UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Julio Roberto Soares da Silva

# Problemas elípticos não-locais com expoente crítico

BELÉM
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Julio Roberto Soares da Silva

# Problemas elípticos não-locais com expoente crítico

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, com o pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a].Rúbia Gonçalves Nascimento.

BELÉM

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Julio Roberto Soares da Silva

# Problemas elípticos não-locais com expoente crítico

Esta Dissertação foi apresentada como exigência parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística-PPGME da Universidade Federal do Pará, julgada pela seguinte banca examinadora.

Conceito: Aprovado.

Prof<sup></sup>ª. Drª. Rúbia Gonçalves Nascimento (Orientadora)
Universidade Federal Pará - UFPA

Profª. Drª. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
Universidade Federal Pará - UFPA

# Dedicatória

A minha mãe, Maria de Fátima Soares da Silva, o pilar de minha família e a minha esposa, Adenilza Nunes do Espiríto Santos, meu amor, por tudo o que representam na minha vida.

*“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes"*

**Marthin Luther King.**

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus por estar presente em minha vida em todos os momentos, por ter-me dado capacidade e coragem para enfrentar os desafios com esperança e fé, e pela proteção nos momentos dificíeis.

À minha mãe, Maria de Fátima Soares da Silva, pela boa criação e educação que sempre me deu, por ter sido incasável em apoiar-me em tudo que precisei, e por proporcionar-me consciência e bom senso para fazer as escolhas corretas.

A meu amor, esposa, amiga, companheira, Adenilza Nunes do Espírito Santo, que nas horas mais dificíeis desta caminhada sempre deu o seu melhor para que os obstáculos fossem superados.

A meus irmãos, que sempre se dispuseram a me ajudar em tudo.

À professora Rúbia Gonçalves Nascimento pela ótima orientação, pela compreensão, paciência, dedicação e pela boa convivência e amizade que tornaram possível este trabalho.

A meus amigos, mestres e professores, João Pablo Pinheiro da Silva e Sebastião Martins Siqueira Cordeiro, que através de seus ensinamentos contribuiram em minha formação.

Aos profesores da Faculdade de Matemática, do PPGME e do PDM, pelas conversas acadêmicas, disciplinas ministradas e momentos compartilhados.

A meus amigos, que de uma forma especial fizeram parte de minha jornada, Andréia, Bruno, Claudionei, Elany, Ítalo, Jesiel, João, Jorsy, Marly, Mirelson, Marcos, Raimundo, Ryan e Willian.

À Carmen, pela imensa ajuda durante o curso e pela grande amizade.

Agradeço ao professor Rodrigo da Silva Rodrigues por sua contribuição a este trabalho.

Aos professores, Giovany de Jesus Malcher Figueiredo e Michele Oliveira Alves, por aceitarem avaliar este trabalho e contribuir para a melhoria do mesmo.

À Capes pelo auxílio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho estudaremos a existência de soluções positivas para a seguinte classe de problemas elípticos não-locais com crescimento crítico e não linearidade descontínua:

$$\begin{cases} -\Big[M\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Big]\Delta u = \lambda g(x,u) + u^5, \Omega \\ u(x) > 0 \quad \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado suave e $\lambda > 0$ é um parâmetro positivo, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua dada e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo certas condições.

**Palavras-chaves:** Problema não-local, equação de Kirchhoff, crescimento crítico, Localmente Lipschitz

# Abstract


In this work, we will study existence of positive solutions for the following class of nonlocal problems with critical growth and discontinuous non-linearity:

$$\begin{cases} -\Big[M\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Big]\Delta u = \lambda g(x,u) + u^5, \Omega \\ u(x) > 0 \quad \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

where, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a bounded smooth domain and $\lambda > 0$ is parameter, M is continuous function and $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function satisfying some conditions.



**Key-words:** Non-local, Kirchhoff equation, critical growth, locally lipschitz.

# Conteúdo

# Introdução

Neste trabalho vamos considerar a seguinte classe de problemas elípticos não-locais do tipo Kirchhoff com crescimento crítico

$$\begin{cases} -\Big[M\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Big]\Delta u = \lambda g(x,u) + u^5, \text{ em } \Omega \\ u(x) > 0 \quad , \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \quad , \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, para $N = 1, 2$ e $3$, é um domínio limitado, $\lambda$ é um parâmetro positivo, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua dada e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo certas condições.

No que segue, trataremos o problema acima para $N = 3$, pois os casos $N = 1$ e $2$ seguem de adaptações naturais.

O problema (1) é chamado não-local, devido à presença do termo $M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)$ implicando que a equação em (1), não é uma identidade pontual. O interesse por tais problemas deve-se ao fato de apresentarem uma variedade relevante de situações físicas o que provoca algumas dificuldades matemáticas interessantes. De fato, o operador $M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)$ que aparece na equação de Kirchhoff surge em vibrações não lineares, a saber

$$\begin{cases} u_{tt} - \Big[M\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Big]\Delta u = f(x,u), \text{ em } \Omega \times (0,T) \\ u = 0, \quad \text{ em } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \ , u_t(x,0) = u_1(x). \end{cases}$$

Tal equação hiperbólica é uma generalização da equação de Kirchhoff.

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\rho_0}{h} + \frac{E}{\partial L}\int_0^L |\frac{\partial u}{\partial x}|^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{2}$$

a qual apareceu pela primeira vez no trabalho de Kirchhoff [25] em 1883. Esta equação estende a clássica equação da onda de D'Alembert que considera os efeitos da mudança no comprimento da corda durante as vibrações.

Os parâmetros na equação da (2) têm os seguintes significados: $L$ é o comprimento da corda, $h$ é a área de sua seção transversal, $E$ é o módulo de Young do material do qual ela é feita, $\rho$ é a densidade da massa e $\rho_0$ é tensão inicial.

Vale ressaltar que a equação (2) começou a receber maior atenção de vários pesquisadores, principalmente após o trabalho do matemático francês J. L. Lions [24], apresentado em um simpósio internacional que ocorreu no Rio de Janeiro em 1977. Nesse trabalho de Lions, foram utilizados argumentos de análise não-linear para trabalhar com problemas não-locais do tipo Kirchhoff.

Salientamos que os problemas não-locais aparecem também em outras áreas como por exemplo, em biologia (sistemas biológicos, onde $u$ descreve um processo que depende da média, por exemplo, a densidade da população), na física e engenharia.

O objetivo central deste trabalho é mostrar a existência de soluções do problema (1) para algumas classes de funções $g$. Para isso, usaremos técnicas de Análise Funcional não-linear e no que segue, enunciaremos os resultados principais obtidos.

No capítulo 1, denominado uma classe de problemas elípticos não-locais com crescimento crítico, estudaremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Big[M\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Big]\Delta u = \lambda f(x,u) + u^5, \text{ em } \Omega, \\ u(x) > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado suave, $\lambda > 0$ um parâmetro real, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas.

As hipóteses sobre a função $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ são as seguintes:

$(M_1)$ Existe $m_0 > 0$ tal que

$$M(t) \geq m_0, \, \forall \, t \in \mathbb{R}^+.$$

$(M_2)$ Existe $\theta > 0$ que a função $\frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \frac{1}{\theta}M(t^2)t^2$ é não-negativa em $[0, +\infty)$, isto é,

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \frac{1}{\theta}M(t^2)t^2 \geq 0 \, \forall \, t \geq 0$$

e

$(M_3)$

$$\frac{1}{t}\Big[\frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \frac{1}{\theta}M(t^2)t^2\Big] \to +\infty \text{ quando } t \to +\infty;$$

com $2(1 - H(b)) + 4H(b) < \theta < 6$ onde $H(t) = 1$ se $t > 0$ e $H(t) = 0$ se $t \leq 0$ e $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(s)ds$.

$(M_4)$ Existe $b \geq 0$ tal que

$$\frac{M(t)}{t} \to b \text{ quando } t \to +\infty.$$

Note que da hipótese $(M_3)$, quando $b = 0$ obtemos

$$2(1 - H(b)) + 4H(b) = 2$$

e para o caso de $b > 0$ temos

$$2(1 - H(b)) + 4H(b) = 4.$$

Além disso, por $(M_4)$, para todo $t \geq 0$ existe $K > 0$ tal que

$$M(t) \leq K(m_0 + bt).$$

Um exemplo tipíco de uma função que satisfaz as condições $(M_1) - (M_4)$ é dada por

$$M(t) = m_0 + bt$$

com $b \geq 0$ e para todo $t \geq 0$.

As hipóteses sobre a função $f : \Omega \times \mathbb{R}$ são:

$(f_1)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x,t)}{t} = 0, \ \forall x \in \Omega \text{ uniformemente em } x \in \Omega.$$

$(f_2)$ Existe $q \in (2(1 - H(b)) + 4H(b), 6)$ verificando

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x,t)}{t^{q-1}} = 0, \ \forall x \in \Omega,$$

e a bem conhecida condição de Ambrosetti-Rabinowitz

$(f_3)$

$$0 < \theta F(x,t) = \theta \int_0^t f(x,s)ds \leq tf(x,t), \ \forall x \in \Omega \text{ e } t > 0,$$

onde $\theta$ é dado em $(M_3)$.

O principal resultado deste capítulo é:

**Teorema 0.1** *Suponhamos que a função $M$ satisfaça as condições $(M_1) - (M_4)$ e $f$ satisfaça $(f_1) - (f_3)$. Então existe $\lambda_* > 0$, tal que o problema (3) possui uma solução fraca positiva para todo $\lambda \geq \lambda_*$.*

O estudo feito no capítulo 1 foi baseado no trabalho de Alves, Corrêa e Figueiredo [2] onde autores mostraram a existência de solução para o problema (3) usando o Teorema do Passo da Montanha, o Príncipio de Concentração e Compacidade de Lions [23], e a força de $\lambda$ para contornar a dificuldade dada pelo crescimento crítico.

Em 2006 Corrêa e Figueiredo [18] consideraram uma classe de problemas não-locais com crescimento supercrítico e mostraram a existência de soluções usando métodos variacionais combinados com o método de interação de Moser, para $\lambda$ suficientemente pequeno, porém, com $\lambda$ multiplicando o termo com crescimento subcrítico o que difere do trabalho de outros autores em [2]. Além disso os autores em [2] consideraram classes de funções $M$ que não são tratadas em Corrêa e Figueiredo [18].

No capítulo 2 apresentaremos alguns resultados básicos da teoria dos pontos críticos para funcionais localmente lipschitzianos, desenvolvido por Chang [16], baseado na Análise Convexa e no cálculo subdiferencial de Clarcke [17] que serão úteis para demonstrar os resultados do capítulo seguinte. Tal capítulo foi baseado no livro de Grossinho e Tersian [19] com auxílio da dissertação de Santos [29].

No capítulo 3, denominado uma classe de problemas elípticos não-locais com crescimento crítico e não-linearidade descontínua, estudaremos questões de existência de soluções positivas para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Big[M\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Big]\Delta u = \lambda H(u-a)u^q + u^5, \text{ em } \Omega \\ u(x) > 0 \quad , \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \quad , \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio suave $1 \leq q < 5$, $\lambda$ e $a$ são parâmetros positivos, e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua satisfazendo as hipóteses $(M_1) - (M_4)$ e $H$ é a função de Heaviside, isto é,

$$H(t) = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ t \leq 0 \\ 1 \ \ se \ \ t > 0. \end{cases}$$

Essa classe de problemas, denominada problemas com não linearidade descontínua vem, ao longo dos últimos anos, sendo estudada por vários autores, e, várias técnicas foram aplicadas para estudar as mesmas, tais como: técnicas variacionais para funcionais não diferenciáveis, sub e super solução, bifurcação global etc.

Além disso, problemas envolvendo não linearidade descontínua aparecem em alguns ramos relacionados a física-matemática como por exemplo: são modelos para a condutividade do calor em meios elétricos, modelos de soluções estacionárias para fenômenos químicos e biológicos e é bem conhecido que problemas com não linearidade descontínua aparecem em situacões relevantes da Física do Plasma, ver em [3], [4], [5], [6], [8], [10], [11], [12], [13] e suas referências.

O principal resultado desse capítulo é o seguinte

**Teorema 0.2** *Suponhamos que $M$ satisfaça as condições $(M_1) - (M_4)$. Então, existe $\lambda_* > 0$ e tais que, para $\lambda \in (0, \lambda_*)$ e $a > 0$, o problema (4) possui solução fraca positiva.*

O estudo do problema (4), foi motivado pelo artigo de Alves, Corrêa e Figueiredo [2], no qual os autores usaram técnicas variacionais a fim de estudar sobre existência de soluções.

A existência de soluções do problema (4) será obtida atavés do estudo do funcional energia $I_{\lambda,a} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, associado ao problema, dado por

$$I_{\lambda,a}(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \lambda \int_\Omega F(u)dx - \int_\Omega (u^+)^6 dx,$$

onde, $\widehat{M} = \displaystyle\int_0^t M(s)ds$ e $F(t) = \displaystyle\int_0^u f(s)ds$, $f(t) = H(t-a)(t^+)^q$ é uma função não decrescente e $t^+ = \max\{0, t\}$.

Note que

$$F(t) = \int_0^t H(s-a)s^q ds = \begin{cases} 0, \ \ se \ \ t \leq a, \\ \dfrac{t^{q+1}}{q+1} - \dfrac{a^{q+1}}{q+1}, \ \ se \ \ t > a, \end{cases}$$

pois, para $t \leq a$,

$$H(t-a) = 0,$$

e para $t > a$,

$$\begin{aligned} F(t) = \int_0^t H(s-a)s^q ds &= \int_0^a H(s-a)s^q ds + \int_a^t H(s-a)s^q ds \\ &= \int_a^t s^q ds = \left.\frac{s^{q+1}}{q+1}\right|_a^t = \frac{t^{q+1}}{q+1} - \frac{a^{q+1}}{q+1}. \end{aligned}$$

O resultado central deste capítulo completa os estudos em Alves, Corrêa e Figueiredo [2], devido a não-linearidade ser descontínua, apresentando assim algumas dificuldades pelo fato do funcional associado ao problema não ser diferenciável.

No Apêndice A, apresentaremos alguns resultados sobre diferenciabilidade e no Apêndice B, resultados básicos da Teoria da Medida e Integração e Análise Funcional para melhor compreensão dos resultados obtidos.

Para melhor clareza na leitura deste trabalho, repetiremos os problemas, bem como os enunciados dos resultados nos seus respectivos capítulos.

# Notações

$\langle .,. \rangle$ := par de dualidade.

$|\Omega|$ := medida de Lebesgue do conjunto $\Omega$.

$Lip_{loc}(H_0^1(\Omega))$ : denota o espaço dos funcionais localmente lipschitzianos.

$suppu$ := suporte de uma função $u$.

$u_+ := \max\{u, 0\}$.

$u_- := \min\{u, 0\}$.

$\blacksquare$ := fim da demonstração de um teorema, proposição, lema ou corolário.

$|u|_s$ := norma de $u$ em $L^s(\Omega)$.

$\rightharpoonup$:= convergência fraca.

$\|.\| := \|.\|_{H_0^1(\Omega)}$.

$$\int_\Omega f dx = \int_\Omega f(x) dx.$$

$u = u(x)$.

$q.t.p.$ = quase em toda parte

# Capítulo 1

# Uma classe de problemas elípticos não-locais com crescimento crítico

## 1.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar as questões de existência de soluções positivas para a seguinte classe de problemas não-locais do tipo Kirchhoff

$$(P_\lambda)\begin{cases} -\Big[M\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Big]\Delta u = \lambda f(x,u) + u^5 \text{ em } \Omega \\ u(x) > 0, \quad \text{em } \Omega \\ u = 0, \quad \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, é um domínio suave limitado, $\lambda$ é um parâmetro positivo e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, satisfazendo as seguintes condições:

$(M_1)$ Existe $m_0 > 0$ tal que

$$M(t) \geq m_0, \, \forall \, t \in \mathbb{R}^+.$$

$(M_2)$ Existe $\theta > 0$ que a função $\frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \frac{1}{\theta}M(t^2)t^2$ é não-negativa em $[0, +\infty)$, isto é,

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \frac{1}{\theta}M(t^2)t^2 \geq 0 \, \forall \, t \geq 0$$

e

$(M_3)$

$$\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \frac{1}{\theta}M(t^2)t^2\right] \to +\infty \text{ quando } t \to +\infty;$$

com $2(1-H(b))+4H(b)<\theta<6$ onde $H(t)=1$ se $t>0$ e $H(t)=0$ se $t\leq 0$ e $\widehat{M}(t)=\displaystyle\int_0^t M(s)ds$.

$(M_4)$ Existe $b\geq 0$ tal que

$$\frac{M(t)}{t}\to b \text{ quando } t\to+\infty.$$

Uma vez que, a intenção de encontrar soluções positivas, em todo este trabalho vamos supor que

$$f(x,t)=0,\ \forall\, x\in\Omega \text{ e } t\leq 0.$$

As hipóteses sobre a função $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são as seguintes:

$(f_1)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x,t)}{t}=0, \text{ uniformemente em } x\in\Omega.$$

Existe $q\in(2(1-H(b))+4H(b),6)$ verificando

$(f_2)$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(x,t)}{t^{q-1}}=0,\ \forall\ x\in\Omega,$$

e a conhecida condição superlinear de Ambrosetti-Rabinowitz que é

$(f_3)$

$$0<\theta F(x,t)=\theta\int_0^t f(x,s)ds<tf(x,t)\ \forall\ x\in\Omega$$

e $t>0$ onde $\theta$ é dada na hipótese $(M_3)$.

Na demonstração do resultado principal deste capítulo usaremos o seguinte teorema, devido a Ambrosetti-Rabinowitz ver [32]

**Teorema 1.1** *Seja $X$ um espaço de Banach e $I\in C^1(X,\mathbb{R})$ verificando a condição $(PS)$ com $I(0)=0$. Suponhamos que:*

*$(i)$ Existem $\alpha,r>0$ tais que $I(u)\geq\alpha>0$ para todo $u\in X$ tal que $\|u\|=r$.*

*$(ii)$ Existe $e\in X$ tal que $\|e\|>r$ e $I(e)<0$.*

*Para*

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],X):\gamma(0)=0,\gamma(1)=e\}$$

*defina*

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)).$$

*Então $c \geq \alpha$ e $c$ é valor crítico de $I$.*

No que segue, denotamos por $S$ a melhor constante de Sobolev na imersão

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$$

dada por

$$S := \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx : u \in H_0^1(\Omega) e \int_\Omega |u|^6 dx = 1 \right\}.$$

O nosso principal resultado deste capítulo é:

**Teorema 1.2** *Assumindo que as condições $(M_1) - (M_4)$ e $(f_1) - (f_3)$ são verdadeiras, então, existe $\lambda^* > 0$, tal que o problema $(P_\lambda)$ tem uma solução fraca positiva em $H_0^1(\Omega)$, para todo $\lambda \geq \lambda^*$.*

Para demonstrarmos o Teorema 1.2, precisaremos de alguns resultados que veremos a seguir.

## 1.2 Resultados preliminares

O espaço que vamos trabalhar é o espaço $H_0^1(\Omega)$, o qual é definido por

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\},$$

que é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em relação a norma

$$\|u\| = \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right),$$

além disso é um espaço de Hilbert munido com produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx.$$

**Definição 1.1** *Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema $(P_\lambda)$ se para cada $\phi \in H_0^1(\Omega)$*

$$M(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx - \lambda \int_\Omega f(x,u)\phi dx - \int_\Omega u_+^5 \phi dx = 0$$

*onde $\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$*

Por usarmos o método variacional, obteremos soluções fracas de $(P_\lambda)$ encontrando pontos críticos do funcional $I_\lambda : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (u^+)^6 dx. \tag{1.1}$$

Note que $I_\lambda$ é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$I'_\lambda(u)\phi = M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx - \lambda \int_\Omega f(x,u)\phi dx - \int_\Omega u_+^5 \phi dx, \tag{1.2}$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Portanto, os pontos críticos de $I_\lambda$ são soluções fracas para o problema $(P_\lambda)$. Além disso, se o ponto crítico não é trivial pelo Príncipio do Máximo (ver Apêndice B, Teorema B.10), concluímos que a solução do problema $(P_\lambda)$ é positiva.

A seguir mostraremos que a geometria do Passo da Montanha é satisfeita.

**Lema 1.1** *Assumindo que as condições $(M_1)$, $(f_1)$ e $(f_2)$ são verdadeiras, existem números positivos $\rho$ e $\alpha$ tal que*

$$I_\lambda(u) \geq \alpha > 0, \ \forall \ u \in H_0^1(\Omega), \ \textit{com} \ \|u\| = \rho.$$

**Demonstração:** Por $(f_1)$ temos que, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ temos

$$|f(x,t)| \leq \epsilon |t|, \ \text{se} \ |t| < \delta.$$

Por $(f_2)$, segue que, dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \epsilon |t|^{q-1}, \ \text{se} \ |t| \geq R.$$

Mostraremos que,

$$|f(x,t)| \leq M_2 |t|^{q-1} \ \text{para} \ \delta \leq |t| \leq R.$$

Com efeito, desde que $f$ é contínua, existe $K_1 > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq K_1.$$

Note que,

$$K_1 = \frac{K_1}{\delta^{q-1}}\delta^{q-1} \leq \frac{K_1}{\delta^{q-1}}|t|^{q-1} = M_2 |t|^{q-1}.$$

Logo

$$|f(x,t)| \leq M_2 |t|^{q-1}.$$

Assim, combinando $(f_1)$ e $(f_2)$ com a afirmação verificada acima temos que

$$|f(x,t)| \leq \epsilon |t| + M_2 |t|^{q-1}, \ \forall\, t \in \mathbb{R} \text{ para algum } M_2 > 0. \tag{1.3}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F(x,u) &= \int_0^u f(x,t)dt \leq \int_0^u \epsilon|t| + M_2|t|^{q-1}dt \\ &= \frac{\epsilon}{2}|u|^2 + \frac{M_2}{q}|u|^q. \end{aligned}$$

Implicando que

$$F(x,u) \leq \frac{\epsilon}{2}|u|^2 + \frac{M_2}{q}|u|^q,$$

logo,

$$\int_\Omega F(x,u)dx \leq \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega |u|^2 dx + \frac{M_2}{q}\int_\Omega |u|^q dx,$$

e assim,

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega F(x,u)dx &\leq \frac{\lambda\epsilon}{2}\int_\Omega |u|^2 dx + \frac{\lambda M_2}{q}\int_\Omega |u|^q dx \\ &\leq \lambda\epsilon \int_\Omega |u|^2 dx + \lambda M_2 \int_\Omega |u|^q dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u\|^2\right) - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{6}\int_\Omega u^6 dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_0^{\|u\|^2} M(s)ds - \frac{\lambda\epsilon}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{\lambda M_2}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (u_+)^6 dx. \end{aligned}$$

Usando $(M_1)$ vem que

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}m_0\|u\|^2 - \frac{\lambda\epsilon}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{\lambda M_2}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (u_+)^6 dx.$$

Das imersões de Sobolev temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2}m_0\|u\|^2 - \lambda\epsilon C_1\|u\|^2 - \lambda M_2 C_2\|u\|^q - C_3\|u\|^6 \\ &= \left(\frac{1}{2}m_0 - \lambda\epsilon C_1\right)\|u\|^2 - \lambda M_2 C_2\|u\|^q - C_3\|u\|^6. \end{aligned}$$

Escolhendo $0 < \epsilon$ tal que $\dfrac{m_0}{2} > \lambda\epsilon C_1$ temos

$$I_\lambda(u) \geq C_4\|u\|^2 - \lambda K_2\|u\|^q - C_3\|u\|^6,$$

onde $C_4 = \left(\frac{1}{2}m_0 - \lambda\epsilon C_1\right)$ e $K_2 = M_2C_2$.

Seja $\rho > 0$ a ser fixado posteriormente. Para $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = \rho$ temos

$$I_\lambda(u) \geq C_4\rho^2 - \lambda K_2\rho^q - C_3\rho^6.$$

Para que $I_\lambda(u) \geq 0$ temos que ter,

$$C_4\rho^2 - \lambda K_2\rho^q - C_3\rho^6 > 0,$$

ou seja,

$$\rho^2\left(C_4 - \frac{\lambda K_2}{\rho^{2-q}} - C_3\rho^4\right) > 0.$$

Sabemos que $\rho^2 > 0$, então devemos ter

$$C_4 - \lambda K_2\rho^{q-2} - C_3\rho^4 > 0,$$

por outro lado, temos

$$C_4 - (\lambda K_2 + C_3\rho^{6-q})\rho^{q-2} > 0.$$

Note que para $0 < \rho < 1$

$$\lambda K_2 + C_3\rho^{6-q} < \lambda K_2 + C_3,$$

logo,

$$C_4 - \left(\lambda K_2 + C_3\rho^{6-q}\right)\rho^{q-2} > C_4 - \left(\lambda K_2 + C_3\right)\rho^{q-2}.$$

Assim,

$$C_4 > \left(\lambda K_2 + C_3\right)\rho^{q-2},$$

então,

$$\rho < \left(\frac{C_4}{\lambda K_2 + C_3}\right)^{\frac{1}{q-2}}.$$

Tomando $\rho_0 = \min\{1, (\frac{C_4}{\lambda K_2 + C_3})\} > 0$, temos

$$I_\lambda(u) \geq \alpha > 0, \|u\| = \rho,\ \forall\ u \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, desde que $2(1 - H(b)) + 4H(b) < q < 6$ segue o resultado para $\rho > 0$ suficientemente pequeno. ■

**Lema 1.2** *Considere as condições* $(M_3)$ *e* $(f_3)$. *Para todo* $\lambda > 0$ *existe* $e \in H_0^1(\Omega)$ *com* $I_\lambda(e) < 0$ *e* $\|e\| > \rho$.

**Demonstração:** Seja

$$0 < \theta F(x,t) = \theta \int_0^t f(x,s)ds \leq tf(x,t), \ \forall \ t > 0 \text{ onde } \theta > 2. \tag{1.4}$$

Assim,

$$0 < \frac{\theta}{t} \leq \frac{f(x,t)}{F(x,t)}.$$

Considerando $F(x,t) \neq 0$ e $t \neq 0$, vamos analisar o caso $t > 1$, temos assim que

$$0 < \int_1^t \frac{\theta}{s} ds \leq \int_1^t \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds.$$

Logo,

$$\theta \ln t - \theta \ln(1) \leq \ln F(x,t) - \ln F(x,1).$$

Ou seja,

$$\ln t^\theta \leq \ln \frac{F(x,t)}{F(x,1)} \Rightarrow t^\theta \leq \frac{F(x,t)}{F(x,1)}.$$

Daí,

$$0 < t^\theta \leq \frac{F(x,t)}{F(x,1)},$$

isto é,

$$0 < t^\theta F(x,1) \leq F(x,t), \text{ para } t \geq 1, x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, fixando $\min\limits_{x \in \overline{\Omega}} F(x,1) = C_1 > 0$, observamos que $C_1$ está bem definido, visto que $F(.,1)$ é contínua e $\overline{\Omega}$ é compacto. Portanto

$$F(x,t) \geq C_1 t^\theta, \text{ para } t \geq 1 \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Considerando $v_0 \in C_0^\infty \setminus \{0\}$ com $v_0 \geq 0$ em $\Omega$ e $\|v_0\| = 1$, para $t > 0$ suficientemente grande com $\|tv_0\| \geq R$, e usando

$$I_\lambda(u) \;=\; \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u\|^2\right) - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (u^+)^6 dx,$$

segue-se

$$I_\lambda(tv_0) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|tv_0\|^2\right) - \lambda\int_\Omega F(x,tv_0)dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (tv_0)^6 dx.$$

Desde que $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(s)ds$, usando a hipótese $(M_4)$ temos que existe $K > 0$ tal que

$$M(t) \leq K(m_0 + bt).$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_\lambda(tv_0) &\leq \frac{1}{2}\int_0^{\|v_0^2t^2\|} K(m_0+bs)ds - \lambda\int_\Omega C_1|tv_0|^\theta dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (tv_0)^6 dx \\ &\leq \frac{Km_0t^2}{2} + \frac{Kbt^4}{4} - \lambda t^\theta C_1\int_\Omega v_0^\theta dx - \frac{t^6}{6}\int_\Omega (v_0)^6 dx. \end{aligned}$$

Portanto, desde que $2 < \theta < 6$ obtemos

$$I_\lambda(v_0t) \to -\infty$$

quando $t \to \infty$ e este limite implica que, existe $t^* > 0$ tal que $e = t_*v_0 \in H_0^1(\Omega)$ com $\|e\| > \rho$ e $I_\lambda(e) < 0$, provando assim o lema. ■

Usando o Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti-Rabinowitz ver [32], existe uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ satisfazendo,

$$I_\lambda(u_n) \to c_* \text{ e } I_\lambda'(u_n) \to 0.$$

onde $c_*$ é o nível do passo da montanha.

**Lema 1.3** *Assumindo as condições* $(M_1)-(M_4)$ *e* $(f_1)-(f_3)$*, então existe* $\lambda_* > 0$ *tal que* $c_*$ *pertence ao intervalo* $\left(0, (\frac{1}{\theta}-\frac{1}{6})(m_0S)^{\frac{3}{2}}\right)$ *para todo* $\lambda \geq \lambda_*$.

**Demonstração:** Seja $v_0$ é a função dada pelo Lema 1.2, segue-se que existe $t_\lambda > 0$ verificando

$$I_\lambda(t_\lambda v_0) = \max_{t\geq 0} I_\lambda(tv_0).$$

Assim,

$$I_\lambda'(t_\lambda v_0)(t_\lambda v_0) = 0.$$

Portanto,

$$M(\|t_\lambda v_0\|^2)\int_\Omega \nabla(t_\lambda v_0)\nabla(t_\lambda v_0)dx = \lambda\int_\Omega f(x,t_\lambda v_0)t_\lambda v_0 dx + \int_\Omega (t_\lambda v_0)^5\, t_\lambda v_0 dx.$$

Daí temos,

$$t_\lambda^2 M(t_\lambda^2\|v_0\|^2)\int_\Omega |\nabla(v_0)|^2 dx = \lambda\int_\Omega f(x,t_\lambda v_0)t_\lambda v_0 dx + t_\lambda^6\int_\Omega v_0^6 dx. \tag{1.5}$$

Logo,

$$t_\lambda^2 M(t_\lambda^2\|v_0\|^2)\|v_0\|^2 \geq t_\lambda^6\int_\Omega v_0^6 dx. \tag{1.6}$$

Da hipótese $(M_4)$ tem-se que existe $K>0$ tal que

$$M(t)\leq K(m_0+bt),\ \forall\ t\geq 0.$$

Assim,

$$M(t_\lambda^2\|v_0\|^2)\leq K(m_0+Kbt_\lambda^2\|v_0\|^2) = Km_0 + Kbt_\lambda^2\|v_0\|^2,$$

logo,

$$t_\lambda^2 M(t_\lambda^2\|v_0\|^2)\|v_0\|^2 \leq t_\lambda^2 Km_0\|v_0\|^2 + Kbt_\lambda^4\|v_0\|^4. \tag{1.7}$$

De (1.6) e (1.7) segue que

$$t_\lambda^2 Km_0\|v_0\|^2 + Kbt_\lambda^4\|v_0\|^4 \geq t_\lambda^6\int_\Omega v_0^6 dx,$$

ou seja,

$$Km_0\|v_0\|^2 + Kbt_\lambda^2\|v_0\|^4 \geq t_\lambda^4\int_\Omega v_0^6 dx,$$

implicando que $t_\lambda$ é limitado. Assim existe uma sequência $\lambda_n\to\infty$ e $t_0\geq 0$, tal que

$$t_{\lambda_n}\to t_0,\ \text{quando}\ n\to+\infty. \tag{1.8}$$

**Afirmação 1.1** $t_0 = 0$.

De fato, suponhamos, por contradição que $t_0>0$. De (1.8) segue que

$$t_{\lambda_n}^2 km_0\|v_0\|^2 + kbt_{\lambda_n}^4\|v_0\|^4$$

é uma sequência convergente assim, existe uma constante $D>0$ tal que

$$t_{\lambda_n}^2 km_0\|v_0\|^2 + kbt_{\lambda_n}^4\|v_0\|^4 \leq D,\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Usando (1.7) teremos então que

$$t_{\lambda_n}^2 M(t_{\lambda_n}^2 \|v_0\|^2)\|v_0\|^2 \leq D, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e de (1.5) segue que

$$\lambda_n \int_\Omega f(x, t_{\lambda_n} v_0) t_{\lambda_n} v_0 dx + t_{\lambda_n}^6 \int_\Omega v_0^6 dx \leq D, \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Note que, de (1.5)

$$\lim_{n\to\infty} \left( \lambda_n \int_\Omega f(x, t_{\lambda_n} v_0) t_{\lambda_n} v_0 dx + t_{\lambda_n}^6 \int_\Omega v_0^6 dx \right) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \Big[ \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x, t_{\lambda_n} v_0) t_{\lambda_n} v_0 dx + \lim_{n\to\infty} t_{\lambda_n}^6 \int_\Omega v_0^6 dx \Big].$$

Usando (1.8) e a condição de crescimento de $f$ vem que

$$f(x, v_0 t_{\lambda_n}) t_{\lambda_n} v_0 \to f(x, v_0 t_0) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

e

$$|f(x, v_0 t_{\lambda_n})| \leq \epsilon |v_0 t_{\lambda_n}||v_0 t_{\lambda_n}| + M|v_0 t_{\lambda_n}|^{q-1}|v_0 t_{\lambda_n}|.$$

Sendo $(t_{\lambda_n})$ convergente, existe $C > 0$, tal que

$$|t_{\lambda_n}| \leq C, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e desde que $v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ segue-se

$$|f(x, v_0 t_{\lambda_n})| \leq \epsilon C |v_0|^2 + MC|v_0|^q \in L^1(\Omega).$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice B, Teorema B.2) concluímos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x, v_0 t_{\lambda_n}) v_0 t_{\lambda_n} dx = \int_\Omega f(x, v_0 t_0) v_0 t_0 dx.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f(x, t_{\lambda_n} v_0) t_{\lambda_n} v_0 dx + \lim_{n\to\infty} t_{\lambda_n}^6 \int_\Omega v_0^6 dx \ =$$
$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \int_\Omega f(x, t_0 v_0) t_0 v_0 dx + t_0^6 \int_\Omega v_0^6 dx.$$

Desde que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty,$$

se $t_0 > 0$, então por (1.9) $+\infty \leq D$, o que é absurdo, portanto $t_0 = 0$.

Provando assim, a afirmação.

Defina, agora o seguinte caminho

$$\begin{aligned} \gamma_* : [0,1] &\to H_0^1(\Omega) \\ t &\to \gamma_*(t) = te, \end{aligned}$$

com $\gamma_*(0) = 0$ e $I(\gamma_*(1)) = I(e) < 0$, onde

$$0 < c_* = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)).$$

Daí temos

$$0 < c_* \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma_*(t)) = I(t_\lambda v_0).$$

Desde que $\lambda \displaystyle\int_\Omega F(x, t_\lambda v_0)dx \geq 0$ e $\frac{t_\lambda^6}{6} \displaystyle\int_\Omega v_0^6 dx \geq 0$, segue-se

$$I(t_\lambda v_0) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|t_\lambda v_0\|^2\right) - \lambda \int_\Omega F(x, t_\lambda v_0)dx - \frac{t_\lambda^6}{6}\int_\Omega v_0^6 dx \leq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|t_\lambda v_0\|^2).$$

Assim,

$$0 < c_* \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma_*(t)) = I(t_\lambda v_0) \leq \frac{1}{2}\widehat{M}(t_\lambda^2 \|v_0\|^2).$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\widehat{M}(t_{\lambda_n}^2 \|v_0\|^2) &= \frac{1}{2}\int_0^{t_{\lambda_n}^2 \|v_0\|^2} M(s)ds \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^{t_{\lambda_n}^2 \|v_0\|^2} (Km_0 + Kbs)ds \\ &= \frac{1}{2}km_0 t_{\lambda_n}^2 \|v_0\|^2 + \frac{K}{4} m_0 b t_{\lambda_n}^4 \|v_0\|^4. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\widehat{M}(t_{\lambda_n}^2 \|v_0\|^2) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}km_0 t_{\lambda_n}^2 \|v_0\|^2 + \frac{K}{4} m_0 b t_{\lambda_n}^4 \|v_0\|^4 = 0.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(t_\lambda \|v_0\|^2) < K, \ \forall\, K > 0.$$

Considerando $K = \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)(m_0 S)^{\frac{3}{2}}$, temos que para $\lambda$ suficientemente grande

$$0 < c_* < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)(m_0 S)^{\frac{3}{2}}.$$

Provando assim o resultado. ■

## 1.3 Prova do Resultado Principal

A seguir mostraremos o principal resultado deste capítulo.

**Teorema 1.3** *Assuma que as condições $(M_1)-(M_4)$, $(f_1)-(f_3)$ são verdadeiras. Então, existe $\lambda^* > 0$, tal que o problema tem uma solução fraca positiva em $H_0^1(\Omega)$, para todo $\lambda \geq \lambda^*$.*

**Demonstração:** Dos Lemas 1.1, 1.2 e 1.3 existe $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale para $I_\lambda$, isto é,

$$I_\lambda(u_n) \longrightarrow c_* \ \text{ e } \ I'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0$$

com $c_* \in \left(0, \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)(m_0 s)^{3/2}\right)$, para todo $\lambda \geq \lambda_*$.

Mostraremos que $(u_n)$ é limitada.

Desde que, $I_\lambda(u_n) \longrightarrow c_*$, segue-se $(I_\lambda(u_n))$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$I_\lambda(u_n) \leq |I_\lambda(u_n)| \leq C, \ \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Sendo $I'_\lambda(u_n)u_n \to 0$, então dado $\epsilon > 0$ e $\theta > 2$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\theta}\|I'_\lambda(u_n)\|_{(H_0^1(\Omega))^*} \leq \epsilon, \ \forall \ n > n_0.$$

Observe que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\theta}I'_\lambda(u_n)(u_n) &\leq \frac{1}{\theta}|I'_\lambda(u_n)(u_n)| \\ &\leq \frac{1}{\theta}\|I'_\lambda(u_n)\|_{(H_0^1(\Omega))^*}\|(u_n)\|, \end{aligned}$$

deste modo

$$-\frac{1}{\theta}I'_\lambda(u_n)(u_n) \leq \|(u_n)\|, \ \forall \, n > n_0.$$

Logo

$$C + \|u_n\| \geq I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta}I'_\lambda(u_n)(u_n).$$

Daí,

$$\begin{aligned} C + \|u_n\| \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \lambda\int_\Omega F(x, u_n)dx - \frac{1}{6}\int_\Omega |u_n|^6 dx \\ -\frac{1}{\theta}\left[M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 - \lambda\int_\Omega f(x, u_n)(u_n)dx - \int_\Omega |u_n|^6 dx\right], \end{aligned}$$

assim da hipótese $(f_3)$ obtemos,

$$C + \|u_n\| \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2, \ \forall \ n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Assumindo por contradição que $(u_n)$ não é limitada em $H_0^1(\Omega)$, então existe uma subsequência ainda denotada por $(u_n)$, tal que

$$\|u_n\| \to +\infty.$$

Multiplicando (1.10) por $\frac{1}{\|u_n\|}$ para $n$ suficientemente grande, temos

$$\frac{C}{\|u_n\|} + 1 \geq \frac{1}{\|u_n\|}\left[\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2\right].$$

Da condição $(M_3)$

$$\frac{C}{\|u_n\|} + 1 \geq \frac{1}{\|u_n\|}\left[\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2\right] \to +\infty$$

o que é um absurdo. Portanto $(u_n)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$ e, a menos de subsequência, existe $t_0 \geq 0$ tal que

$$\|u_n\| \to t_0. \tag{1.11}$$

Sendo $M$ contínua, obtemos

$$M(\|u_n\|^2) \to M(t_0^2). \tag{1.12}$$

Sendo $(u_n)$ é limitada, $H_0^1(\Omega)$ reflexivo, usando as imersões de Sobolev e o Teorema de Vainberg (ver Apêndice B, Teorema B.7), a menos de subsequência, temos que

$$u_n \rightharpoonup u, \ \text{em } H_0^1(\Omega) \tag{1.13}$$

$$u_n \to u, \ \text{em } L^r(\Omega) \tag{1.14}$$

$$u_n(x) \to u(x), \ \text{q.t.p. } \Omega \tag{1.15}$$

$$|u_n(x)| \leq h(x), \ \text{q.t.p. em } \Omega, \ h \in L^2(\Omega). \tag{1.16}$$

Por outro lado, do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions (ver [23]), temos que existem duas famílias $(\mu_i)_{i\in\Lambda}$ e $(\nu_i)_{i\in\Lambda}$ de números reais não-negativos e uma família $(x_i)_{i\in\Lambda}$ de pontos do $\mathbb{R}^3$, onde $\Lambda$ é um conjunto de índices no máximo enumerável, tais que

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \widehat{\mu} \geq |\nabla u|^2 + \mu \tag{1.17}$$

$$(u_n)_+^6 \rightharpoonup \widehat{\nu} = (u_+)^6 + \nu, \tag{1.18}$$

onde,

$$\nu = \sum_{i\in\Lambda} \nu_i \delta_{x_i}, \quad \mu \geq \sum_{i\in\Lambda} \mu_i \delta_{x_i} \;\text{ e }\; S\nu_i^{1/3} \leq \mu_i \tag{1.19}$$

para todo $i \in \Lambda$, onde $\delta_{x_i}$ é a medida de Dirac de massa 1 em $x_i \in \Omega$.

Fixemos $i \in \Lambda$ e consideremos a aplicação $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$, $|\nabla\phi|_\infty \leq 2$ e

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \quad B_1(0) \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^3 \backslash B_2(0). \end{cases}$$

Para cada $\rho > 0$ definamos

$$\psi_\rho = \phi\left(\frac{(x - x_i)}{\rho}\right).$$

Assim $\psi_\rho \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \psi_\rho \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e $|\nabla\psi|_\infty \leq 2$,

$$\psi_\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \quad B_\rho(x_i) \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \backslash B_{2\rho}(x_i). \end{cases}$$

Observe que a sequência $(\psi_\rho u_n)$ é limitada. De fato, pois

$$\begin{aligned} \|\psi_\rho u_n\|^2 &= \int_\Omega |\nabla(\psi_\rho u_n)|^2 dx \\ &= \int_\Omega |\nabla\psi_\rho u_n + \nabla u_n \psi_\rho|^2 dx \\ &\leq 4\int_\Omega |\nabla\psi_\rho u_n|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_n \psi_\rho|^2 dx \\ &\leq 4\|u_n\|^2 + 4\int_\Omega |\nabla\psi_\rho|^2 |u_n|^2 dx. \end{aligned}$$

Da Desigualdade de Hölder (ver Apêndice B, Teorema B.3) temos

$$\|\psi_\rho u_n\|^2 \leq 4\|u_n\|^2 + 4\Big[\int_\Omega |\nabla\psi_\rho|^3\Big]^{\frac{2}{3}} |u_n|_6^2.$$

Da imersão contínua de Sobolev existe $K > 0$ tal que

$$|u_n|^2_{L^6(\Omega)} \leq K\|u_n\|^2.$$

Note que o suporte de $\psi_\rho$ está contido em $B_\rho(x_i)$, logo, teremos

$$\Big[\int_\Omega |\nabla\psi_\rho|^3\Big]^{\frac{2}{3}} = \Big[\int_{B_\rho(x_i)} |\nabla\psi_\rho|^3\Big]^{\frac{2}{3}}.$$

Pela Regra da Cadeia, temos

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-x_i}{\rho}, \\ \rho y &= x - x_i \text{ e } dx = \rho^3 dy \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial \psi_\rho}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \phi(\frac{x-x_i}{\rho})}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi(y)}{\partial y_i}(-\frac{1}{\rho}),$$

daí,

$$|\nabla \psi_\rho(x)| = |-\frac{1}{\rho}\nabla \phi(y)| = \frac{1}{\rho}|\nabla \phi(y)|$$

assim,

$$\int_{B_\rho(x_i)} |\nabla \psi_\rho|^3 dx \;\; = \;\; \Big[\int_{B_1(0)} \frac{1}{\rho^3}\left(|\nabla \phi|^3\right)\rho^3 dy\Big]^{\frac{2}{3}} \leq \|\nabla \phi\|_\infty^3 |B_1(0)|,$$

logo,

$$\|\psi_\rho u_n\|^2 \leq 4\|u_n\|^2 + 4K\|u_n\|^2\|\nabla\phi\|_\infty^3|B_1(0)| \leq \|u_n\|^2\left(4 + 4KK_1\right)$$

assim, tomando $\tilde{\mathrm{C}}= 4 + 4KK_1$ então,

$$\|\psi_\rho u_n\|^2 \leq C\|u_n\|^2.$$

Desde que a sequência $(u_n)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, segue-se que $(u_n\psi_\rho)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, sendo $(u_n)$ uma sequência Palais-Smale, segue-se

$$I'_\lambda(u_n)(u_n\psi_\rho) \to 0,$$

ou seja,

$$M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n\psi_\rho)dx - \lambda\int_\Omega f(x,u_n)u_n\psi_\rho dx - \int_\Omega (u_n^+)^5 u_n\psi_\rho dx = o_n(1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla \psi_\rho u_n dx &= \lambda\int_\Omega f(x,u_n)u_n\psi_\rho dx + \int_\Omega (u_n^+)^5\psi_\rho dx \\ &- M(\|u_n\|^2)\int_\Omega |\nabla u_n|^2\psi_\rho dx + o_n(1). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Da continuidade da função $f$, e como $\psi_\rho$ tem suporte compacto temos

$$f(x,u_n(x))u_n(x)\psi_\rho(x) \to f(x,u(x))u(x)\psi_\rho \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

e

$$f(x,u_n(x))u(x)\psi_\rho \to f(x,u(x))u(x)\psi_\rho(x) \ \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, da condição de crescimento e de (1.16)

$$\begin{aligned} |f(x,u_n(x))u_n(x)\psi_\rho(x)| &\leq C_1|u_n(x)|(u_n(x))\psi_\rho + C_2|u_n(x)|^{q-1}(u_n(x))\psi_\rho \\ &\leq C_1|u_n(x)|^2\psi_\rho + C_2|u_n(x)|^q\psi_\rho \\ &\leq C_1|h(x)|^2\psi_\rho + C_2|h(x)|^q\psi_\rho \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice B, Teorema B.2)

$$\int_\Omega f(x,u_n(x))u_n(x)\psi_\rho dx \to \int_\Omega f(x,u(x))u(x)\psi_\rho(x)dx.$$

Do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions (ver [23]), segue-se que

$$\begin{aligned} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla \psi_\rho u_n dx &\leq \lambda \int_\Omega f(x,u_n)u_n\psi_\rho dx + \int_\Omega (u^+)^6\psi_\rho dx + \sum_{i\in\Lambda}\nu_i\delta_{x_i}(\psi_\rho) \\ &- M(t_0^2)\int_\Omega |\nabla u|^2\psi_\rho dx - M(t_0^2)\sum_{i\in\Lambda}\mu_i\delta_{x_i}(\psi_\rho) + o_n(1), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla \psi_\rho u_n dx &\leq \lambda \int_\Omega f(x,u_n)u_n\psi_\rho dx + \int_\Omega (u^+)^6\psi_\rho dx + \sum_{i\in\Lambda}\nu_i\psi_\rho(x_i) \\ &- M(t_0^2)\int_\Omega |\nabla u|^2\psi_\rho dx - M(t_0^2)\sum_{i\in\Lambda}\mu_i\psi_\rho(x_i) + o_n(1). \end{aligned}$$

Passando ao limite superior de $n \to \infty$, teremos

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla \psi_\rho (u_n) dx &\leq \lambda \int_\Omega f(x,u)u\psi_\rho dx + \int_\Omega (u^+)^6\psi_\rho dx + \sum_{i\in\Lambda}\nu_i\psi_\rho(x_i) \\ &- M(t_0^2)\int_\Omega |\nabla u|^2\psi_\rho dx - M(t_0^2)\sum_{i\in\Lambda}\mu_i\psi_\rho(x_i). \end{aligned}$$

Vejamos agora que

$$\int_\Omega (u^+)^6\psi_\rho dx = o_\rho(1), \int_\Omega f(x,u)u\psi_\rho dx = o_\rho(1) \text{ e } M(t_0^2)\int_\Omega |\nabla u|^2\psi_\rho dx = o_\rho(1). \quad (1.21)$$

Para isso basta notar que, quando $\rho \to 0$

$$|u(x)|^6\psi_\rho(x)\chi_{B(x_i,\rho)}(x) \to 0, \ \text{q.t.p. em } \Omega,$$

$$M(t_0^2)|\nabla u(x)|^2\psi_\rho(x)\chi_{B(x_i,\rho)}(x) \to 0, \ \text{q.t.p. em } \Omega,$$

$$f(x,u(x))u(x)\psi_\rho(x)\chi_{B(x_i,\rho)}(x) \to 0, \ \text{q.t.p. em } \Omega.$$

e

$$\begin{aligned}
|u(x)|^6\psi_\rho(x)\chi_{B(x_i,\rho)}(x) &\leq |u(x)|^6, \text{ q.t.p. em } \Omega,\\
M(t_0^2)|\nabla u(x)|^2\psi_\rho(x)\chi_{B(x_i,\rho)}(x) &\leq M(t_0^2)|\nabla u(x)|^2, \text{ q.t.p. em } \Omega,\\
f(x,u(x))u(x)\psi_\rho(x)\chi_{B(x_i,\rho)}(x) &\leq C_1|u(x)|^2 + C_2|u(x)|^q, \text{ q.t.p. em } \Omega.
\end{aligned}$$

Assim, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice B, Teorema B.2) concluímos as convergências em (1.21). Portanto,

$$\lim_{\rho\to 0}\Big[\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\rho u_n dx\Big] \leq \lim_{\rho\to 0}\Big[\sum_{i\in\Lambda}\nu_i\psi_\rho(x_i) - M(t_0^2)\sum_{i\in\Lambda}\mu_i\psi_\rho(x_i)\Big]. \tag{1.22}$$

**Afirmação 1.2** *Afirmamos que*

$$\lim_{\rho\to 0}\left[\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\rho u_n dx\right] = 0.$$

De fato, uma vez que para cada $n \in \mathbb{N}$,$|\nabla u_n| \in L^2(\Omega)$ e $|\nabla\psi_\rho u_n| \in L^2(\Omega)$, segue-se pela Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\rho u_n &\leq |M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\rho u_n| dx\\
&\leq M(\|u_n\|^2)\int_\Omega |\nabla u_n\nabla\psi_\rho u_n| dx\\
&\leq M(\|u_n\|^2)\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |u_n|^2|\nabla\psi_\rho|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= M(\|u_n\|^2)\|u_n\|\left(\int_\Omega |u_n|^2|\nabla\psi_\rho|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Sendo $(u_n)$ uma sequência limitada, da continuidade de M e do fato que $[supp(\psi_\rho) \subset B(x_i, 2\rho)]$, existe $C_5 > 0$ tal que

$$M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\rho u_n \leq C_5\left(\int_{B(x_i,2\rho)} |u_n|^2|\nabla\psi_\rho|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.23}$$

Pondo $g_n(x) = |u_n(x)|^2|\nabla\psi_\rho(x)|^2$, segue-se de (1.15) e (1.16) que

$$g_n(x) \to g(x), \text{ e } |g_n(x)| \leq h^2(x)|\nabla\psi_\rho|^2 \in L^1(\Omega), \text{ q.t.p. em } B(x_i, 2\rho),$$

onde $g(x) = |u(x)|^2|\nabla\psi_\rho(x)|^2$. Assim do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice B, Teorema B.2)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B(x_i,2\rho)} |u_n|^2|\nabla\psi_\rho|^2 dx = \int_{B(x_i,2\rho)} |u|^2|\nabla\psi_\rho|^2. \tag{1.24}$$

Logo, de (1.23) e (1.24) concluímos que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\rho(u_n)\le C_5\left(\int_{B(x_i,2\rho)}|u|^2|\nabla\psi_\rho|^2\right)^{\dfrac{1}{2}}.$$

Uma vez que, $|u|^2\in L^3(\Omega)$ e $|\nabla\psi_\rho|^2\in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, teremos novamente da Desigualdade de Hölder (ver Apêndice B, Teorema B.3) que

$$\lim_{n\to\infty} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\rho u_n\le C_5\left(\int_{B(x_i,2\rho)}|u|^6\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_{B(x_i,2\rho)}|\nabla\psi_\rho|^3\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{1.25}$$

Usando novamente a Regra da cadeia

$$\frac{\partial\psi_\rho(x)}{\partial x_j}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\left(\frac{x-x_i}{\rho}\right).$$

Considerando a mudança de variável $y=\dfrac{x-x_i}{\rho}$, obtemos $\rho y=x-x_i$ e $dx=\rho^3dy$

$$\frac{\partial\psi_\rho}{\partial x_i}=\frac{\partial\phi(\frac{x-x_i}{\rho})}{\partial x_i}=\frac{\partial\phi(y)}{\partial x_i}(-\frac{1}{\rho}),$$

daí,

$$|\nabla\psi_\rho(x)|=|-\frac{1}{\rho}\nabla\phi(y)|=\frac{1}{\rho}|\nabla\phi(y)|$$

assim,

$$\int_{B(x_i,2\rho)}|\nabla\psi_\rho|^3dx \;=\; \Big[\int_{B(0,2)}\left(|\nabla\phi|^3\right)dy\Big]^{\dfrac{2}{3}}\le\|\nabla\phi\|_\infty^3|B(0,2)|. \tag{1.26}$$

Substituindo (1.26) em (1.25), obtemos

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\rho u_n &\le C_5\left(\int_{B(x_i,2\rho)}(u^+)^6\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_{B(0,2)}|\nabla\phi_\rho|^3dy\right)^{\frac{2}{3}}\\ &\le C_5\left(\int_{B(x_i,2\rho)}(u^+)^6\right)^{\frac{1}{3}}\|\nabla\phi\|_\infty^3|B(0,2)|,\end{aligned}$$

assim, fixando $C=C_5\|\nabla\phi\|_\infty^3|B(0,2)|$ teremos

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\rho u_n\le C\left(\int_{B(x_i,2\rho)}(u^+)^6\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Finalmente definindo $g_\rho(x)=(u^+(x))^6\chi_{B(x_i,2\rho)}(x)$, segue-se que

$$g_\rho(x)\to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^3,\ \text{quando } \rho\to 0$$

logo,

$$|g_\rho(x)| \leq |u^+(x)|^6 \in L^1(\Omega).$$

Portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice B, Teorema B.2)

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\int_{B(xi,2\rho)}(u^+)^6dx\right)^{\frac{1}{3}} = 0$$

e consequentemente

$$\lim_{\rho\to 0}\left[\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla\psi_\rho u_n dx\right] = 0.$$

Daí, de (1.22), obtemos

$$0 \leq \lim_{\rho\to 0}\left(\sum_{i\in\Lambda}\nu_i\psi_\rho(x_i) - M(t_0^2)\sum_{i\in\Lambda}\mu_i\psi_\rho(x_i)\right),$$

ou seja,

$$0 \leq \lim_{\rho\to 0}\left(\int_{B(x_i,2\rho)}\psi_\rho\ d\nu - M(t_0^2)\int_{B(x_i,2\rho)}\psi_\rho\ d\mu\right).$$

Agora veremos que

$$\int_{B(x_i,2\rho)}\psi_\rho\ d\nu = \int_{\{x_i\}} d\nu \text{ e } M(t_0^2)\int_{B(x_i,2\rho)}\psi_\rho\ d\mu = M(t_0^2)\int_{\{x_i\}} d\mu.$$

Com efeito, temos que,

$$\int_{B(x_i,2\rho)}\psi_\rho\ d\nu = \int_\Omega \psi_\rho\chi_{B(x_i,2\rho)}\ d\nu \ \text{ e } \int_{B(x_i,2\rho)}\psi_\rho\ d\mu = \int_\Omega \psi_\rho\chi_{B(x_i,2\rho)}\ d\mu,$$

onde

$$\psi_\rho(x)\chi_{B(x_i,2\rho)}(x) \to \chi_{\{x_i\}}(x),\ q.t.p. \text{ em } \Omega,$$

quando $\rho \to 0$ e

$$|\psi_\rho(x)\ \ \chi_{B(x_i,2\rho)}(x)| \leq 1,\ q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Desde que as medidas de Radon são finitas, concluímos que $1 \in L^1(\nu)$ e $1 \in L^1(\mu)$, logo do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice B, Teorema B.2), resulta que,

$$\int \psi_\rho\chi_{B(x_i,2\rho)}\ d\nu = \int \chi_{\{x_i\}}\ d\nu + o\rho(1) \ \text{ e } \int \psi_\rho\chi_{B(x_i,2\rho)}\ d\mu = \int \chi_{\{x_i\}}\ d\mu + o_\rho(1).$$

Isto é,

$$\int_{B(x_i,2\rho)} \psi_\rho \, d\nu = \int_{\{x_i\}} d\nu + o_\rho(1) \;\text{ e }\; M(t_0^2)\int_{B(x_i,2\rho)} \psi_\rho \, d\mu = M(t_0^2)\int_{\{x_i\}} d\mu + o_\rho(1).$$

Sendo assim, obtemos

$$0 \leq \int_{\{x_i\}} d\nu - M(t_0^2)\int_{\{x_i\}} d\mu.$$

Logo,

$$M(t_0^2)\int_{\{x_i\}} d\mu \leq \int_{\{x_i\}} d\nu,$$

e portanto, vale

$$M(t_0^2)\mu(x_i) \leq \nu(x_i). \tag{1.27}$$

Por outro lado temos

$$\nu(x_i) = \sum_{i\in\Lambda} \nu_i \delta_{x_i}(x_i) = \nu_i$$

e

$$\mu(x_i) = \sum_{i\in\Lambda} \mu_i \delta_{x_i}(x_i) = \mu_i.$$

Do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions segue-se que

$$\mu_i \geq S\nu_i^{\frac{1}{3}}, \;\; \forall \;\, i \in \Lambda. \tag{1.28}$$

Assim comparando as desigualdades (1.27) e (1.28) e por $(M_1)$

$$\nu_i \geq M(t_0^2)\mu(x_i) \geq S\nu_i^{\frac{1}{3}} m_0.$$

Logo

$$\nu_i \geq M(t_0^2)\mu(x_i) \geq m_0\mu_i,$$

e portanto, supondo que $\nu(x_i) = \nu_i > 0$, de (1.19) obtemos

$$\nu_i \geq (m_0 S)^{\frac{3}{2}} \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)(m_0 S)^{\frac{3}{2}}, \tag{1.29}$$

pois $\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right) < 1$.

Logo a desigualdade em (1.29) ocorre para todo índice $i \in \Lambda$ tal que $\nu_i$ e $\mu_i$ são positivos.

Argumentamos agora com intuito de mostrar que o conjunto $\Lambda$ é vázio, isto é, os números $\nu_i$ e $\mu_i$ são todos nulos, ou seja, a desigualdade (1.29) não pode ocorrer.

De fato, suponhamos por contradição que para algum $i \in \Lambda$ para os quais $\nu_i$ e $\mu_i$ sejam positivos. Assim, de (1.29) a sequência $(\nu_i)$ não convergirá para zero e portanto a série

$$\sum_{i\in\Lambda} \nu_i^{\frac{1}{3}}$$

divergirá, contradizendo o Princípio de concentração e Compacidade de Lions (ver [23]), desta forma, concluímos que $\Lambda$ é vázio ou finito.

Uma vez que $(u_n)$ é uma sequência Palais-Smale, temos que

$$\begin{aligned} c_* &= I(u_n) - \frac{1}{\theta} I'(u_n)(u_n) + o_n(1) \\ c_* &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \lambda \int_\Omega F(x,u_n)dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (u_n^+)^6 dx \\ &- \frac{1}{\theta}\left[ M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 - \lambda \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx - \int_\Omega (u_n^+)^6 dx \right] + o_n(1), \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} c_* &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta} M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \\ &+ \lambda \int_\Omega \left[ \frac{1}{\theta} f(x,u_n)(u_n)dx - F(x,u_n)dx \right] \\ &+ \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{6} \right) \int_\Omega (u_n^+)^6 dx + o_n(1). \end{aligned}$$

Assim, por $(f_3)$ temos

$$\lambda \int_\Omega \left[ \frac{1}{\theta} f(x,u_n)(u_n)dx - F(x,u_n)dx \right] > 0.$$

Por $(M_2)$ obtemos,

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta} M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \geq 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$$

assim, como $0 \leq \psi_\rho \leq 1$

$$c_* \geq \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{6} \right) \int_\Omega (u_n^+)^6 dx + o_n(1) \geq \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{6} \right) \int_\Omega \psi_\rho (u_n^+)^6 dx + o_n(1).$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos,

$$c_* \geq \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{6} \right) \sum_{i\in\Lambda} \psi_\rho(x_i)\nu_i = \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{6} \right) \sum_{i\in\Lambda} \nu_i \geq \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{6} \right) (m_0 S)^{\frac{3}{2}}$$

o que contradiz nossa hipótese inicial. Portanto $\nu_i = 0$, $\forall\ i \in \Lambda$, isto é, $\Lambda$ é vazio.

Sendo assim, do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions (ver [23]), concluímos que

$$\int_\Omega (u_n^+)^5 \varphi dx \to \int_\Omega (u^+)^5 \varphi dx,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

e portanto

$$\int_\Omega (u_n^+)^6 dx \to \int_\Omega (u^+)^6 dx.$$

Desde que $(u_n)$ é uma sequência Palais-Smale limitada, $u_n \to u$ em $L^6(\Omega)$ e $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$ temos

$$\lim_{n\to\infty} M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 = \lambda \int_\Omega f(x,u)u dx + \int_\Omega (u^+)^6 dx.$$

Por outro lado, como $u_n \rightharpoonup u$ e $\|u_n\| \to t_0$ teremos

$$M(t_0^2) \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega f(x,u) v dx + \int_\Omega (u^+)^5 v dx,\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega),$$

portanto

$$M(t_0^2)\|u\|^2 = \lambda \int_\Omega f(x,u)u dx + \int_\Omega (u^+)^6 dx.$$

De onde segue que

$$M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \to M(t_0^2)\|u\|^2.$$

Desde que

$$M(\|u_n\|^2) \to M(t_0^2),$$

obtemos que $\|u_n\|^2 \to \|u\|^2$. Uma vez $u_n \rightharpoonup u$ e $H_0^1(\Omega)$ é uniformemente convexo, segue-se $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Assim, concluímos que $I_\lambda$ verifica a condição Palais-Smale.

Além disso, usando o fato de que o funcional $I_\lambda$ é de classe $C^1$, obtemos

$$I_\lambda(u_n) \to I_\lambda(u) \ \text{ e } \ I'_\lambda(u_n) \to I'_\lambda(u),$$

e assim pela unicidade do limite

$$I_\lambda(u) = c_* > 0 \ \text{ e } \ I'_\lambda(u) = 0,$$

portanto $u$ é solução fraca do Problema $(P_\lambda)$, se $u=0$ teremos $I_\lambda(0)=0$ e como $I_\lambda(u)=c_*>0$, concluímos que $u$ é não trivial.

Agora mostraremos que $u$ é não-negativa. Desde que

$$\begin{aligned}
I'_\lambda(u)(u^-) &= M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\nabla u^- dx-\lambda\int_\Omega f(x,u)u^- dx-\int_\Omega (u^+)^5u^- dx+o_n(1)\\
&= M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u^+\nabla u^- dx+\int_\Omega \nabla u^-\nabla u^- dx\\
&- \lambda\left(\int_{\{x\in\Omega;u(x)>0\}} f(x,u^+)u^- dx+\int_{\{x\in\Omega;u(x)\leq 0\}} f(x,u^-)u^- dx\right)-\int_\Omega (u^+)^5u^- dx\\
&= M(\|u\|^2)\|u^-\|^2,
\end{aligned}$$

se $u$ é ponto crítico de $I_\lambda$ temos $I'_\lambda(u)(u^-)=0$,

$$M(\|u\|^2)\|u^-\|^2=0.$$

Desde que

$$M(\|u\|^2)>0$$

então,

$$\|u^-\|^2=0,$$

mostrando que $u^-=0$ q.t.p. em $\Omega$. Portanto $u\geq 0$ q.t.p. em $\Omega$.

Por resultados de regularidades do tipo bootstrap a solução fraca $u$ é uma solução clássica, como

$$\lambda f(x,u)+u^5\geq 0$$

e

$$M(\|u\|^2)\geq 0,$$

daí,

$$\begin{cases} -\Delta u\geq 0 \;\; em \;\; \Omega\\ u=0 \;\; em \;\; \partial\Omega. \end{cases}$$

Desde que

$$\min_{\Omega} u(x)=\min_{\partial\Omega} u(x)=0,$$

daí suponhamos que exista $x_0\in\Omega$ tal que $u(x_0)=\inf_{x\in\Omega} u(x)$, teríamos $u(x)=0$, absurdo. Pois $u\neq 0$, portanto pelos Príncipios do Máximo $u(x)>0,\ \forall\ x\in\Omega.$ ■

# Capítulo 2

# Resultados abstratos

Neste capítulo, apresentaremos algumas propriedades envolvendo funcionais localmente lipschitziano e gradiente generalizado da teoria dos pontos críticos desenvolvida por Clarke e Chang. Algumas definicões e propriedades importantes que serão muito úteis no desenvolvimento deste trabalho. Nos limitaremos em apresentar a demonstração de alguns resultados, pois os demais, podem ser encontrados em detalhes no trabalho [29]. No decorrer deste capítulo, $X$ denotará um espaco de Banach separável e reflexivo, $\|.\|$ denotará uma norma em $X$ e $X^*$ e $\langle .,. \rangle$ o par de dualidade entre $X$ e $X^*$.

## 2.1 Gradiente generalizado

**Definição 2.1** *Seja $X$ um espaço de Banach e $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $I$ é um funcional localmente lipschitziano ($Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$) se dado $u \in X$, existir uma vizinhança $V = V_u \subset X$ de $u$ e uma constante $K = K_v \geq 0$ tal que*

$$|I(v_1) - I(v_2)| \leq \|v_1 - v_2\|, \ \forall \ v_1, v_2 \in V. \tag{2.1}$$

**Definição 2.2** *A Derivada Direcional Generalizada de um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, em um ponto $u \in X$ na direção de $v \in X$, denotado por $I^\circ(u, v)$ é definida por*

$$I^\circ(u, v) = \lim_{h \to 0} \sup_{\lambda \downarrow 0} \frac{I(u + h + \lambda v) - I(u + h)}{\lambda}, \ \forall \, v \in X.$$

Consideremos as seguintes propriedades:

$(i)$ A função $I^\circ(u, .) : X \to \mathbb{R}$ é sub-aditiva e homogênea positiva,isto é,

$$I^\circ(u, v_1 + v_2) \leq I^\circ(u, v_1) + I^\circ(u, v_2), \ \forall \, v_1, v_2 \in X,$$

e

$$I^{\circ}(u, \lambda v) = \lambda I^{\circ}(u, v), \ \forall\, v \in X \text{ e } \lambda \geq 0.$$

$(ii)$ $I^{\circ}(u, v)$ é um funcional convexo.

$(iii)$ $|I^{\circ}(u, v)| \leq K(u)\|v\|$, onde $K(u) \geq 0$ satisfaz (2.1) e depende do conjunto aberto $V = V_u$, para cada $u \in X$.

$(iv)$ $I^{\circ}(u, v)$ é uma função semi-contínua superiormente, isto é,

$$\limsup_{(u_j, v_j) \to (u, v)} I^{\circ}(u_j, v_j) \leq I^{\circ}(u, v),$$

onde $(u_j, v_j) \in X \times X$.

$(v)$ $|I^{\circ}(u, v) - I^{\circ}(u, t)| \leq K\|v - t\|$, $\forall$ $u, v$, e $t \in X$, isto é, $I^{\circ}(u; .) : X \to \mathbb{R}$ é uma função lipschitz, com constante $K$.

$(vi)$ $(I + H)^{\circ}(u, v) \leq I^{\circ}(u, v) + H^{\circ}(u, v)$ e $I^{\circ}(u, -v) = (-I)^{\circ}(u, v)$ $\forall$ $u, v \in X$.

Agora, definiremos o Gradiente generalizado de um funcional localmente Lipschitz.

**Definição 2.3** *Seja $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$. Definimos o Gradiente generalizado de $I$ no ponto $u \in X$, e denotamos por $\partial I(u)$, o subconjunto de $X^*$ dado por*

$$\partial I(u) = \Big\{ f \in X^*; \langle f, v \rangle \leq I^{\circ}(u, v), \forall v \in X \Big\}.$$

Desde que $I^{\circ}(u, 0) = 0$, segue-se que $\partial I(u) = \partial I^{\circ}(u, 0)$.

**Exemplo** Seja $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $I(x) = |x|$. Temos que $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ e o gradiente generalizado de I é

$$\partial I(u) = \begin{cases} \{\text{-1}\}, & se \quad u < 0 \\ [\text{-1,1}], & se \quad u = 0 \\ \{1\}, & se \quad u > 0. \end{cases}$$

**Lema 2.1** (*ver*[*29*]) *O Gradiente generalizado de um funcional* ($I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$) *é sempre não vazio, isto é, $\partial I(u) \neq \emptyset$.*

**Lema 2.2** (*ver*[*29*]) *Dados $u, v \in X$ tem-se, $I^{\circ}(u, v) = \max\{\langle f, v \rangle; f \in \partial I(u)\}$.*

Algumas propriedades ligadas ao Gradiente Generalizado.

**(P1)** Para todo $x \in X$ o conjunto $\partial f(x) \subset X^*$ é convexo e compacto na topologia fraca$*$.

Além disso, para $\xi \in \partial f(x)$ temos $\|\xi\|_{X^*} \leq K(x)$.

**(P2)** Para cada $f, g \in Lip_{loc}(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x)$$

e

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

**(P3)** A função

$$\begin{aligned} \partial f &\to \mathcal{P}(X^*) \\ x &\to \partial f(x). \end{aligned}$$

é semi-contínua superiormente, isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\epsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$, tal que se $\|x - x_0\| < \delta$ e $\xi \in \partial f(x)$, existe $\xi_0 \in \partial f(x_0)$ verificando

$$\|\xi - \xi_0\|_{X^*} < \epsilon,$$

ou equivalentemente

$$|\langle \xi - \xi_0, v\rangle|_{X^*} < \epsilon, \ \forall\ v \in X, \ \text{com} \ \|v\| \leq 1.$$

**(P4)** Seja

$$\begin{aligned} \partial f &\to \mathcal{P}(X^*) \\ x &\to \partial f(x). \end{aligned}$$

A função $\partial f$ é fechada fraco$^*$, isto é, se $(x_j, \xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X \times X^*$ é uma sequência tal que $\xi \in \partial f(x)$, $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = x \in X$ e $\lim\limits_{j\to\infty} \langle \xi_j - \xi_0, v\rangle = 0$, $\forall\ v \in X$, então $\xi_0 \in \partial f(x)$.

**(P5)** O funcional $x \to f(x)$ é semi-contínua inferiormente, isto é,

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

**(P6)** Sejam $\phi \in C^1([0,1], X)$ e $f \in Lip_{Loc}(X, \mathbb{R})$. Então, a função $h = f \circ \phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ é diferenciável q.t.p. em $[0,1]$ e

$$h^{'}(t) \leq \max\{\langle \xi, \phi^{'}\rangle; \xi \in \partial f(\phi(t))\}, \ q.t.p. \text{ em } [0,1].$$

**(P7)** Se $f$ é continuamente diferenciável a Fréchet numa vizinhança aberta de $x \in X$, temos

$$\partial f(x) = \{f^{'}(x)\}.$$

**(P8)** Se $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $g \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, então

$$\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

**Lema 2.3** *Para cada $u \in X$ existe $w \in \partial I(u)$ tal que*

$$m(u) = \min\{\|w\|_{X^*}, w \in \partial I(u)\}$$

**Definição 2.4** *Uma sequência $(u_n) \subset X$ é uma sequência Palais-Smale no nível $c$ $(P.S)_c$.*

$$I(u_n) \to c$$
$$m(u_n) \to 0.$$

**Definição 2.5** *Um funcional $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição Palais-Smale no nível $c$, se toda sequência $(P.S)_c$ possui uma subsequência fortemente convergente.*

# Capítulo 3

# Uma classe de problemas elípticos não locais com crescimento crítico e não linearidade descontínua

Neste capítulo, vamos estudar questões de existência de soluções para a seguinte classe de problemas:

$$
(P_{\lambda,a})\begin{cases} -\Big[M\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Big]\Delta u = \lambda H(u-a)u^q + u^5, \ \text{em } \Omega \\ u(x) > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \ \ \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}
$$

onde $\Omega$ é um domínio limitado do $\mathbb{R}^3$, $\lambda > 0$ e $a > 0$ parâmetros reais. $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função e $1 \leq q < 5$.

## 3.1 Introdução

Nesta seção faremos algumas definições, enunciaremos e demonstraremos alguns resultados importantes para a demonstração do resultado principal.

No que segue, $H$ denota a função Heaviside, isto é,

$$
H(x) = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ x \leq 0 \\ 1 \ \ se \ \ x > 0 \end{cases}
$$

e $M$ é uma função contínua, satisfazendo as seguintes condições:

$(M_1)$ Existe $m_0 > 0$ tal que

$$
M(t) \geq m_0, \ \forall \ t \in \mathbb{R}^+.
$$

$(M_2)$ Existe $\theta > 0$ tal que a função $\dfrac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \dfrac{1}{\theta}M(t^2)t^2$ é não negativa em $[0, +\infty)$, isto é,

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \frac{1}{\theta}M(t^2)t^2 \geq 0 \; \forall \, t \geq 0.$$

$(M_3)$

$$\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \frac{1}{\theta}M(t^2)t^2\right] \to +\infty \text{ quando } t \to +\infty,$$

com $2(1 - H(b)) + 4H(b) < \theta < 6$, e $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(s)ds.$

$(M_4)$ Existe $b \geq 0$ tal que

$$\frac{M(t)}{t} \to b \text{ quando } t \to +\infty.$$

Note que da condição $(M_3)$, quando $b = 0$ obtemos

$$2(1 - H(b)) + 4H(b) = 2$$

e no caso $b > 0$, temos

$$2(1 - H(b)) + 4H(b) = 4.$$

Além disso, por $(M_4)$, $\forall t \geq 0$, existe $K > 0$ tal que

$$M(t) \leq K(m_0 + bt).$$

Para mostrarmos a existência de solução para o problema $(P_{\lambda,a})$ usaremos técnicas variacionais aplicadas ao funcional não-diferenciável

$$I_{\lambda,a}(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \lambda\int_\Omega F(u)dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (u^+)^6 dx,$$

onde,

$$F(t) = \int_0^t H(s-a)(s^+)^q ds = \begin{cases} 0 \;\; se \;\; t \leq a \\ \dfrac{t^{q+1}}{q+1} - \dfrac{a^{q+1}}{q+1} \;\; se \;\; t > a \end{cases} \tag{3.2}$$

com $H(t-a)(t^+)^q$ não-decrescente, $t^+ = \max\{0, t\}$.

**Definição 3.1** *Uma solução do problema $(P_{\lambda,a})$ é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ verificando*

$$-[M(\|u\|)]\Delta u - u^5 \in \lambda[\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega,$$

*com $\underline{f}(t) = \lim_{\delta \to 0^+} f(t-\delta)$ e $\overline{f}(t) = \lim_{\delta \to 0^+} f(t+\delta)$ e $f(t) = H(t-a)(t^+)^q$.*

Na demonstração do resultado principal deste capítulo usaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais $Lip_{loc}$, a qual foi demonstrada por Chang em [16], usando uma variante apropriada do Lema de Deformação,o qual enunciaremos a seguir.

**Teorema 3.1** *Seja $I \in lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, tal que $I(0) = 0$ e suponhamos que:*
*$(i)$ Existem constantes $\eta > 0$ e $\rho > 0$, tais que $I(u) > \eta$, para $\|u\| = \rho$, $u \in X$;*
*$(ii)$ Existe $e \in X$, com $\|e\| > \rho$, tal que $I(e) < 0$. Se, além disso, $I$ satisfizer a condição de Palais-Smale no nível $c$ com $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$ onde*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X), \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$$

*então $c > 0$ é um valor crítico de $I$.*

Observamos que um ponto $u_0 \in X$ é um ponto crítico de $I$ se $0 \in \partial I(u_0)$ e $c$ é valor crítico se $I(u_0) = c$.

Observamos que a seguinte imersão contínua que temos é

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega),$$

e a melhor constante desta imersão é denotada por S é definida por

$$S = \inf \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{|u|_{2^*}^2}; u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0 \right\}.$$

O espaço que vamos trabalhar é o espaço $H_0^1(\Omega)$, o qual é definido por

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}$$

que é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em relação a norma

$$\|u\| = \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Consideremos a seguinte afirmação:

**Afirmação 3.1** *Para $0 < \theta < q + 1$*

$$0 < \theta F(t) \leq \underline{f}(t)t, \ \forall \ t \in \mathbb{R},$$

**Demonstração** Note que, para $\delta > 0$ pequeno temos

$$\begin{aligned} \underline{f}(t) &= \lim_{\delta\to 0^+} = f(t-\delta) \\ &= \lim_{\delta\to 0^+} H(t-\delta-a)(t-\delta)^q \\ &= t^q \lim_{\delta\to 0^+} H(t-\delta-a). \end{aligned}$$

Logo

$$t\underline{f}(t) = t^{q+1} \lim_{\delta\to 0^+} H(t-\delta-a).$$

Por outro lado, para $t > a$

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds = \int_0^t H(s-a)(s^+)^q ds = \int_a^t (s^+)^q ds = \frac{1}{q+1}\Big[t^{q+1} - a^{q+1}\Big].$$

Note que, para $\theta > 0$ tal que $2 < \theta < q+1$

$$\theta F(t) = \frac{\theta}{q+1}[t^{q+1} - a^{q+1}] < [t^{q+1} - a^{q+1}] < t^{q+1}, \text{ pois, } a > 0.$$

Assim, para $\delta$ suficientemente pequeno e desde que que $t > a$, segue-se que $H(t-\delta-a) = 1$ e portanto

$$\theta F(t) \le t^{q+1} \lim_{\delta\to 0^+} H(t-\delta-a) = t\underline{f}(t).$$

Para o caso $t \le a$ é imediato a afirmação, pois neste caso $F(t) = f(t) = 0$. ■

O resultado mais importante para este capítulo é o seguinte:

**Teorema 3.2** *Assuma que as condições* $(M_1) - (M_4)$ *são verdadeiras. Então, existe* $\lambda^* > 0$, *tal que o problema* $(P_{\lambda,a})$ *tem uma solução fraca positiva em* $H_0^1(\Omega)$, *para todo* $\lambda \ge \lambda^*$ *e* $a > 0$.

Para demonstrarmos o Teorema, precisaremos de alguns lemas que veremos a seguir.

## 3.2 Resultados preliminares

**Lema 3.1** *Sejam* $u \in H_0^1(\Omega)$ *e* $\sigma' = \frac{\sigma+1}{\sigma}$ *com* $\sigma \in (0,5)$. *Se* $w \in \partial I_{\lambda,a}(u)$, *então existe* $\overline{\rho} \in L^{\sigma'}(\Omega)$ *tal que*

$$\langle w, v\rangle = M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla v - \lambda \int_\Omega \overline{\rho} v dx - \int_\Omega (u^+)^5 v \; \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

*e*

$$\overline{\rho} \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

**Demonstração:** Seja $I_{\lambda,a} = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \lambda \int_\Omega F(u)dx - \frac{1}{6}(u^+)^6 dx.$

Defina

$$\begin{aligned} \Psi : H_0^1(\Omega) \subset L^{\sigma+1}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \Psi(u) = \int_\Omega F(u)dx = \int_\Omega H(u-a)(u^+)^q dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi : H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \Phi(u) = \frac{1}{6}(u^+)^6 dx, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Upsilon : H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \Upsilon(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2). \end{aligned}$$

Desde que $\Upsilon$ e $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e $\Psi \in Lip_{loc}(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, pela propriedade $(P8)$ (ver [29]) tem-se

$$\partial I_{\lambda,a}(u) = \{\Upsilon^{'}(u)\} - \{\Phi^{'}(u)\} - \lambda \partial \Psi(u).$$

Logo, se $w \in \partial I_{\lambda,a}(u)$, existe $\rho \in \partial\Psi(u) \in (L^6(\Omega))^*$ tal que

$$\langle w, v \rangle = \Upsilon^{'}(u)v - \Phi^{'}(u) - \lambda\langle \rho, v\rangle, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Apêndice B, Teorema B.5) existe $\overline{\rho} \in (L^6(\Omega))^*$ tal que

$$\langle \rho, v\rangle = \int_\Omega \overline{\rho} v dx, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Assim,

$$\langle w, v\rangle = M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla v - \lambda \int_\Omega \overline{\rho} v dx - \int_\Omega (u^+)^5 v \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

onde pelo Teorema 2.3 ver [29] teremos

$$\overline{\rho}(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))], \ \text{q.t.p. em}\, \Omega.$$

**Lema 3.2** *O funcional $I_{\lambda,a}$ é um funcional Localmente Lipschitz.*

**Demonstração:** Primeiramente, vamos mostrar que $I_{\lambda,a} \in Lip_{loc}\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ para cada $\lambda, a > 0$.

Consideremos $I_{\lambda,a}(u) : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma.

$$I_{\lambda,a}(u) = \Upsilon(u) - \lambda\Psi(u) - \Phi(u)$$

onde,

$$\Upsilon(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2), \quad \Psi(u) = \lambda \int_\Omega F(u)dx \;\; e \;\; \Phi(u) = \frac{1}{6}\int_\Omega (u^+)^6 dx.$$

Seja $V = V_u = B_R(u)$ uma vizinhança de $u \in H_0^1(\Omega)$, $\forall\, v_1, v_2 \in V$.

$$\begin{aligned}
|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)| &= \left|\int_\Omega F(v_1) - \int_\Omega F(v_2)\right| \\
&= \left|\int_\Omega \left(\int_0^u f(t)dt\right) dx - \int_\Omega \left(\int_0^v f(t)dt\right) dx\right| \\
&= \left|\int_\Omega \left(\int_0^u H(t-a)(t^+)^q dt\right) dx - \int_\Omega \left(\int_0^v H(t-a)(t^+)^q dt\right) dx\right| \\
&= \left|\int_\Omega \left(\int_0^u H(t-a)(t^+)^q dt + \int_v^0 H(t-a)(t^+)^q dt\right) dx\right| \\
&= \left|\int_\Omega \left(\int_v^u H(t-a)(t^+)^q dt\right) dx\right| \\
&\leq \int_\Omega \left|\left(\int_v^u H(t-a)(t^+)^q dt\right)\right| dx.
\end{aligned}$$

Considerando $\theta(x) = \max\{u(x), v(x)\}$ e $\eta(x) = \min\{u(x), v(x)\}$ e $H(t-a) \leq 1$ obtemos,

$$\begin{aligned}
|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)| &\leq \int_\Omega \left|\int_{\eta(x)}^{\theta(x)} (t^+)^q dt\right| dx \\
&\leq \int_\Omega \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} \left|t^+\right|^q dt dx \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Observe agora para $q > 1$, a função

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$s \mapsto G(s) = \frac{s|s|^q}{q+1}$$

é diferenciável e

$$G^{'}(s) = |s|^q, \;\; \forall\, s \in \mathbb{R},$$

Usando a ultima igualdade em (3.3)

$$\begin{aligned} |\Psi(v_1) - \Psi(v_2)| &\leq \int_\Omega \left| \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} (t^+)^q dt \right| dx \\ &\leq \int_\Omega \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} G^{'}(t) dt dx, \end{aligned}$$

implicando que

$$|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)| \leq \int_\Omega \left( G(\theta(x)) - G(\eta(x)) \right) dx.$$

Sabendo que a função $G$ é diferenciável, segue pelo Teorema do Valor Médio existe $\gamma \in (\theta(x), \eta(x))$ tal que

$$(\gamma(x))^q = G^{'}(\gamma) = \frac{G(\theta(x)) - G(\eta(x))}{\theta(x) - \eta(x)}$$

Agora tomando

$$\gamma(x)^q \leq \max\{|u(x)|^q - |v(x)|^q\} = |Y(x)|^q. \tag{3.4}$$

e note que

$$|u(x) - v(x)| = \theta(x) - \eta(x) \tag{3.5}$$

$$|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)| \leq \int_\Omega (\gamma(x))^q \left( (\theta(x)) - (\eta(x)) \right) dx.$$

Temos por (3.4) e (3.5)

$$|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)| \leq \int_\Omega |u(x) - v(x)| \, |Y(x)|^q dx.$$

Desde que $|Y|^q \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ e $|u - v| \in L^{q+1}(\Omega)$, de fato pois, $\frac{q+1}{q}$ e $q+1$ são expoentes conjugados, aplicando a Desigualdade de Hölder (ver Apêndice B, Teorema B.3), teremos

$$\begin{aligned} |\Psi(v_1) - \Psi(v_2)| &\leq \int_\Omega |u(x) - v(x)| \, |Y(x)|^q dx \\ &\leq \int_\Omega \left( |u(x) - v(x)|^{q+1} \right)^{\frac{1}{q+1}} \left( \int_\Omega \left( |Y(x)|^q \right)^{\frac{q+1}{q}} \right)^{\frac{q}{q+1}} dx \\ &= \|Y\|^q_{\frac{q+1}{q}} |u(x) - v(x)|_{q+1}. \end{aligned}$$

Das imersões de Sobolev temos $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$, logo existe uma constante $C > 0$, tal que

$$|u(x) - v(x)|_{q+1} \leq C\|u - v\|,$$

logo,

$$|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)| \leq C\|u - v\|\|Y\|_{q+1}^q.$$

Assim, existe uma vizinhança limitada $V = V_u = B_R(u) \subset H_0^1(\Omega)$

$$|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)| \leq C\|u - v\| \sup_{Y \in V} \left(\|Y\|_{q+1}^q\right) \leq K\|u - v\|,$$

onde $K = C \sup\limits_{Y \in V} \left(\|Y\|_{q+1}^q\right)$.

Portanto $\Psi \in Lip_{loc}\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$. Desde que $\Upsilon(u) = \dfrac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2)$ e $\Phi(u) = \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_\Omega (u^+)^6 dx$ são de classe $C^1$, então $\Upsilon(u)$ e $\Phi(u)$ são localmente Lipschitz.

Concluímos que o funcional dado por

$$I_{\lambda,a}(u) = \Upsilon(u) - \lambda\Psi(u) - \Phi(u)$$

é localmente lipschitziano para cada $\lambda, a > 0$. ■

**Lema 3.3** *Assumindo a condição* $(M_1)$, *então existem números positivos* $\rho$ *e* $\alpha$ *tais que*

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \alpha > 0, \ \forall \ u \in H_0^1(\Omega) \ \textit{com} \ \|u\| = \rho.$$

**Demonstração:** Consideremos $u \in H_0^1(\Omega)$ segue da condição $(M_1)$ que

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) = \frac{1}{2}\int_0^{\|u\|^2} M(s)ds \geq \frac{1}{2}\int_0^{\|u\|^2} m_0 ds.$$

Logo,

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \frac{1}{2}\int_0^{\|u\|^2} m_0 ds - \lambda\int_\Omega F(u) - \frac{1}{6}\int_\Omega (u^+)^6 dx.$$

Desde que $H(t) \leq 1$ e $u^+ \leq |u|$ temos

$$\lambda\int_\Omega\int_0^u H(t-a)t_+^q dt dx \leq \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx.$$

Assim temos,

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 m_0 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx - \frac{1}{6}\int_\Omega |u|^6 dx.$$

Logo das imersões de Sobolev, existem $K_1, K_2 > 0$ tais que assim,

$$|u|_6 \leq K_1\|u\|,$$

$$|u|_{q+1} \leq K_2\|u\|.$$

Portanto,

$$I_{\lambda,a}(u) \;\; \geq \;\; \frac{1}{2}\|u\|^2 m_0 - \lambda K_2 \|u\|^{q+1} - \frac{1}{6} K_1 \|u\|^6.$$

Usando $\|u\| = \rho$ temos

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \frac{1}{2} m_0 \rho^2 - \lambda K_2 \rho^{q+1} - K_1 \rho^6.$$

e

$$\rho^2 \left( \frac{m_0}{2} - \lambda K_2 \rho^{q-1} - K_1 \rho^4 \right).$$

Queremos que,

$$\frac{m_0}{2} - \lambda K_2 \rho^{q-1} - K_1 \rho^4 > 0,$$

isto é,

$$\frac{m_0}{2} - \left( \lambda K_2 + K_1 \rho^{5-q} \right) \rho^{q-1} > 0.$$

Note que para $0 < \rho < 1$

$$\lambda K_2 + K_1 \rho^{5-q} < \lambda K_2 + K_1,$$

então,

$$\frac{m_0}{2} - \left( \lambda K_2 + K_1 \rho^{5-q} \right) \rho^{q-1} > \frac{m_0}{2} - \left( \lambda K_2 + K_1 \right) \rho^{q-1},$$

logo,

$$\frac{m_0}{2} > \left( \lambda K_2 + K_1 \right) \rho^{q-1} > 0.$$

Afim de que

$$(\frac{m_0}{2\left( \lambda K_2 + K_1 \right)})^{\frac{1}{q-1}} > \rho > 0,$$

tomemos

$$\rho_0 = \min \left\{ 1, \left( \frac{m_0}{2\left( \lambda K_2 + K_1 \right)} \right)^{\frac{1}{q-1}} \right\}.$$

Portanto,

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \alpha > 0, \|u\| = \rho, \;\forall\; u \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, desde que $2(1 - H(b)) + 4H(b) < q < 6$ segue o resultado para $\rho > 0$ suficientemente pequeno. ■

**Lema 3.4** *Considerando a condição $(M_4)$. Para todo $\lambda > 0$ e $\rho > 0$, existe $e \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$I_{\lambda,a}(e) < 0 \text{ e } \|e\| > \rho.$$

**Demonstração:** Considerando $v_0 \in C_0^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$ com $v_0 \geq 0$ em $\Omega$ e $\|v_0\| = 1$, para $t$ suficientemente grande tal que $\|tv_0\| > R$ temos,

$$I_{\lambda,a}(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \lambda\Psi(u) - \frac{1}{6}\int_\Omega (u^+)^6 dx.$$

Por $(M_4)$ temos,

$$\begin{aligned}
\widehat{M}(\|v_0\|^2) = \int_0^{\|v_0\|^2} M(t)dt &\leq \int_0^{\|v_0\|^2} K\left(m_0 + bs\right) ds \\
&= \left[Km_0 s + Kb\frac{s^2}{2}\right]_0^{\|v_0\|^2} \\
&= Km_0\|v_0\|^2 + Kb\frac{\|v_0\|^4}{2}.
\end{aligned}$$

Daí segue-se

$$I_{\lambda,a}(u) \leq Km_0\|v_0 t\|^2 + Kb\frac{\|v_0 t\|^4}{2} - \lambda\int_\Omega F(tv_0)dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (v_0 t)^6 dx.$$

Desde que $\lambda > 0$, $H(t) \geq 0$ e $1 \leq q < 5$ temos

$$I_{\lambda,a}(u) \leq Km_0 t^2\|v_0\|^2 + Kbt^4\frac{\|v_0\|^4}{2} - \lambda\int_\Omega\int_0^{tv_0} H(t-a)(t^+)^q dtdx - \frac{1}{6}\int_\Omega (tv_0)^6 dx.$$

Logo,

$$I_{\lambda,a}(u) \leq Km_0 t^2\|v_0\|^2 + Kbt^4\frac{\|v_0\|^4}{2} - \frac{1}{6}t^6\int_\Omega (v_0)^6 dx.$$

Portanto,

$$I_{\lambda,a}(u) \to -\infty \text{ quando } t \to +\infty.$$

Assim, existe $t_* > 0$ tal que $e = t_* v_0 \in H_0^1(\Omega)$ com $\|e\| > \rho$ e $I_{\lambda,a}(e) < 0$. ■

Dos Lemas 3.2, 3.3, 3.4 e do Teorema do Passo da Montanha para funcionais $Lip_{loc}$, existe uma sequência $(u_n)$, tal que

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u_n) &\to c_{\lambda,a} \\
m(u_n) &\to 0,
\end{aligned}$$

onde $c_{\lambda,a}$ é nível do passo da montanha associado ao funcional $I_{\lambda,a}$.

A seguir veremos um resultado envolvendo o nível do passo da montanha.

**Lema 3.5** *Se as condições* $(M_1)-(M_4)$ *são verdadeiras então existe* $\lambda_* > 0$ *tal que* $c_{\lambda,a}$ *pertence ao intervalo* $(0, (\frac{1}{\theta}-\frac{1}{6})S^{\frac{3}{2}})$ *para todo* $\lambda \geq \lambda_*$.

**Demonstração:** Se $v_0$ é a função dada pelo Lema 3.4, segue-se que existe $t_\lambda > 0$ verificando

$$I_{\lambda,a}(t_\lambda v_0) = \max_{t\geq 0} I_{\lambda,a}(tv_0). \tag{3.6}$$

Pela teoria dos pontos críticos para funcionais $Lip_{loc}$

$$0 \in \partial I_{\lambda,a}(t_\lambda v_0)$$

Desde que

$$I_{\lambda,a}(u) = \Upsilon(u) - \lambda\Psi(u) - \Phi(u),$$

com

$$\Upsilon(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(||u||^2), \quad \Psi(u) = \int_\Omega F(u)dx, \ e \ \Phi(u) = \frac{1}{6}\int_\Omega (u^+)^6 dx.$$

Pela propriedade $(P8)$ do capítulo 2, segue-se que

$$\partial I_{\lambda,a}(t_\lambda v_0) = \partial\Upsilon(t_\lambda v_0) - \lambda\partial\Psi(t_\lambda v_0) - \partial\Phi(t_\lambda v_0).$$

Uma vez que $\Upsilon, \Phi \in C^1(H_0^1(\Omega);\mathbb{R})$, segue da propriedade $(P7)$ que

$$\partial I_{\lambda,a}(t_\lambda v_0) = \{\Upsilon^{'}(t_\lambda v_0)\} - \lambda\partial\Psi(t_\lambda v_0) - \{\Phi^{'}(t_\lambda v_0)\}.$$

Assim,

$$\langle 0, t_\lambda v_0\rangle = \Upsilon^{'}(t_\lambda v_0)t_\lambda v_0 - \lambda\langle\rho, t_\lambda v_0\rangle - \Phi^{'}(t_\lambda v_0)t_\lambda v_0,$$

ou seja,

$$0 = M(\|t_\lambda v_0\|^2)\|t_\lambda v_0\|^2 - t_\lambda^6\int_\Omega v_0^6 dx - \lambda\langle\rho, t_\lambda v_0\rangle.$$

com $\rho \in \partial\Psi(t_\lambda v_0) \subset (H_0^1(\Omega))^*$

Pelo Teorema da Representação de Riesz, ver (ver Apêndice B, Teorema B.5), existe um único $\widehat{\rho} \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$\langle\rho, v\rangle = \int_\Omega \widehat{\rho} v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$0 = M(\|t_\lambda v_0\|^2)\|t_\lambda v_0\|^2 - t_\lambda^6 \int_\Omega v_0^6 dx - \lambda \int_\Omega \rho t_\lambda v_0 dx.$$

Portanto,

$$t_\lambda^2 M(\|t_\lambda v_0\|^2)\|v_0\|^2 = \lambda \int_\Omega \rho t_\lambda v_0 dx + t_\lambda^6 \int_\Omega v_0^6 dx. \tag{3.7}$$

Logo,

$$t_\lambda^2 M(t_\lambda^2\|v_0\|^2)\|v_0\|^2 \geq t_\lambda^6 \int_\Omega v_0^6 dx. \tag{3.8}$$

Da hipótese $(M_4)$ tem-se que existe $K > 0$ tal que

$$M(t) \leq K(m_0 + bt), \ \forall \ t \geq 0.$$

Assim,

$$M(t_\lambda^2\|v_0\|^2) \leq K(m_0 + Kbt_\lambda^2\|v_0\|^2) = Km_0 + Kbt_\lambda^2\|v_0\|^2,$$

logo,

$$t_\lambda^2 M(t_\lambda^2\|v_0\|^2)\|v_0\|^2 \leq t_\lambda^2 Km_0\|v_0\|^2 + Kbt_\lambda^4\|v_0\|^4. \tag{3.9}$$

De (3.8) e (3.9) segue que

$$t_\lambda^2 Km_0\|v_0\|^2 + Kbt_\lambda^4\|v_0\|^4 \geq t_\lambda^6 \int_\Omega v_0^6 dx,$$

ou seja,

$$Km_0\|v_0\|^2 + Kbt_\lambda^2\|v_0\|^4 \geq t_\lambda^4 \int_\Omega v_0^6 dx,$$

implicando que $t_\lambda$ é limitado. Assim existe uma sequência $\lambda_n \to \infty$ e $t_0 \geq 0$, tal que

$$t_{\lambda_n} \to t_0, \text{ quando } n \to +\infty. \tag{3.10}$$

**Afirmação 3.2** $t_0 = 0$.

De fato, suponhamos, por contradição que $t_0 > 0$.

Note que a sequência

$$t_{\lambda_n}^2 km_0\|v_0\|^2 + kbt_{\lambda_n}^4\|v_0\|^4,$$

é limitada. Assim existe uma constante $D > 0$ tal que

$$t_{\lambda_n}^2 km_0\|v_0\|^2 + kbt_{\lambda_n}^4\|v_0\|^4 \leq D, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Logo de $(M_4)$ e (3.7) segue que

$$\lambda_n \int_\Omega \rho t_{\lambda_n} v_0 dx + t_{\lambda_n}^6 \int_\Omega v_0^6 dx \leq D, \ \forall \, n \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Observe que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lambda_n \int_\Omega \rho t_{\lambda_n} v_0 dx + t_{\lambda_n}^6 \int_\Omega v_0^6 dx\right) =$$
$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n\Big[\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \rho t_{\lambda_n} v_0 dx + \lim_{n\to\infty} t_{\lambda_n}^6 \int_\Omega v_0^6 dx\Big].$$

Assim, desde que $t_{\lambda_n} \to t_0$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$|t_{\lambda_n}| \leq C_1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso,

$$\rho t_{\lambda_n} v_0 \to \rho t_0 v_0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Desde que $\widehat{\rho} \in H_0^1(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ e $v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, segue-se

$$|\rho t_{\lambda_n} v_0| \leq |\rho||v_0|C_1 \in L^1(\Omega), \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice B, Teorema B.2)

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \rho v_0 t_{\lambda_n} dx = \int_\Omega \rho v_0 t_0 dx.$$

Portanto

$$t_{\lambda_n} \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Desde que

$$c_{\lambda,a} \leq \max I_{\lambda,a}(tv_0) = I_{\lambda,a}(t_\lambda v_0),$$

seque que

$$c_{\lambda_n,a} \leq \max I_{\lambda_n,a}(tv_0) = I_{\lambda_n,a}(t_{\lambda_n} v_0).$$

Logo

$$I_{\lambda_n,a}(t_{\lambda_n}v_0) \to 0 \text{ quando } \lambda_n \to +\infty,$$

ou ainda,

$$c_{\lambda_n,a} \to 0 \text{ quando } \lambda_n \to +\infty.$$

Portanto

$$c_{\lambda,a} \to 0 \text{ quando } \lambda \to +\infty.$$

para todo $a > 0$.

Implicando em

$$0 < c_{\lambda,a} < (\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6})S^{\frac{3}{2}}, \ \forall\, a > 0.$$

O que demonstra o lema ■

**Lema 3.6** *Se $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência $(PS)_{C_{\lambda,a}}$ para $I_{\lambda,a}$, então $(u_n)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$.*

**Demonstração:** De fato, sendo $(u_n)$ é uma sequência Palais-Smale

$$I_{\lambda,a}(u_n) \to c_{\lambda,a}, \tag{3.12}$$

e

$$m(u_n) \to 0. \tag{3.13}$$

Considere

$$I_{\lambda,a}(u) = \Upsilon(u) - \lambda\Psi(u) - \Phi(u),$$

onde,

$$\Upsilon(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2), \Psi(u) = \lambda\int_\Omega F(u), \Phi(u) = \frac{1}{6}\int_\Omega (u^+)^6 dx.$$

Seja $w_n \subset \partial I_{\lambda,a}(u_n)$ tal que

$$m(u_n) = \|w_n\|_{(H_0^1(\Omega))^*}$$

e

$$w_n \;\; = \;\; \Upsilon^{'}(u_n) - \lambda\rho_n - \Phi^{'}(u_n).$$

Assim,

$$\langle w_n, u_n\rangle \;\; = \;\; \Upsilon^{'}(u_n)u_n - \langle \lambda\rho_n, u_n\rangle - \Phi^{'}(u_n)u_n$$

com $(\rho_n) \subset \partial\Psi(u_n)$.

Por (3.12) existe $C > 0$ tal que

$$I_{\lambda,a}(u_n) \leq |I_{\lambda,a}(u_n)| \leq C, \;\forall\; n \in \mathbb{N}.$$

De (3.13)

$$\|w_n\|_{(H_0^1(\Omega))^*} \to 0,$$

logo dado $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|w_n\|_{(H_0^1(\Omega))^*} < 1, \;\forall n > n_0,$$

pois, $w_n \in \partial I_{\lambda,a}(u_n)$. Defina

$$K_3 = \max\{\|w_1\|_{(H_0^1(\Omega))^*}, \|w_2\|_{(H_0^1(\Omega))^*}, ..., \|w_{n_0-1}\|_{(H_0^1(\Omega))^*}, 1\}$$

observe que

$$\|w_n\|_{(H_0^1(\Omega))^*} \leq K_3, \;\forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\theta}\langle w_n, u_n\rangle &\leq \frac{1}{\theta}|\langle w_n, u_n\rangle| \\ &\leq \frac{1}{\theta}\|w_n\|_{(H_0^1(\Omega))^*}\|u_n\| \\ &\leq K\|u_n\|, \;\forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Logo

$$C + K\|u_n\| \geq I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle w_n, u_n\rangle.$$

Daí

$$\begin{aligned} C + K\|u_n\| &\geq \widehat{M}(\|u_n\|^2) - \lambda\int_\Omega F(u_n) - \frac{1}{6}\int_\Omega |u_n|^6 dx \\ &- \frac{1}{\theta}\Big[M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 + \lambda\langle\rho_n, u_n\rangle + \int_\Omega |u_n|^6 dx\Big] \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Representação de Riesz (ver Apêndice B, Teorema B.5) obtemos

$$\begin{aligned} C + K\|u_n &\geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \\ &+ \lambda\int_\Omega (\frac{\widehat{\rho_n}u_n}{\theta} - F(u_n))dx. \end{aligned}$$

Então por identificação temos que $\widehat{\rho_n} \subset \partial\Psi(u_n)$, afirmamos

$$\widehat{\rho_n} \geq \underline{f}(u_n(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Com efeito, suponhamos por contradição que exista $A \subset \Omega$, $|A| > 0$, com

$$\widehat{\rho_n} < \underline{f}(x, u_n(x))dx, \text{ q.t.p. } x \in A,$$

ou seja,

$$\int_A \widehat{\rho_n} < \int_A \underline{f}(x, u_n(x))dx, \text{ q.t.p. } x \in A. \tag{3.14}$$

Note que

$$\int_\Omega \widehat{\rho_n}(-\chi_A)dx = -\int_A \widehat{\rho_n}dx. \tag{3.15}$$

Considerando, $\overline{v} = -\chi_A$, temos $\overline{v} \in H_0^1(\Omega)$, onde $\chi_A$ é a função característica de $A \in H_0^1(\Omega)$.

Desde que $\widehat{\rho_n} \in (H_0^1(\Omega))^*$, pelo Teorema de Representação de Riesz (ver Apêndice B, Teorema B.5) existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle \widehat{\rho_n}, v\rangle = \int_\Omega uvdx, \ \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Como $\overline{v} = -\chi_A$ e $\widehat{\rho_n} \in \partial\Psi(u_n)$ então

$$\langle \widehat{\rho_n}, (-\chi_A)\rangle = \int_\Omega u(-\chi_A)dx, \ \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Por identificação obtemos

$$\langle \widehat{\rho_n}, (-\chi_A)\rangle = \int_\Omega \widehat{\rho_n}(-\chi_A)dx, \ \forall\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.16}$$

Da definição de $\partial\Psi(u_n)$ temos

$$\langle \widehat{\rho_n}, (-\chi_A)\rangle \leq I^\circ(u_n, (-\chi_A)) \tag{3.17}$$

além disso, usando a seguinte desigualdade (ver em [28]),

$$I^{\circ}(u_n,\overline{v}) \leq \int_{\{\overline{v}<0\}} \underline{f}(x,u_n(x))dx + \int_{\{\overline{v}>0\}} \overline{f}(x,u_n(x))dx, \tag{3.18}$$

segue-se que

$$-\int_A \widehat{\rho_n}dx = \int_\Omega \widehat{\rho_n}\overline{v}dx \leq I^{\circ}(u_n,v) \leq \int_\Omega \underline{f}(x,u_n)(x))\overline{v}dx = -\int_A \underline{f}(x,u_n)dx.$$

Assim,

$$\int_A \widehat{\rho_n}dx \geq \int_A \underline{f}(x,u_n)dx.$$

O que contradiz (3.14). Mostrando assim, que

$$\widehat{\rho_n} \geq \underline{f}(u_n(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Segue que

$$C + K\|u_n\| \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 + \int_\Omega (\frac{\underline{f}(u_n)u_n}{\theta} - F(u_n))dx,$$

logo, usando afirmação (3.1) temos

$$C + K\|u_n\| \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 + \int_\Omega (F(u_n) - F(u_n))dx.$$

Assim,

$$C + K\|u_n\| \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2. \tag{3.19}$$

Suponhamos, por contradição, que $(u_n)$ não é limitada em $H_0^1(\Omega)$, então existe uma subsequência ainda denotada por $(u_n)$, tal que

$$\|u_n\| \to +\infty.$$

Multiplicando (3.19) por $\frac{1}{\|u_n\|}$ para $n$ suficientemente grande, temos

$$\frac{C}{\|u_n\|} + K \geq \frac{1}{\|u_n\|}\Big[\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2\Big].$$

Da condição $(M_3)$

$$\frac{C}{\|u_n\|} + K \geq \frac{1}{\|u_n\|}\Big[\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2\Big] \to +\infty \text{ quando } n \to +\infty,$$

o que é um absurdo. Mostrando que $(u_n)$ é limitada. ■

**Lema 3.7** *O funcional $I_{\lambda,a}$ satisfaz a condição $(P.S)_{c_{\lambda,a}}$, Palais-Smale no nível $c_{\lambda,a}$.*

**Demonstração:** Seja $(u_n)$ uma sequência Palais-Smale do lema (3.6) limitada temos, a menos de subsequência, que existem $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $t_0 \geq 0$ tais que

$$\|u_n\| \to t_0. \tag{3.20}$$

Sendo $M$ contínua, obtemos

$$M(\|u_n\|^2) \to M(t_0^2). \tag{3.21}$$

Uma vez que $(u_n)$ é limitada, $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, usando as imersões de Sobolev e o Teorema de Vainberg (ver Apêndice B), a menos de subsequência, vale

$$u_n \rightharpoonup u_0, \text{ em } H_0^1(\Omega) \tag{3.22}$$

$$u_n \to u_0, \text{ em } L^r(\Omega) \tag{3.23}$$

$$u_n(x) \to u_0(x), \text{ q.t.p. } \Omega \tag{3.24}$$

$$|u_n(x)| \leq h(x), \text{ q.t.p. em } \Omega, \; h \in L^2(\Omega). \tag{3.25}$$

Por outro lado, do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions (ver [23]), temos que existem duas famílias $(\mu_i)_{i\in\Lambda}$ e $(\nu_i)_{i\in\Lambda}$ de números reais não-negativos e uma família $(x_i)_{i\in\Lambda}$ de pontos do $\mathbb{R}^3$, onde $\Lambda$ é um conjunto de índices no máximo enumerável, tais que

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \widehat{\mu} \geq |\nabla u|^2 + \mu \tag{3.26}$$

$$(u_n)_+^6 \rightharpoonup \widehat{\nu} = (u_+)^6 + \nu, \tag{3.27}$$

onde,

$$\nu = \sum_{i\in\Lambda} \nu_i \delta_{x_i}, \quad \mu \geq \sum_{i\in\Lambda} \mu_i \delta_{x_i} \text{ e } S\nu_i^{1/3} \leq \mu_i \tag{3.28}$$

para todo $i \in \Lambda$, onde $\delta_{x_i}$ é a medida de Dirac de massa 1 em $x_i \in \Omega$.

Fixemos $i \in \Lambda$ e consideremos a aplicação $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$, $|\nabla\phi|_\infty \leq 2$ e

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \quad B_1(0) \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^3 \backslash B_2(0). \end{cases}$$

Para cada $\epsilon > 0$ definamos

$$\psi_\epsilon = \phi\left(\frac{(x - x_i)}{\epsilon}\right).$$

Assim $\psi_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \psi_\epsilon \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e $|\nabla\psi|_\infty \leq 2$,

$$\psi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \quad B_\epsilon(x_i) \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \backslash B_{2\epsilon}(x_i). \end{cases}$$

Observe que a sequência $(\psi_\epsilon u_n)$ é limitada. De fato, pois

$$\begin{aligned} \|\psi_\epsilon u_n\|^2 &= \int_\Omega |\nabla(\psi_\epsilon u_n)|^2 dx \\ &= \int_\Omega |\nabla\psi_\epsilon u_n + \nabla u_n \psi_\epsilon|^2 dx \\ &\leq 4\int_\Omega |\nabla\psi_\epsilon u_n|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_n \psi_\epsilon|^2 dx \\ &\leq 4\|u_n\|^2 + 4\int_\Omega |\nabla\psi_\epsilon|^2 |u_n|^2 dx. \end{aligned}$$

Da Desigualdade de Hölder (ver Apêndice B, Teorema B.3) temos

$$\|\psi_\epsilon u_n\|^2 \leq 4\|u_n\|^2 + 4\Big[\int_\Omega |\nabla\psi_\epsilon|^3\Big]^{\frac{2}{3}} |u_n|_6^2.$$

Da imersão contínua de Sobolev existe $K > 0$ tal que

$$|u_n|^2_{L^6(\Omega)} \leq K\|u_n\|^2,$$

Note que o suporte $\psi_\epsilon$ está contido em $B_\rho(x_i)$, logo, obtemos

$$\Big[\int_\Omega |\nabla\psi_\epsilon|^3\Big]^{\frac{2}{3}} = \Big[\int_{B_\epsilon(x_i)} |\nabla\psi_\epsilon|^3\Big]^{\frac{2}{3}}.$$

Pela Regra da Cadeia, temos

$$\begin{aligned} y &= \frac{x - x_i}{\epsilon}, \\ \epsilon y &= x - x_i \text{ e } dx = \epsilon^3 dy \end{aligned}$$

$$\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial\phi(\frac{x-x_i}{\epsilon})}{\partial x_i} = \frac{\partial\phi(y)}{\partial y_i}(-\frac{1}{\epsilon}),$$

daí,

$$|\nabla\psi_\epsilon(x)| = |-\frac{1}{\epsilon}\nabla\phi(y)| = \frac{1}{\epsilon}|\nabla\phi(y)|$$

assim,

$$\int_{B_\epsilon(x_i)} |\nabla \psi_\epsilon|^3 dx \;=\; \Big[\int_{B_1(0)} \frac{1}{\epsilon^3}\left(|\nabla \phi|^3\right)\epsilon^3 dy\Big]^{\frac{2}{3}} \leq \|\nabla \phi\|_\infty^3 |B_1(0)|,$$

logo,

$$\|\psi_\epsilon u_n\|^2 \leq 4\|u_n\|^2 + 4K\|u_n\|^2\|\nabla\phi\|_\infty^3|B_1(0)| \leq \|u_n\|^2\left(4 + 4KK_1\right).$$

Assim, tomando $\tilde{\mathrm{C}}= 4 + 4KK_1$ então,

$$\|\psi_\epsilon u_n\|^2 \leq C\|u_n\|^2.$$

Desde que a sequência $(u_n)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, segue-se que $(u_n\psi_\epsilon)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, sendo $(u_n)$ uma sequência Palais-Smale

$$m(u_n) \to 0$$
$$\langle w_n, u_n\psi_\epsilon\rangle \to 0,$$

isto é,

$$M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n\psi_\epsilon)dx - \lambda\int_\Omega \rho_n u_n \psi_\epsilon dx - \int_\Omega (u_n^+)^5 u_n\psi_\epsilon dx = o_n(1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla\psi_\epsilon u_n dx \;&=\; \lambda\int_\Omega \rho_n u_n\psi_\epsilon dx + \int_\Omega (u_n^+)^5\psi_\epsilon dx \\ &-\; M(\|u_n\|^2)\int_\Omega |\nabla u_n|^2\psi_\epsilon dx + o_n(1). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Desde que

$$\int_\Omega \rho_n(x)u_n(x)\psi_\epsilon dx \to \int_\Omega \rho_0(x)u_0(x)\psi_\epsilon dx.$$

Do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions (ver [23]), segue-se que

$$\begin{aligned} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\epsilon u_n dx \;&\leq\; \lambda\int_\Omega \rho_n u_n\psi_\epsilon dx + \int_\Omega (u_0^+)^6\psi_\epsilon dx + \sum_{i\in\Lambda}\nu_i\delta_{x_i}(\psi_\epsilon) \\ &-\; M(t_0^2)\int_\Omega |\nabla u_0|^2\psi_\epsilon dx - M(t_0^2)\sum_{i\in\Lambda}\mu_i\delta_{x_i}(\psi_\epsilon) + o_n(1), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\epsilon u_n dx \;&\leq\; \lambda\int_\Omega \rho_n u_n\psi_\epsilon dx + \int_\Omega (u_0^+)^6\psi_\epsilon dx + \sum_{i\in\Lambda}\nu_i\psi_\epsilon(x_i) \\ &-\; M(t_0^2)\int_\Omega |\nabla u_0|^2\psi_\epsilon dx - M(t_0^2)\sum_{i\in\Lambda}\mu_i\psi_\epsilon(x_i) + o_n(1). \end{aligned}$$

Passando ao limite superior de $n \to \infty$, teremos

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla \psi_\epsilon(u_n)dx &\leq \lambda\int_\Omega \rho_0 u_0 \psi_\epsilon dx + \int_\Omega (u_+)^6\psi_\epsilon dx + \sum_{i\in\Lambda}\nu_i\psi_\epsilon(x_i)\\ &- M(t_0^2)\int_\Omega |\nabla u|^2\psi_\epsilon dx - M(t_0^2)\sum_{i\in\Lambda}\mu_i\psi_\epsilon(x_i).\end{aligned}$$

Vejamos agora que

$$\int_\Omega (u_+)^6\psi_\epsilon dx = o_\epsilon(1), \int_\Omega \rho_0 u_0\psi_\epsilon dx = o_\epsilon(1) \text{ e } M(t_0^2)\int_\Omega |\nabla u|^2\psi_\epsilon dx = o_\epsilon(1). \tag{3.30}$$

Portanto

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big[\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla\psi_\epsilon u_n dx\Big] \leq \lim_{\epsilon\to 0}\Big[\sum_{i\in\Lambda}\nu_i\psi_\epsilon(x_i) - M(t_0^2)\sum_{i\in\Lambda}\mu_i\psi_\epsilon(x_i)\Big]. \tag{3.31}$$

**Afirmação 3.3** *Afirmamos que*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big[\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\epsilon u_n dx\Big] = 0.$$

De fato, uma vez que para cada $n \in \mathbb{N}, |\nabla u_n| \in L^2(\Omega)$ e $|\nabla\psi_\epsilon u_n| \in L^2(\Omega)$, segue-se pela Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\epsilon u_n &\leq |M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla\psi_\epsilon u_n|dx\\ &\leq M(\|u_n\|^2)\int_\Omega |\nabla u_n\nabla\psi_\epsilon u_n|dx\\ &\leq M(\|u_n\|^2)\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |u_n|^2|\nabla\psi_\epsilon|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= M(\|u_n\|^2)\|u_n\|\left(\int_\Omega |u_n|^2|\nabla\psi_\epsilon|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Sendo $(u_n)$ uma sequência limitada, da continuidade de M e do fato que $supp(\psi_\epsilon) \subset B(x_i, 2\epsilon)$, existe $C_5 > 0$ tal que

$$M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\epsilon u_n \leq C_5\left(\int_{B(x_i,2\epsilon)} |u_n|^2|\nabla\psi_\epsilon|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.32}$$

Pondo $g_n(x) = |u_n(x)|^2|\nabla\psi_\epsilon(x)|^2$, segue-se de 3.24 e 3.25 que

$$g_n(x) \to g(x), \text{ e } |g_n(x)| \leq h^2(x)|\nabla\psi_\epsilon|^2 \in L^1(\Omega), \text{ q.t.p. em } B(x_i, 2\epsilon),$$

onde $g(x) = |u(x)|^2|\nabla\psi_\epsilon(x)|^2$. Assim do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice B, Teorema B.2)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B(x_i,2\epsilon)} |u_n|^2|\nabla\psi_\epsilon|^2 dx = \int_{B(x_i,2\epsilon)} |u|^2|\nabla\psi_\epsilon|^2. \tag{3.33}$$

Logo, de 3.32 e 3.33 concluímos que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla \psi_\epsilon(u_n) \leq C_5\left(\int_{B(x_i,2\epsilon)}|u|^2|\nabla\psi_\epsilon|^2\right)^{\dfrac{1}{2}}.$$

Uma vez que, $|u|^2 \in L^3(\Omega)$ e $|\nabla\psi_\epsilon|^2 \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, teremos novamente da Desigualdade de Hölder (ver Apêndice B, Teorema B.3) que

$$\lim_{n\to\infty} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla\psi_\epsilon u_n \leq C_5\left(\int_{B(x_i,2\epsilon)}|u|^6\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_{B(x_i,2\epsilon)}|\nabla\psi_\epsilon|^3\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{3.34}$$

Considerando novamente a Regra da cadeia

$$\frac{\partial\psi_\epsilon(x)}{\partial x_j} = \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\left(\frac{x-x_i}{\epsilon}\right),$$

da mudança de variável $y = \dfrac{x-x_i}{\epsilon}$, obtemos $\epsilon y = x - x_i$ e $dx = \epsilon^3 dy$

$$\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial\phi(\frac{x-x_i}{\epsilon})}{\partial x_i} = \frac{\partial\phi(y)}{\partial x_i}(-\frac{1}{\epsilon})$$

daí

$$|\nabla\psi_\epsilon(x)| = |-\frac{1}{\epsilon}\nabla\phi(y)| = \frac{1}{\epsilon}|\nabla\phi(y)|$$

assim,

$$\int_{B(x_i,2\epsilon)}|\nabla\psi_\epsilon|^3 dx \;=\; \Big[\int_{B(0,2)}\left(|\nabla\phi|^3\right)dy\Big]^{\dfrac{2}{3}} \leq \|\nabla\phi\|_\infty^3|B(0,2)|. \tag{3.35}$$

Substituindo (3.35) em (3.34), obtemos

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\epsilon u_n \;&\leq\; C_5\left(\int_{B(x_i,2\epsilon)}(u^+)^6\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_{B(0,2)}|\nabla\phi_\epsilon|^3 dy\right)^{\frac{2}{3}}\\ &\leq\; C_5\left(\int_{B(x_i,2\epsilon)}(u^+)^6\right)^{\frac{1}{3}}\|\nabla\phi\|_\infty^3|B(0,2)|,\end{aligned}$$

assim, fixando $C = C_5\|\nabla\phi\|_\infty^3|B(0,2)|$, ou seja,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla\psi_\epsilon u_n \leq C\left(\int_{B(x_i,2\epsilon)}(u^+)^6\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Finalmente definindo $g_\epsilon(x) = (u^+(x))^6\chi_{B(x_i,2\epsilon)}(x)$, temos que

$$g_\epsilon(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^3.$$

quando $\epsilon \to 0$ e

$$|g_\epsilon(x)| \leq |u^+(x)|^6 \in L^1(\Omega).$$

Portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice B, Teorema B.2)

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left( \int_{B(xi,2\epsilon)} (u^+)^6 dx \right)^{\frac{1}{3}} = 0$$

e consequentemente

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[ \overline{\lim_{n \to \infty}} M(\|u_n\|^2) \int_\Omega \nabla u_n \nabla \psi_\epsilon u_n dx \right] = 0.$$

Daí, de 3.31, obtemos

$$0 \leq \lim_{\epsilon \to 0} \left( \sum_{i \in \Lambda} \nu_i \psi_\epsilon(x_i) - M(t_0^2) \sum_{i \in \Lambda} \mu_{i\psi_\epsilon}(x_i) \right),$$

ou seja,

$$0 \leq \lim_{\epsilon \to 0} \left( \int_{B(x_i,2\epsilon)} \psi_\epsilon \ d\nu - M(t_0^2) \int_{B(x_i,2\epsilon)} \psi_\epsilon \ d\mu \right).$$

Agora veremos que

$$\int_{B(x_i,2\epsilon)} \psi_\epsilon \ d\nu = \int_{\{x_i\}} d\nu \text{ e } M(t_0^2) \int_{B(x_i,2\epsilon)} \psi_\epsilon \ d\mu = M(t_0^2) \int_{\{x_i\}} d\mu.$$

Com efeito, temos que,

$$\int_{B(x_i,2\epsilon)} \psi_\epsilon \ d\nu = \int_\Omega \psi_\epsilon \chi_{B(x_i,2\epsilon)} \ d\nu \ \text{ e } \ \int_{B(x_i,2\epsilon)} \psi_\epsilon \ d\mu = \int_\Omega \psi_\epsilon \chi_{B(x_i,2\epsilon)} \ d\mu,$$

onde

$$\psi_\epsilon(x) \chi_{B(x_i,2\epsilon)}(x) \to \chi_{\{x_i\}}(x), \ q.t.p. \text{ em } \Omega,$$

quando $\epsilon \to 0$ e

$$|\psi_\epsilon(x) \ \ \chi_{B(x_i,2\epsilon)}(x)| \leq 1, \ q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Desde que as medidas de Radon são finitas, concluímos que $1 \in L^1(\nu)$ e $1 \in L^1(\mu)$, logo do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice B, Teorema B.2), resulta que,

$$\int \psi_\epsilon \chi_{B(x_i,2\epsilon)} \ d\nu = \int \chi_{\{x_i\}} \ d\nu + o(1) \ \text{ e } \ \int \psi_\epsilon \chi_{B(x_i,2\epsilon)} \ d\mu = \int \chi_{\{x_i\}} \ d\mu + o_\epsilon(1).$$

Isto é,

$$\int_{B(x_i,2\epsilon)} \psi_\epsilon \, d\nu = \int_{\{x_i\}} d\nu + o_\epsilon(1) \text{ e } M(t_0^2)\int_{B(x_i,2\epsilon)} \psi_\epsilon \, d\mu = M(t_0^2)\int_{\{x_i\}} d\mu + o_\epsilon(1).$$

Sendo assim, obtemos

$$0 \leq \int_{\{x_i\}} d\nu - M(t_0^2)\int_{\{x_i\}} d\mu.$$

Logo,

$$M(t_0^2)\int_{\{x_i\}} d\mu \leq \int_{\{x_i\}} d\nu,$$

e portanto, vale

$$M(t_0^2)\mu(x_i) \leq \nu(x_i). \tag{3.36}$$

Por outro lado temos

$$\nu(x_i) = \sum_{i\in\Lambda} \nu_i \delta_{x_i}(x_i) = \nu_i$$

e

$$\mu(x_i) = \sum_{i\in\Lambda} \mu_i \delta_{x_i}(x_i) = \mu_i.$$

Do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions segue-se que

$$\mu_i \geq S\nu_i^{\frac{1}{3}} \;\; \forall \;\; i \in \Lambda. \tag{3.37}$$

Assim comparando as desigualdades (3.36) e (3.37) e por $(M_1)$

$$\nu_i \geq M(t_0^2)\mu(x_i) \geq S\nu_i^{\frac{1}{3}} m_0.$$

Logo

$$\nu_i \geq M(t_0^2)\mu(x_i) \geq m_0\mu_i,$$

e portanto, supondo que $\nu(x_i) = \nu_i > 0$, de 3.28 obtemos

$$\nu_i \geq (m_0 S)^{\frac{3}{2}} \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)(m_0 S)^{\frac{3}{2}}. \tag{3.38}$$

Pois $\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right) < 1$.

Logo a desigualdade em (3.38) ocorre para todo índice $i \in \Lambda$ tal que $\nu_i$ e $\mu_i$ são positivos.

Argumentamos agora com intuito de mostrar que o conjunto $\Lambda$ é vázio, isto é, os números $\nu_i$ e $\mu_i$ são todos nulos, ou seja, a desigualdade (1.29) não pode ocorrer.

De fato, suponhamos por contradição que para algum $i \in \Lambda$ para os quais $\nu_i$ e $\mu_i$ sejam positivos. Assim, de (3.38) a sequência $(\nu_i)$ não convergirá para zero e portanto a série

$$\sum_{i\in\Lambda} \nu_i^{\frac{1}{3}}$$

divergirá, contradizendo o Princípio de concentração e Compacidade de Lions (ver [23]), desta forma, concluímos que $\Lambda$ é vázio ou finito.

Uma vez que $(u_n)$ é uma sequência em $H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
c_{\lambda,a} &= I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle w_n, u_n\rangle + o_n(1) \\
&= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \lambda\int_\Omega F(u_n)dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (u_n^+)^6 dx \\
&- \frac{1}{\theta}\left[M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 - \lambda\langle \rho_n, u_n\rangle - \int_\Omega (u_n^+)^6 dx\right] + o_n(1),
\end{aligned}$$

logo, do Teorema de Representação de Riesz (ver Apêndice B, Teorema B.5)

$$\begin{aligned}
c_{\lambda,a} &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \\
&+ \lambda\int_\Omega \left[\frac{1}{\theta}\widehat{\rho}_n(u_n)(u_n)dx - F(u_n)dx\right] \\
&+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega (u_n^+)^6 dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Desde que $\widehat{\rho}_n \geq \underline{f}(u_n(x))$ q.t.p. $\Omega$

$$\begin{aligned}
c_{\lambda,a} &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \\
&\geq \lambda\int_\Omega \left[\frac{1}{\theta}\underline{f}(u_n(x))(u_n(x))dx - F(u_n)dx\right] \\
&+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega (u_n^+)^6 dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Como $0 \leq \psi_\epsilon \leq 1$

$$c_{\lambda,a} \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega (u_n^+)^6 dx + o_n(1) \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega \psi_\epsilon (u_n^+)^6 dx + o_n(1).$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos,

$$c_{\lambda,a} \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\sum_{i\in\Lambda}\psi_\epsilon(x_i)\nu_i = \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\sum_{i\in\Lambda}\nu_i \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)(m_0 S)^{\frac{3}{2}}$$

o que contradiz nossa hipótese inicial. Portanto $\nu_i = 0, \ \forall \ i \in \Lambda$, isto é, $\Lambda$ é vazio.

Sendo assim, do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions (ver [23]), concluímos que

$$\int_\Omega (u_n^+)^5 \varphi dx \to \int_\Omega (u_0^+)^5 \varphi dx, \ \forall \varphi \in C_0(\Omega),$$

e portanto

$$\int_\Omega (u_n^+)^6 dx \to \int_\Omega (u_0^+)^6 dx.$$

Desde que $(u_n)$ é uma sequência Palais-Smale limitada, $u_n \to u_0$ em $L^6(\Omega)$ e $u_n \to u_0$ em $L^q(\Omega)$ temos

$$\lim_{n\to\infty} M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 = \lambda \int_\Omega \rho_0 u_0 dx + \int_\Omega (u_0^+)^6 dx.$$

Por outro lado, como $u_n \rightharpoonup u_0$ e $\|u_n\| \to t_0$ teremos

$$M(t_0^2) \int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx = \lambda \int_\Omega \rho_0 v dx + \int_\Omega (u_0^+)^5 v dx, \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega),$$

portanto

$$M(t_0^2)\|u_0\|^2 = \lambda \int_\Omega \rho_0 u_0 dx + \int_\Omega (u_0^+)^6 dx.$$

De onde segue que

$$M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \to M(t_0^2)\|u_0\|^2.$$

Desde que

$$M(\|u_n\|^2) \to M(t_0^2),$$

obtemos que $\|u_n\|^2 \to \|u_0\|^2$. Uma vez $u_n \rightharpoonup u_0$ e $H_0^1(\Omega)$ é uniformemente convexo, segue-se $u_n \to u_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Assim, concluímos que $I_{\lambda,a}$ verifica a condição Palais-Smale.

■

## 3.3 Prova do Resultado Principal

A seguir, mostraremos o nosso principal resultado

**Teorema 3.3** *Assuma que as condições $(M_1) - (M_4)$, são verdadeiras. Então, existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema $(P_{\lambda,a})$ tem uma solução fraca positiva em $H_0^1(\Omega)$, para todo $\lambda \geq \lambda^*$ e $a > 0$.*

**Demonstração:** Dos Lemas (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7), temos do Teorema do Passo da Montanha para funcionais $Lip_{loc}$, que $u_0$ é ponto crítico de $I_{\lambda,a}$ no nível $c_{\lambda,a}$, isto é,

$$I_{\lambda,a}(u_0) = c_{\lambda,a} > 0$$

implicando que $u_0 \neq 0$.

Desde que

$$\lambda\rho_n = \Upsilon'(u_n) - \Phi'(u_n) - w_n,$$

temos, para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\lambda\langle\rho_n, \varphi\rangle = \Upsilon'(u_n)(\varphi) - \Phi'(u_n)(\varphi) - \langle w_n, \varphi\rangle.$$

Assim, usando o Teorema de Representação de Riesz (ver Apêndice B, Teorema B.5)

$$\lambda\int_\Omega \rho_n\varphi = \Upsilon'(u_n)\varphi - \Phi'(u_n)\varphi - \langle w_n, \varphi\rangle. \tag{3.39}$$

Como

$$\rho_n \overset{\star}{\rightharpoonup} \rho_0, \text{ em } (L^6(\Omega))^*,$$

então,

$$\int_\Omega \rho_n v dx \to \int_\Omega \rho_0 v, \ \forall \ v \in L^6(\Omega),$$

em particular

$$\int_\Omega \rho_n v dx \to \int_\Omega \rho_0 v dx, \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Passando ao limite com $n \to +\infty$ em (3.39), usando o fato que

$$u_n \to u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

e

$$\|w_n\|_{(H_0^1(\Omega))^*} \to 0,$$

segue-se

$$\lambda \int_\Omega \rho_0(\varphi)dx = \Upsilon'(u_0)(\varphi) - \Phi'(u_0)(\varphi),\ \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$M(\|u_0\|^2)\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi dx - \int_\Omega u_0^5 \varphi dx = \lambda \int_\Omega \rho_0 \varphi dx.$$

Logo, $u_0$ é solução fraca do problema abaixo.

$$(P_{\lambda,a}) \begin{cases} -\Big[M\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx\Big)\Big]\Delta u_0 = u_0^5 + \lambda\rho_0, \text{ em } \Omega \\ u_0(x) > 0 \quad \text{ em } \Omega, \\ u_0 = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $|u_0|^5 \in L^{\frac{6}{5}}(\Omega) = L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ e $\rho_0 \in L^{\frac{6}{\sigma}}(\Omega)$.

Note que $\dfrac{6}{\sigma} > \dfrac{2N}{N+2}$ pois ($\sigma \in (1, \frac{N+2}{N-2})$), o que implica $L^{\frac{6}{\sigma}}(\Omega) \subset L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$. Assim, segue que

$$|u_0|^5 + \lambda\rho_0 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega), \tag{3.40}$$

implicando, pelo Teorema de Agmon-Douglas-Niremberg

$$u_0 \in W^{2,\frac{6}{5}}(\Omega) = W^{2,\frac{2N}{N+2}}(\Omega), \tag{3.41}$$

portanto

$$-M(\|u_0\|^2)\Delta u_0 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega),$$

segue-se de (3.41) e (3.40)

$$-M(\|u_0\|^2)\Delta u_0 - |u_0|^5 = \lambda\rho_0, \text{ em } L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega). \tag{3.42}$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Apêndice, Teorema B.5) existe $\rho_0 \in (L^{\frac{6}{6-\sigma}}(\Omega))^*$ tal que

$$\langle \rho_0, \varphi \rangle = \int_\Omega \widehat{\rho_0}\varphi,\ \forall\ \varphi \in L^{\frac{6}{6-\sigma}}(\Omega). \tag{3.43}$$

Assim como, para cada $n$, existe $\rho_n \in (H_0^1(\Omega))^* \subset (L^{\frac{6}{6-\sigma}}(\Omega))^*$ tal que

$$\langle \rho_n, \varphi \rangle = \int_\Omega \widehat{\rho_n}\varphi,\ \forall\ \varphi \in L^{\frac{6}{6-\sigma}}(\Omega), \tag{3.44}$$

onde $\widehat{\rho_n} \in \partial\Psi(u_n)$.

Usando (3.43),(3.44) e o fato que $\partial\Psi$ é fraco estrela fechado (ver $(P_4)$), segue-se que

$$\rho_n \overset{*}{\rightharpoonup} \rho_0. \tag{3.45}$$

e

$$u_n \to u_0, \text{ em } L^{\frac{6}{6-\sigma}}(\Omega), \tag{3.46}$$

Desde que

$$\lambda\rho_0(x) \in \lambda[\underline{f}(u_n(x)), \overline{f}(u_n)(x)], \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{3.47}$$

segue de (3.40) e (3.47) que

$$-M(\|u_0\|^2)\Delta u_0 - |u_0(x)|^4 u_0(x) \in \lambda[\underline{f}(u_0(x)), \overline{f}(u_0)(x)], \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Mostrando assim que $u_0$ é solução fraca do problema $(P_{\lambda,a})$. ■

**Afirmação 3.4** *Definindo* $\Omega_a = \{x \in \Omega; u(x) = a\}$, *temos* $|\Omega_a| = 0$

**Prova:** Vamos mostrar que $|\Omega_a| = 0$, onde

$$\Omega_a = \{x \in \Omega, u(x) = a\}.$$

Suponhamos, por contradição, que $|\Omega_a| > 0$. Do Teorema de Morrey-Stampachia (ver [27]).

$$-\Delta u_0(x) = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega_a.$$

Logo,

$$-[M\|u_0\|^2]\Delta u_0(x) = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega_a. \tag{3.48}$$

Como $u_0$ é ponto crítico, segue-se

$$-[M(\|u_0\|^2)]\Delta u_0(x) - |u_0(x)|^4 u_0(x) \in \lambda[\underline{f}(u_0(x)), \overline{f}(u_0)(x)], \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

De (3.48), obtemos

$$|u_0(x)|^4 u_0(x) \in \lambda[\underline{f}(u_0(x)), \overline{f}(u_0(x))], \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Desde que

$$0 \leq H(u_0 - a)(u_0^+)^q \leq (u_0^+)^q,$$

segue da definição de $\underline{f}(u_0(x))$, $\overline{f}(u_0(x))$ e do fato que $u_0 \geq 0$.

$$0 \leq \underline{f}(u_0(x)) \leq \overline{f}(u_0(x)) \leq (u_0)^q.$$

Assim,

$$|u_0(x)|^4 u_0(x) \in [0, \lambda a^q]$$

o que é um absurdo. Portanto $|\Omega_a(u_0)| = 0$.

Provando que $u_0$ é uma solução do problema $(P_{\lambda,a})$.

# Apêndice A

# Funcionais diferenciáveis

Neste apêndice, vamos mostrar que o funcional é diferenciável, para isso consideremos algumas definições:

**Definição A.1** *Seja $\phi : A \to \mathbb{R}$ onde $A$ é um subconjunto aberto de um espaço normado $X$. Dizemos que $\phi$ possui uma derivada de Gâteaux $f \in X'$ em $u \in A$ se, para qualquer $h \in X$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[ \phi(u + th) - \phi(u) - f(th) \right] = 0.$$

*A derivada de Gâteaux em $u$ é denotada por $\phi'(u)$.*

**Definição A.2** *Seja $\phi : A \to \mathbb{R}$ onde $A$ é um subconjunto aberto de um espaço normado $X$. Dizemos que $\phi$ possui uma derivada de Frechét $f \in X'$ em $u \in A$ se*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{1}{\|h\|} \left[ \phi(u + h) - \phi(u) - f(h) \right] = 0.$$

**Definição A.3** *Dizemos que o funcional $\phi \in C^1(A, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet de $\phi$ existe e é contínua em $A$.*

Observe que, todo funcional Frechét-diferenciável é também Gâteaux-diferenciável, porém a recíproca não é verdadeira. No entanto, temos a

**Proposição A.1** *Seja $\phi : A \to \mathbb{R}$ onde $A$ é um subconjunto aberto de um espaço normado $X$. Se $\phi$ possui derivada de Gâteaux contínua em $A$, então $\phi \in C^1(A, \mathbb{R})$.*

**Demonstração:** Sejam $v \in A$ e $\phi^{'}(v)$ a derivada de Gâteaux de $\phi$ em $v$. Do Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} |\phi(v+h)-\phi(v)-\phi^{'}(v)(h)| &= |\phi^{'}(v+\theta h)(h)-\phi^{'}(v)(h)| \\ &\leq \|\phi^{'}(v+\theta h)(h)-\phi^{'}(v)\|_{X^*}\|h\|. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Como $\phi$ possui derivada de Gâteaux contínua em $A$, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $\|u\| < \delta$ temos

$$\|\phi^{'}(v+\theta h)(h)-\phi^{'}(v)\| < \epsilon.$$

Segue então de (A.1) que

$$|\phi(u+h)-\phi(u)-\phi^{'}(u)(h)| < \epsilon\|h\|,$$

de onde concluímos que $\phi$ possui uma derivada de Frechét e esta é contínua.

Devemos mostrar que o funcional é de classe $C^1(H_0^1, \mathbb{R})$

$$I(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (u^+)^6 dx.$$

Assim, consideremos os seguintes funcionais.

$$I_1 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$I_1(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2)$$

$$I_2 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$I_2(u) = \lambda\int_\Omega F(x,u)dx$$

$$I_3 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$I_3(u) = \frac{1}{6}\int_\Omega (u^+)^6 dx.$$

Vamos mostrar que o funcional $I_1$ está bem definido sendo

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds < +\infty$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, logo

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) < +\infty$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

**Afirmação A.1** $I_1(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2)$ *é de classe* $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

**Demonstração:**

Sejam $u, \phi \in H_0^1(\Omega)$, definamos as funções $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por $g(s) = \widehat{M}(s)$ e $f(r) = \|u + rt\phi\|^2$ assim, para cada $r \in \mathbb{R}$

$$G(r) = g(f(r)) = \widehat{M}(\|u + rt\phi\|^2),$$

logo

$$\begin{aligned} G(1) &= \widehat{M}(\|u + t\phi\|^2) \\ G(0) &= \widehat{M}(\|u\|^2). \end{aligned}$$

Daí

$$\frac{1}{t}\Big[I_1(u + th) - I_1(u)\Big] = \frac{1}{2t}\Big[G(1) - G(0)\Big]. \tag{A.2}$$

Desde que a norma em $H_0^1(\Omega)$ é proveniente de um produto interno, segue-se a aplicação,

$$\varphi(u) = \|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, com

$$\varphi^{'}(u)h = 2\int_\Omega \nabla u \nabla h dx.$$

Logo, $f(r) = \varphi(u + rth)$ é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, com

$$f^{'}(r) = \varphi^{'}(u + rth)(th) = 2t\int_\Omega \nabla(u + rth)\nabla h dx.$$

Sendo $g$ e $f$ diferenciávieis, temos que $G$ é diferenciável e portanto, do Teorema do Valor Médio, resulta que existe $0 < \theta < 1$ tal que

$$\begin{aligned} G(1) - G(0) &= G^{'}(\theta) \\ &= \Big[g(f(\theta))\Big]^{'} \\ &= g^{'}(f(\theta))f^{'}(\theta) \\ &= 2tM(\|u + rth\|^2)\int_\Omega \nabla(u + \theta th)\nabla h dx. \end{aligned}$$

Substituindo em(A.2) obtemos

$$\frac{1}{t}\Big[I_1(u + th) - I_1(u)\Big] = M(\|u + \theta th\|^2)\int_\Omega \nabla(u + \theta th)\nabla h.$$

Uma vez que a aplicação $\tau$ definida por

$$\tau(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla h$$

é um funcional linear contínuo sobre $H_0^1(\Omega)$, segue-se que, quando $t \to 0$

$$\int_\Omega \nabla(u + \theta th)\nabla h \to \int_\Omega \nabla u \nabla h,$$

além disso como $M$ é contínua

$$M(\|u + \theta th\|^2) \to M(\|u\|^2).$$

Logo

$$M(\|u + \theta th\|^2) \int_\Omega \nabla(u + \theta th)\nabla h \to M(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla h,$$

e consequentemente

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big[I_1(u + th) - I_1(u)] = M(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla h.$$

Mostrando que a derivada de Gâteaux de $I_1$ existe e é dada por

$$I^{'}(u)h = M(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla h.$$

Vejamos que a derivada é contínua. Para isso, sejam $u_n \subset H_0^1(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Então

$$|I^{'}(u_n)h - I^{'}(u)h| = |M(\|u_n\|^2) \int_\Omega \nabla u_n \nabla h - M(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla h|.$$

Somando e subtraindo o termo $M(\|u_n\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla h$, obtemos

$$\begin{aligned} |I^{'}(u_n)h - I^{'}(u)h| &\leq M(\|u_n\|^2)| \int_\Omega \nabla u_n \nabla h - \int_\Omega \nabla u \nabla h| \\ &+ |\int_\Omega \nabla u \nabla h||M(\|u_n\|^2) - M(\|u\|^2)|. \end{aligned}$$

Sendo $(\|u_n\|)$ limitada, $M$ contínua e da desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} |I^{'}(u_n)h - I^{'}(u)h| &\leq C \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u||\nabla h| \\ &+ \|u\|\|h\||M(\|u_n\|^2) - M(\|u\|^2)| \\ &\leq C\|u_n - u\|\|h\| \\ &+ \|u\|\|h\||M(\|u_n\|^2) - M(\|u\|^2)|. \end{aligned}$$

Tomando $h \in H_0^1(\Omega)$ com $\|h\| \leq 1$, teremos

$$\|I^{'}(u_n) - I^{'}(u)\| \leq C\|u_n - u\| + \|u\||M(\|u_n\|^2) - M(\|u\|^2)|.$$

Como $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ e M é contínua, então, passando ao limite de $n \to \infty$, obtemos

$$\|I^{'}(u_n) - I^{'}(u)\| \to 0.$$

Mostrando que $I_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$

Seja $I_2 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_2(u) = \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Vamos calcular a Derivada de Gâteaux $DI_2$. Para cada

$$t \in \mathbb{R}, \text{ com } 0 \leq |t| \leq 1 \text{ e } x \in \Omega \text{ e } u, \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Consideremos a sequinte função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(s) = F(x, u + st\phi).$$

Observe que

$$\begin{aligned} h'(s) = &\quad f(x, u + st\phi)t\phi, \\ h(1) = &\quad F(x, u + t\phi), \\ h(0) = &\quad F(x, u). \end{aligned}$$

Desde que $h$ é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, do Teorema do Valor Médio existe $\gamma \in (0,1)$ tal que

$$h(1) - h(0) = h'(\gamma)$$

de onde segue

$$\left|\frac{F(x, u + st\phi) - F(x,u)}{t}\right| = |f(x, u + \gamma t\phi)|\,|\phi|\,.$$

Notemos que, por 1.3,

$$\begin{aligned} |f(x, u + \gamma t\phi)||\phi| &\leq \epsilon|u + \gamma t\phi||\phi| + M_2|u + \gamma t\phi|^{q-1}|\phi| \\ &\leq \epsilon(|u| + \gamma t|\phi|) + M_2\left[|u| + \gamma t|\phi|\right]^{q-1}|\phi| \\ &\leq \epsilon(|u| + |\phi|)|\phi| + M_2[(|u| + |\phi|)^{q-1}]|\phi| \\ &\leq \epsilon(|u| + |\phi|)|\phi| + M_2\left[2^{q-1}max(|u|^{q-1}, |\phi|^{q-1})\right]|\phi| \\ &\leq \epsilon(|u| + |\phi|)|\phi| + C\left(|u|^{q-1} + |\phi|^{q-1}\right)|\phi| \\ &\leq \epsilon|u||\phi| + \epsilon|\phi|^2 + C|u|^{q-1}|\phi| + C|\phi|^q. \end{aligned}$$

Logo,

$$|f(x,u+\gamma t\phi)||\phi| \quad \leq \quad \epsilon|u||\phi| + \epsilon|\phi|^2 + C|u|^{q-1}|\phi| + C|\phi|^q.$$

Desde que $u, \phi \in H_0^1(\Omega)$, temos que $|u|, |\phi| \in H_0^1(\Omega)$. Das imersões de Sobolev,

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &\hookrightarrow L^1(\Omega), \text{ então, } |u|, |\phi| \in L^1(\Omega), \\ H_0^1(\Omega) &\hookrightarrow L^2(\Omega), \text{ logo } |\phi| \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Da Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\phi| dx &= \int_\Omega |\phi| 1 dx \leq \left(\int_\Omega |\phi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega 1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\phi\|_2 |\Omega|^{\frac{1}{2}} < +\infty. \end{aligned}$$

Assim, $|\phi|^2 \in L^1(\Omega)$. Novamente das imersões de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ então } |\phi| \in L^q(\Omega).$$

Vamos mostrar que $|\phi|^q \in L^1(\Omega)$, de fato

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\phi| dx &= \int_\Omega |\phi| 1 dx \leq \left(\int_\Omega |\phi|^{\frac{q}{q-1}} dx\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{q}{q-1}} dx\right)^{\frac{q-1}{q}} \\ &= \|\phi\|_{L^q(\Omega)} |\Omega|^{\frac{q-1}{q}} < +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, $|\phi|^q \in L^1(\Omega)$.

Desde que $\phi, u \in H_0^1(\Omega)$, então $|\phi|$ e $|u| \in H_0^1(\Omega)$. Das imersões de Sobolev.

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q-1}(\Omega),$$

logo, $|u| \in L^{q-1}(\Omega)$; da mesma forma temos

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{q-1}{q-2}}(\Omega),$$

desde que $|\phi| \in L^{\frac{q-1}{q-2}}(\Omega)$. Como $q-1$ e $\dfrac{q-1}{q-2}$ são expoentes conjugados, da Desigualdade de Hölder obtemos,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u\phi| dx &\leq \left(\int_\Omega |u|^{q-1} dx\right)^{\frac{1}{q-1}} \left(\int_\Omega |u|^{\frac{q-1}{q-2}} dx\right)^{\frac{q-2}{q-1}} \\ &= \|u\|_{L^{q-1}(\Omega)} \|\phi\|_{L^{\frac{q-2}{q-1}}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Então,

$$\int_\Omega |u\phi| dx < +\infty.$$

Portanto

$$|u\phi| \in L^1(\Omega).$$

Além disso, para $|t_n| \to 0$ quando $n \to \infty$, então

$$f(x, u(x) + \gamma t_n \phi(x))\phi(x) \to f(x, u(x))\phi(x), \text{ pontualmente em } \Omega.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice B), temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x, u(x) + \gamma t_n \phi(x))\phi(x)dx = \int_\Omega f(x, u(x))\phi(x)dx.$$

Queremos mostrar que $DI_2 : H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^*$ é contínuo, ou seja,

$$u_n \to u, \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

temos que

$$DI_2(u_n) \to DI_2(u),$$

em $(H_0^1(\Omega))^*$ com $\|\phi\| \leq 1$.

Logo,

$$\begin{aligned} |DI_2(u_n)\phi - DI_2(u)\phi| &= |\int_\Omega f(x, u_n)\phi dx - \int_\Omega f(x, u)\phi dx| \\ &= |\int_\Omega (f(x, u_n) - f(x, u))\, \phi dx|. \end{aligned}$$

Desde que

$$u_n \to u, \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

das imersões de Sobolev

$$u_n \to u, \text{ em } L^s(\Omega) \text{ com } 1 \leq s \leq 6.$$

Do Teorema de Vainberg (ver Apêndice B, Teorema B.7), a menos de subsequência denotando ainda por $(u_n)$ e $g \in L^s(\Omega)$ tal que

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

e

$$|u_n(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Desde que $f$ é uma Função Caratheódory

$$[f(x,u_n(x))-f(x,u(x))]^{\frac{p}{p-1}} \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

E por (1.3) temos,

$$\begin{aligned}
|f(x,u_n(x))-f(x,u(x))|^{\frac{p}{p-1}} &\leq C\left[(|f(x,u_n)|+|f(x,u)|)^{\frac{p}{p-1}}\right] \\
&\leq C[2^{\frac{p}{p-1}}\max\{|f(x,u_n)|^{\frac{p}{p-1}}+|f(x,u)|^{\frac{p}{p-1}}\}] \\
&\leq a|u_n(x)|+b|u_n(x)|^p+a|u(x)|+b|u(x)|^p \\
&\leq 2\left(a|g(x)|+b|g(x)|^p\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$|f(x,u_n(x))-f(x,u(x))|^{\frac{p}{p-1}} \leq 2\left(a|g(x)|+b|g(x)|^p\right) \in L^1(\Omega).$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice B),

$$|f(x,u_n(x))-f(x,u(x))|_{(L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega))} \to 0.$$

Assim, para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$, tal que $\|\phi\| \leq 1$, temos

$$|(DI_2(u_n)-DI_2(u))\phi| = \int_\Omega (f(x,u_n)-f(x,u))\phi dx.$$

Desde que $\dfrac{p}{p-1}$ e $p$ são expoentes conjugados, da Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
|(DI_2(u_n)-DI_2(u))\phi| &= \left(\int_\Omega (f(x,u_n)-f(x,u))^{\frac{p-1}{p}}dx\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\int_\Omega |\phi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |f(x,u_n(x))-f(x,u(x))|_{(L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega))}|\phi|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Das imersões de Sobolev

$$\begin{aligned}
|(DI_2(u_n)-DI_2(u))\phi| &\leq C|f(x,u_{n_j}(x))-f(x,u(x))|_{L^{\frac{p}{p-1}}}\|\phi\| \\
&\leq C|f(x,u_n(x))-f(x,u(x))|_{L^{\frac{p}{p-1}}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|DI_2(u_n)-DI_2(u)\| = \sup_{\|\phi\|\leq 1}|(DI_2(u_n)-DI_2(u))\phi| \leq C|f(x,u_n(x))-f(x,u(x))|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}.$$

Implicando que,

$$\|DI_2(u_n)-DI_2(u)\| \to 0.$$

Assim, mostramos que operador é contínuo. Portanto, o funcional dado por

$$I_2 : H_0^1 \to \mathbb{R}, \text{ dado por } u \mapsto I_2(u) = \lambda \int_\Omega F(x,u)dx.$$

É de classe $(C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

**Afirmação A.2** *O funcional dado por,*

$$u \to I_3(u) = \frac{1}{6}\int_\Omega (u_+)^6.$$

*É de classe* $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

**Demonstração:** Desde que

$$|u|^6 = \max\{0, u_+^6\}$$

temos que

$$\frac{1}{6}\int_\Omega u_+^6 dx \leq \frac{1}{6}\int_\Omega |u|^6 dx < \infty.$$

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{6}|x|^6.$$

Consideremos,

$$f'(x) = \begin{cases} 6|x|^4 x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Calculemos a Derivada de Gâteaux

$$\begin{aligned} DI_3(u)\phi &= \lim_{t \to 0} \frac{I_3(u + t\phi) - I_3(u)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{6}\int_\Omega (u_+ + t\phi)^6 dx - \frac{1}{6}\int_\Omega (u_+)^6 dx}{t}. \end{aligned}$$

Sejam $u, \phi$ e $x \in \Omega$ e $0 \leq |t| \leq 1$. Pelo Teorema do Valor Médio existe $\gamma \in (0,1)$ tal que,

$$\left|\frac{I_3(u(x) + t\phi(x)) - I_3(u(x))}{t}\right| = |DI_3(u(x) + \gamma t\phi(x))||\phi(x)|$$

$$\big||u(x) + t\phi(x)|^6 - |u_+(x)|^6\big| = 6|u(x) + \gamma t\phi(x)|^4(u(x) + \gamma t\phi(x))|\phi(x)|$$

Logo,

$$\begin{aligned} DI_3(u)\phi &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{6}\int_\Omega 6|u_+(x)+\gamma t\phi(x)|^4(u(x)+\gamma t\phi(x))|\phi(x)|dx \\ &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega |u(x)+\gamma t\phi(x)|^4(u(x)+\gamma t\phi(x))|\phi(x)|dx. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega |u(x)+\gamma t\phi(x)|^4(u(x)+\gamma t\phi(x))|\phi(x)|dx = \int_\Omega |u|^4 u\phi dx. \tag{A.3}$$

Note que mostrar (A.3) é equivalente a mostrar que

$$\lim_{t_n\to 0}\int_\Omega |u(x)+\gamma t_n\phi(x)|^4(u(x)+\gamma t_n\phi(x))|\phi(x)|dx = \int_\Omega |u|^4 u\phi dx.$$

$t_n \to 0$ quando $n\to\infty$.

Assim considere

$$\varphi_n(\phi) = |u+\gamma t_n\phi|^4(u+\gamma t_n\phi)\phi.$$

Temos,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\phi) = \lim_{n\to\infty}|u+\gamma t_n\phi|^4(u+\gamma t_n\phi)\phi = |u|^4 u\phi.$$

Além disso,

$$|\varphi_n(\phi)| = |u+\gamma t_n\phi|^4|(u+\gamma t_n\phi)|\phi = |u+\gamma t_n\phi|^5\phi.$$

Desde que $\gamma\in(0,1)$ temos

$$|\varphi_n(\phi)| \le |u+t_n\phi|^5|\phi|.$$

Como $t_n\to 0$ quando $n\to\infty$ tem-se $|t_n|<1$ e

$$\begin{aligned} |\varphi_n(\phi)| &\le |u+\phi|^5|\phi| \\ &\le [|u|+|\phi|]^5|\phi| \le \left(2^5\max\{|u|,|\phi|\}\right)^5|\phi| \\ &\le C\left(|u|^5,|\phi|^5\right)|\phi| \le C\left(|u|^5+|\phi|^5\right)|\phi| = C|u|^5|\phi|+C|\phi|^6 \\ &\le C|u|^5|\phi|+C|\phi|^6 \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice B) tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_n(\phi) &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty}\varphi_n(\phi) = \int_\Omega \varphi(\phi)dx \\ \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u+\gamma t_n\phi|^4(u+\gamma t_n\phi)\phi dx &= \int_\Omega |u|^4 u\phi dx. \end{aligned}$$

O que é equivalente a

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega |u+\gamma t\phi|^4(u+\gamma t\phi)\phi dx = \int_\Omega |u|^4 u\phi dx = \int_\Omega |u|^5\phi dx.$$

Isto é,

$$DI_3(u)\phi = \int_\Omega |u|^5\phi dx.$$

Denotando por $DI_3(u)\phi = I_3'(u)\phi$ vamos mostrar que $I_3'$ é contínuo. Consideremos primeiramente,

$$g(u) = |u|^4 u$$

e $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u$$

em $H_0^1(\Omega)$. Da Imersões de Sobolev então

$$u_n \to u, \text{ em } L^6(\Omega).$$

Assim, a menos de subsequência

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{A.4}$$

e $K(x) \in L^6(\Omega)$.

$$|u_n| \leq K(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

De (A.4)

$$|u_n(x)|^4 u_n(x) \to |u(x)|^4 u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

isto é,

$$g(u_n(x)) \to g(u(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Logo,

$$|g(u_n(x)) - g(u(x))|^{\frac{6}{5}} \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}|g(u_n(x))-g(u(x))|^{\frac{6}{5}}=||u_n|^5-|u|^5|^{\frac{6}{5}} &\leq (|u_n|^5+|u|^5)^{\frac{6}{5}}\\ &\leq \left(2^{\frac{6}{5}}\max\{|u_n|^5,|u|^5\}^{\frac{6}{5}}\right)\\ &\leq \left(2^{\frac{6}{5}}\max\{|u_n|^6,|u|^6\}\right)\\ &\leq C\left([|u_n|^6+|u|^6]\right)\\ &\leq C\left(K(x)^6+|u|^6\right)\in L^1(\Omega).\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice B),

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |g(u_n(x))-g(u(x))|^{\frac{6}{5}}dx=0.$$

Isto é,

$$|g(u_n(x))-g(u(x))|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)}=0.$$

$$\|I_3'(u_n)-I_3'(u)\|=\sup_{\|\phi\|\leq 1}\left|(I_3'((u_n)-I_3'(u))\phi)\right|.$$

e

$$\begin{aligned}\left|(I_3'((u_n)-I_3'(u))\phi)\right| &= \left|\int_\Omega |u_n|^4u_n\phi dx-\int_\Omega |u|^4u\phi dx\right|\\ &= \left|\int_\Omega (|u_n|^4u_n-|u|^4u)\phi dx\right|\\ &\leq \int_\Omega |g(u_n)-g(u)||\phi|dx.\end{aligned}$$

Da Desigualdade de Hölder

$$\int_\Omega |g(u_n)-g(u)||\phi|dx\leq |g(u_n)-g(u)|_{L^{\frac{6}{5}}}|\phi|_{L^6(\Omega)}\leq C|g(u_n)-g(u)|_{L^{\frac{6}{5}}}\|\phi\|.$$

Então,

$$\|I_3'((u_n)-I_3'(u)\|\leq |g(u_n)-g(u)|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)}\to 0.$$

Portanto $I_3'$ é contínuo. Então o funcional dado por $I_3=\frac{1}{6}\int_\Omega(u_+)^6dx$ é de classe $C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$.

Concluímos então que o funcional definido por

$$I(u)=\frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u\|^2\right)-\lambda\int_\Omega F(x,u)dx-\frac{1}{6}\int_\Omega(u_+)^6dx,$$

é de classe $C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$.

# Apêndice B

# Resultados importantes

Neste apêndice enunciaremos os principais resultados utilizados nas demonstrações desta dissertação.

No que segue-se temos as seguintes notações.

$X$ é um conjunto mensurável;

$\mu$ é uma medida em $X$;

$M^+$ é o conjunto das funções mensuráveis não-negativas em $X$.

**Teorema B.1** (Lema de Fatou) ($ver$[14]) Se $f_n$ pertence a $M^+$, então

$$\int \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

**Teorema B.2** (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) ($ver$[14]) Seja $f_n$ uma sequência de funções integráveis que convergem quase em todo ponto para uma função mensurável $f$. Se existe uma função integrável $g$ tal que

$$|f_n| \leq g, \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$$

então $f$ é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

**Teorema B.3** (Desigualdade de Hölder) ($ver$[14]) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,

$$fg \in L^1(\Omega) \,\mathrm{e}\, \|fg\| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Teorema B.4** (Desigualdade de Minkowski) ($ver$[14]) Se $f$ e $h$ pertencem a $L^p(\Omega)$ $p \geq 1$, então $f + h$ pertencem a $L^p(\Omega)$ e

$$\|f + g\| \leq \|f\|_p + \|h\|_q$$

**Teorema B.5** (Teorema da Representação de Riesz) ($ver$[14]) Seja $G : L^p \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado, $1 < p < +\infty$. Então existe uma função $g \in L^q(\Omega)$, onde $q = \frac{p}{p-1}$, tal que

$$\langle G, f\rangle = \int_\Omega fgd\mu \,\forall\, f \in L^p(\Omega).$$

Além disso, $\|G\|_p = \|g\|_q$.

**Teorema B.6** (Teorema de Fubini) ($ver$[14]) Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para todo $x \in \Omega_1$

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \,\text{e} \int_{\Omega_2} F(x, y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y)dx.$$

**Teorema B.7** (Teorema de Vainberg)($ver$[14]) Sejam $f_n$ uma sequência de $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que

$$f_n \to f \text{ em } L^p(\Omega).$$

Então existe uma subsequência $f_{n_j}$ de $f_n$ tal que

**(i)**$f_{n_j} \to f(x)$ q.t.p em $\Omega$

**(ii)**$|f_{n_j}| \leq h(x)$ q.t.p em $\Omega$, $\forall n_j \in \mathbb{N}$, onde $h \in L^p(\Omega)$.

**Teorema B.8** ($ver$[26]) Sejam $1 < p < +\infty$ e $f_n$ uma sequência limitada $L^p(\Omega)$ que converge pontualmente para $f$, q.t.p em $\Omega$. Então

$$f_n \rightharpoonup f \text{ em } L^p(\Omega).$$

**lema B.1** ($ver$[26]) Sejam $1 < p < +\infty$ e $(f_n)$ uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$e

$$\|f\|_p^p = \lim_{n\to+\infty}(\|f_n\|_p^p - \|f - f_n\|_p^p).$$

**Teorema B.9** (Teorema de Agmon-Douglas-Niremberg)($ver$[26]) Seja $f \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema linear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \quad, \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e existe $C > 0$, independente de $u$ tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C|f|_{L^p(\Omega)}.$$

Além disso, se $f \in W^{k,p}\overline{\Omega}$ então $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$.

**Teorema B.10** (Princípio do Máximo Forte)Seja $\Omega$ um domínio do $\mathbb{R}^N$ e

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^{\overline{\Omega}} \text{ com } -\Delta u \geq 0(-\Delta u \leq 0) \text{ em } \Omega.$$

Suponha que exista um $x_0 \in \Omega$ tal que

$$u(x_0) = \inf_{x \in \Omega} u(x) \ \ (u(x_0) = \sup_{x \in \Omega} u(x)).$$

Então $u$ é constante.

# Bibliografia


[1] Adams, R. A, **Sobolev spaces**. Academic press (1975)

[2] Alves, C. O., Corrêa, F. J. S. A., Fiqueiredo, G. M., **On a class of nonlocal elliptic problems with critical growth**, Diferential Equations Aplications 3(2010)409-417.

[3] Alves, C. O., Bertone, A. M., **A discontinuous problem involving the p-laplacian operator and critical exponent in** $\mathbb{R}$ , Electronic J. Differential Equations. Vol. 2003(2003), No. 42, pp.1-10.

[4] Alves, C. O., Bertone, A. M., Goncalves, J. V., **A variational approach to discontinuous problems with Critical Sobolev exponents**, J. Math. Anal. App., 265 (2002) 103-127.

[5] Ambrosetti., A. Calahorrano M., Dobarro F., **Global branching for discontinuous problems**, Comm. Math., 31 (1990)213-222.

[6] Ambrosetti, A., Turner, R., **Some discontinuous variational problems**, Diferential Integral Equations., 1, No 3(1988) 341-349.

[7] Ambrosetti. A., Rabinowitz. P. H., **Dual variational methods in critical point theory and aplications**, j.Functional Analysis, 14(1973)349-381.

[8] Arcoya, A., Calahorrano, M. **Some discontinuous variational problems with a quasilinear operador**, J. Math. Anal. 187 (1994), 1059-1072.

[9] Azorero, J. G., Alonso, I. P., **Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term**, Trans. Amer. Math. Soc. , vol 323 n. 2(1991)877-895.

[10] Badiale, M., **Critical exponent and discontinuous nonlinearities**, Diferential Integral Equations 6 (1993), 1173-1185.

[11] Badiale, M., **Some remarks on elliptic problems with discontinuous nonlinearities**, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 51 (1993), 331-342.

[12] Badiale, M., **Some existence results for sublinear elliptic problems in** $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, Funkcialaj Ekvacioj, 39 (1996), 183-202.

[13] Badiale, M. and G., Tarantello. **Existence and multiplicity results for elliptic problems with critical growth and discontinuous nonlinearities**, Nonlinear Analysis, 26 (1997), 639-677.

[14] Bartle, R. G., **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**, Wiley Classics Library(1995).

[15] Brezis, H., **Análisis funcional, Teoría y aplicaciones**, Version española de Juan Ramón Esteban. Alianza Editorial.S. A. Madrid, 1984.

[16] Chang, K. C., **Variational methods for nondiferentiable functionals and their applications to partial diferential equations**, J. Math. Anal. 80 (1981), 102-129.

[17] Clarke, F. H., **Generalized gradients and applications**, Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975), 247-262.

[18] Corrêa, F. J.S.A. e Figueiredo, G. M., **On the existence of positive solution for an elliptic equation of Kirchhoff type via Moser iteration Method**, Bound. Value Probl.;v. 2006, n. 00, p. ID 79679-10, 2006.

[19] Grossinho, M. R. e Tersian, S.A., **An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Diferential Equations**, 2001.

[20] Brezis, H.L.Nirenber, **Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents**, Comm. Pure Appl. Math., 36 (1983), 437-477.

[21] Peral, I., **Multiplicity of solutions for the p-Laplacian**,Second School of Nonlinear Functional Analysis and Aplications to Differential Equations, ICTP-Trieste, 1997.

[22] Junior. J. R. S, **Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas não-locais do tipo Kirchhoff**, dissertação de mestrado, PPGME-UFPA, 2011.

[23] Lions, J.L., **The concentration compactness principle in the calculus of variations. The limit case** , Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985), 145-201 e 2 (1985), 145-121.

[24] Lions, J. L., **On some question in boundary value problems of mathematical physics, International Symposium on Conmtinuum, Mechanics and Partial Diferential Equations**, Rio de Janeiro (1977), Mathematics Studies, Vol.30, North-Holland, Amsterdam, 1978, 284-346.

[25] Kirchhorff, G., **Mechanik**, Teubner, leipzig, 1883.

[26] Kavian, O., **I ntroduction à la théorie des points critiques et applicatons auxproblemes elliptiques**, Springer, Heidelberg (1983).

[27] Morrey, C. B., **Multiple integrals in calculus of variations** , Springer Verlag, Berim,1 966.

[28] Nascimento, R. G., **Problemas elípticos não-locais do tipo p-kirchhoff**, Campinas, tese de doutorado, S.P.(2008)

[29] Santos J. A., **Teorema minimax para funcionais localmente lipschitz e aplicações, dissertaçao de mestrado**, CCT-UFCG,(2007)

[30] Sabino. E. R, **Problemas elípticos com não linearidade descontínua envolvendo o expoente crítico de Sobolev**, PPGME-UFPA, 2010.

[31] Santos. J. A, **Equações Quasilineares Multivalentes**, Brasília, tese de doutorado, UnB.(2011)

[32] Willem, M., **Minimax theorems, Progressin Nonlinear Differential Equations and Their Applications**, Birkhäuser, 1996.