UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Andréia Gomes Pinheiro

Existência de solução para um problema do tipo Kirchhoff com crescimento crítico via argumento de truncamento

BELÉM

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Andréia Gomes Pinheiro

Existência de solução para um problema do tipo Kirchhoff com crescimento crítico via argumento de truncamento

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

BELÉM
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Andréia Gomes Pinheiro

Existência de solução para um problema do tipo Kirchhoff com crescimento crítico via argumento de truncamento

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Data da defesa: 14 de Março de 2014.

Conceito: Aprovada

Banca Examinadora

Prof°. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)
PPGME - UFPA

Rafael dos Reis Abreu

Prof°. Dr. Rafael dos Reis Abreu
PPGME - UFPA

Prof°. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

Dedicatória

Aos meus pais Maria e Elias, com amor.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por esta graça concedida, por me proporcionar saúde, sabedoria e determinação para concluir este trabalho e por estar sempre ao meu lado derramando suas bençãos em minha vida.

Aos meus pais, Maria e Elias, pelo incentivo e apoio incondicional em todos os momentos proporcionando-me o suporte e coragem para alcançar os meus objetivos.

Ao meu noivo, Sandro, por ser companheiro e amigo, por compartilhar os sonhos, as tristezas e as alegrias e, principalmente, pela compreenção nos momentos em que estive ausente para estudar.

Aos meus irmãos, Adriane, André e Adriano; a minha filha, Louise. Que apenas por existirem, me motivam a dar o exemplo.

Ao meu orientador, professor Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, pela disposição em orientar este trabalho, por direcionar os meus estudos com sua experiência, pelos ensinamentos que obtive e, além disso, por ser exemplo de um profissional dedicado e competente.

Aos professores Dr. Rafael dos Reis Abreu e Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria por aceitarem participar da banca examinadora deste trabalho.

Aos professores do PPGME, pelo conhecimento que adquirir nos cursos ministrados.

Ao professor Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araujo Correa, pela paciência e disponibilidade em momentos que precisei tirar dúvidas, a sua contribuição foi muito valiosa no desenvolvimemto desta dissertação.

Aos meus colegas do curso de mestrado: Júlio, Claudionei, Ítalo, Willian, Raimundo, Elany, Jorsi, Ryan, Tarcyana. Pelos grupos de estudos, pelas noites de "corujão" estudando e por todo o conhecimento que compartilhamos.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Com todos que contribuiram, direta ou indiretamnte, para a realização desta dissertação compartilho esta vitória.

Resumo

Neste trabalho estudaremos um resultado de existência de solução para o problema

$$(P_\lambda)\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = \lambda f(x,u) + |u|^{2^*-2}u \ \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um dominio limitado do $\mathbb{R}^N$, $\|u\|^2 = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$ e $M:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são funções contínuas que satisfazem algumas hipóteses que descreveremos ao longo do trabalho.

Palavras-chave: Equação de Kirchhoff, truncamento, Teorema do Passo da Montanha, crescimento crítico.

Abstract

In this work we study an existence result for the problem

$$(P_\lambda)\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = \lambda f(x,u) + |u|^{2^*-2}u \ \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \ \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^N$, $\|u\|^2 = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$ and $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous functions that satisfy some hipotheses that we are going to describe in this work.

Key-words: Kirchhoff equation, truncation, Mountain Pass Theorem, critical growth.

Conteúdo

Introdução

A proposta desta dissertação é estudar a existência de solução positiva para a classe de problemas do tipo Kirchhoff dado por

$$(P_\lambda) \begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = \lambda f(x,u) + |u|^{2^*-2}u \ \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um dominio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave $\partial\Omega$, $N \geq 3$, λ é um parâmetro positivo, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que satisfazem algumas condições que serão estabelecidas posteriormente e

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx.$$

Nosso estudo é baseado no artigo de Figueiredo G.M. [17]. Neste artigo o autor usa uma técnica baseada em um argumento de truncamento. Uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS) é usada para mostrar que o problema truncado possui solução positiva. Mostra-se, em seguida, que a solução do problema truncado é uma solução do problema original usando estimativas a priori para λ grande.

O problema (P_λ) é chamado não local pela presença do termo $M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)$, o qual implica que a equação em (P_λ) não é identicamente pontual. Este fenômeno causa algumas dificuldades matemáticas que fazem o estudo de tal classe de problemas particularmente interessante. Além disso, este problema tem motivação física. De fato, o operador $M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)\Delta u$ aparece na equação de Kirchhoff, que surge em vibrações não lineares, ou seja, equações do tipo

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u = f(x,u) \ \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x). \end{cases} \tag{1}$$

Tal equação hiperbólica é uma versão geral do problema de Kirchhoff

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2}$$

apresentado por Kirchhoff [20]. Esta equação estende a clássica equação da onda de D'Alembert por considerar os efeitos das alterações no comprimento da corda durante as vibrações. Os parâmetros na equação (2) tem o seguinte significado: L é o comprimento da corda, h é a área da secção transversal, E é o módulo de Young do material, ρ é a densidade de massa e P_0 é a tensão inicial.

Quando uma corda elástica com extremidades fixas é submetida a vibrações transversais, seu comprimento varia com o tempo. Isto introduz alterações de tensão na corda. Isto induziu Kirchhoff a propor uma correção não linear da clássica equação de D'Alembert. Mais tarde, Woinowsky-Krieger (Nash-Modeer) incorporou esta correção na clássica equação de Euler-Bernoulli para a barra com extremidades fixadas. Ver, por exemplo, [1], [2] e as referências aí contidas.

Além disso, problemas não locais também aparecem em outros campos como, por exemplo, sistemas biológicos onde u descreve um processo que depende da própria média (por exemplo, dencidade populacional). Ver em [3], [5], [12], [23], [25] e referências aí contidas.

Existem muitos artigos sobre a equação de Kirchhoff via métodos variacionais, como pode ser visto em [4], [5], [6], [7], [10], [11], [16], [18], [19], [21] e [28] e as referências aí contidas. A dificuldade que aparece no uso desta técnica é o crescimento do operador $\widehat{M}(\|u\|^2) = m_0\|u\|^2 + \dfrac{b}{2}\|u\|^4$, onde $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(s)\,ds$ e $m_0, b > 0$. Isto obriga-nos a impor um crescimento 4-superlinear sobre a não linearidade f, isto é, $f(x,t) = t^p$ com $p \in (3, 2^* = \frac{2N}{N-2})$. Mas $2^* = \frac{2N}{N-2} \to 2$ quando $N \to +\infty$. Para contornar esta dificuldade, é comum fixar $N = 3$

ou fazer um truncamento sobre a função M.

O trabalho [5] foi muito importante porque os autores usaram, pela primeira vez, argumentos variacionais para resolver o problema de Kirchhoff, mais precisamente, o Teorema do Passo da Montanha. Os autores usaram um argumento de truncamento similar ao usado aqui. Além disso, para mostrar que a solução do problema truncado é uma solução do problema original, eles usaram um argumento do tipo Gidas-Spruck.

O artigo [13] é a versão do trabalho [5] com p-Laplaciano. Os autores usaram comparações entre níveis minimax de energia para mostrar que a solução do problema truncado é uma solução do problema original.

Em [14], os autores consideraram uma classe de problemas não locais com crescimento supercrítico usando métodos variacionais combinados com método de iteração de Moser para λ suficientemente pequeno. Neste artigo, o fato de λ ser pequeno possibilita contornar a dificuldade provocada pelo crescimento supercrítico.

Em [4], os autores mostraram um resultado de existência de solução positiva para o problema (P_λ). Neste artigo as seguintes hipóteses sobre a função M foram assumidas.

Existe $m_0 > 0$ tal que $M(t) \geq m_0$, para todo $t \geq 0$.

Existe $b > 0$ tal que $\dfrac{M(t)}{t} \to b$ quando $t \to +\infty$.

Existe $4 < \theta < 6$ tal que $\left[\dfrac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \dfrac{1}{\theta}M(t^2)t^2\right] \geq 0$ para todo $t \geq 0$, onde $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(s)ds$ e $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \frac{1}{\theta}M(t^2)t^2\right] = +\infty$.

Nos artigos [4], [6], [7], [10], [15], [16], [18], [19], [21], [24], [26], [28] a função não local é $M(\|u\|^2) = m_0 + b\|u\|^2$, o que forçou os autores a fixarem $N = 3$.

Motivado por resultados encontrados em [4], [5], [13], [14], o autor em [17] estudou a existência de solução para o problema (P_λ). O autor usou o mesmo tipo de truncamento explorado em [5]; porém, foi feito uma nova abordagem e algumas estimativas foram totalmente diferentes daquelas usadas no artigo mencionado acima. As principais diferenças são as seguintes:

- O tamanho de λ substitui argumentos de Gidas-Spruck e comparação entre níveis minimax de energia usado em [5], [13], respectivamente.

- Em [17] foi provado o mesmo resultado encontrado em [4], porém, com hipóteses mais fracas. Além disso, os argumentos usados em [4] são válidos apenas para $N = 3$. Em [17], foi considerado $N \geq 3$. Isto é possível graças ao argumento de truncamento.

- Ao contrário de [14], em [17], o parâmetro λ está multiplicando o termo com crescimento subcrítico. Assim, o método usado em [14] não pode ser repetido aqui porque estamos trabalhando com uma classe diferente de problemas.

- Em [17] o autor estudou o comportamento assintótico da solução do problema (P_λ) quando $\lambda \to \infty$. Este estudo não foi observado nos demais artigos citados acima.

Antes de enunciar o principal resultado desta dissertação, precisamos das seguintes hipóteses sobre a função $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$:

(M_0) A função M é contínua;

(M_1) A função M é crescente;

(M_2) Existe $m_0 > 0$ tal que $M(t) \geq m_0 = M(0)$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Um exemplo típico de uma função satisfazendo as condições $(M_1) - (M_2)$ é dada por $M(t) = m_0 + bt$ com $b \geq 0$ e para todo $t \geq 0$, que é a considerada na equação de Kirchhoff em [20].

As hipóteses sobre a função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as seguintes:

(f_0) A função f é contínua;

(f_1) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = 0$, uniformemente sobre $x \in \Omega$;

(f_2) Existe $q \in (2, 2^*)$ verificando $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} \frac{f(x,t)}{t^{q-1}} = 0$, uniformemente sobre $x \in \Omega$;

(f_3) Existe $\theta \in (2, 2^*)$ tal que

$$0 < \theta F(x,t) = \theta \int_0^t f(x,s)\,ds \leq tf(x,t),$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$, $t > 0$ e $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)\,ds$;

(f_4) Assumiremos que $f(x,t)=0$, para todo $x\in\Omega$ e $t\leq 0$.

Um exemplo típico de uma função satisfazendo as condições $(f_1)-(f_3)$ é dada por

$$f(x,t)=\sum_{1}^{k} C_i(x)t_+^{q_i-1}$$

com $k\in\mathbb{N}$, $2<q_i<2^*$, $C_i\in L^\infty(\Omega)$, $C_i(x)>0$, para todo $x\in\Omega$ e $t_+=\max\{t,0\}$.

O principal resultado desta dissertação é o seguinte:

Teorema 2.1 Assuma que as condições $(M_1)-(M_2)$, $(f_1)-(f_3)$ se verificam. Então, existe $\lambda^*>0$, tal que o problema (P_λ) possui solução positiva, para todo $\lambda\geq\lambda^*$. Além disso, se u_λ é uma solução para o problema (P_λ), então

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\|u_\lambda\|=0.$$

Para facilitar a leitura desta dissertação, ela está estruturada da seguinte maneira:

No Capítulo 1, faremos um truncamento sobre a função $M:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ e definiremos um problema auxiliar (T_λ). Além disso, demonstraremos alguns lemas técnicos necessários para provarmos os teoremas principais.

No Capítulo 2, faremos a demonstração do Teorema 2.1, principal resultado desta dissertação.

Para completar este estudo colocamos nos apêndices alguns resultados e demonstrações que serão usados no corpo desta dissertação.

No Apêndice A, colocaremos alguns resultados que envolvem a teoria de análise funcional, medida e integração e sobre espaços de Sobolev utilizados em nosso estudo.

No Apêndice B, estudaremos a diferenciabilidade do funcional associado ao problema auxiliar.

Notações:

- $\blacksquare$: fim de uma demonstração,

- $\rightarrow$: convergência forte,

- $\rightharpoonup$: convergência fraca,

- $B_r(x)$: bola de centro x e raio r,

- $\|u\| = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$,

- $|f|_s = |f|_{L^s(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^s \, dx \right)^{\frac{1}{s}}, 0 < s < \infty.$

Capítulo

1

O problema auxiliar

Neste capítulo, faremos um truncamento sobre a função $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e definiremos um problema auxiliar. Além disso, demonstraremos alguns lemas técnicos necessários para provarmos os teoremas principais.

Assumiremos, sem perda de generalidade, que M não é limitada. Caso contrário, o truncamento sobre M não é necessário.

Desde que nosso interesse é trabalhar com $N \geq 3$, faremos um truncamento sobre M como segue. Dado $a \in \mathbb{R}$ tal que $m_0 < a < \frac{\theta}{2}m_0$, como M é contínua e não limitada existe $t_1 > 0$ tal que $M(t_1) = \frac{\theta}{2}m_0$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermadiário, existe $t_0 > 0$ tal que $M(t_0) = a$. Vamos definir

$$M_a(t) = \begin{cases} M(t) \text{ se } 0 \leq t \leq t_0, \\ a \text{ se } t \geq t_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Por (M_1), seque que

$$M_a(t) \leq a. \tag{1.2}$$

A argumentação que vamos usar e que aparece em [17] é baseada em um estudo cuidadoso da solução do problema auxiliar:

$$(T_\lambda) \begin{cases} -M_a(\|u\|^2)\Delta u = \lambda f(x,u) + |u|^{2^*-2}u \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f, N, λ são como no problema (P_λ).

1.1 Estrutura variacional e lemas técnicos

Recordemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca positiva do problema (T_λ) se verifica

$$M_a(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla \Phi \, dx - \lambda \int_\Omega f(x,u)\Phi \, dx - \int_\Omega u_+^{2^*-1}\Phi \, dx = 0,$$

para todo $\Phi \in H_0^1(\Omega)$ e $u_+ = \max\{u, 0\}$.

Acharemos soluções positivas para (T_λ) encontrando os pontos críticos do funcional $I_{a,\lambda} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 (Ver Apêndice B) dado por

$$I_{a,\lambda}(u) = \frac{1}{2}\widehat{M_a}(\|u\|^2) - \lambda \int_\Omega F(x,u)\, dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega u_+^{2^*}\, dx,$$

onde $\widehat{M_a}(t) = \displaystyle\int_0^t M_a(s)\, ds$.

Note que,

$$I'_{a,\lambda}(u)\Phi = M_a(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla \Phi \, dx - \lambda \int_\Omega f(x,u)\Phi \, dx - \int_\Omega u_+^{2^*-1}\Phi \, dx,$$

para todo $\Phi \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, se $u \in H_0^1(\Omega)$ é ponto crítico não trivial de $I_{a,\lambda}$, então tomando u^- como função teste, temos

$$0 = I'_{a,\lambda}(u)u^- = M_a(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla u^- \, dx - \lambda \int_\Omega f(x,u)u^- \, dx - \int_\Omega u_+^{2^*-1}u^- \, dx,$$

isto implica que,

$$0 = I'_{a,\lambda}(u)u^- = -M_a(\|u\|^2)\int_\Omega |\nabla u_-|^2 \, dx.$$

Sendo $\|u\|^2 > 0$ e $M_a(t) > 0$ para todo $t > 0$, concluímos que

$$\int_\Omega |\nabla u_-|^2 \, dx = 0,$$

e portanto, $u_- = 0$ quase sempre em Ω. Assim, $u = u_+ \geq 0$ quase sempre em Ω. Então, após regularização elíptica, temos que $u \geq 0$ em Ω. Daí, usando Princípios de Máximos, concluímos que $u > 0$ em Ω.

Com o objetivo de usar Métodos Variacionais, primeiro definiremos alguns resultados relacionados a condição de compacidade Palais-Smale.

Definição 1.1 *Dizemos que uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência Palais-Smale para o funcional $I_{a,\lambda}$ no nível $d \in \mathbb{R}$ se*

$$I_{a,\lambda}(u_n) \to d$$

e

$$I'_{a,\lambda}(u_n) \to 0 \quad em \quad (H_0^1(\Omega))'.$$

Definição 1.2 *Dizemos que $I_{a,\lambda}$ satisfaz a condição Palais-Smale (abreviadamente (PS)) se toda sequência Palais-Smale de $I_{a,\lambda}$ tem uma subsequência que converge forte.*

Como é bem conhecido, as imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $2 \leq q \leq 2^*$ são contínuas e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ não é compacta. Por isso, em geral, funcionais associados a problemas envolvendo crescimento crítico não verificam a condição Palais-Smale. Entretanto, demonstraremos que a mesma ocorre para o funcional associado ao problema (T_λ), abaixo de um nível fixado.

Lema 1.1 *Assuma que as condições (M_2), (f_1) e (f_2) se verificam. Então, para todo $\lambda > 0$, existem números positivos ρ e α tal que $I_{a,\lambda}(u) \geq \alpha > 0$, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = \rho$.*

Demonstração: Notemos primeiramente que a condição de crescimento dada por (f_1) e (f_2) pode ser expressa da seguinte maneira:

$$f(x,t) \leq \epsilon|t| + C_\epsilon|t|^{q-1}, \ \forall\, t > 0. \tag{1.3}$$

De fato, por (f_1), dado $\epsilon > 0$, exite $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \epsilon|t|, \tag{1.4}$$

para todo $0 < |t| \leq \delta$. Além disso, das hipóteses (f_2) e (f_4), dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \epsilon|t|^{q-1}, \tag{1.5}$$

para todo $|t| \geq R$. Para analisar o caso em que $\delta \leq |t| \leq R$, notemos que a função $\dfrac{f(x,t)}{t^{q-1}}$ é contínua e o intervalo $[\delta, R]$ é compacto. Como toda função contínua assumindo valores reais definida num compacto é limitada, existe $K > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq K|t|^{q-1}, \tag{1.6}$$

sempre que $\delta \leq |t| \leq R$. Portanto, de (1.4), (1.5) e (1.6) obtemos

$$\begin{aligned} f(x,t) &\leq \epsilon|t| + \epsilon|t|^{q-1} + K|t|^{q-1} \\ &\leq \epsilon|t| + (\epsilon + K)|t|^{q-1}, \end{aligned}$$

assim,

$$f(x,t) \leq \epsilon|t| + C_\epsilon|t|^{q-1}, \tag{1.7}$$

onde $C_\epsilon = \epsilon + K$.

Integrando (1.7) em relação t, temos

$$\int f(x,t)\,dt \leq \epsilon \int |t|\,dt + C_\epsilon \int |t|^{q-1}\,dt,$$

isto implica que

$$F(x,t) \leq \frac{\epsilon}{2}|t|^2 + \frac{C_\epsilon}{q}|t|^q, \tag{1.8}$$

para todo $t > 0$. Portanto, para $u \in H_0^1(\Omega)$, concluimos pela desigualdade (1.8) que

$$\lambda \int_\Omega F(x,u)\,dx \leq \frac{\epsilon}{2}\lambda \int_\Omega |u|^2\,dx + \frac{C_\epsilon}{q}\lambda \int_\Omega |u|^q\,dx,$$

ou seja,

$$-\lambda \int_\Omega F(x,u)\,dx \geq -\frac{\epsilon}{2}\lambda \int_\Omega |u|^2\,dx - \frac{C_\epsilon}{q}\lambda \int_\Omega |u|^q\,dx. \tag{1.9}$$

Além disso, por (M_2), existe $m_0 > 0$ tal que $M(t) \geq m_0$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, logo, $M_a(t) \geq m_0$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Assim,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\|u\|^2} M_a(s)\,ds \geq \frac{1}{2}\int_0^{\|u\|^2} m_0\,ds = \frac{1}{2}m_0\|u\|^2,$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\|u\|^2} M_a(s)\,ds \geq \frac{1}{2}m_0\|u\|^2. \tag{1.10}$$

Portanto, de (1.9) e (1.10) conclui-se que

$$\begin{aligned} I_{a,\lambda}(u) &= \frac{1}{2}\int_0^{\|u\|^2} M_a(s)\,ds - \lambda\int_\Omega F(x,u)\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega u_+^{2^*}\,dx \\ &\geq m_0\frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\epsilon}{2}\lambda\int_\Omega |u|^2\,dx - \frac{C_\epsilon}{q}\lambda\int_\Omega |u|^q\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega u_+^{2^*}\,dx. \end{aligned}$$

Das Imersões Contínuas de Sobolev, existem constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$ tais que

$$I_{a,\lambda}(u) \geq \frac{m_0}{2}\|u\|^2 - \frac{\epsilon}{2}\lambda C_1\|u\|^2 - \frac{C_\epsilon}{q}\lambda C_2\|u\|^q - \frac{C_3}{2^*}\|u\|^{2^*},$$

ou ainda,

$$I_{a,\lambda}(u) \geq \left(\frac{m_0 - \epsilon\lambda C_1}{2}\right)\|u\|^2 - \frac{C_\epsilon\lambda C_2}{q}\|u\|^q - \frac{C_3}{2^*}\|u\|^{2^*}.$$

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e fazendo $K_1 = \dfrac{m_0 - \epsilon\lambda C_1}{2}$, $K_2 = \dfrac{C_\epsilon C_2}{q}$ e $K_3 = \dfrac{C_3}{2^*}$ temos

$$I_{a,\lambda}(u) \geq K_1\|u\|^2 - \lambda K_2\|u\|^q - K_3\|u\|^{2^*},$$

com $K_1, K_2, K_3 > 0$. Seja $\rho > 0$ a ser fixado posteriormente. Para $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = \rho$, temos

$$I_{a,\lambda}(u) \geq K_1\rho^2 - \lambda K_2\rho^q - K_3\rho^{2^*} = \alpha.$$

Vamos mostrar que existe $\rho > 0$ de forma que

$$\alpha = K_1\rho^2 - \lambda K_2\rho^q - K_3\rho^{2^*} > 0,$$

ou equivalentemente,

$$\rho^{2^*}\left(\frac{K_1}{\rho^{2^*-2}} - \frac{\lambda K_2}{\rho^{2^*-q}} - K_3\right) > 0.$$

Sabemos que $\rho^{2^*} > 0$, então, é suficiente ter

$$\frac{K_1}{\rho^{2^*-2}} - \frac{\lambda K_2}{\rho^{2^*-q}} - K_3 > 0,$$

que é equivalente a

$$\frac{K_1}{\rho^{2^*-2}} - \frac{\lambda K_2}{\rho^{2^*-q}} > K_3,$$

que por sua vez, é equivalente a

$$\frac{1}{\rho^{2^*-q}}\left(\frac{K_1}{\rho^{q-2}} - \lambda K_2\right) > K_3. \tag{1.11}$$

Sendo $2 < q < 2^*$, temos que

$$\frac{1}{\rho^{2^*-q}}\left(\frac{K_1}{\rho^{q-2}} - \lambda K_2\right) \to +\infty$$

quando $\rho \to 0^+$ e portanto, para $\rho > 0$ suficientemente pequeno, temos (1.11). Isto conclui a demonstração.

■

Lema 1.2 *Assuma que as condições* (M_1), (f_1), (f_2) *e* (f_3) *se verificam. Para todo* $\lambda > 0$, *existe* $e \in H_0^1(\Omega)$ *com* $I_{a,\lambda}(e) < 0$ *e* $\|e\| > \rho$.

Demonstração: Da condição (f_3), obtemos

$$\frac{\theta}{t} \leq \frac{f(x,t)}{F(x,t)}$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ e para todo $t > 1$. Com isso, segue que

$$\int_1^t \frac{\theta}{s}\, ds \leq \int_1^t \frac{f(x,s)}{F(x,s)}\, ds.$$

Assim,

$$[\theta \ln(s)]_1^t \leq [\ln(F(x,s))]_1^t,$$

isto é,

$$\theta \ln(t) \leq \ln\left(\frac{F(x,t)}{F(x,1)}\right).$$

Mostrando que,

$$t^{\theta} \leq \frac{F(x,t)}{F(x,1)}.$$

Dessa forma, concluímos que

$$\begin{aligned} F(x,t) &\geq F(x,1)t^{\theta} \\ &\geq \inf_{x\in\overline{\Omega}} F(x,1)t^{\theta}. \end{aligned}$$

Note que, por (f_3), temos $F(x,1) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, logo, $\inf\limits_{x\in\overline{\Omega}} F(x,1) > 0$. Façamos $C' = \inf\limits_{x\in\overline{\Omega}} F(x,1)$. Este ínfimo é atingido, pois, a função F é contínua e $\overline{\Omega}$ é compacto. Então, obtemos

$$F(x,t) \geq C't^{\theta}.$$

Por outro lado, para $0 < t \leq 1$ temos

$$F(x,t) > 0 > -C'', \quad \forall\, C'' > 0.$$

Portanto,

$$F(x,t) \geq C't^{\theta} - C'', \tag{1.12}$$

para todo $t > 0$. Fixemos $v_0 \in C_0^{\infty}(\Omega)\backslash\{0\}$, com $v_0 \geq 0$ em Ω e $\|v_0\| = 1$. Considere $t > 0$ suficientemente grande tal que $\|tv_0\| \geq \rho$. Temos então

$$I_{a,\lambda}(tv_0) = \frac{1}{2}\int_0^{\|tv_0\|^2} M_a(s)\,ds - \lambda\int_{\Omega} F(x,tv_0)\,dx - \frac{1}{2^*}\int_{\Omega}(tv_0)^{2^*}\,dx.$$

De (1.2), $M_a(t) \leq a$ para todo $t \geq 0$, logo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{\|tv_0\|^2} M_a(s)\, ds &\leq \frac{1}{2}\int_0^{\|tv_0\|^2} a\, ds\\ &= \frac{a}{2}\|tv_0\|^2\\ &= \frac{at^2}{2}\|v_0\|^2\\ &= \frac{at^2}{2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\|tv_0\|^2} M_a(s)\, ds \leq \frac{at^2}{2}. \tag{1.13}$$

Além disso, usando a condição de crescimento para F dada em (1.12), temos

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega F(x,tv_0)\, dx &\geq \lambda\int_{supp(v_0)} (C' t^\theta v_0^\theta - C'')\, dx\\ &\geq \lambda C' t^\theta \int_\Omega v_0^\theta\, dx - \lambda C'' \int_{supp(v_0)} dx\\ &= \lambda C' t^\theta \int_\Omega v_0^\theta\, dx - \lambda C''|supp(v_0)|.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda\int_\Omega F(x,tv_0)\, dx \geq \lambda C' t^\theta \int_\Omega v_0^\theta\, dx - \lambda C''|supp(v_0)|,$$

de onde obtemos,

$$-\lambda\int_\Omega F(x,tv_0)\, dx \leq -\lambda C' t^\theta \int_\Omega v_0^\theta\, dx + \lambda C''|supp(v_0)|. \tag{1.14}$$

E ainda,

$$\frac{1}{2^*}\int_\Omega (tv_0)^{2^*}\, dx = \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega v_0^{2^*}\, dx \geq 0, \tag{1.15}$$

pois, $v_0 \geq 0$. De (1.13), (1.14) e (1.15) segue que

$$I_{a,\lambda}(tv_0) \leq \frac{at^2}{2} - t^\theta C'\lambda \int_\Omega v_0^\theta\, dx + \lambda C''|supp\, v_0| - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega v_0^{2^*}\, dx.$$

Como $\theta > 2$ e $\int_\Omega v_0^\theta\, dx > 0$, temos, $I_{a,\lambda}(tv_0) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$ e isto implica que existe

$t_* > 0$ tal que $e = t_* v_0 \in H_0^1(\Omega)$ com $\|e\| > \rho$ e $I_{a,\lambda}(e) < 0$.

■

Os Lemas 1.1 e 1.2 mostram que o funcional $I_{a,\lambda}$ possui a geometria do Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS) (Ver Referência [27]). Assim, existe uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ satisfazendo

$$I_{a,\lambda}(u_n) \to C_{a,\lambda}$$

e

$$I'_{a,\lambda}(u_n) \to 0,$$

onde

$$C_{a,\lambda} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{a,\lambda}(\gamma(t)) > 0$$

e

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0, I_{a,\lambda}(\gamma(1)) < 0\}.$$

Com o lema seguinte obtemos uma estimativa para $C_{a,\lambda}$.

Lema 1.3 *Se as condições (M_1)-(M_2) e (f_1)-(f_3) se verificam, então* $\lim_{\lambda \to +\infty} C_{a,\lambda} = 0$.

Demonstração: Desde que o funcional $I_{a,\lambda}$ tem a geometria do Teorema do Passo da Montanha, segue que existe $t_\lambda > 0$ verificando

$$I_{a,\lambda}(t_\lambda v_0) = \max_{t \geq 0} I_{a,\lambda}(t v_0),$$

onde v_0 é a função dada no Lema 1.2. Portanto,

$$I'_{a,\lambda}(t_\lambda v_0)(t_\lambda v_0) = 0.$$

Isto implica, que

$$M_a(\|t_\lambda v_0\|^2) \int_\Omega \nabla t_\lambda v_0 \nabla t_\lambda v_0 \, dx - \lambda \int_\Omega f(x, t_\lambda v_0) t_\lambda v_0 \, dx - \int_\Omega (t_\lambda v_0)^{2^*-1} t_\lambda v_0 \, dx = 0,$$

ou seja,

$$M_a(t_\lambda^2\|v_0\|^2)\|t_\lambda v_0\|^2 - \lambda\int_\Omega f(x,t_\lambda v_0)t_\lambda v_0\,dx - \int_\Omega (t_\lambda v_0)^{2^*}\,dx = 0.$$

Como $\|v_0\| = 1$, segue que

$$t_\lambda^2 M_a(t_\lambda^2) = \lambda\int_\Omega f(x,t_\lambda v_0)t_\lambda v_0\,dx + t_\lambda^{2^*}\int_\Omega v_0^{2^*}\,dx. \tag{1.16}$$

De (1.2) e (f_3) temos

$$\begin{aligned} t_\lambda^2 a &\geq t_\lambda^2 M_a(t_\lambda^2) \\ &= \lambda\int_\Omega f(x,t_\lambda v_0)t_\lambda v_0\,dx + t_\lambda^{2^*}\int_\Omega v_0^{2^*}\,dx \\ &\geq t_\lambda^{2^*}\int_\Omega v_0^{2^*}\,dx, \end{aligned}$$

pois, $\lambda\int_\Omega f(x,t_\lambda v_0)t_\lambda v_0\,dx \geq 0$. Assim, obtemos

$$a \geq t_\lambda^{2^*-2}\int_\Omega v_0^{2^*}\,dx. \tag{1.17}$$

Podemos dividir e inequação (1.17) por $\int_\Omega v_0^{2^*}\,dx > 0$ obtendo

$$t_\lambda^{2^*-2} \leq \frac{a}{\int_\Omega v_0^{2^*}\,dx} = \overline{C}.$$

Então, temos

$$0 < t_\lambda \leq \overline{C}^{\frac{1}{2^*-2}} = C,$$

implicando que

$$|t_\lambda| \leq C.$$

Logo, (t_λ) é limitado. Assim, existe uma sequência $\lambda_n \to +\infty$ e $\beta_0 \geq 0$ tal que $t_{\lambda_n} \to \beta_0$ quando $n \to +\infty$. Além disso, existe $\overline{D} > 0$ tal que $t_{\lambda_n}^2 \leq \overline{D}$. Então, desde que $M_a(t)$ é contínua e limitada segue que

$$t_{\lambda_n}^2 M_a(t_{\lambda_n}^2) \leq \overline{D}M_a(t_{\lambda_n}^2) \leq \overline{D}a = D.$$

Assim,

$$t_{\lambda_n}^2 M_a(t_{\lambda_n}^2) \leq D,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De (1.16), temos

$$\lambda_n \int_\Omega f(x, t_{\lambda_n} v_0) t_{\lambda_n} v_0 \, dx + t_{\lambda_n}^{2^*} \int_\Omega v_0^{2^*} \, dx \leq D,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\beta_0 > 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} [\lambda_n \int_\Omega f(x, t_{\lambda_n} v_0) t_{\lambda_n} v_0 \, dx + t_{\lambda_n}^{2^*} \int_\Omega v_0^{2^*} \, dx] = +\infty,$$

que é um absurdo. Portanto, $\beta_0 = 0$. Agora, considere o caminho $\gamma_*(t) = te$ para $t \in [0,1]$, que pertence a Γ, para obter a seguinte estimativa:

$$0 < C_{a,\lambda} \leq \max_{t\in[0,1]} I_{a,\lambda}(\gamma_*(t)) = I_{a,\lambda}(t_\lambda v_0). \tag{1.18}$$

Como $\lambda \int_\Omega F(x, t_\lambda v_0) \, dx \geq 0$ e $\frac{1}{2^*} \int_\Omega (t_\lambda v_0)^{2^*} \, dx \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} I_{a,\lambda}(t_\lambda v_0) &= \frac{1}{2}\widehat{M}_a(\|t_\lambda v_0\|^2) - \lambda \int_\Omega F(x, t_\lambda v_0) \, dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega t_\lambda^{2^*} v_0^{2^*} \, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\widehat{M}_a(\|t_\lambda v_0\|^2) \\ &= \frac{1}{2}\widehat{M}_a(t_\lambda^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_{a,\lambda}(t_\lambda v_0) \leq \frac{1}{2}\widehat{M}_a(t_\lambda^2). \tag{1.19}$$

De (1.18) e (1.19) obtemos

$$0 < C_{a,\lambda} \leq I_{a,\lambda}(t_\lambda v_0) \leq \frac{1}{2}\widehat{M}_a(t_\lambda^2).$$

Logo,

$$0 < C_{a,\lambda} \leq \frac{1}{2}\widehat{M}_a(t_\lambda^2).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\widehat{M}_a(t_\lambda^2) &= \int_0^{t_\lambda^2} M_a(s)\,ds \\
&\leq a\int_0^{t_\lambda^2} ds \\
&= at_\lambda^2.
\end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{\lambda\to\infty} C_{a,\lambda} = 0.$$

$\blacksquare$

Lema 1.4 *Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência tal que $I_{a,\lambda}(u_n) \to C_{a,\lambda}$ e $I'_{a,\lambda}(u_n) \to 0$. Então (u_n) é limitada.*

Demonstração: Desde que $I_{a,\lambda}(u_n) \to C_{a,\lambda}$ segue que $(I_{a,\lambda}(u_n))$ é uma seguência limitada em $\mathbb{R}$, isto é, existe $C > 0$ tal que $I_{a,\lambda}(u_n) \leq |I_{a,\lambda}(u_n)| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $I'_{a,\lambda}(u_n) \to 0$, implica que para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|I'_{a,\lambda}(u_n)\| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$.
Tomando $\epsilon = \theta > 0$, observe que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\theta}I'_{a,\lambda}(u_n)u_n &\leq \frac{1}{\theta}|I'_{a,\lambda}(u_n)u_n| \\
&\leq \frac{1}{\theta}\|I'_{a,\lambda}(u_n)\|\|u_n\| \\
&\leq \frac{1}{\theta}\theta\|u_n\| \\
&= \|u_n\|.
\end{aligned}$$

Assim,

$$-\frac{1}{\theta}I'_{a,\lambda}(u_n)u_n \leq \|u_n\|.$$

Portanto,

$$I_{a,\lambda}(u_n) - \frac{1}{\theta}I'_{a,\lambda}(u_n)u_n \leq C + \|u_n\|.$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
C + \|u_n\| &\geq I_{a,\lambda}(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_{a,\lambda}(u_n)u_n \\
&= \frac{1}{2}\widehat{M}_a(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta} M_a(\|u_n\|^2) \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n \, dx \\
&+ \lambda \int_\Omega \left[\frac{1}{\theta} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \right] dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{\theta} u_n^{2^*-1} u_n - \frac{1}{2^*} u_n^{2^*} \right] dx \\
&= \frac{1}{2}\widehat{M}_a(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta} M_a(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 + \lambda \int_\Omega \left[\frac{1}{\theta} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \right] dx \\
&+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*} \right) \int_\Omega u_n^{2^*} \, dx.
\end{aligned}
$$

Da hipótise (f_3), temos

$$
0 < \theta F(x,u_n) \leq u_n f(x,u_n),
$$

que implica,

$$
0 \leq \frac{1}{\theta} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n).
$$

Assim,

$$
I_{a,\lambda}(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_{a,\lambda}(u_n)u_n \geq \frac{1}{2}\widehat{M}_a(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta} M_a(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*} \right) \int_\Omega u_n^{2^*} \, dx.
$$

Pelo fato de $2 < \theta < 2^*$, temos $\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*} \right) > 0$. Logo,

$$
I_{a,\lambda}(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_{a,\lambda}(u_n)u_n \geq \frac{1}{2}\widehat{M}_a(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta} M_a(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2.
$$

Supondo, por contradição, que (u_n) não é limitada em $H_0^1(\Omega)$, a menos de subsequência, temos $\|u_n\|^2 \geq t_0$. Assim, por (M_2) e pela definição de M_a, segue que

$$
\begin{aligned}
I_{a,\lambda}(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_{a,\lambda}(u_n)u_n &\geq \frac{1}{2} \int_0^{\|u_n\|^2} M_a(s) \, ds - \frac{1}{\theta} a \|u_n\|^2 \\
&\geq \frac{m_0}{2} \|u_n\|^2 - \frac{a}{\theta} \|u_n\|^2.
\end{aligned}
$$

Então,

$$\begin{aligned}\|u_n\| + C &\geq I_{a,\lambda}(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_{a,\lambda}(u_n)u_n \\ &\geq \frac{m_0}{2}\|u_n\|^2 - \frac{a}{\theta}\|u_n\|^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_n\| + C \geq \left(\frac{m_0}{2} - \frac{a}{\theta}\right)\|u_n\|^2. \tag{1.20}$$

Desde que $m_0 < a < \frac{\theta}{2}m_0$ segue que $\left(\frac{m_0}{2} - \frac{a}{\theta}\right) > 0$. Assim, multiplicando a desigualdade (1.20) por $\frac{1}{\|u_n\|}$, para n suficientemente grande, obtemos

$$1 \geq \limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{m_0}{2} - \frac{a}{\theta}\right)\|u_n\|,$$

o que contradiz $\|u_n\| \to +\infty$. Portanto, a sequência (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

■

1.2 Existência de solução para o problema (T_λ)

Começaremos este tópico fazendo algumas considerações sobre medida de Radon, enunciaremos o caso limite do Príncipio de Concentração e Compacidade de Lions - PCCL, em seguinda, iremos estabelecer relações entre o espaço das medidas de Radon e o PCCL.

Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$. Definamos os seguintes espaços de funções:

$$K(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : supp\, u \subset\subset \Omega\},$$

$$BC(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : |u|_\infty = \sup_{x\in\Omega}|u(x)| < +\infty\}$$

e

$$C_0(\Omega) = \overline{K(\Omega)}^{|.|_\infty}.$$

Definição 1.3 *Uma medida finita em Ω é um funcional linear contínuo em $C_0(\Omega)$. A norma de uma medida finita μ é dada por*

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}} = \sup_{u \in C_0(\Omega), |u|_\infty = 1} |\mu(u)|.$$

Denotaremos por $\mathcal{M}(\Omega)$ o espaço das medidas finita ou espaço das medidas de Radon.

Consideremos as seguintes observações sobre o espaço $\mathcal{M}(\Omega)$:

(I) Dada uma função $v \in L^1(\Omega)$, definimos uma medida $\widehat{\mu} : K(\Omega) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma

$$\widehat{\mu}(w) = \int_\Omega wv\, dx \quad \forall w \in K(\Omega),$$

Temos que $\widehat{\mu} \in K(\Omega)'$. De fato, note que $\widehat{\mu}$ está bem definida, pois,

$$|\widehat{\mu}(w)| = \left| \int_\Omega wv\, dx \right| \leq |w|_\infty \int_\Omega |v|\, dx < \infty,$$

uma vez que, $|w|_\infty < \infty$ e $v \in L^1(\Omega)$. Então,

$$\|\widehat{\mu}\|_{\mathcal{M}} = \sup_{w \in C_0(\Omega), |w|_\infty = 1} |\widehat{\mu}(w)| < \infty.$$

Além disso,

$$\|\widehat{\mu}\|_{\mathcal{M}} \leq |v|_1. \tag{1.21}$$

Sejam $w_1, w_2 \in K(\Omega)$, então

$$\widehat{\mu}(w_1 + w_2) = \int_\Omega (w_1 + w_2) v\, dx,$$

pela linearidade da integral, segue que

$$\widehat{\mu}(w_1 + w_2) = \int_\Omega w_1 v\, dx + \int_\Omega w_2 v\, dx = \widehat{\mu}(w_1) + \widehat{\mu}(w_2).$$

Sejam $w \in K(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\widehat{\mu}(\lambda w) = \int_\Omega (\lambda w) v \, dx = \lambda \int_\Omega wv \, dx = \lambda \widehat{\mu}(w).$$

Logo, $\widehat{\mu}$ é linear e contínua. E, por densidade, podemos estender continuamente $\widehat{\mu}$ à $C_0(\Omega)$, ou seja, podemos supor $\widehat{\mu} \in \mathcal{M}(\Omega)$. Dessa forma, toda função em $L^1(\Omega)$ determina uma medida, assim, a menos de identificação, $v \cong \widehat{\mu}$, ou seja,

$$v(w) = \widehat{\mu}(w) = \int_\Omega wv \, dx.$$

(II) Se $u \in L^p(\Omega)$, então $|u|^p \in L^1(\Omega)$ e assim pela observação acima, existe uma medida $\widehat{\mu} \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que

$$\widehat{\mu} \cong v = |u|^p.$$

Em particular, para $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tem-se que $|u|^{2^*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e assim, $|u|^{2^*} \cong v \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$.

(III) Se $(v_n) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência limitada, então $|(v_n)|^p$ é uma sequência limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, por (1.21), $(\widehat{\mu}_n) \cong (v_n)$ é uma sequência limitada em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$. Daí, pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, existe $v \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência,

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad \mathcal{M}(\mathbb{R}^N),$$

isto é,

$$v_n(w) \to v(w) \quad \forall w \in C_0(\mathbb{R}^N),$$

que equivale a

$$\int_{\mathbb{R}^N} wv_n \, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} wv \, dx \quad \forall w \in C_0(\mathbb{R}^N). \tag{1.22}$$

(IV) Pelo Teorema da Representação de Riesz, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma medida finita $\mu_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\widehat{\mu}_n(w) = \int_{\mathbb{R}^N} w\mu_n \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} w \, d\mu_n,$$

onde $\widehat{\mu}_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$.

Da mesma forma, existe uma medida finita $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\widehat{\mu}(w) = \int_{\mathbb{R}^N} w \, d\mu.$$

Então, de (1.22) concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} w \, d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^N} w \, d\mu,$$

para todo $w \in C_0(\mathbb{R}^N)$.

Definição 1.4 *Uma sequência (μ_n) converge fraco para μ no sentido das medidas de Radon e escrevemos*

$$\mu_n \rightharpoonup \mu \quad \text{em} \quad \mathcal{M}(\Omega)$$

quando

$$\mu_n(u) \to \mu(u),$$

para todo $u \in C_0(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega u \, d\mu_n \to \int_\Omega u \, d\mu,$$

para todo $u \in C_0(\Omega)$.

Lema 1.5 *(Princípio de Concentração e Compacidade de Lions - Caso limite) Seja (u_n) uma sequência em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, onde $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$ e sejam (ν_n) e (μ_n) sequências em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ tais que*

$$\int_\Omega w \, d\nu_n = \int_\Omega w|u_n|^{2^*} \, dx$$

e

$$\int_\Omega w \, d\mu_n = \int_\Omega w|\nabla u_n|^2 \, dx$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $w \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Suponhamos que existam $\nu, \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\nu_n \rightharpoonup \nu$$

e

$$\mu_n \rightharpoonup \mu.$$

Então:

(*i*) *Existe um conjunto J de índices, no máximo enumerável, duas famílias de números reais não negativos $(\nu_j)_{j\in J}$, $(\mu_j)_{j\in J}$ e uma família $(x_j)_{j\in J}$ tais que*

$$\nu = |u|^{2^*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}$$

e

$$\mu \geq |\nabla u|^2 + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j},$$

onde $< \delta_{x_j}, \phi >= \phi(x_j)$, para toda $\phi \in C_0(\Omega)$, chamada medida de Dirac de massa 1.

(*ii*)

$$S\nu_j^{\frac{2}{2^*}} \leq \mu_j \quad e \quad \sum_{j\in J} \nu_j^{\frac{2}{2^*}} < \infty,$$

onde

$$S = \inf_{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), u\neq 0} \frac{\|u\|^2}{|u|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}}.$$

Demonstração: Ver [22].

Afim de relacionar o espaço das medidas de Radon e o Princípio de Concentração e Compacidade de Lions, considere $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada com $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Defina o funcional $\nu_n : C_0(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, dado por

$$\nu_n(w) = \int_{\mathbb{R}^N} w|u_n|^{2^*}\, dx, \quad \forall w \in C_0(\mathbb{R}^N).$$

Note que,

$$|\nu_n(w)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} w|u_n|^{2^*}\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |w||u_n|^{2^*}\, dx \leq |w|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*}\, dx,$$

isto implica que,

$$\|\nu_n\| \leq |(|u_n|^{2^*})|_1. \tag{1.23}$$

Sendo (u_n) uma sequência limitada em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, então $(|u_n|^{2^*})$ é uma sequência limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, por (1.23), (ν_n) é uma sequência limitada em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$. Então, pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, existe $\widehat{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ tal que, passando a uma subsequência se necessário,

$$\nu_n \rightharpoonup \widehat{\nu},$$

na topologia $fraco^*$, ou seja,

$$\nu_n(w) \to \widehat{\nu}(w) \tag{1.24}$$

para todo $w \in C_0(\mathbb{R}^N)$.

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} w \, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\nu} w \, dx \quad \forall w \in C_0(\mathbb{R}^N). \tag{1.25}$$

Da mesma forma,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 w \, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mu} w \, dx \quad \forall w \in C_0(\mathbb{R}^N). \tag{1.26}$$

No Princípio de Concentração e Compacidade de Lions, as medidas $\widehat{\nu}$ e $\widehat{\mu}$ são da seguinte forma:

$$\widehat{\nu} = |u|^{2^*} + \nu \tag{1.27}$$

e

$$\widehat{\mu} \geq |\nabla u|^2 + \mu \tag{1.28}$$

onde $\nu = \sum_{i \in J} \nu_i \delta_{x_i}$, $\mu = \sum_{i \in J} \mu_i \delta_{x_i}$ e $\mu_i, \nu_i \in [0, \infty)$ com J sendo finito ou enuméravel.
Logo, por (1.25), (1.26), (1.27) e (1.28) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} w \, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} w \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nu w \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} w \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} w \, d\nu$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 w \, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 w \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} w \, d\mu.$$

Dessa forma, a menos de subseguência, podemos supor que

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup |\nabla u|^2 + \mu$$

e

$$|u_n|^{2^*} \rightharpoonup |u|^{2^*} + \nu$$

no sentido das medidas de Radon.

Lema 1.6 *Seja (u_n) uma sequência em $H_0^1(\Omega)$, tal que (u_n) é limitada e satisfaz*

$$I_{a,\lambda}(u_n) \to C_{a,\lambda}$$

e

$$I'_{a,\lambda}(u_n) \to 0.$$

Se $C_{a,\lambda} < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)(m_0 S)^{\frac{N}{2}}$, onde S é a melhor constante de Sobolev para a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, então existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u_n\|^2 \to \|u\|^2$.

Demonstração: Considere em $H_0^1(\Omega)$ uma sequência (u_n) Palais-Smale no nível $C_{a,\lambda}$ para o funcional $I_{a,\lambda}$, onde (u_n) é limitada e

$$C_{a,\lambda} < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)(m_0 S)^{\frac{N}{2}},$$

com S sendo a melhor constante de Sobolev para a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.

Note que, estendendo por zero as funções de $H_0^1(\Omega)$ fora de Ω, pelas imersões contínuas de Sobolev, segue que $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $H_0^1(\Omega) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, onde

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

Desde que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Assim, pelo

Princípio de Concentração e Compacidade de Lions, a menos de subsequência, temos

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup |\nabla u|^2 + \mu$$

e

$$|u_n|^{2^*} \rightharpoonup |u|^{2^*} + \nu$$

no sentido das medidas de Radon. E obtemos também um conjunto de índices Λ, no máximo enumerável, sequências $(x_i) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, (μ_i), $(\nu_i) \subset [0, \infty)$ tais que

$$\nu = \sum_{i \in \Lambda} \nu_i \delta_{x_i}, \tag{1.29}$$

$$\mu \geq \sum_{i \in \Lambda} \mu_i \delta_{x_i} \tag{1.30}$$

e

$$S \nu_i^{\frac{2}{2^*}} \leq \mu_i, \tag{1.31}$$

para todo $i \in \Lambda$, onde δ_{x_i} é a massa de Dirac em $x_i \in \Omega$ e S é a melhor constante de Sobolev. Afirmamos que $\Lambda = \emptyset$. De fato, suponha por contradição, que $\Lambda \neq \emptyset$ e fixe $i \in \Lambda$. Considere $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 1])$ definida da seguinte forma:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_1(0); \\ 0, & x \in \Omega \backslash B_2(0). \end{cases}$$

Agora, para cada $\varrho > 0$, defina

$$\psi_\varrho(x) = \psi\left(\frac{x - x_i}{\varrho}\right).$$

Observe que, se $\dfrac{x - x_i}{\varrho} \in B_1(0)$, então $|x - x_i| < \varrho$ e se $\dfrac{x - x_i}{\varrho} \in \Omega \backslash B_2(0)$, tem-se que $|x - x_i| \geq 2\varrho$. Assim,

$$\psi_\varrho(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_\varrho(x_i); \\ 0, & x \in \Omega \backslash B_{2\varrho}(x_i). \end{cases}$$

Temos que, para cada $\varrho > 0$, a sequência $(\psi_\varrho u_n)$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|\psi_\varrho u_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla(\psi_\varrho u_n)|^2 \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla u_n \psi_\varrho + \nabla \psi_\varrho u_n|^2 \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} (|\nabla u_n \psi_\varrho| + |\nabla \psi_\varrho u_n|)^2 \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} [2^2 \max\{|\nabla u_n \psi_\varrho|^2, |\nabla \psi_\varrho u_n|^2\}] \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} 2^2 (|\nabla u_n \psi_\varrho|^2 + |\nabla \psi_\varrho u_n|^2) \, dx \\
&= 4 \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla u_n \psi_\varrho|^2 \, dx + 4 \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla \psi_\varrho u_n|^2 \, dx \\
&= 4 \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla u_n|^2 |\psi_\varrho|^2 \, dx + 4 \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla \psi_\varrho|^2 |u_n|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Desde que $|\psi_\varrho| \leq 1$, seque que

$$\|\psi_\varrho u_n\|^2 \leq 4 \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla u_n|^2 \, dx + 4 \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla \psi_\varrho|^2 |u_n|^2 \, dx,$$

logo,

$$\|\psi_\varrho u_n\|^2 \leq 4\|u_n\|^2 + 4 \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla \psi_\varrho|^2 |u_n|^2 \, dx.$$

Da Desigualdade de Hölder, onde os expoêntes conjugados são $\dfrac{N}{N-2}$ e $\dfrac{N}{2}$, temos

$$\|\psi_\varrho u_n\|^2 \leq 4\|u_n\|^2 + 4\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla \psi_\varrho|^N \, dx\right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |u_n|^{2^*} \, dx\right)^{\frac{N-2}{N}}.$$

Da Imersão Contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |u_n|^{2^*} \, dx\right)^{\frac{N-2}{N}} \leq C_1 \|u_n\|^2.$$

Note que o suporte de ψ_ϱ está contido em $B_{2\varrho}(x_i)$, logo, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} |\nabla\psi_\varrho|^N \, dx\right)^{\frac{2}{N}} = \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |\nabla\psi_\varrho|^N \, dx\right)^{\frac{2}{N}}.$$

Pela Regra da Cadeia, temos

$$\frac{\partial\psi_\varrho}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\left(\frac{x - x_i}{\varrho}\right).$$

Fazendo $y = \dfrac{x - x_i}{\varrho}$, implica que

$$\frac{\partial\psi_\varrho}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y_i}(y),$$

para cada $i = 1, ..., N$ e portanto,

$$\nabla\psi_\varrho(x) = \frac{1}{\varrho}\nabla\psi(y).$$

Obtemos também $dx = \varrho^N \, dy$. Além disso, se $x \in B_{2\varrho}(x_i)$ tem-se $y \in B_2(0)$. Assim,

$$\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |\nabla\psi_\varrho|^N \, dx\right)^{\frac{2}{N}} = \left(\int_{B_2(0)} \frac{1}{\varrho^N}|\nabla\psi|^N \varrho^N \, dy\right)^{\frac{2}{N}} = \left(\int_{B_2(0)} |\nabla\psi|^N \, dy\right)^{\frac{2}{N}} = C_2. \qquad (1.32)$$

Então,

$$\|\psi_\varrho u_n\|^2 \leq 4\|u_n\|^2 + 4C_2C_1\|u_n\|^2,$$

ou ainda,

$$\|\psi_\varrho u_n\|^2 \leq C\|u_n\|^2.$$

Desde que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$ e, portanto, é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^\mathbb{N})$, segue que $(\psi_\varrho u_n)$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Assim, $I'_{a,\lambda}(u_n)(\psi_\varrho u_n) \to 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
I'_{a,\lambda}(u_n)(\psi_\varrho u_n) &= M_a(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla(\psi_\varrho u_n)\,dx - \lambda\int_\Omega f(x,u_n)\psi_\varrho u_n\,dx - \int_\Omega u_n^{2^*-1}\psi_\varrho u_n\,dx \\
&= M_a(\|u_n\|^2)\int_\Omega u_n \nabla u_n \nabla \psi_\varrho\,dx + M_a(\|u_n\|^2)\int_\Omega \psi_\varrho |\nabla u_n|^2\,dx \\
&- \lambda\int_\Omega f(x,u_n)\psi_\varrho u_n\,dx - \int_\Omega u_n^{2^*}\psi_\varrho\,dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$M_a(\|u_n\|^2)\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx + M_a(\|u_n\|^2)\int_\Omega \psi_\varrho|\nabla u_n|^2 dx - \lambda\int_\Omega f(x,u_n)\psi_\varrho u_n dx - \int_\Omega u_n^{2^*}\psi_\varrho dx = o(1).$$

Desde que o suporte de ψ_ϱ está contido em $B_{2\varrho}(x_i)$, obtemos

$$\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho\,dx = \int_{B_{2\varrho}(x_i)} u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho\,dx.$$

Portanto,

$$\left|\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho\,dx\right| \leq \int_{B_{2\varrho}(x_i)} |\nabla u_n||u_n\nabla\psi_\varrho|\,dx.$$

Pela Desigualdade de Hölder, segue que

$$\left|\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho\,dx\right| \leq \|u_n\|\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u_n\nabla\psi_\varrho|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como (u_n) é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$\left|\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho\,dx\right| \leq C\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u_n\nabla\psi_\varrho|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.33}$$

Da imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ obtemos, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$. Portanto, a menos de subsequência,

$$u_n(x) \to u(x) \;\; \text{q.t.p. em } \Omega$$

e existe $g \in L^2(\Omega)$, tal que

$$|u_n(x)| \leq g(x) \ \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Assim, fazendo $\gamma_n(x) = |u_n(x)\nabla\psi_\varrho(x)|^2$, concluimos que

$$\gamma_n(x) \to \gamma(x) \ \text{ q.t.p. em } B_{2\varrho}(x_i),$$

onde $\gamma(x) = |u(x)\nabla\psi_\varrho(x)|^2$. Além disso,

$$\gamma_n(x) = |u_n(x)\nabla\psi_\varrho(x)|^2 \leq g(x)^2|\nabla\psi_\varrho(x)|^2 \in L^1(\Omega).$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u_n\nabla\psi_\varrho|^2\, dx = \int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u\nabla\psi_\varrho|^2\, dx. \tag{1.34}$$

Portanto, (1.33) e (1.34) podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho\, dx \right| \leq C\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u\nabla\psi_\varrho|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.35}$$

Usando novamente a Desigualdade de Hölder, com os expoentes conjugados $\dfrac{N}{N-2}$ e $\dfrac{N}{2}$, no segundo membro da desigualdade (1.35), teremos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho\, dx \right| \leq C\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u|^{2^*}\, dx \right)^{\frac{N-2}{N}} \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |\nabla\psi_\varrho|^N\, dx \right)^{\frac{2}{N}}. \tag{1.36}$$

Por uma mudança de variável similar a que foi feita em (1.32) obtemos

$$\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |\nabla\psi_\varrho|^N\, dx \right)^{\frac{2}{N}} = \left(\int_{B_2(0)} |\nabla\psi|^N\, dx \right)^{\frac{2}{N}}. \tag{1.37}$$

Deste modo, por (1.36) e (1.37) segue que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho\,dx\right|\leq C_1\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|u|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{N-2}{N}}. \tag{1.38}$$

Agora, considere a sequência $h_\varrho(x)=|u(x)|^{2^*}\chi_{B_{2\varrho}(x_i)}(x)$, observe que se $\varrho\to 0$, então

$$h_\varrho(x)\to 0\ \text{ q.t.p. em }\ \Omega.$$

E ainda,

$$|h_\varrho(x)|=|u(x)|^{2^*}\chi_{B_{2\varrho}(x_i)}(x)\leq |u(x)|^{2^*}\in L^1(\Omega).$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|u|^{2^*}\,dx=0. \tag{1.39}$$

Portanto, decorre de (1.38) e (1.39) que

$$\lim_{\varrho\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho\,dx\right]=0.$$

Desde que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, a menos de subsequência, existe $\alpha_0\in\mathbb{R}$, com $\alpha_0\geq 0$ tal que $\|u_n\|\to\alpha_0$. Como M_a é uma função contínua, segue que

$$M_a(\|u_n\|^2)\to M_a(\alpha_0^2).$$

Assim, podemos concluir que

$$\lim_{\varrho\to 0}\lim_{n\to\infty}\left[M_a(\|u_n\|^2)\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho\,dx\right]=0.$$

Raciocinando de forma análoga temos

$$\int_\Omega f(x,u_n)\psi_\varrho u_n\,dx=\int_{B_{2\varrho}(x_i)}f(x,u_n)\psi_\varrho u_n\,dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e Imersão de Sobolev, segue que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega} f(x,u_n)\psi_{\varrho} u_n \, dx\right| &\leq \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |f(x,u_n)\psi_{\varrho}|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u_n|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |f(x,u_n)\psi_{\varrho}|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \|u_n\|.\end{aligned}$$

Desde que (u_n) é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$\left|\int_{\Omega} f(x,u_n)\psi_{\varrho} u_n \, dx\right| \leq C\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |f(x,u_n)\psi_{\varrho}|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.40}$$

Da imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ obtemos, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$. Portanto, a menos de subsequência,

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e existe $g \in L^2(\Omega)$, tal que

$$|u_n(x)| \leq g(x) \ \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Assim, fazendo $\sigma_n(x) = |f(x,u_n)\psi_{\varrho}(x)|^2$, concluimos que

$$\sigma_n(x) \to \sigma(x) \ \text{ q.t.p. em } B_{2\varrho}(x_i),$$

onde $\sigma(x) = |f(x,u)\psi_{\varrho}(x)|^2$. Além disso, usando o crescimento de f, temos

$$\begin{aligned}|\sigma_n(x)| &= |f(x,u_n)\psi_{\varrho}(x)|^2 \\ &\leq |(\epsilon|u_n| + C_{\epsilon}|u_n|^{q-1})\psi_{\varrho}(x)|^2 \\ &\leq |\epsilon g(x) + C_{\epsilon} g(x)^{q-1}|^2 |\psi_{\varrho}(x)|^2 \in L^1(\Omega).\end{aligned}$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_{2\varrho}(x_i)} |f(x,u_n)\psi_{\varrho}|^2 \, dx = \int_{B_{2\varrho}(x_i)} |f(x,u)\psi_{\varrho}|^2 \, dx. \tag{1.41}$$

Assim, de (1.40) e (1.41) temos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega f(x,u_n)\psi_\varrho u_n\,dx\right|\leq C\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|f(x,u)\psi_\varrho|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.42}$$

Usando novamente a desigualdade de Hölder, com os expoêntes conjugados $\dfrac{N}{N-2}$ e $\dfrac{N}{2}$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega f(x,u_n)\psi_\varrho u_n\,dx\right|\leq C\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|f(x,u)|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{N-2}{N}}\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|\psi_\varrho|^N\,dx\right)^{\frac{2}{N}}. \tag{1.43}$$

Note que, $\psi_\varrho(x)=\psi\left(\dfrac{x-x_i}{\varrho}\right)$. Fazendo $y=\dfrac{x-x_i}{\varrho}$, implica que: se $x\in B_{2\varrho}(x_i)$, então $y\in B_2(0)$. Logo,

$$\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|\psi_\varrho|^N\,dx\right)^{\frac{2}{N}}=\left(\int_{B_2(0)}|\psi|^N\,dx\right)^{\frac{2}{N}}=C_1. \tag{1.44}$$

Obtemos, por (1.43) e (1.44), que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega f(x,u_n)\psi_\varrho u_n\,dx\right|\leq C_2\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|f(x,u)|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{N-2}{N}}. \tag{1.45}$$

Agora, considere a seguência $h_\varrho(x)=|f(x,u)|^{2^*}\chi_{B_{2\varrho}(x_i)}(x)$. Observe que, se $\varrho\to 0$ então

$$h_\varrho(x)\to 0 \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

E ainda, pelo crescimento de f, segue que

$$|h_\varrho(x)|\leq|\epsilon|u|+C_\epsilon|u|^{q-1}|^{2^*}\chi_{B_{2\varrho}(x_i)}(x)\in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|f(x,u)|^{2^*}\,dx=0. \tag{1.46}$$

Portanto, decorre de (1.45) e (1.46), que

$$\lim_{\varrho\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x,u_n)\psi_\varrho u_n\,dx\right]=0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{\varrho\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}M_a(\|u_n\|^2)\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho\,dx\right] &= -\lim_{\varrho\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}M_a(\|u_n\|^2)\int_\Omega \psi_\varrho|\nabla u_n|^2\,dx\right]\\ &+ \lambda\lim_{\varrho\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x,u_n)\psi_\varrho u_n\,dx\right]+\lim_{\varrho\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n^{2^*}\psi_\varrho\,dx\right],\end{aligned}$$

implica que,

$$\lim_{\varrho\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n^{2^*}\psi_\varrho\,dx\right]=\lim_{\varrho\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}M_a(\|u_n\|^2)\int_\Omega \psi_\varrho|\nabla u_n|^2\,dx\right]. \tag{1.47}$$

Além disso, (u_n) é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ e $\psi_\varrho\in C_0(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, então,

$$\int_\Omega u_n^{2^*}\psi_\varrho\,dx\to\int_\Omega u^{2^*}\psi_\varrho\,dx+\int_\Omega\psi_\varrho\,d\nu \tag{1.48}$$

e

$$\int_\Omega|\nabla u_n|^2\psi_\varrho\,dx\to\int_\Omega|\nabla u|^2\psi_\varrho\,dx+\int_\Omega\psi_\varrho\,d\mu. \tag{1.49}$$

Portanto, segue de (1.47), (1.48) e (1.49) que

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_\Omega u^{2^*}\psi_\varrho\,dx+\lim_{\varrho\to 0}\int_\Omega\psi_\varrho\,d\nu=\lim_{\varrho\to 0}M_a(\alpha_0^2)\int_\Omega\psi_\varrho|\nabla u|^2\,dx+\lim_{\varrho\to 0}M_a(\alpha_0^2)\int_\Omega\psi_\varrho\,d\mu.$$

Note que,

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^{2^*}\psi_\varrho\,dx &= \int_{B_{2\varrho}(x_i)}u^{2^*}\psi_\varrho\,dx\\ &= \int_\Omega u^{2^*}\psi_\varrho\chi_{B_{2\varrho}(x_i)}(x)\,dx.\end{aligned}$$

Fazendo $\varrho \to 0$, obtemos

$$u^{2^*}\psi_\varrho \chi_{B_{2\varrho}(x_i)}(x) \to 0,$$

quase sempre em Ω. E ainda,

$$|u^{2^*}\psi_\varrho \chi_{B_{2\varrho}(x_i)}(x)| \leq |u|^{2^*} \in L^1(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{B_{2\varrho}(x_i)} u^{2^*}\psi_\varrho \, dx \to 0,$$

quando $\varrho \to 0$. Analogamente, mostra-se que

$$\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |\nabla u|^2 \psi_\varrho \, dx \to 0,$$

quando $\varrho \to 0$. Logo,

$$\lim_{\varrho \to 0} M_a(\alpha_0^2) \int_{B_{2\varrho}(x_i)} \psi_\varrho |\nabla u|^2 \, dx = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_\Omega \psi_\varrho \, d\nu = \lim_{\varrho \to 0} \int_\Omega M_a(\alpha_0^2)\psi_\varrho \, d\mu. \tag{1.50}$$

Observe que,

$$\psi_\varrho(x) = \psi_\varrho(x)\chi_{B_{2\varrho}(x_i)}(x) \to \chi(x_i)$$

quando $\varrho \to 0$. E, além disso,

$$|\psi_\varrho(x)\chi_{B_{2\varrho}(x_i)}(x)| \leq 1.$$

Desde que as medidas de Radon são finitas, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{B_{2\varrho}(x_i)} \psi_\varrho \, d\nu = \int_\Omega \psi_\varrho(x)\chi_{B_{2\varrho}(x_i)} \, d\nu \to \int_\Omega \chi(x_i) \, d\nu = \int_{\{x_i\}} d\nu,$$

quando $\varrho \to 0$. Do mesmo modo, tem-se que

$$\int_{B_{2\varrho}(x_i)} \psi_\varrho \, d\mu \to \int_{\{x_i\}} d\mu,$$

quando $\varrho \to 0$. Logo, por (1.50), para $\varrho \to 0$ segue que

$$\int_{\{x_i\}} d\nu = M_a(\alpha_0^2) \int_{\{x_i\}} d\mu,$$

ou seja,

$$\nu(\{x_i\}) = M_a(\alpha_0^2)\mu(\{x_i\}).$$

Da condição (M_2), temos

$$\nu(\{x_i\}) \geq m_0 \mu(\{x_i\}). \tag{1.51}$$

Além disso,

$$\nu(\{x_i\}) = \int_{\{x_i\}} d\nu = \int_{\{x_i\}} \psi_\varrho \, d\nu = \nu_i \psi_\varrho(x_i) = \nu_i.$$

Do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions, obtemos

$$\mu_i(\{x_i\}) \geq S \nu_i^{\frac{2}{2^*}}(\{x_i\}).$$

Por (1.51), conclui-se que

$$\nu_i \geq m_0 \mu_i \geq m_0 S \nu_i^{\frac{2}{2^*}}.$$

Portanto,

$$\nu_i \geq m_0 S \nu_i^{\frac{2}{2^*}},$$

o que implica,

$$\nu_i \geq (m_0 S)^{\frac{N}{2}}.$$

No entanto, provaremos que essa desigualdade não pode ocorrer. Suponha, por contradição, que $\nu_i \geq (m_0 S)^{\frac{N}{2}}$, para algum $i \in \Lambda$. Desde que (u_n) é $(PS)_{C_{a,\lambda}}$ para $I_{a,\lambda}$. Usando as condições

(f_3), (M_2) e $m_0 < a < \frac{\theta}{2}m_0$ temos

$$\begin{aligned}
C_{a,\lambda} &= I_{a,\lambda}(u_n) - \frac{1}{\theta}I'_{a,\lambda}(u_n)u_n + o_n(1)\\
&\geq \frac{1}{2}\widehat{M_a}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta}M_a(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{2^*}\,dx + o_n(1)\\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^{\|u_n\|^2} M_a(s)\,ds - \frac{1}{\theta}a\|u_n\|^2 + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{2^*}\,dx + o_n(1)\\
&\geq \left(\frac{1}{2}m_0 - \frac{1}{\theta}a\right)\|u_n\|^2 + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{2^*}\,dx + o_n(1)\\
&\geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{2^*}\,dx + o_n(1)\\
&\geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega \psi_\varrho|u_n|^{2^*}\,dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to +\infty$ e $\varrho \to 0$, obtemos

$$C_{a,\lambda} \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\left[\int_\Omega u^{2^*}\psi_\varrho\,dx + \int_\Omega \psi_\varrho\,d\nu\right] \to \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\nu_i \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)(m_0 S)^{\frac{N}{2}}.$$

Assim, $C_{a,\lambda} \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)(m_0 S)^{\frac{N}{2}}$ que é uma contradição. Portanto, Λ é vazio. Logo,

$$\int_\Omega |u_n|^{2^*}\,dx \to \int_\Omega |u|^{2^*}\,dx.$$

Além disso, $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$, então

$$\lim_{n\to+\infty} M_a(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 = \lambda\int_\Omega f(x,u)u\,dx + \int_\Omega u^{2^*}\,dx.$$

Por outro lado, temos que

$$M_a(\alpha_0^2)\int_\Omega \nabla u\nabla\phi\,dx = \lambda\int_\Omega f(x,u)\phi\,dx + \int_\Omega u^{2^*-1}\phi\,dx,$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Em particular, para $\phi = u \in H_0^1(\Omega)$,

$$M_a(\alpha_0^2)\|u\|^2 = \lambda \int_\Omega f(x,u)u\, dx + \int_\Omega u^{2^*}\, dx,$$

de onde segue que

$$M_a(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \to M_a(\alpha_0^2)\|u\|^2.$$

Como já foi provado que $M_a(\|u_n\|^2) \to M_a(\alpha_0^2)$, podemos concluir que $\|u_n\|^2 \to \|u\|^2$.

■

Teorema 1.1 *Assuma que as condições* (M_1)-(M_2), (f_1)-(f_3) *se verificam. Então, existe* $\lambda_0 > 0$ *tal que o problema* (T_λ) *tem uma solução positiva, para todo* $\lambda \geq \lambda_0$ *e para todo* $a \in (m_0, \frac{\theta}{2}m_0)$.

Demonstração: Do Lema 1.3, temos que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} C_{a,\lambda} = 0$. Portanto, existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$C_{a,\lambda} < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)(m_0 S)^{\frac{N}{2}},$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$ e S é a melhor constante de Sobolev para a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, isto é,

$$S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\|u\|^2}{|u|^2_{L^{2^*}(\Omega)}}.$$

Agora, fixando $\lambda \geq \lambda_0$, mostraremos que o problema (T_λ) admite uma solução positiva. Os Lemas 1.1 e 1.2 mostram que o problema (T_λ) possui a geometria do passo da montanha. Portanto, podemos usar o Teorema do Passo da Montanha sem condição Palais-Smale e obter uma sequência limitada $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ verificando

$$I_{a,\lambda}(u_n) \to C_{a,\lambda}$$

e

$$I'_{a,\lambda}(u_n) \to 0.$$

Desde que (u_n) é limitada e M_a é uma função contínua, a menos de subsequência, $M_a(\|u_n\|^2) \to M_a(\alpha_0^2)$ para algun $\alpha_0 \geq 0$. Do Lema 1.6, temos que $\|u_n\|^2 \to \|u\|^2$ quando $n \to \infty$, então, como $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ obtemos a convergência forte $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Pelo fato de $I_{a,\lambda}$ ser de classe C^1 obtemos

$$I_{a,\lambda}(u_n) \to I_{a,\lambda}(u)$$

e

$$I'_{a,\lambda}(u_n) \to I'_{a,\lambda}(u).$$

Pela unicidade do limite, temos que

$$I_{a,\lambda}(u) = C_{a,\lambda} > 0$$

e

$$I'_{a,\lambda}(u) = 0.$$

Assim, u é ponto crítico de $I_{a,\lambda}$, portanto, u é solução não trivial do problema (T_λ).

■

Capítulo

2

Demonstração do teorema principal

Teorema 2.1 *Assuma que as condições* (M_1)-(M_2), (f_1)-(f_3) *se verificam. Então existe* $\lambda^* > 0$, *tal que o problema* (P_λ) *tem uma solução positiva, para todo* $\lambda \geq \lambda^*$. *Além disso, se* u_λ *é uma solução para o problema* (P_λ), *então* $\lim_{\lambda \to +\infty} \|u_\lambda\| = 0$.

Demonstração: Seja λ_0 como no Teorema 1.1. Para $\lambda \geq \lambda_0$, foi provado no Teorema 1.1 que existe uma solução positiva para o problema (T_λ). Seja u_λ esta solução não trivial. Afirmamos que existe $\lambda^* \geq \lambda_0$ tal que $\|u_\lambda\|^2 \leq t_0$, para todo $\lambda \geq \lambda^*$ e t_0 definido em (1.1). De fato, se a afirmação não for verdadeira, então existe uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\|u_{\lambda_n}\|^2 \geq t_0$ se $\lambda_n \to +\infty$. Assim, obtemos que

$$
\begin{aligned}
C_{a,\lambda_n} &\geq \frac{1}{2}\widehat{M}_a(\|u_{\lambda_n}\|^2) - \frac{1}{\theta}M_a(\|u_{\lambda_n}\|^2)\|u_{\lambda_n}\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\|u_{\lambda_n}\|^2} M_a(s)\,ds - \frac{1}{\theta}M_a(\|u_{\lambda_n}\|^2)\|u_{\lambda_n}\|^2 \\
&\geq \frac{1}{2}m_0\int_0^{\|u_{\lambda_n}\|^2} ds - \frac{1}{\theta}M_a(\|u_{\lambda_n}\|^2)\|u_{\lambda_n}\|^2 \\
&\geq \frac{m_0}{2}\|u_{\lambda_n}\|^2 - \frac{a}{\theta}\|u_{\lambda_n}\|^2 \\
&= \left(\frac{m_0}{2} - \frac{a}{\theta}\right)\|u_{\lambda_n}\|^2 \\
&= \left(\frac{m_0}{2} - \frac{a}{\theta}\right)t_0 > 0,
\end{aligned}
$$

de onde concluímos que

$$C_{a,\lambda_n} \geq \left(\frac{m_0}{2} - \frac{a}{\theta}\right) t_0 > 0,$$

que é um absurdo. Pois, de acordo com o Lema 1.3 $C_{a,\lambda_n} \to 0$. Portanto, existe $\lambda^* \geq \lambda_0$ tal que $\|u_\lambda\|^2 \leq t_0$ para todo $\lambda \geq \lambda^*$. Logo, $M_a(\|u_\lambda\|^2) = M(\|u_\lambda\|^2)$ para todo $\lambda \geq \lambda^*$. Assim, desde que u_λ é uma solução para o problema (T_λ), temos que u_λ é também uma solução para o problema (P_λ). Para mostrar que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \|u_\lambda\| = 0$, note que de (M_1)-(M_2) e (f_3) temos que

$$\begin{aligned}
C_{a,\lambda} &\geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_\lambda\|^2) - \frac{1}{\theta} M(\|u_\lambda\|^2)\|u_\lambda\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\|u_\lambda\|^2} M(s)\,ds - \frac{1}{\theta} M(\|u_\lambda\|^2)\|u_\lambda\|^2 \\
&\geq \frac{m_0}{2}\|u_\lambda\|^2 - \frac{1}{\theta} M(t_0)\|u_\lambda\|^2 \\
&\geq \frac{m_0}{2}\|u_\lambda\|^2 - \frac{a}{\theta}\|u_\lambda\|^2 \\
&= \left(\frac{m_0}{2} - \frac{a}{\theta}\right)\|u_\lambda\|^2.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$C_{a,\lambda} \geq \left(\frac{m_0}{2} - \frac{a}{\theta}\right)\|u_\lambda\|^2,$$

onde $\left(\frac{m_0}{2} - \frac{a}{\theta}\right) > 0$. Do Lema 1.3 temos que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} C_{a,\lambda} = 0$, logo,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{m_0}{2} - \frac{a}{\theta}\right)\|u_\lambda\|^2 = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \|u_\lambda\| = 0.$$

■

Apêndice

$\mathcal{A}$

Principais resultados usados nesta dissertação

Neste apêndice enunciaremos os principais teoremas usados ao longo desta dissertação e indicaremos as referências para a consulta das demonstrações.

Teorema A.1 *(da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponhamos que:*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω;

(ii) Existe $g \in L^1(\Omega)$ *talque* $|f_n| \leq g$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_{\Omega} f_n \, dx \to \int_{\Omega} f \, dx.$$

Demonstração: Ver [9].

Lema A.1 *(de Vainberg) Sejam (f_n) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ tal que*

(i) $f_{n_j}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω;

(ii) Existe $h \in L^p(\Omega)$ *tal que* $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$ *q.t.p. em* Ω *e para todo* $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Ver [9].

Teorema A.2 *(Desigualdade de Hölder)*
Sejam $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$ *com* $1 < p < +\infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega fg\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração: Ver [9].

Teorema A.3 *Seja* H *um espaço de Banach reflexivo. Se* (u_n) *é uma sequência limitada em* H, *então existem uma subsequência* (u_{n_j}) *e* $u \in H$ *tais que*

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \quad em \quad H.$$

Demonstração: Ver [8].

Teorema A.4 *(Teorema do Passo da Montanha - M. Willem) Seja* X *um espaço de Banach e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ *com* $I(0) = 0$. *Suponha que:*

(H_1) *Existem* $\alpha, \rho > 0$ *tais que* $I(u) \geq \alpha > 0$ *para todo* $u \in X$ *tal que* $\|u\| = \rho$;

(H_2) *Existe* $e \in X$ *tal que* $\|e\| > \rho$ *e* $I(e) < 0$.

Então, existe um seguência $(u_n) \subset X$ *tal que*

$$I(u_n) \to c \quad e \quad I'(u_n) \to 0 \quad em \quad X',$$

onde

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração: Ver [27].

Teorema A.5 *(Banach-Alaoglu-Bourbaki) A bola unitária fechada*

$$B_{E^*} = \{f \in E^*; \|f\| \leq 1\}$$

é compacta na topologia $fraco^*$.

Demonstração: Ver [8].

Teorema A.6 *Seja H um espaço de Banach reflexivo. Se (u_n) é uma sequência limitada em H, então existem uma subsequência (u_{nj}) de (u_n) e $u \in H$ tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad H.$$

Demonstração: Ver [8].

Teorema A.7 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) : \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N) \right\}$ *é um espaço de Banach reflexivo.*

Demonstração: Ver [29].

Teorema A.8 *(Representação de Riesz) Seja $1 < p < \infty$ e seja $\phi \in (L^p)^*$. Então, existe uma única função $u \in L^{p'}$ tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int uf \quad \forall f \in L^p.$$

Além disso,

$$\|u\|_{p'} = \|\phi\|_{(L^p)^*}.$$

Demonstração: Ver [8].

Apêndice

$\mathcal{B}$

Diferenciabilidade do funcional associado ao problema auxiliar

Definição B.1 *Seja $I : A \to \mathbb{R}$ onde A é um subconjunto aberto de um espaço normado X. Dizemos que I possui uma derivada de Gateaux $f \in X'$ em $u \in A$ se, para qualquer $h \in X$,*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[I(u+th) - I(u) - f(th)] = 0.$$

A derivada de Gateaux de I em u é denotada por $I'(u)$.

Definição B.2 *Seja $I : A \to \mathbb{R}$ onde A é um subconjunto aberto de um espaço normado X. Dizemos que I possui uma derivada de Fréchet $f \in X'$ em $u \in A$ se*

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{1}{\|h\|}|I(u+h) - I(u) - f(h)| = 0.$$

Definição B.3 *Se A é um conjunto aberto em X, dizemos que I é de classe C^1 em A ou que $I \in C^1(A, \mathbb{R})$ quando a derivada de Fréchet de I existe em todo ponto $u \in A$ e a aplicação $I' : A \to X'$ é contínua.*

Note que, todo funcional Fréchet diferenciável é também Gateaux diferenciável, porém a recíproca não é verdadeira. No entanto, temos o seguinte resultado:

Proposição B.1 *Seja $I : A \to \mathbb{R}$ onde A é um subconjunto aberto de um espaço normado X. Se I possui derivada de Gateaux contínua em A, então $I \in C^1(A, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Sejam $v \in A$ e $\varphi\prime(v)$ a derivada de Gateaux de φ em v. Definindo a função $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $\psi(t) = \varphi(v + th)$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi\prime(\theta)$$

que é equivalente a

$$\varphi(v+h) - \varphi(v) = \varphi\prime(v + \theta h)h \tag{B.1}$$

Assim, subtraindo $\varphi\prime(v)h$ de ambos os membros da igualdade $(B.1)$ obtemos

$$\begin{aligned} |\varphi(v+h) - \varphi(v) - \varphi\prime(v)h| &= |\varphi\prime(v+\theta h)h - \varphi\prime(v)h| \\ &\leq \|\varphi\prime(v+\theta h) - \varphi\prime(v)\|_{X'}\|h\|. \quad (*) \end{aligned}$$

Desde que φ possui derivada de Gateaux contínua em A, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $\|h\| < \delta$ temos

$$\|\varphi\prime(v + \theta h) - \varphi\prime(v)\|_{X\prime} < \epsilon.$$

Segue então de $(*)$ que

$$|\varphi(v+h) - \varphi(v) - \varphi\prime(v)h| < \epsilon\|h\|$$

e onde concluimos que φ possui uma derivada de Fréchet e esta é contínua.

■

Agora, mostraremos que o funcional $I_{a,\lambda} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_{a,\lambda}(u) = \frac{1}{2}\widehat{M_a}(\|u\|^2) - \lambda \int_\Omega F(x,u)\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega u_+^{2^*}\,dx,$$

onde $\widehat{M_a}(t) = \displaystyle\int_0^t M_a(s)\,ds$, é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Para isso, consideremos os funcionais J_1, J_2 e J_3 definidos por

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\widehat{M_a}(\|u\|^2),$$

$$J_2(u) = \lambda \int_\Omega F(x,u)\,dx$$

e

$$J_3(u) = \frac{1}{2^*}\int_\Omega u_+^{2^*}\,dx.$$

Observemos primeiramente que $I_{a,\lambda}(u) = J_1(u) - J_2(u) - J_3(u)$ está bem definido. De fato, sendo $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua, temos que

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)\,ds < +\infty,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, e ainda, se $u \in H_0^1(\Omega)$ então $|\nabla u| \in L^2(\Omega)$, logo,

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) < +\infty,$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, pela condição de crescimento para F, temos

$$\int_\Omega F(x,u)\,dx \leq \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega |u|^2\,dx + \frac{C_\epsilon}{q}\int_\Omega |u|^q\,dx,$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ e $q \in (2, 2^*)$. Da imersão contínua de Sobolev, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $2 \leq r \leq 2^*$. Assim,

$$\frac{\epsilon}{2}\int_\Omega |u|^2\,dx + \frac{C_\epsilon}{q}\int_\Omega |u|^q\,dx < \infty$$

e

$$\int_\Omega |u|^{2^*}\,dx < \infty.$$

Portanto,

$$J_1(u) < \infty,\;\; J_2(u) < \infty \;\; e \;\; J_3(u) < \infty.$$

Proposição B.2 *O funcional* $I_{a,\lambda} = J_1 - J_2 - J_3 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração: De acordo com a Proposição B.1, é suficiente provar que as derivadas de Gateaux de J_1, J_2 e J_3 existem e são contínuas.

Primeiramente, vamos calcular a derivada de Gateaux J_1' e mostrar que ela é contínua.

Considere a função $\widetilde{J}_1 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por $\widetilde{J}_1 = \|u\|^2$ e calculemos sua derivada de Gateaux.

$$\begin{aligned}
\frac{\widetilde{J}_1(u+tv) - \widetilde{J}_1(u)}{t} &= \frac{\int_\Omega |\nabla u + tv|^2\, dx - \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx}{t} \\
&= \frac{\int_\Omega \nabla(u+tv)\nabla(u+tv)\, dx - \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx}{t} \\
&= \frac{1}{t}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + 2t \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + t^2 \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx - \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \right) \\
&= \frac{1}{t}\left(2t \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + t^2 \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx \right) \\
&= 2\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + t\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\widetilde{J}_1'(u)v = \lim_{t\to 0}\left(2\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + t\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx \right) = 2\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx.$$

Note que,

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}_a(\widetilde{J}_1(u)),$$

então, pela Regra da Cadeia, segue que

$$\begin{aligned}
J_1'(u)v &= \left[\frac{1}{2}\widehat{M}_a(\widetilde{J}_1(u))\right]' \\
&= \frac{1}{2}M_a(\|u\|^2)\cdot 2\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx.
\end{aligned}$$

De onde concluimos que

$$J_1'(u)v = M_a(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx.$$

Para mostrar a continuidade de J_1', mostraremos primeiro que $\widetilde{J}_1'$ é contínua. Considere $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Então, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, com $\|v\| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
|\widetilde{J}_1'(u_n)v\, dx - \widetilde{J}_1'(u)v| &= \left| 2\int_\Omega \nabla u_n \nabla v - 2\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx \right| \\
&\leq 2\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u||\nabla v|\, dx.
\end{aligned}$$

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |\widetilde{J}_1'(u_n)v - \widetilde{J}_1'(u)v| &\leq 2\left(\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\|u_n - u\|\|v\| \\ &\leq 2\|u_n - u\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\widetilde{J}_1'(u_n) - \widetilde{J}_1'(u)\|_{H_0^1(\Omega)} &:= \sup_{\|v\|\leq 1} |\widetilde{J}_1'(u_n)v - \widetilde{J}_1'(u)v| \\ &\leq 2\|u_n - u\|. \end{aligned}$$

Como $\|u_n - u\| \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\|\widetilde{J}_1'(u_n) - \widetilde{J}_1'(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0.$$

Desde que M_a é contínua, então $\widehat{M_a}$ é de classe C^1. Portanto, a função composta $J_1(u) = \dfrac{1}{2}\widehat{M_a}(\widetilde{J}_1(u))$ é de classe C^1.

Vamos calcular agora a derivada de Gateaux J_2'. Primeiramente, considere para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 \leq |t| \leq 1$, para cada $x \in \Omega$ e para cada $u, \Phi \in H_0^1(\Omega)$ a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(s) = F(x, u + st\Phi).$$

Temos que, $h'(s) = f(x, u + st\Phi)t\Phi$, $h(1) = F(x, u + t\Phi)$ e $h(0) = F(x, u)$. Desde que h é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que

$$h(1) - h(0) = h'(\gamma).$$

Assim,

$$F(x, u + t\Phi) - F(x, u) = f(x, u + \gamma t\Phi)t\Phi,$$

que implica,

$$\left|\frac{F(x,u+t\Phi)-F(x,u)}{t}\right| = |f(x,u+\gamma t\Phi)||\Phi|.$$

Temos ainda a seguinte condição de crescimento da função f:

$$|f(x,t)| \leq a + b|t|^{p-1}$$

para $a, b > 0$ dados, com $1 < p < 2^*$ se $N \geq 3$ e $1 < p < +\infty$ se $N = 1$ ou $N = 2$. De onde conclui-se que

$$|f(x,u+\gamma t\Phi)||\Phi| \leq a|\Phi| + b|u+\gamma t\Phi|^{p-1}|\Phi|.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
b|u+\gamma t\Phi|^{p-1}|\Phi| &\leq b[|u| + |\gamma t|\Phi|]^{p-1}|\Phi| \\
&\leq b[|u| + |\Phi|]^{p-1}|\Phi| \\
&\leq bC_1 \max\{|u|^{p-1}, |\Phi|^{p-1}\}|\Phi| \\
&\leq C[|u|^{p-1} + |\Phi|^{p-1}]|\Phi| \\
&\leq C|u|^{p-1}|\Phi| + C|\Phi|^{p-1} + |\Phi| = C|u|^{p-1} + |\Phi| + C|\Phi|^{p}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|f(x,u+\gamma t\Phi)||\Phi| \leq a|\Phi| + C|u|^{p-1}|\Phi| + C|\Phi|^{p} \ \in L^1(\Omega). \quad (*)$$

Para uma sequência $|t_n| \to 0$ temos que $f(x,u(x)+\gamma t_n\Phi(x)) \to f(x,u(x))\Phi(x)$ pontualmente em Ω. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{J_2(u+t\Phi)-J_2(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\lambda\int_\Omega F(x,u+t\Phi)\,dx - \lambda\int_\Omega F(x,u)\,dx}{t} \\
&= \lambda\lim_{t\to 0}\frac{\int_\Omega F(x,u+t\Phi)\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx}{t} \\
&= \lambda\lim_{t\to 0}\int_\Omega f(x,u+\gamma t_n\Phi)\Phi\,dx \\
&= \lambda\int_\Omega f(x,u)\Phi\,dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$J_2'(u)\Phi = \lambda \int_\Omega f(x,u)\Phi\, dx.$$

Mostraremos que o operador $J_2' : H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))'$ é contínuo, ou seja, para $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ queremos mostrar que $J_2'(u_n) \to J_2'(u)$ em $(H_0^1(\Omega))'$. Desse modo, para $\|\Phi\| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
|J_2'(u_n)\Phi - J_2'(u)\Phi| &= \left|\lambda \int_\Omega f(x,u_n)\Phi\, dx - \lambda \int_\Omega f(x,u)\Phi\, dx\right| \\
&= \lambda \left|\int_\Omega [f(x,u_n) - f(x,u)]\Phi\, dx\right| \\
&\leq \lambda \int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)||\Phi|\, dx. \qquad (I)
\end{aligned}$$

Desde que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, das Imersões Contínuas de Sobolev, $u_n \to u$ em $L^s(\Omega)$ com $1 \leq s \leq 2^*$, pois, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$. Do Teorema de Vaimberg, existe $(u_{nj}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{nj} \to u \text{ q.t.p em } \Omega$$

e

$$|u_{nj}| \leq g(x) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Retomando (I) temos:

$$|J_2'(u_n)\Phi - J_2'(u)\Phi| \leq \lambda \int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)||\Phi|\, dx.$$

Da desigualdade de Hölder,

$$|J_2'(u_n)\Phi - J_2'(u)\Phi| \leq \lambda \left(\int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)|^{\frac{q}{q-1}}\, dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_\Omega |\Phi|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

pois $\dfrac{q-1}{q} + \dfrac{1}{q} = 1$. Logo,

$$|J_2'(u_n)\Phi - J_2'(u)\Phi| \leq \lambda |f(x,u_n) - f(x,u)|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)} |\Phi|_{L^q(\Omega)}.$$

Das Imersões Contínuas de Sobolev,

$$\begin{aligned} |J_2'(u_n)\Phi - J_2'(u)\Phi| &\leq C|f(x,u_n) - f(x,u)|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)}\|\Phi\| \\ &\leq C|f(x,u_n) - f(x,u)|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Assim, é suficiente mostrar que

$$\int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)|^{\frac{q}{q-1}}\, dx \to 0.$$

Passando a subsequência (u_{nj}) temos que

$$|f(x,u_{nj}(x)) - f(x,u(x))|^{\frac{q}{q-1}} \to 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

E ainda,

$$\begin{aligned} |f(x,u_{nj}(x))|^{\frac{q}{q-1}} &\leq [a + b|u_{nj}|^{q-1}]^{\frac{q}{q-1}} \\ &\leq C_1 + C_2|u_{nj}|^q \\ &\leq C_1 + C_2 g(x)^q \qquad \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue conclui-se que

$$\int_\Omega |f(x,u_{nj}(x)) - f(x,u(x))|^{\frac{q}{q-1}}\, dx \to 0.$$

Logo,

$$\int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)|^{\frac{q}{q-1}}\, dx \to 0.$$

Agora vamos calcular a derivada de Gateaux J_3'. Para isso, façamos $F(u) = |u_+|^{2^*}$. Como $u_+ = \max\{0,u\}$ podemos considerar $F(u) = u^{2^*}$.

Considere para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, para cada $x \in \Omega$ e para cada $u, v \in H_0^1(\Omega)$ a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(s) = F(u + st\Phi).$$

Temos que,

$$h'(s) = f(u + st\Phi)t\Phi = 2^*(u + st\Phi)^{2^*-1}t\Phi,$$

$$h(0) = F(u) = u^{2^*}$$

e

$$h(1) = F(u + t\Phi) = (u + t\Phi)^{2^*}.$$

Desde que h é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que $h(1) - h(0) = h'(\gamma)$. Assim,

$$(u + t\Phi)^{2^*} - (u)^{2^*} = 2^*(u + \gamma t\Phi)^{2^*-1}t\Phi,$$

consequentemente,

$$\left|\frac{(u + t\Phi)^{2^*} - (u)^{2^*}}{t}\right| = 2^*|u + \gamma t\Phi|^{2^*-1}|\Phi|.$$

Temos ainda a seguinte condição de crescimento da função f:

$$|f(x,t)| \leq a + b|t|^{p-1}$$

para $a, b > 0$ dados no caso $1 < p < 2^*$ se $N \geq 3$. De onde conclui-se que

$$2^*|u + \gamma t\Phi|^{2^*-1}|\Phi| \leq a|\Phi| + b|u + \gamma t\Phi|^{p-1}|\Phi|.$$

Pelo mesmo argumento usado em $(*)$ temos que

$$b|u + \gamma t\Phi|^{p-1}|\Phi| \leq C|u|^{p-1}|\Phi| + C|\Phi|^p.$$

Portanto,

$$2^*|u + \gamma t\Phi|^{2^*-1}|\Phi| \leq a|\Phi| + C|u|^{p-1}|\Phi| + C|\Phi|^p \quad \in L^1(\Omega).$$

Além disso, para uma sequência $|t_n| \to 0$, temos que

$$2^*(u(x) + \gamma t_n\Phi(x))^{2^*-1}\Phi(x) \to 2^*(u(x))^{2^*-1}\Phi(x),$$

pontualmente em Ω. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{J_3(u+tv)+J_3(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2^*}\int_\Omega (u+tv)^{2^*}\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega u^{2^*}\,dx}{t}\\
&= \frac{1}{2^*}\lim_{t\to 0}\left[\int_\Omega \frac{(u+tv)^{2^*}-u^{2^*}}{t}\,dx\right]\\
&= \frac{1}{2^*}\lim_{t\to 0}\left[\int_\Omega 2^*(u+\gamma tv)^{2^*-1}v\,dx\right]\\
&= \frac{1}{2^*}2^*\int_\Omega \lim_{n\to\infty}[(u+\gamma t_n v)^{2^*-1}v]\,dx\\
&= \int_\Omega u^{2^*-1}v\,dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$J_3'(u) = \int_\Omega u^{2^*-1}v\,dx.$$

Mostremos que o operador $J_3' : H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))'$ é contínuo, ou seja, para $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, queremos mostrar que $J_3'(u_n) \to J_3'(u)$ em $(H_0^1(\Omega))'$. Para isso, considere $\|v\| \leq 1$, assim

$$\begin{aligned}
|J_3'(u_n) - J_3'(u)| &= \left|\int_\Omega u_n^{2^*-1}v\,dx - \int_\Omega u^{2^*-1}v\,dx\right|\\
&= \left|\int_\Omega (u_n^{2^*-1}-u^{2^*-1})v\,dx\right|\\
&\leq \int_\Omega |(u_n^{2^*-1}-u^{2^*-1})||v|\,dx.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$|J_3'(u_n) - J_3'(u)| \leq \int_\Omega |(u_n^{2^*-1}-u^{2^*-1})||v|\,dx. \qquad (I)$$

Desde que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, das Imersões Contínuas de Sobolev, $u_n \to u$ em $L^{2^*}(\Omega)$, pois, para $1 \leq s \leq 2^*$ temos $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$. Do Teorema de Vaimberg, existe $(u_{nj}) \subset (u_n)$ e $g \in L^{2^*}(\Omega)$ tal que $u_{nj} \to u$ q.t.p. em Ω, com $|u_{nj}| \leq g(x)$ quase sempre em Ω.

Retomando (I), temos

$$|J_3'(u_n) - J_3'(u)| \leq \int_\Omega |(u_n^{2^*-1}-u^{2^*-1})||v|\,dx.$$

Da Desigualdade de Hölder, segue que

$$|J_3'(u_n) - J_3'(u)| \leq \left(\int_\Omega |(u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1})|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \, dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \left(\int_\Omega |v|^{2^*} \, dx \right)^{\frac{1}{2^*}},$$

pois $\dfrac{2^*-1}{2^*} + \dfrac{1}{2^*} = 1$. Logo,

$$|J_3'(u_n) - J_3'(u)| \leq |u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)} |v|_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Das Imersões Contínuas de Sobolev, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |J_3'(u_n) - J_3'(u)| &\leq C|u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)} \|v\| \\ &\leq C|u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Assim, é suficiente mostrar que

$$\int_\Omega |u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \, dx \to 0.$$

Passando a subseguência (u_{nj}) temos que

$$|u_{nj}^{2^*-1} - u^{2^*-1}|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \to 0 \quad \text{ q.t.p em } \Omega.$$

E ainda,

$$\begin{aligned} |u_{nj}^{2^*-1}|^{\frac{2^*}{2^*-1}} &\leq [a + b|u_{nj}|^{2^*-1}]^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\ &\leq C_1 + C_2|u_{nj}|^{2^*} \\ &\leq C_1 + C_2 g(x)^{2^*} \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_\Omega |u_{nj}^{2^*-1} - u^{2^*-1}|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \, dx \to 0,$$

logo,

$$\int_\Omega |u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\, dx \to 0.$$

Concluindo assim que J_3' é contínuo.

$\blacksquare$

Bibliografia

[1] Arosio, A., *On the nonlinear Timoshenko-Kirchhoff beam equation*, Chin. Ann. Math. 20 (1999) 495-506.

[2] Arosio, A., *A geometrical nonlinear correction to the Timoshenko beam equation*, Nonlinear Anal. 47 (2001) 729-740.

[3] Alves, C.O. and Corrêa F.J.S.A., *On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator*, Commun. Appl. Nonlinear Anal. 8 (2001) 43-56.

[4] Alves, C.O., Corrêa F.J.S.A, Figueiredo G.M., *On a class of nonlocal elliptic problems with critical growth*, DEA 2 (2010) 409-417.

[5] Alves, C.O., Corrêa F.J.S.A., Ma T.F., *Positive Solutions for a quaselinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl. 49 (2005) 85-93.

[6] Anelo, G., *A uniqueness result for a nonlocal equation of Kirchhoff equation type and some related open problem*, J. Math. Anal. Appl. 373 (2011) 248-251.

[7] Anelo, G., *On a pertubed Dirichlet problem for a nonlocal differential equation of Kirchhoff type*, BVP ID 891430 (2011).

[8] Brézis, Haïm, *Análisis Funcional*, Teoria y Applicaciones, Versión española de Juan Ramón Esteban, Alianza Editorial, 1984.

[9] Bartle, R.G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library (1995).

[10] Chen, C., Kuo Y., Wu T., *The Nehari manifold for a Kirchhoff type problem involving sign-changing weight functions*, J. Differential Equations 250 (4) (2011) 1876-1908.

[11] Corrêa, F.J.S.A., Figueiredo G.M., *On a p-Kirchhoff equation via Krasnoselskii's genus*, Appl. Math. Lett. 22 (2009) 819-822.

[12] Corrêa, F.J.S.A. and Menezes S.D.B, *Existence of solutions to nonlocal and singular elliptic problems via Galerkin method*, Electron. J. Differential Equations (2004)1-10.

[13] Corrêa, F.J.S.A. and Figueiredo G.M., *On an elliptic equation of p-Kirchhoff-type via variational methods*, Bull. Austral. Math. Soc. 77 (2006) 263-277.

[14] Corrêa, F.J.S.A. and Figueiredo G.M., *On the existence of positive solutions for an elliptic equation of Kirchhoff-type via Moser iteration method*, BVP ID 796 (2006) 1-10.

[15] Cheng, B.T. and Wu X., *Existence results of positive solutions of Kirchhoff problems*,Nonlinear Anal. 71 (2009) 4883-4892.

[16] Dai, G. and Liu D., *Infinitely many positive solutions for a p(x)-Kirchhoff-type equation*, J. Math. Anal. Appl. 359 (2009) 710-764.

[17] Figueiredo, G.M., *Existence of a positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument* J. Math. Anal. Appl. 401 (2013)706-713.

[18] He, X.M. and Zou W.M., *Infinitely many positive solutions for Kirchhoff type problems*, Nonlinear Anal. 70 (2009) 1407-1414.

[19] Jin, J. and Wu X., *Infinitely many radial solutions for Kirchhoff-type problems in* $\mathbb{R}$, J. Math. Anal. Appl. 369 (2010) 564-574.

[20] Kirchhoff, G., Mechanik, Teubner, Leipzig. 1883.

[21] Liu, D.C., *On a p-Kirchhoff equation via fountain theorem and dual fountain theorem*, Nonlinear Anal. 72 (2010) 208-302.

[22] Lions, P.L., *The concentration-compactness principle in the calculus of variations*. The limit case, Rev. Mat. Iberoamericana (1985), 145-201.

[23] Ma, T.F., *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type*, Nonlinear. Anal. 63 (5-7) (2005) 1967-1977.

[24] Mao, A.M. and Zhang J.T., *Sign-changing and multiple solutions of Kirchhoff type problems without the P.S. condition*, Nonlinear Anal. 70 (2009) 1275-1287.

[25] Perera, K. and Zhang Z., *Nontrivial solutions of Kirchhoff-type proplems via the Yang index*, J. Differential Equations 221 (1)(2006) 246-255.

[26] Sun, J. and Tang C., *Existence and multiplicity of solutions for Kirchhoff type equations*, Nonlinear Anal. 74 (2011) 1212-1222.

[27] Willem, M., *Minimax Theorems*, Progressin Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, 1996.

[28] Yang, Y. and Zhang J.H., *Nontrivial Solutions of a class of nonlocal problems via local linking theory*, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 377-380.

[29] Kavian, O., *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problémes elliptiques*, Université de Nancy, (1993).