s = \dfrac{\ln\frac{1}{r}}{\ln n}$, obtemos

$$I_n = r^2\left\{\pi + 2\pi\ln n\int_0^1 e^{2s^2\ln n - 2s\ln n}ds\right\}.$$

Assim, finalmente de (3.7) obtemos

$$\frac{4\pi}{\alpha_0} \geq (\beta_0 - \varepsilon)r^2\pi(1+\mathcal{M}) \quad para \quad todo \quad \varepsilon > 0$$

que implica

$$\beta_0 \leq \frac{4}{\alpha_0 r^2\mathcal{M}}.$$

O qual é uma contradição de (f_4). Portanto $c_* \in \left(0, \dfrac{2\pi}{\alpha_0}\right)$. □

O próximo resultado pode ser encontrado em [4].

Lema 3.2 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e (u_n) uma sequência em $L^1(\Omega)$ tal que $u_n(x)$ converge para $u(x)$ q.t.p em Ω, onde $u \in L^1(\Omega)$. Seja $f : \Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que*

$$\int_\Omega |f(x,u_n)| + \int_\Omega |f(x,u)| < \infty \quad para \quad todo \quad n \in \mathbb{N},$$

e suponha que exista $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |f(x,u_n)u_n| \leq C \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x,u_n) = \int_\Omega f(x,u).$$

Demonstração: Desde que $f(x,u(x)) \in L^1(\Omega)$ segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (dependente de ε) tal que

$$\int_A |f(x,u)| \leq \varepsilon, \quad se \quad |A| < \delta$$

para todo subconjunto A de Ω.

Agora usando o fato que $u \in L^1(\Omega)$ encontramos $M_1 > 0$, com $|\{x \in \Omega; |u(x)| \geq M_1\}| < \delta$. Considerando $M = max\left\{M_1, \dfrac{4C}{\varepsilon}\right\} > 0$, temos

$$\left|\int_\Omega f(x,u_n) - \int_\Omega f(x,u)\right| \leq \int_{|u_n|\geq M} |f(x,u_n)| + \int_{|u|\geq M} |f(x,u)| + r_n$$

onde

$$r_n = \left|\int_{|u_n|<M} f(x,u_n) - \int_{|u|<M} f(x,u)\right|.$$

No que segue mostraremos que as integrais

$$\int_{|u_n|\geq M} |f(x,u_n)| \quad e \quad \int_{|u|\geq M} |f(x,u)|$$

são pequenas e estimaremos r_n.

Da escolha de M, temos

$$\int_{|u_n|\geq M} |f(x,u_n)| \leq \int_{|u_n|\geq M} \frac{|f(x,u_n)u_n|}{M} \leq \int_\Omega \frac{|f(x,u_n)u_n|}{M} \leq \frac{C}{M} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

e da escolha de δ e M_1

$$\int_{|u|\geq M} |f(x,u)| \leq \int_{|u|\geq M_1} |f(x,u)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Denotando

$$r_n = \left| \int \vartheta_n(x) \right|, \quad para \quad todo \quad n \in \mathbb{N}$$

onde $\vartheta_n(x) = \chi_{|u_n|<M} f(x,u_n) - \chi_{|u|<M} f(x,u)$, temos

$$\vartheta_n = s_n(x) + t_n(x)$$

onde

$$s_n(x) = \chi_{|u_n|<M}(x)[f(x,u_n) - f(x,u)]$$

e

$$t_n(x) = [\chi_{|u_n|<M} - \chi_{|u|<M}](x) f(x,u)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Observando que $\{|u_n| < M\} \setminus \{|u| < M\} \subset \{|u| \geq M\}$, temos

$$\left| \int t_n(x) \right| = \left| \int [\chi_{|u_n|<M} - \chi_{|u|<M}](x) f(x,u) \right| \leq \int_{|u|\geq M} |f(x,u)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por outro lado, como $s_n = o_n(1)$ q.t.p em Ω, e

$$|s_n(x)| = |\chi_{|u_n|<M}(x)[f(x,u_n) - f(x,u)]| \leq \overline{C} + |f(x,u)|$$

q.t.p em Ω onde $\overline{C} = sup\{f(x,s); x \in \Omega, |s| \leq M\}$. Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega |s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad para \quad todo \quad n \geq n_0.$$

Combinando as desigualdades acima, obtemos

$$\left| \int_\Omega f(x,u_n) - \int_\Omega f(x,u) \right| < \varepsilon, \quad para \quad todo \quad n \geq n_0.$$

$\square$

3.1 Prova do Teorema 0.1

Demonstração: Pelos Lemas 2.1, 2.2 e 3.1, existe uma sequência $(u_n, v_n) \subset E$, tal que

$$I(u_n, v_n) \to c_* \ \ e \ \ I^{'}(u_n, v_n) \to 0 \ \ com \ \ c_* \in \left(0, \frac{2\pi}{\alpha_0}\right).$$

Desde que $I(u_n, v_n) \to c_*$ temos que o funcional $I(u_n, v_n)$ é limitado, assim existe $C > 0$ tal que

$$I(u_n, v_n) \leq |I(u_n, v_n)| \leq C. \tag{3.9}$$

Temos também que dado $\theta > 2$, para n suficientemente grande, obtemos

$$-\frac{1}{\theta}I^{'}(u_n, v_n)(u_n, v_n) \leq |\frac{1}{\theta}I^{'}(u_n, v_n)(u_n, v_n)| \leq \frac{1}{\theta}||I^{'}(u_n, v_n)||.||(u_n, v_n)|| \leq ||(u_n, v_n)||.$$

Assim,

$$||(u_n, v_n)|| \geq -\frac{1}{\theta}I^{'}(u_n, v_n)(u_n, v_n). \tag{3.10}$$

Portanto de (3.9) e (3.10), tem-se que

$$C + ||(u_n, v_n)|| \geq I(u_n, v_n) - \frac{1}{\theta}I^{'}(u_n, v_n)(u_n, v_n). \tag{3.11}$$

De (2.1) e (2.2), existe $\theta > 2$ tal que

$$\frac{f(x, u_n)u_n}{\theta} \geq F(x, u_n) \ \ e \ \ \frac{h(x, v_n)v_n}{\theta} \geq H(x, v_n).$$

Donde segue que

$$
\begin{aligned}
I(u_n,v_n)-\frac{1}{\theta}I^{'}(u_n,v_n)(u_n,v_n) &= \frac{1}{2}||(u_n,v_n)||^2-\int_{\Omega_1}F(x,u_n)dx-\int_{\Omega_2}H(x,v_n)dx\\
&- \frac{1}{\theta}\left(\int_{\Omega_1}|\nabla u_n|^2dx+\int_{\Omega_2}|\nabla v_n|^2dx\right)\\
&+ \int_{\Omega_1}\frac{f(x,u_n)u_n}{\theta}dx+\int_{\Omega_2}\frac{h(x,v_n)v_n}{\theta}dx\\
&\geq \frac{1}{2}||(u_n,v_n)||^2-\int_{\Omega_1}F(x,u_n)dx-\int_{\Omega_2}H(x,v_n)dx\\
&- \frac{1}{\theta}||(u_n,v_n)||^2+\int_{\Omega_1}F(x,u_n)dx+\int_{\Omega_2}H(x,v_n)dx\\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)||(u_n,v_n)||^2.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$C+||(u_n,v_n)||\geq I(u_n,v_n)-\frac{1}{\theta}I^{'}(u_n,v_n)(u_n,v_n)\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)||(u_n,v_n)||^2,$$

para todo $n\in\mathbb{N}$.

Portanto a sequência (u_n,v_n) é limitada em E.

Desde que E é um espaço Banach reflexivo, existe $(u,v)\in E$ tal que a menos de subsequência, temos

$$(u_n,v_n)\rightharpoonup(u,v)\ \ em\ \ E$$

ou seja,

$$u_n\rightharpoonup u\ \ em\ \ H^1(\Omega_1)\ \ e\ \ v_n\rightharpoonup v\ \ em\ \ H^1_\Gamma(\Omega_2).$$

Além disso, pelas imersões contínuas de Sobolev, temos

$$u_n\to u\ \ em\ \ L^t(\Omega_1)\ \ e\ \ v_n\to v\ \ em\ \ L^t(\Omega_2),\ \ para\ \ t\geq 1.$$

Do Teorema de Vainberg (Teorema B.12), a menos de subsequência, obtemos

$$u_n(x)\to u(x)\ \ q.t.p\ \ em\ \ \Omega_1\ \ e\ \ v_n(x)\to v(x)\ \ q.t.p\ \ em\ \ \Omega_2. \tag{3.12}$$

De $I^{'}(u_n, v_n) = o_n(1)$ e escrevendo

$$\varepsilon_n = \sup_{||(\phi,\psi)||\leq 1} |I^{'}(u_n, v_n)(\phi, \psi)|, \quad para \quad todo \quad n \in \mathbb{N},$$

temos

$$|I^{'}(u_n, v_n)(\phi, \psi)| \leq \varepsilon_n ||(\phi, \psi)||, \tag{3.13}$$

para todo $(\phi, \psi) \in E$.

Agora pondo $(\phi, \psi) = (u_n, v_n)$ em (3.13), obtemos

$$|I^{'}(u_n, v_n)(u_n, v_n)| \leq \varepsilon_n ||(u_n, v_n)||.$$

Donde segue que,

$$-\varepsilon_n ||(u_n, v_n)|| \leq ||(u_n, v_n)||^2 - \int_{\Omega_1} f(x, u_n)u_n dx - \int_{\Omega_2} h(x, v_n)v_n dx.$$

Logo,

$$\int_{\Omega_1} f(x, u_n)u_n dx + \int_{\Omega_2} h(x, v_n)v_n dx \leq ||(u_n, v_n)||^2 + \varepsilon_n ||(u_n, v_n)|| \leq C^2 + \varepsilon_n C.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega_1} |f(x, u_n)u_n| \leq C \quad e \quad \int_{\Omega_2} |h(x, v_n)v_n| \leq C.$$

Pelo Lema 3.2, temos

$$\int_{\Omega_1} f(x, u_n)dx \to \int_{\Omega_1} f(x, u)dx \tag{3.14}$$

e

$$\int_{\Omega_2} h(x, v_n)dx \to \int_{\Omega_2} h(x, v)dx. \tag{3.15}$$

Do Teorema de Vainberg, existem $\omega \in L^1(\Omega_1)$ e $\varphi \in L^1(\Omega_2)$ tal que a menos de subsequência temos

$$|f(x, u_n)| \leq \omega(x) \quad q.t.p \quad em \quad \Omega_1 \quad e \quad |h(x, v_n)| \leq \varphi(x) \quad q.t.p \quad em \quad \Omega_2.$$

Por (f_1), obtemos

$$|F(x,u_n)| \leq M\omega(x) \quad q.t.p \;\; em \;\; \Omega_1 \quad e \quad |H(x,v_n)| \leq M\varphi(x) \quad q.t.p \;\; em \;\; \Omega_2.$$

Além disso, de (3.12), obtemos

$$F(x,u_n) \to F(x,u) \quad q.t.p \;\; em \;\; \Omega_1 \quad e \quad H(x,v_n) \to H(x,v) \quad q.t.p \;\; em \;\; \Omega_2.$$

Do Teorema Generalizado da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema B.11), tem-se que

$$\int_{\Omega_1} F(x,u_n)dx \to \int_{\Omega_1} F(x,u)dx \tag{3.16}$$

e

$$\int_{\Omega_2} H(x,v_n)dx \to \int_{\Omega_2} H(x,v)dx. \tag{3.17}$$

Observe que do funcional

$$I(u_n,v_n) = \frac{1}{2}||(u_n,v_n)||^2 - \int_{\Omega_1} F(x,u_n)dx - \int_{\Omega_2} H(x,v_n)dx,$$

temos

$$||(u_n,v_n)||^2 = 2I(u_n,v_n) + 2\left(\int_{\Omega_1} F(x,u_n)dx + \int_{\Omega_2} H(x,v_n)dx\right).$$

Passando o limite em ambos os lados da igualdade, segue da convergência dada em (3.16) e (3.17), que

$$\lim_{n\to\infty} ||(u_n,v_n)||^2 = 2\left(c_* + \int_{\Omega_1} F(x,u)dx + \int_{\Omega_2} H(x,v)dx\right). \tag{3.18}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} I^{'}(u_n,v_n)(\phi,\psi) &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\Omega_1} \nabla u_n \nabla \phi dx + \int_{\Omega_2} \nabla v_n \nabla \psi dx\right) \\ &- \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\Omega_1} f(x,u_n)\phi dx + \int_{\Omega_2} h(x,v_n)\psi dx\right). \end{aligned}$$

Da convergência dada em (3.14) e (3.15), concluimos

$$\int_{\Omega_1} \nabla u \nabla \phi dx + \int_{\Omega_2} \nabla v \nabla \psi dx = \int_{\Omega_1} f(x,u)\phi dx + \int_{\Omega_2} h(x,v)\psi dx, \tag{3.19}$$

para todo $(\phi, \psi) \in E$.

Portanto (u, v) é solução fraca do problema (P). Para terminar o problema é suficiente provar que (u, v) é não-trivial.

Assuma por contradição que $u = 0$ e $v = 0$, então de (3.18), temos

$$\lim_{n\to\infty} ||(u_n, v_n)||^2 = 2\left(c_* + \int_{\Omega_1} F(x,0)dx + \int_{\Omega_2} H(x,0)dx\right).$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} ||(u_n, v_n)||^2 = 2c_*. \tag{3.20}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, obtemos

$$||(u_n, v_n)||^2 \leq 2c_* + \varepsilon.$$

Desde que $c_* < \dfrac{2\pi}{\alpha_0}$, podemos escolher $q > 1$ suficientemente próximo de 1 e ε suficientemente pequeno tal que

$$q\alpha_0||u_n||^2 < 4\pi \quad e \quad q\alpha_0||v_n||^2 < 4\pi.$$

Por outro lado de (1.18), segue que

$$|f(x,u_n)|^q \leq Ce^{q\alpha_0 u_n^2} = Ce^{q\alpha_0||u_n||^2\left(\frac{u_n}{||u_n||}\right)^2}$$

e

$$|h(x,v_n)|^q \leq Ce^{q\alpha_0 v_n^2} = Ce^{q\alpha_0||v_n||^2\left(\frac{v_n}{||v_n||}\right)^2}.$$

Assim

$$\int_{\Omega_1} |f(x,u_n)|^q \leq C\int_{\Omega_1} e^{q\alpha_0||u_n||^2\left(\frac{u_n}{||u_n||}\right)^2}dx$$

e

$$\int_{\Omega_2} |h(x,u_n)|^q \leq C \int_{\Omega_2} e^{q\alpha_0 ||v_n||^2 \left(\frac{v_n}{||v_n||}\right)^2} dx.$$

Da desigualdade de Trudinger-Moser, obtemos

$$\int_{\Omega_1} |f(x,u_n)|^q \leq C \quad e \quad \int_{\Omega_2} |h(x,v_n)|^q \leq C.$$

Agora usando (3.19) com $\phi = u_n$ e $\psi = v_n$, obtemos

$$||(u_n,v_n)||^2 = \int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Omega_2} |\nabla v_n|^2 dx = \int_{\Omega_1} f(x,u_n)u_n dx + \int_{\Omega_2} h(x,v_n)v_n dx. \tag{3.21}$$

Além disso pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\int_{\Omega_1} |f(x,u_n)u_n| dx \leq \left(\int_{\Omega_1} |f(x,u_n)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} |u_n|_{q',\Omega_1} \leq C|u_n|_{q',\Omega_1}$$

e

$$\int_{\Omega_2} |h(x,v_n)v_n| dx \leq \left(\int_{\Omega_2} |h(x,v_n)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} |v_n|_{q',\Omega_2} \leq C|v_n|_{q',\Omega_2},$$

onde

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Como neste caso,

$$u_n \to 0 \ \ em \ \ L^t(\Omega_1) \quad e \quad v_n \to 0 \ \ em \ \ L^t(\Omega_2) \ \ t \geq 1,$$

temos

$$\int_{\Omega_1} |f(x,u_n)u_n| \to 0 \ \ e \ \ \int_{\Omega_2} |h(x,v_n)v_n| \to 0.$$

Assim de (3.21), temos

$$\lim_{n\to\infty} ||(u_n,v_n)||^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\Omega_1} f(x,u_n)u_n dx + \int_{\Omega_2} h(x,v_n)v_n dx\right).$$

Portanto,

$$||(u_n,v_n)||^2 \to (0,0).$$

O que é uma contradição em vista de (3.20). Logo (u, v) é não trivial. $\square$

Apêndice

$\mathcal{A}$

Regularidade do funcional I

1.1 Diferenciabilidade do funcional associado

Definição A.1 *Dado um Espaço de Banach X e um funcional $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dizemos que I possui* ***Derivada de Fréchet*** *no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T \in X'$ tal que*

$$\lim_{||v|| \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - Tv}{||v||} = 0,$$

para todo $v \in X$.

Definição A.2 *Se a derivada de Fréchet de I existe e é contínua em X, dizemos que o funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.*

Definição A.3 *Dado um Espaço de Banach X e um funcional $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dizemos que I possui* ***Derivada de Gateaux*** *no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T_0 \in X'$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - T_0 v}{t} = 0,$$

para todo $v \in X$.

Observação A.1 *A derivada de Gateaux é dada por*

$$I^{'}(u)v = \lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t}.$$

Observação A.2 *Todo funcional Fréchet diferenciável é também Gateaux diferenciável.*

Proposição A.1 *Se I tem derivada de Gateaux contínua em X então $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.*

Demonstração: *Sejam $u+v$ e $u \in X$. Como I possui derivada de Gateaux sobre X, então pelo teorema do valor médio existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$I(u+v) - I(u) = I'(u+\theta v)v.$$

Note que

$$I(u+v) - I(u) - I'(u)v = I'(u+\theta v)v - I'(u)v,$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{||v||}[I(u+v) - I(u) - I'(u)v] &= \frac{1}{||v||}[I'(u+\theta v)v - I'(u)v] \\ &= [I'(u+\theta v) - I'(u)]\frac{v}{||v||}. \end{aligned}$$

Deste modo

$$\left| \frac{1}{||v||}[I(u+v) - I(u) - I'(u)v] \right| \leq ||[I'(u+\theta v) - I'(u)]||.$$

Como por hipótese, a derivada de Gateaux é continua, segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $||v|| < \delta$, então

$$||[I'(u+\theta v) - I'(u)]|| < \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{||v|| \to 0} \frac{1}{||v||}[I(u+v) - I(u) - I'(u)v] = 0.$$

Assim, temos que a derivada de Fréchet existe e é igual a derivada de Gateaux que, por hipótese, é contínua. Logo $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. $\square$

Agora, nosso objetivo é mostrar que o funcional definido em E por

$$I(u,v) = \frac{1}{2}||(u,v)||^2 - \int_{\Omega_1} F(x,u)dx - \int_{\Omega_2} H(x,u)dx$$

é de classe $C^1(E,\mathbb{R})$.

De fato, primeiramente observe que

$$I(u,v)=\frac{1}{2}\left(\int_{\Omega_1}|\nabla u|^2dx+\int_{\Omega_2}|\nabla v|^2dx\right)-\int_{\Omega_1}F(x,u)dx-\int_{\Omega_2}H(x,u)dx.$$

Para mostrar que $I\in C^1(E,\mathbb{R})$, *consideremos os funcionais* J_1 *e* J_2 *definidos por*

$$J_1(u,v)=\frac{1}{2}\left(\int_{\Omega_1}|\nabla u|^2dx+\int_{\Omega_2}|\nabla v|^2dx\right)$$

e

$$J_2(u,v)=\int_{\Omega_1}F(x,u)dx+\int_{\Omega_2}H(x,v)dx.$$

Proposição A.2 *O funcional* $I=J_1-J_2\in C^1(E,\mathbb{R})$.

Demonstração*:* *Primeiramente, veja que* $I=J_1-J_2$ *está bem definido. Com efeito, se* $u\in H^1(\Omega_1)$ *então*

$$\int_{\Omega_1}|\nabla u|^2<\infty.$$

Além disso, da condição $(C)_{\alpha_0}$, *temos*

$$\int_{\Omega_1}F(x,u)\leq\int_{\Omega_1}Ce^{\beta u^2}.$$

Da desigualdade de Trudinger-Moser, obtemos

$$\int_{\Omega_1}F(x,u)<\infty.$$

Logo

$$J_1(u,v)<\infty \;\; e \;\; J_2(u,v)<\infty.$$

Assim é suficiente provar que a derivada de Gateaux de J_1 *e* J_2 *existem e são contínuas. Vamos iniciar provando que* $J_1\in C^1(E,\mathbb{R})$.

Começaremos calculando a derivada de Gateaux DJ_1. Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{J_1[(u,v)+t(\phi,\psi)]-J_1(u,v)}{t} &= \frac{J_1(u+t\phi,v+t\psi)-J_1(u,v)}{t} \\
&= \frac{1}{2t}\left(\int_{\Omega_1}|\nabla(u+t\phi)|^2dx+\int_{\Omega_2}|\nabla(v+t\psi)|^2dx\right) \\
&- \frac{1}{2t}\left(\int_{\Omega_1}|\nabla u|^2dx+\int_{\Omega_2}|\nabla v|^2dx\right) \\
&= \frac{1}{2t}\int_{\Omega_1}(2t\nabla u\nabla\phi+t^2|\nabla\phi|^2)dx \\
&+ \frac{1}{2t}\int_{\Omega_2}(2t\nabla v\nabla\psi+t^2|\nabla\psi|^2)dx \\
&= \int_{\Omega_1}\nabla u\nabla\phi dx+\frac{t}{2}\int_{\Omega_1}|\nabla\phi|^2dx \\
&+ \int_{\Omega_2}\nabla v\nabla\psi dx+\frac{t}{2}\int_{\Omega_1}|\nabla\psi|^2dx.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
DJ_1(u,v)(\phi,\psi) &= \lim_{t\to 0}\frac{J_1[(u,v)+t(\phi,\psi)]-J_1(u,v)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\int_{\Omega_1}\nabla u\nabla\phi dx+\frac{t}{2}\int_{\Omega 1}|\nabla\phi|^2dx+\int_{\Omega_2}\nabla v\nabla\psi dx+\frac{t}{2}\int_{\Omega_1}|\nabla\psi|^2dx\right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$DJ_1(u,v)(\phi,\psi)=\int_{\Omega_1}\nabla u\nabla\phi dx+\int_{\Omega_2}\nabla v\nabla\psi dx.$$

Veremos agora que o operador DJ_1 é contínuo. Seja (u_n,v_n) uma sequência em E tal que

$$(u_n,v_n)\to(u,v) \quad em \quad E.$$

Agora para cada $(\phi,\psi)\in E$ com $||(\phi,\psi)||\leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
|[DJ_1(u_n,v_n)-DJ_1(u,v)](\phi,\psi)| &= \left|\int_{\Omega_1}\nabla(u_n-u)\nabla\phi dx+\int_{\Omega_2}\nabla(v_n-v)\nabla\psi dx\right| \\
&\leq \left|\int_{\Omega_1}\nabla(u_n-u)\nabla\phi dx\right|+\left|\int_{\Omega_2}\nabla(v_n-v)\nabla\psi dx\right| \\
&\leq \int_{\Omega_1}|\nabla(u_n-u)|.|\nabla\phi|dx+\int_{\Omega_2}|\nabla(v_n-v)|.|\nabla\psi|dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Shwarz, obtemos

$$
\begin{array}{rcl}
|[DJ_1(u_n,v_n)-DJ_1(u,v)](\phi,\psi)| & \leq & \left(\int_{\Omega_1}|\nabla(u_n-u)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega_1}|\nabla\phi|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
& + & \left(\int_{\Omega_2}|\nabla(v_n-v)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_{\Omega_2}|\nabla\psi|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
& = & ||u_n-u||.||\phi||+||v_n-v||.||\psi|| \\
& \leq & ||u_n-u||+||v_n-v||.
\end{array}
$$

Logo,

$$
\begin{array}{rcl}
||DJ_1(u_n,v_n)-DJ_1(u,v)||_E & = & \sup\limits_{||(\phi,\psi)||\leq 1}|[DJ_1(u_n,v_n)-DJ_1(u,v)](\phi,\psi)| \\
& \leq & ||u_n-u||+||v_n-v||.
\end{array}
$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}DJ_1(u_n,v_n)=DJ_1(u,v).$$

Mostrando que DJ_1 é contínuo. Assim pela Proposição A.1, o funcional $J_1\in C^1(E,\mathbb{R})$.

Provaremos agora que $J_2\in C^1(E,\mathbb{R})$.

Inicialmente vamos calcular a derivada de Gateaux DJ_2.

Para cada $t\in\mathbb{R}$ com $0<|t|<1$, $x\in\Omega_1$, $u\in H_0^1(\Omega_1)$ e $\phi\in C_0^\infty(\Omega_1)$, consideremos a função $\mu:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$\mu(s)=F(x,u+st\phi).$$

Observe que $\mu^{'}(s)=f(x,u+st\phi)t\phi$, $\mu(1)=F(x,u+t\phi)$ e $\mu(0)=F(x,u)$.

Desde que μ é contínua em [0,1] e diferenciável em (0,1), segue do Teorema do Valor Médio que, existe $\gamma\in$ (0,1) tal que

$$\mu(1)-\mu(0)=\mu^{'}(\gamma).$$

De onde concluimos que

$$\left|\frac{F(x,u+t\phi)-F(x,u)}{t}\right|=|f(x,u+\gamma t\phi)|.|\phi|.$$

De modo análogo, para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, $x \in \Omega_2$, $v \in H_0^1(\Omega_2)$ e $\psi \in C_0^\infty(\Omega_2)$, temos

$$\left| \frac{H(x, v + t\psi) - H(x, v)}{t} \right| = |h(x, v + \gamma\psi)|.|\psi|.$$

Da condição $(C)_{\alpha_0}$ sobre a função f, temos

$$|f(x, u + \gamma t\phi)|.|\phi| \leq Ce^{[\beta(u+\gamma t\phi)^2]}.|\phi|$$

e desde que $0 < |t| < 1$, usando a desigualdade de Trudinger-Moser, obtemos

$$|f(x, u + \gamma t\phi)|.|\phi| \leq Ce^{[\beta(u+\gamma\phi)^2]}.|\phi| \in L^1(\Omega_1).$$

Além disso, para uma sequência $|t_n| \to 0$, temos

$$f(x, u(x) + \gamma t_n\phi(x))\phi(x) \to f(x, u(x))\phi(x) \ \ \textit{pontualmente} \ \ \textit{em} \ \ \Omega_1.$$

De forma semelhante, sobre a função h, temos

$$|h(x, v + \gamma t\psi)|.|\psi| \leq Ce^{[\beta(v+\gamma\psi)^2]}.|\psi| \in L^1(\Omega_2),$$

e para uma sequência $|s_n| \to 0$, obtemos

$$h(x, v(x) + \gamma s_n\psi(x))\psi(x) \to h(x, v(x))\psi(x) \ \ \textit{pontualmente} \ \ \textit{em} \ \ \Omega_2.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
DJ_2(u, v)(\phi, \psi) &= \lim_{t \to 0} \frac{J_2[(u, v) + t(\phi, \psi)] - J_2(u, v)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{J_2(u + t\phi, v + t\psi) - J_2(u, v)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \int_{\Omega_1} \frac{F(x, u + t\phi) - F(x, u)}{t} dx \\
&+ \lim_{t \to 0} \int_{\Omega_2} \frac{H(x, v + t\psi) - H(x, v)}{t} dx.
\end{aligned}$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluimos

$$
\begin{aligned}
DJ_2(u,v)(\phi,\psi) &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\Omega_1} f(x,u+\gamma t_n\phi)\phi dx + \int_{\Omega_2} h(x,v+\gamma_n\psi)\psi dx\right)\\
&= \int_{\Omega_1} f(x,u)\phi dx + \int_{\Omega_2} h(x,v)\psi dx.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$DJ_2(u,v)(\phi,\psi) = \int_{\Omega_1} f(x,u)\phi dx + \int_{\Omega_2} h(x,v)\psi dx.$$

Mostraremos agora que o operador DJ_2 é contínuo. Seja (u_n, v_n) uma sequência em E tal que $(u_n, v_n) \to (u, v)$ em E, isto é,

$$u_n \to u \quad em \quad H^1(\Omega_1) \quad e \quad v_n \to v \quad em \quad H^1_\Gamma(\Omega_2).$$

Das imersões cotínuas de Sobolev, temos

$$u_n \to u \quad em \quad L^2(\Omega_1) \quad e \quad v_n \to v \quad em \quad L^2(\Omega_2).$$

Do Teorema de Vainberg, existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $g \in L^2(\Omega_1)$, tal que

$$u_{n_j}(x) \to u(x) \quad q.t.p \quad em \quad \Omega_1 \quad e \quad |u_{n_j}(x)| \le g(x) \quad q.t.p \quad em \quad \Omega_1.$$

Desde que f é uma função contínua, temos

$$[f(x,u_{n_j}(x)) - f(x,u(x))]^2 \to 0 \quad q.t.p \quad em \quad \Omega_1.$$

Além disso, usando (1.18) e a desigualdade de Trudinger-Moser, obtemos

$$
\begin{aligned}
|[f(x,u_{n_j}(x)) - f(x,u(x))]|^2 &\le C[|f(x,u_{n_j}(x))|^2 + |f(x,u(x))|^2]\\
&\le C[e^{2\beta(u_{n_j}(x))^2} + e^{2\beta(u(x))^2}]\\
&\le C[e^{2\beta(u(x)+\varepsilon)^2} + e^{2\beta(u(x))^2}] \in L^1(\Omega_1)
\end{aligned}
$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$|f(x,u_{n_j}(x)) - f(x,u(x))|_{2,\Omega_1} \to 0.$$

De modo análogo, sobre a função h, obtemos

$$|h(x,v_{n_j}(x)) - h(x,v(x))|_{2,\Omega_2} \to 0.$$

Assim, para todo $(\phi,\psi) \in E$ tal que $||(\phi,\psi)|| \leq 1$, temos

$$\begin{array}{rcl} |[DJ_2(u_{n_j},v_{n_j}) - DJ_2(u,v)](\phi,\psi)| & = & |DJ_2(u_{n_j},v_{n_j})(\phi,\psi) - DJ_2(u,v)(\phi,\psi)| \\ & \leq & \left|\displaystyle\int_{\Omega_1}[f(x,u_{n_j}) - f(x,u)]\phi dx\right| \\ & + & \left|\displaystyle\int_{\Omega_2}[h(x,v_{n_j}) - h(x,v)]\psi dx\right| \\ & \leq & \displaystyle\int_{\Omega_1}|f(x,u_{n_j}) - f(x,u)|.|\phi| dx \\ & + & \displaystyle\int_{\Omega_2}|h(x,v_{n_j}) - h(x,v)|.|\psi| dx. \end{array}$$

Da desigualdade de Cauchy-Shwarz, tem-se que

$$\begin{array}{rcl} |[DJ_2(u_{n_j},v_{n_j}) - DJ_2(u,v)](\phi,\psi)| & \leq & |f(x,u_{n_j}(x)) - f(x,u(x))|_{2,\Omega_1}.|\phi|_{2,\Omega_1} \\ & + & |h(x,v_{n_j}(x)) - h(x,v(x))|_{2,\Omega_2}.|\psi|_{2,\Omega_2}. \end{array}$$

Das imersões contínuas de Sobolev, temos

$$\begin{array}{rcl} |[DJ_2(u_{n_j},v_{n_j}) - DJ_2(u,v)](\phi,\psi)| & \leq & C|f(x,u_{n_j}(x)) - f(x,u(x))|_{2,\Omega_1}.||\phi|| \\ & + & C|h(x,v_{n_j}(x)) - h(x,v(x))|_{2,\Omega_2}.||\psi|| \\ & \leq & C|f(x,u_{n_j}(x)) - f(x,u(x))|_{2,\Omega_1} \\ & + & C|h(x,v_{n_j}(x)) - h(x,v(x))|_{2,\Omega_2}. \end{array}$$

Assim

$$\begin{aligned} ||DJ_2(u_{n_j}, v_{n_j}) - DJ_2(u,v)|| &= \sup_{||(\phi,\psi)||\leq 1} |[DJ_2(u_{n_j}, v_{n_j}) - DJ_2(u,v)](\phi,\psi)| \\ &\leq C|f(x,u_{n_j}(x)) - f(x,u(x))|_{2,\Omega_1} \\ &+ C|h(x,v_{n_j}(x)) - h(x,v(x))|_{2,\Omega_2}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{j\to\infty} DJ_2(u_{n_j}, v_{n_j}) = DJ_2(u,v).$$

Novamente pela Proposição A.1, $J_2 \in C^1(E,\mathbb{R})$.

Mostrando assim que o funcional $I \in C^1(E,\mathbb{R})$. *Além disso, temos que*

$$I'(u,v)(\phi,\psi) = \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla \phi dx + \int_{\Omega_2} \nabla v \nabla \psi dx - \int_{\Omega_1} f(x,u)\phi dx - \int_{\Omega_2} h(x,v)\psi dx,$$

para todo $(\phi,\psi) \in E$. *Portanto os pontos críticos de I são soluções fracas do problema (P).* $\square$

Apêndice

$\mathcal{B}$

Resultados importantes

Neste apêndice veremos resultados utilizados nesse trabalho.

Teorema B.1 (Teorema de Lax-Miligram)
Sejam H um espaço de Hilbert e $a(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva em H. Então, para todo $\varphi \in H^{'}$, existe um único $u \in H$ tal que

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad para \quad todo \quad v \in H.$$

Demonstração: *Ver [7], página 84.* □

Teorema B.2 *Seja $\varphi : E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ uma função convexa, s.c.i(pela topologia forte). Então, φ é s.c.i pela topologia fraca $\sigma(E, E^{'})$. Em particular se $x_n \to x$ pela $\sigma(E, E^{'})$, então*

$$\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n).$$

Demonstração: *Ver [7], página 38.* □

Teorema B.3 *Seja*

$$I_\infty = \inf_{u \in H^1(\Omega_1)} \left\{ \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx + \int_\Sigma |u|^2 ds; \int_{\Omega_1} |u|^2 = 1 \right\}$$

Então o número I_∞ é atingido em algum $u_0 \in H^1(\Omega_1)$ e é estritamente positivo.

Demonstração: *Consideremos o funcional* $J : H^1(\Omega_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido por*

$$J(u) = \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Sigma} |u|^2 ds.$$

Notamos que:

(a) J *está bem definido, devido a teoria do traço de funções em* $H^1(\Omega_1)$.

(b) J *é limitado inferiormente em* $H^1(\Omega_1)$, *pois*

$$J(u) \geq 0, \quad para \quad todo \quad u \in H^1(\Omega_1).$$

(c) J *é fracamente semicontínuo inferiormente, isto é,*

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad em \quad H^1(\Omega_1) \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \inf J(u_n) \geq J(u_0).$$

De fato, como podemos observar o funcional J *é a soma das normas*

$$J_1(u) = |\nabla u|^2_{2,\Omega_1} \quad e \quad J_2(u) = |u|^2_{2,\Sigma}$$

as quais são convexas e contínuas. Consequentemente devido ao Teorema B.2 acima temos que o funcional J *é fracamente s.c.i.*

Agora de (b) decorre que

$$\inf_{u\in H^1(\Omega_1)} J(u) = I_\infty \geq 0,$$

com $\displaystyle\int_{\Omega_1} |u|^2 dx = 1.$

Logo existe uma sequência minimizante $u_n \subset H^1(\Omega_1)$, *com* $\displaystyle\int_{\Omega_1} |u_n|^2 dx = 1$ *tal que*

$$J(u_n) = \int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Sigma} |u_n|^2 ds \to I_\infty.$$

Dai, segue que $J(u_n)$ *é limitada e assim resulta que* $\displaystyle\int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^2 dx$ *também é limitada. Consequentemente*

$$||u_n||^2_{1,2;\Omega_1} = \int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Omega_1} |u_n|^2 dx \leq C$$

ou seja, a sequência (u_n) *é limitada em* $H^1(\Omega_1)$*. Como o spaço de Sobolev* $H^1(\Omega_1)$ *é reflexivo, então (ver Teorema B.1) existe uma subsequência de* (u_n) *(ainda denotada por* (u_n)*) tal que*

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad em \quad H^1(\Omega_1). \tag{B.1}$$

Por outro lado, uma vez que $H^1(\Omega_1) \hookrightarrow L^2(\Omega_1)$ *compactamente (ver Teorema B.5) teremos*

$$\int_{\Omega_1} |u_n|^2 dx \to \int_{\Omega_1} |u_0|^2 dx.$$

Assim

$$\int_{\Omega_1} |u_0|^2 dx = 1$$

resultando desse modo que,

$$I_\infty \leq J(u_0).$$

Ora de (B.1) e de (c), temos que

$$J(u_0) \leq \lim_{n\to\infty} \inf(J(u_n)) = I_\infty.$$

Dessas últimas desigualdades teremos

$$J(u_0) = I_\infty.$$

Agora, se $I_\infty = 0$*, então teriamos*

$$\int_{\Omega_1} |\nabla u_0|^2 dx = \int_\Sigma |u_0|^2 ds = 0.$$

Assim

$$\nabla u_0 = 0 \quad e \quad u_{0|\Sigma} = 0.$$

Logo

$$u_0 = 0$$

o que é um absurdo pois $\displaystyle\int_{\Omega_1} |u_0|^2 dx = 1$*. Portanto mostramos que* $I_\infty > 0$. $\square$

Teorema B.4 (Teorema do Valor Médio, de Lagrange)

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua, derivável em* $(a, a+h)$. *Então existe um número* θ *com,* $0 < \theta < 1$ *tal que*

$$f(a+h) = f(a) + f^{'}(a+\theta h)h.$$

Demonstração: *Ver [5], página 96.* □

Teorema B.5 (Imersão compacta de Rellich-Kondrachov)

seja Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^N$, Ω *de classe* C^1 *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então as seguintes imersões são compactas:*

a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \dfrac{np}{n-p} = p^* \quad se \quad p < n;$

b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty \quad se \quad p = n;$

c) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \quad se \quad p > n..$

Demonstração: *Ver [10], página 79.* □

Teorema B.6 (Imersão contínuas de Sobolev)

seja Ω *um domínio limitado do* $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$ Ω *de classe* C^m *e* $1 \leq r \leq \infty$. *Então as seguintes imersões são contínuas:*

a) $W^{m,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \dfrac{nr}{n-mr} = r^* \quad se \quad mr < n;$

b) $W^{m,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty \quad se \quad mr = n;$

c) $W^{m,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \quad se \quad p > n., \; mr > N$ *onde* k *é um inteiro tal que* $k < m - \dfrac{n}{r} \leq k+1$ *e* λ *um real satisfazendo* $0 < \lambda \leq m - k - \dfrac{n}{r} = \lambda_0$ *se* $\lambda_0 < 1$ *e* $0 < \lambda < 1$ *se* $\lambda_0 = 1$.

Demonstração: *Ver [10], página 75.* □

Teorema B.7 *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo. Se* (u_n) *é uma sequência limitada em* X, *então existe uma subsequência* $(u_{nj}) \subset (u_n)$ *e* $u \in X$ *tais que*

$$(u_{nj}) \rightharpoonup u \quad em \quad X.$$

Demonstração: *Ver [7].* □

Teorema B.8 (Desigualdade de Hölder)

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$*, onde* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$*. Então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |f.g| \leq |f|_{p,\Omega}.|g|_{p'\Omega}.$$

Demonstração: *Ver [7], página 92.* □

Corolário B.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Sejam f *e* $g \in L^2(\Omega)$*. Então* $f.g \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |fg| \leq |f|_{2,\Omega}|g|_{2,\Omega}.$$

Demonstração: *Ver [7], página 92.* □

Teorema B.9 (Desigualdade de Poincaré)

Seja Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^N$*. Então existe uma constante* $C = C(\Omega)$ *tal que*

$$|u|_{p,\Omega} \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$*,* $1 \leq p \leq +\infty$*.*

Demonstração: *Ver [7], página 174.* □

Teorema B.10 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)

Seja A *um conjunto mensurável do* $\mathbb{R}^N$ *e seja* (f_j) *uma sequência de funções mensuráveis tal que*

$$f_j(x) \to f(x) \text{ q.t.p em } A$$

onde f *é uma função mensurável. Se existir uma função* $g \in L^1(A)$ *tal que*

$$|f_j(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p em } A,$$

então

$$\lim_{j\to\infty} \int_A f_j(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

Demonstração: *Ver [13], página 31.* $\square$

Teorema B.11 (Teorema Generalizado da Convergência Dominada de Lebesgue)
Sejam $(f_n) \subset L^1(\Omega)$ uma sequência de funções mensuráveis e $(g_n) \subset L^1(\Omega)$ satisfazendo
(i) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω;
(ii) $g_n(x) \to g(x)$ q.t.p em Ω com $g \in L^1(\Omega)$;
(iii) Para cada n, $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ q.t.p em Ω;
(iv) $|g_n - g|_{1,\Omega} \to 0,$ quando $n \to \infty$.
Então

$$|f_n - f|_{1,\Omega} \to 0.$$

Demonstração: *Ver [8], página 89.* $\square$

Teorema B.12 (Vainberg)
Sejam (f_j) uma sequência de funções em $L^q(\Omega)$ e $f \in L^q(\Omega)$ tais que

$$f_j \to f \text{ em } L^q(\Omega).$$

Então, existe $(f_{jk}) \subset (f_j)$ e uma função $g \in L^q(\Omega)$ tal que

$$|f_{jk}(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p em } \Omega$$

e

$$f_{jk}(x) \to f(x) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Demonstração: *Ver [7], página 94.* $\square$

Lema B.1 (Lema de Deformação)
Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1$ e $c \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Se

$$||I'(u)|| \geq 4\epsilon,$$

para todo $u \in I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$, então existe $\eta \in C(X,X)$ tal que
(i) $\eta(u) = u, \forall u \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$,

(ii) $\eta(I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$,

onde

$$I^d := I^{-1}(]-\infty, d[).$$

Demonstração: *Ver [12], página 11.* $\square$

Teorema B.13 (Teorema do Passo da Montanha)

Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que existem $\alpha, \rho > 0$ tais que

(i)

$$I(u) \geq \alpha > 0 \text{ para todo } u \in X : ||u|| = \rho$$

e existe $e \in X$ tal que $||e|| > \rho$ e

(ii)

$$I(e) < 0.$$

Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in X$ tal que

(a) $c - 2\varepsilon \leq I(u_\varepsilon) \leq c + 2\varepsilon$

(b) $||I'(u_\varepsilon)|| < 4\varepsilon$.

Onde

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Upsilon} \max_{[0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Upsilon = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

Demonstração: *Primeiramente provemos que c é finito. De fato, desde que $\gamma(0) = 0 \in B_\rho(0)$, $\gamma(1) = e \in X\ \overline{B_\rho(0)}$ e $\gamma([0,1])$ é conexo, temos que*

$$\gamma([0,1]) \bigcap \partial B_\rho(0) \neq \emptyset.$$

Logo, da hipótese (i), temos

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha,$$

implicando que $c \geq \alpha > 0$.

Suponha agora, por contadição, que para algum $\epsilon > 0$ as condições (a) e (b) não ocorram, ou seja,

(c) $c - 2\varepsilon < I(u) < c + 2\varepsilon \quad$ *para todo* $u \in X$

(d) $||I'(u)|| \geq 4\varepsilon \quad$ *para todo* $u \in X$.

Desde que $c > 0$ e diminuindo ε se necessário, temos

$$I(e) \leq I(0) = 0 < c - 2\varepsilon. \tag{B.2}$$

Dos itens (c) e (d), e do Lema da deformação, existe $\eta \in C(X, X)$ tal que

(I) $\eta(u) = u$ *se* $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$

(II) $\eta(I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$.

Da definição de c, existe $\overline{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I(\overline{\gamma}(t)) \leq c + \varepsilon.$$

Conseideremos $\widehat{\gamma} : [0, 1] \longrightarrow X$ definido por $\widehat{\gamma}(t) = \eta(\overline{\gamma}(t))$. Observemos que

$$\widehat{\gamma}(0) = \eta(\overline{\gamma}(0)) = \eta(0) = 0$$

e

$$\widehat{\gamma}(1) = \eta(\overline{\gamma}(1)) = \eta(e) = e.$$

Por B.2, temos $0,\ e \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$. Do Lema da Deformação $\eta(0) = 0$ e $\eta(e) = e$. Portanto

$$\widehat{\gamma}(0) = 0$$

e

$$\widehat{\gamma}(1) = e,$$

mostrando que $\widehat{\gamma} \in \Gamma$. Do Lema da Deformação, para qualquer $t \in [0, 1]$, encontramos

$$\widehat{\gamma}(t) = \eta(\overline{\gamma}(t)) \in I^{c-\varepsilon}.$$

Assim,

$$c \le \max_{t \in [0,1]} I(\widehat{\gamma}(t)) \le c - \varepsilon,$$

o que é um absurdo, provando o teorema.

Observação B.1 *As hipóteses (i) e (ii) são chamadas, respectivamente,* 1^a *geometria e* 2^a *geometria do Passo da Montanha.*

Apêndice

C

Desigualdade de Trudinger-Moser

Teorema C.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e $u \in H_0^1(\Omega)$, então*

$$e^{\alpha u^2} \in L^1(\Omega) \;\; \textit{para} \;\; \textit{todo} \;\; \alpha > 0.$$

Além disso, se $|\nabla u|_{2,\Omega}^2 \leq 1$, então existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega e^{\alpha u^2} \leq C|\Omega| \;\; \textit{desde} \;\; \textit{que} \;\; \alpha \leq 4\pi.$$

Demonstração: *Ver [9]* □

Bibliografia

[1] A. Hasegawa. Optical solitons in fibers. Springer, New York etc. (1989).

[2] Adimurthi, Existence of positive solutions of the semilinear Dirichlet problems with critical growth for the N-Laplacian, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 17, (1990), 393-413.

[3] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and apllications, J. Functional Analysis, vol 14, (1973), 349-381.

[4] D. G. de Figueiredo, O. H. Miyagaki, B. Ruf, Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ *with nonlinearities in the critical growth range, Calc. Var. 3 (1995), 139-153.*

[5] E. L. Lima, Curso de Análise. Volume I. Coleção Matemática Universitária, IMPA.

[6] G. Figueiredo and M. Montenegro, A transmission problem on $\mathbb{R}^2$ *with critical exponential growth, Archiv der Mathematik, Vol 99, issue 3, (2012), 271-279.*

[7] H. Brezis, Analyse Fonnctionelle, Theorie et applications. masson, Paris, New yprk, Barcelone, Milan, Mexico e São Paulo, (1987).

[8] H. L. Royden, Real Analysis, 2 ed. The Macmillan Company (1988)

[9] J. Moser, A sharp form of an inequality by N. Trudinger, Ind. Univ. Math. J.20 (1985), 185-201.

[10] L. Medeiros, Espaços de Sobolev, Rio de janeiro, IM-UFRJ 2000.

[11] M.A Milla Miranda L.A Medeiros, Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais(textos de Métodos Matemáticos No 25), IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1993).

[12] M. Willem, Minimax theorems, Birkhäser, (1996).

[13] R. G. Bartle, The Elements of Integration and Lebesgue Measure, Wiley Classics Library (1995).

[14] T. F. Ma and J. E. Muñoz Rivera, positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem, App. Math. Letters 16 (2003), 243-248.

[15] V. I. Karpman. Nonlinear waves in dispersive media. Pergamon Press, Oxford etc. (1975).