UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Uma observação sobre soluções de energia mínima no $\mathbb{R}^N$

Ítalo Bruno Mendes Duarte

Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Belém

Março de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Ítalo Bruno Mendes Duarte

Uma observação sobre soluções de energia mínima no $\mathbb{R}^N$

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Belém
Março de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Ítalo Bruno Mendes Duarte

Uma observação sobre soluções de energia mínima no $\mathbb{R}^N$

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Data da defesa: 18 de Março de 2014

Conceito: APROVADO

Banca Examinadora

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)
PPGME - UFPA

Prof. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento
PPGME - UFPA

João Rodrigues dos S. Júnior

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior
PPGME - UFPA

Rodrigo S. Rodrigues

Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues
PPGM - UFSCar

Dedicatória

Aos meus GRANDES amigos e aos meus amados familiares,
em especial à minha querida esposa Kamilla Duarte, com amor.

"Isso é para os loucos. Os desajustados. Os rebeldes. Os problemáticos. Os que não se encaixam. Aqueles que veem as coisas diferente. Não seguem as regras. Não têm respeito ao status quo. Pode humilhá-los, discordar deles, até demiti-los. Mas a única coisa que não pode fazer é ignorá-los. Porque eles mudaram as coisas. Eles levaram a humanidade ao próximo nível. Mesmo com alguns os vendo como loucos, nós os vemos como gênios. Porque as pessoas que são loucas a ponto de acharem que podem mudar o mundo, são as que mudam."

Jobs (2013)

Agradecimentos

Ao meu Deus-Pai, por ter me guiado e ter me dado forças para iniciar e continuar minha caminhada acadêmica. Por me fortalecer e por me dar saúde.

Aos meus familiares que sempre incentivaram meus estudos e acreditaram em mim. Em especial à minha amada mãe Maria Rita, por tanto amor e por me abençoar com as suas orações; ao estimado primo (irmão) Rafael Duarte, por toda sua amizade; e aos queridos primos Fernando Duarte, Fernanda Duarte e Henrique Barreiro, pela companhia e força durante todo o mestrado. Desculpem-me não conseguir retribuir sequer metade daquilo que fazem por mim.

Agradeço duas pessoas que sempre acreditaram em mim mesmo quando poucos imaginavam que eu seria alguém diferente, me dando a oportunidade de ver muito além do que eu podia: Professor Steve Wanderson Calheiros de Araújo, espero estar honrando tudo aquilo que tive o privilégio de aprender com o senhor; querida e amada esposa Kamilla Fontinele Camarão Duarte, sua paciência e amor me renovam e me dão coragem para acreditar que posso mais. Aos dois, o meu mais sincero e imenso MUITO OBRIGADO!

Aos professores que conheci nas diversas instituições que estudei, bem como todos os funcionários, que se esforçaram a fazer um ensino de qualidade. Dentre os quais destaco a professora Kátia Aguiar, do ensino médio, por me instruir na matemática; o professor Gilberlandio de Jesus Dias, da UNIFAP, por me orientar na graduação e me ensinar muito do que hoje sei; o professor Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, da UFPA, por acreditar em mim ainda na graduação, me convidando para fazer o mestrado na UFPA, por ter honrado o compromisso de orientar esta dissertação e por ter me instruído no mundo das equações diferenciais elípticas.

Aos professores Rodrigo da Silva Rodrigues, João Rodrigues dos Santos Júnior e Rúbia Gonçalves Nascimento por aceitarem gentilmente avaliar este trabalho, com sugestões e correções valiosas para a versão final do mesmo.

Aos amigos da turma do mestrado, grandes amizades que conquistei neste percurso: Andreia Pinheiro, Amiraldo Andrade, Claudionei Pereira, Jorsi Cunha, Júlio Roberto, Leandro Filho, Raimundo Leão, Ryan Moura, Sérgio Souza, Tarcyana Figueiredo e Willian Cintra. E tantos outros amigos da pós-graduação, cujos nomes não me atrevo a mencionar correndo o risco de esquecer algum, com os quais tive o prazer de compartilhar diversões e conhecimentos, o meu muito obrigado.

Aos excelentes amigos que a vida me trouxe, alguns infelizmente já levou, que contribuíram de forma direita para minha formação pessoal e intelectual. Dentre tantos destaco o GRANDE amigo (irmão) Adrian dos Santos, bem como toda sua família que considero a minha segunda, obrigado por toda força que me deram e continuam dando. Destaco também toda a família Fontinele, que considero minha terceira, por toda força e credibilidade nesses últimos anos. Agradeço ainda ao amigo Ramom Vasconcelos (em memória), por tudo que me ensinou, e ao amigo Fábio Dias por ter vindo de longe prestigiar minha apresentação, obrigado pela consideração. A todos os amigos, muito obrigado.

Agradeço ainda todas as pessoas que ajudaram minha estadia em Belém-Castanhal, estadia esta primordial para cursar todo o mestrado. Agradeço principalmente toda família Lima, em particular meu tio Soênio Lima que, de forma indireta, contribuiu bastante para essa formação; agradeço também toda família Braga; e agradeço, novamente, o estimado amigo Claudionei Pereira.

Aqueles que porventura me esqueci de citar acima e que de alguma forma, direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho, muito obrigado!

Por fim, agradeço a Capes pelo auxílio financeiro, sem o qual não seria possível este trabalho, tampouco cursar este mestrado.

Resumo

Nesta dissertação estudaremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Mais especificamente, estudaremos uma caracterização do nível minimax do Teorema do Passo da Montanha como mínimo do funcional associado ao problema restrito à variedade de Pohozaev. Neste estudo seguimos o artigo [9] de Jeanjean-Tanaka que não usa a hipótese que a função $s \longmapsto \dfrac{g(s)}{s}$ é crescente.

Palavras-chave: Soluções de energia mínima, nível minimax, identidade de Pohozaev, desigualdade de Moser-Trudinger, equação diferencial elíptica.

Abstract

In this dissertation we study the problem

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) \text{ in } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

More precisely, we study the characterization of the minimax level at Mountain Pass Theorem as minimum of the functional associated to problem restricted to the Pohozaev manifold. In the study, we follow the article [9] due to Jeanjean-Tanaka that does not use the hypothesis that $s \longmapsto \dfrac{g(s)}{s}$ is a increasing function.

Key-words: Least energy solutions, minimax level, Pohozaev identity, Moser-Trudinger inequality, elliptic differential equation.

Conteúdo

Introdução **1**

Notações **6**

1 A Caracterização no Caso $N \geq 3$ **8**

2 A Caracterização no Caso $N = 2$ **21**

A Regularidade do Funcional **36**

B Identidade de Pohozaev **45**

C Resultados Importantes **51**

Bibliografia **56**

Introdução

Uma das dificuldades que encontramos quando estudamos o problema

$$-\Delta u = g(u),\ u \in H^1(\mathbb{R}^N),\ N \geq 2, \tag{1}$$

é a falta de compacidade das imersões de Sobolev. Para contornar essa dificuldade é usual uma caracterização apropriada do nível minimax do Teorema do Passo da Montanha (ver Teorema $C.16$ no Apêndice C), como pode ser visto em [14] e [6]. Para obter essa caracterização, nesses artigos os autores usam a hipótese de que

$$s \longmapsto \frac{g(s)}{s} \text{ é crescente.} \tag{2}$$

No artigo [9] os autores mostram a mesma caracterização sem usar a hipótese (2). Tal caracterização está relacionada às soluções de energia mínima do problema (1).

Uma solução $\omega \in H^1(\mathbb{R}^N)$ do problema (1) é chamada solução de energia mínima quando $I(\omega) = m$, onde

$$m = \inf\left\{I(u) :\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \text{ satisfaz (no sentido fraco) (1)}\right\} \tag{3}$$

e $I : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))\, dx, \tag{4}$$

com $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(\tau)\, d\tau$, ou seja, G é primitiva de g. Isto significa que I é o funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (1) (no Apêndice A mostraremos que I está bem definido e é de classe C^1). Além disso, em (3), $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz (1) no sentido fraco quando

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x)\nabla v(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(u(x))v(x)\, dx,\ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

O funcional I não é limitado inferiormente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, de fato, usando a hipótese (g_3) (veja as hipóteses sobre a função g abaixo), mostra-se, para $N \geq 3$ em [4] e para $N = 2$ em [3], que existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u_0(x))\, dx > 0.$$

Façamos $u_t(x) = u_0(x/t) \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Do Teorema de Mudança de Variável, temos

$$I(u_t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0(x/t)|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u_0(x/t))\, dx = \frac{t^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0(x)|^2\, dx - t^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u_0(x))\, dx,$$

(veja o Lema 1.1 no Capítulo 1 para entender melhor esta mudança). Assim, $I(u_t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, mostrando que I não é limitado inferiormente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Entretanto, o número m acima está bem definido. Em outras palavras, o conjunto

$$X = \left\{ I(u) :\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \ \text{ satisfaz (no sentido fraco)} \quad (1) \right\}$$

é não-vazio e limitado inferiormente. Com efeito, em [3] e [4] mostra-se que $X \neq \emptyset$. Por outro lado, o fato de X ser limitado inferiormente é uma consequência da Identidade de Pohozaev (ver Proposição $B.1$ no Apêndice B). De fato, desta identidade toda solução fraca $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ do problema (1) verifica:

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))\, dx.$$

Com isso, para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (1), temos

$$NI(u) = \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx > 0.$$

Portanto, o conjunto $X \neq \emptyset$ é limitado inferiormente e, assim, do Póstulado de Dedekind, $m = \inf X$ é um número real.

Mostraremos, no Capítulo 1 para $N \geq 3$ e no Capítulo 2 para $N = 2$, que o funcional I tem as duas geometrias do Teorema do Passo da Montanha (ver Teorema $C.16$ no Apêndice C) e que existe um caminho $\gamma_\omega \in C([0,1]; H^1(\mathbb{R}^N))$ tal que $I(\gamma_\omega(1)) < 0$. Sendo $I \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N); \mathbb{R})$, ficará bem definido o nível minimax do passo da montanha para o funcional I, dado por

$$b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in C([0,1]; H^1(\mathbb{R}^N)) : \gamma(0) = 0, I(\gamma(1)) < 0 \right\}.$$

Esta dissertação é um estudo do artigo [9] de Jeanjean-Tanaka, que foi publicado em 2003. Neste artigo os autores mostram a caracterização do nível minimax do passo da montanha e também mostram que m é o ínfimo do funcional I restrito à variedade de Pohozaev. Para tanto, a não linearidade $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deve satisfazer as seguintes propriedades:

(g_0) $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e é ímpar.

(g_1) Para $N \geq 3$,

$$-\infty < \liminf_{s \to 0} \frac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s \to 0} \frac{g(s)}{s} = -\nu < 0;$$

para $N = 2$,

$$\lim_{s \to 0} \frac{g(s)}{s} = -\nu \in (-\infty, 0).$$

(g_2) Para $N \geq 3$,

$$\lim_{s \to \infty} \frac{|g(s)|}{s^{\frac{N+2}{N-2}}} = 0;$$

para $N = 2$, dado $\alpha > 0$ existe $C_\alpha > 0$ tal que

$$|g(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2}, \text{ para todo } s \geq 0.$$

(g_3) Existe $\xi_0 > 0$ tal que $G(\xi_0) > 0$, onde $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(\tau)\, d\tau$.

Para g satisfazendo as condições acima, mostra-se em [3] e [4] a existência de pelo menos uma solução de energia não trivial para o problema (1). Nessas condições, o principal resultado do artigo [9] devido à Jeanjean-Tanaka é:

Teorema 0.1 *Suponha que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaça $(g_0) - (g_3)$. Sejam I, m e b como definidos anteriormente. Então*

$$b = m,$$

isto é, o valor do passo da montanha nos dá o nível de energia mínima. Além disso, para cada solução de energia mínima ω, existe um caminho $\gamma_\omega \in \Gamma$ tal que $\omega \in \gamma_\omega([0,1])$ e

$$I(\omega) = \max_{t \in [0,1]} I(\gamma_\omega(t)).$$

Nos artigos [3] e [4] os autores estabelecem existência de soluções de energia mínima do problema (1), usando os seguintes problemas de minimização:

- Minimize $\left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \, dx : u \in H^1(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) \, dx = 1 \right\}$, para $N \geq 3$, [4];
- Minimize $\left\{ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^2 \, dx : u \in H^1(\mathbb{R}^2), \int_{\mathbb{R}^2} G(u(x)) \, dx = 0 \right\}$, para $N = 2$, [3].

Mostram que o funcional associado ao problema está bem definido e é de classe C^1. Além disso, mostram que existe uma solução de energia mínima ω_0 positiva satisfazendo a Identidade de Pahozaev, isto é,

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_0(x)|^2 \, dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(\omega_0(x)) \, dx.$$

Mais precisamente, eles mostram os seguintes resultados:

Teorema 0.2 ***(Berestychi-Lions,*** *[4]**)*** *Suponha $N \geq 3$ e que g satisfaça $(g_0) - (g_3)$. Então o problema (1) possui uma solução ω_0 tal que:*

(a) $\omega_0(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(b) ω_0 é esfericamente simétrica, isto é, $\omega_0(x) = \omega_0(r)$, onde $r = |x|$. Além disso, ω_0 decresce com respeito a r;

(c) $\omega_0 \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$;

(d) ω_0 junto com suas derivadas, a menos de segunda ordem, tem decaimento exponencial no infinito, ou seja,

$$|D^\alpha(\omega_0(x))| \leq Ce^{-\delta|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

para algum $C, \delta > 0$, com $|\alpha| \leq 2$.

Teorema 0.3 ***(Berestychi-Gallouët-Kavian,*** *[3]**)*** *Suponha $N = 2$ e g satisfazendo as hipóteses $(g_0) - (g_3)$. Existe uma solução do problema (1) verificando:*

(a) $\omega_0(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(b) ω_0 é esfericamente simétrica;

(c) ω_0 é decrescente;

(d) $\omega_0 \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

Além disso, mostram que para qualquer que seja $\omega \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (1), tem-se

$$0 < I(\omega_0) \leq I(\omega).$$

Para um melhor entendimento repetiremos alguns enunciados desta introdução no decorrer do texto. Além disso, este trabalho será divido da seguinte forma:

No Capítulo 1, estudaremos o Teorema 0.1 para o caso em que $N \geq 3$. Como veremos, esta caracterização será mais simples do que para caso $N = 2$ por conta das hipóteses sobre a não linearidade. Um ponto interessante deste capítulo será quando demonstrarmos que m é o ínfimo do funcional I restrito à variedade de Pohozaev, neste caso exibiremos uma bijeção entre a variedade de Pohozaev e o conjunto do qual Berestychi-Lions restringiram o funcional I no problema de minimização acima. Ressaltamos que esta bijeção aparece no artigo [4], de Berestychi-Lions, em 1983.

No Capítulo 2, estudaremos o Teorema 0.1 para $N = 2$, neste caso a caracterização será um pouco mais trabalhosa. Por conta do crescimento exponencial da não linearidade, na demonstração da geometria do passo da montanha precisaremos de uma desigualdade do tipo Moser-Trudinger para obter certas estimativas. Uma vez que estaremos considerando somente o caso $N = 2$ usaremos essa desigualdade para funções em $H^1(\mathbb{R}^2)$, uma versão bem mais geral desta desigualdade pode ser encontrada no artigo [12] de J. M. B. do Ó.

No Apêndice A, faremos uma breve revisão sobre funcionais diferenciáveis. Além disso, mostraremos que o funcional associado ao problema está bem definido e é de classe C^1.

No Apêndice B, mostraremos a Identidade de Pohozaev. Como estamos trabalhando com o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ demonstraremos esta desigualdade somente para integrais sobre $\mathbb{R}^N$. Uma versão desta desigualdade para um aberto limitado contido em $\mathbb{R}^N$, pode ser encontrada no livro [1]. No artigo [4] os autores mostram, para $N \geq 3$, que cada solução do problema (1) satisfaz esta identidade.

Por fim, no Apêndice C, enunciaremos os principais resultados utilizados ao longo deste trabalho e indicaremos as bibliografias onde os mesmos poderão ser encontrados.

Notações

Nesta dissertação usaremos as seguintes notações:

- m denotará o nível de energia mínima, ou seja, $m = I(\omega)$, onde I é o funcional associado ao problema dado em (4) e ω é uma solução de energia mínima do problema (1).

- b denotará o nível minimax do passo da montanha (ver Teorema $C.16$ no Apêndice C), ou seja,
$$b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$
onde
$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \in C([0,1]; H^1(\mathbb{R}^N)) : \gamma(0) = 0, I(\gamma(1)) < 0 \right\}.$$

- Quando não houver confusão sobre as variáveis, colocaremos somente f ao invés de $f(x)$ nas integrais de uma dada função f como, por exemplo, no próximo item.

- K denotará o conjunto das funções não nulas em $H^1(\mathbb{R}^N)$ que satisfazem a Identidade de Pohozaev, isto é,
$$K = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \, dx = 0 \right\}.$$
Denotaremos por κ a função $\kappa : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por
$$\kappa(u) = \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \, dx = NI(u) - |\nabla u|_2^2.$$

- Diremos que uma certa propriedade é válida quase sempre num certo conjunto X quando existir um conjunto $N \subset X$ de medida nula tal que para todo $x \in X \setminus N$ a propriedade vale. Como, por exemplo, no próximo item.

- $L^p(\mathbb{R}^N)$, com $1 \leq p \leq +\infty$, denotará o espaço de Lebesgue munido com a norma

$$|u|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } p < \infty$$

$$|u|_\infty = \inf \left\{ C; |u(x)| \leq C, \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N \right\}, \text{ se } p = \infty.$$

  Por $L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N)$ denotaremos o conjunto das funções localmente integráveis à Lebesgue.

- $H^1(\mathbb{R}^N)$, denotará o espaço de Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ munido com a norma

$$||u||_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, denotará o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f \in C^\infty$ e f tem suporte compacto.

- Dada uma função $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ indicará a i-ésima derivada parcial de f no ponto x, quando esta derivada existir.

- O símbolo $\square$ indicará a finalização de uma demonstração.

Capítulo 1

A Caracterização no Caso $N \geq 3$

Neste capítulo estudaremos o Teorema 0.1 para $N \geq 3$, o caso $N = 2$ será estudado no próximo capítulo. Os motivos pelos quais dividimos o trabalho em dois casos foram as hipóteses sobre a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Lembramos que para $N \geq 3$ as hipóteses sobre g são as seguintes:

(g_0) A função g é contínua e ímpar;

(g_1) $-\infty < \liminf_{s \to 0} \dfrac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s \to 0} \dfrac{g(s)}{s} = -\nu < 0$;

(g_2) $\lim_{s \to \infty} \dfrac{|g(s)|}{s^{\frac{N+2}{N-2}}} = 0$;

(g_3) Existe $\xi_0 > 0$ tal que $G(\xi_0) > 0$, onde $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(\tau)\, d\tau$.

No artigo [4] os autores discutem a importância das condições $(g_0) - (g_3)$ para existência de uma solução do problema (1). Um exemplo de uma função que satisfaça $(g_0) - (g_3)$ pode ser dado pela função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(s) = s|s|^{\frac{4}{N-2} - \epsilon(N)} - s$, onde $\epsilon(N) > 0$ é tomado de forma que $\dfrac{4}{N-2} - \epsilon(N) > 0$.

Vale ressaltar que a hipótese (g_3) não será usada para obtermos a primeira geometria do passo da montanha. Porém, ela é necessária para garantirmos a existência de solução de energia mínima para o problema (1). Lembramos ainda que também não estamos fazendo uso da hipótese (2), isto é, não estamos assumindo que a aplicação $s \longmapsto \dfrac{g(s)}{s}$ é crescente.

O primeiro passo para provarmos o Teorema 0.1 será mostrarmos que o nível minimax está bem definido. Para tanto, é suficiente mostrar que o funcional I associado ao problema satisfaz a geometria do passo da montanha (ver Teorema $C.16$ no Apêndice C). Isto será demonstrado nos dois lemas a seguir.

Lema 1.1 *Suponha que g satisfaça $(g_0)-(g_2)$, então o funcional I associado ao problema tem as seguintes propriedades:*
(i) $I(0)=0$.
(ii) Existem $\rho_0, \delta_0 > 0$ tais que

$$I(u) \geq \delta_0, \text{ para qualquer que seja } u \in H^1(\mathbb{R}^N), \text{ com } ||u||_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \rho_0. \tag{1.1}$$

Prova: (i) Lembremos que para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \, dx.$$

Se $u \equiv 0$ então

$$\nabla u(x) = 0,$$
$$G(u(x)) = \int_0^{u(x)} g(\tau) \, d\tau = \int_0^0 g(\tau) \, d\tau = 0,$$

quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Logo, $I(0)=0$.

(ii) Das hipóteses (g_1) e (g_2), para $\epsilon > 0$, com $-\nu + \epsilon < 0$, existem $M, \delta > 0$ tais que

$$\begin{cases} \dfrac{g(s)}{s} < -\nu + \epsilon, \ 0 < s < \delta; \\ \left|\dfrac{g(s)}{s^{\frac{N+2}{N-2}}}\right| < \epsilon, \ \forall \ s > M. \end{cases} \tag{1.2}$$

Desde que g é contínua e $[\delta, M]$ é um compacto, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\left|\frac{g(s)}{s^{\frac{N+2}{N-2}}}\right| \leq C_1, \ \forall \ s \in [\delta, M]. \tag{1.3}$$

Juntando as desigualdades em (1.2) e (1.3), temos

$$\begin{cases} g(s) < (-\nu + \epsilon)s, \ \forall \ s \in (0, \delta]; \\ |g(s)| < \epsilon s^{\frac{N+2}{N-2}}, \ \forall \ s > M; \\ |g(s)| \leq C_1 s^{\frac{N+2}{N-2}}, \ \forall \ s \in [\delta, M]. \end{cases}$$

Disto decorre que

$$\begin{cases} g(s) < (-\nu + \epsilon)s, \ \forall\, s \in (0, \delta], \\ |g(s)| < (C_1 + \epsilon)s^{\frac{N+2}{N-2}}, \ \forall\, s > \delta. \end{cases}$$

Observe que podemos obter $C_2 > 0$ de forma que $(-\nu + \epsilon)s + C_2(C_1 + \epsilon)s^{\frac{N+2}{N-2}} \geq (C_1 + \epsilon)s^{\frac{N+2}{N-2}}$. Com isso,

$$g(s) < (-\nu + \epsilon)s + C_2(C_1 + \epsilon)s^{\frac{N+2}{N-2}}, \ \forall\, s > 0.$$

Em particular,

$$-g(s) > (\nu - \epsilon)s - C_2(C_1 + \epsilon)s^{\frac{N+2}{N-2}}, \ \forall\, s > 0.$$

Façamos $C_1(\epsilon) = C_2(C_1 + \epsilon)$ e notemos que $g(0) = 0$. Assim, $C_1(\epsilon) > 0$ é tal que

$$-g(s) \geq (\nu - \epsilon)s - C_1(\epsilon)s^{\frac{N+2}{N-2}}, \ \forall\, s \geq 0. \tag{1.4}$$

Por outro lado, como g é ímpar,

$$\int_0^s g(\tau)\, d\tau = -\int_{-s}^0 g(\tau)\, d\tau = \int_0^{-s} g(\tau)\, d\tau.$$

Assim, dado $s \in \mathbb{R}$, de (1.4) temos

$$\begin{aligned} -G(s) = \int_0^{|s|} -g(\tau)\, d\tau &\geq (\nu - \epsilon)\int_0^{|s|} \tau\, d\tau - C_1(\epsilon)\int_0^{|s|} \tau^{\frac{N+2}{N-2}}\, d\tau \\ \Rightarrow -G(s) &\geq \left(\frac{\nu - \epsilon}{2}\right)s^2 - C_2(\epsilon)|s|^{\frac{2N}{N-2}}, \ \forall\, s \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

onde $C_2(\epsilon) = \left(\dfrac{N-2}{2N}\right)C_1(\epsilon)$. Das imersões contínuas de Sobolev (veja Teorema $C.13$ no Apêndice C), temos

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N).$$

Isto significa que existe uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$|u|_{\frac{2N}{N-2}} \leq C||u||_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \ \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Disto e de (1.5), para $k_0 = \dfrac{1}{2}\min\{1, \nu - \epsilon\}$, temos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx + \left(\frac{\nu - \epsilon}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N} u^2\, dx - C_2(\epsilon)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{2N}{N-2}}\, dx \\ &\geq k_0\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2\, dx\right) - C_2(\epsilon)|u|_{\frac{2N}{N-2}}^{\frac{2N}{N-2}} \\ &\geq k_0||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - C_3(\epsilon)||u||^{\frac{2N}{N-2}}_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

onde $C_3(\epsilon) = C_2(\epsilon)C^{\frac{2N}{N-2}}$. Consideremos $\rho_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \rho_0 < \left(\frac{k_0}{C_3(\epsilon)}\right)^{\frac{N-2}{N}}.$$

Para $u \in H^1(\mathbb{R})$, com $||u||_{H^1(\mathbb{R})} = \rho_0$, temos

$$I(u) \geq k_0\rho_0^2 - C_3(\epsilon)\rho_0^{\frac{2N}{N-2}} = \rho_0^2\left(k_0 - C_3(\epsilon)\rho_0^{\frac{N}{N-2}}\right) > \rho_0^2(k_0 - k_0) = 0.$$

Tomando $\delta_0 = k_0\rho_0^2 - C_3(\epsilon)\rho_0^{\frac{2N}{N-2}} > 0$, obtemos $I(u) \geq \delta_0 > 0$, para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $||u||_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \rho_0$, o que prova (1.1).

□

Além de I satisfazer a primeira geometria do passo da montanha, outras consequências do Lema 1.1 são os seguintes resultados (tais resultados serão usados no Lema 1.4 mais adiante):

Corolário 1.1 *Suponha g, I e ρ_0 nas mesmas condições do Lema* 1.1. *Então,*

$$I(u) > 0, \text{ para } u \in H^1(\mathbb{R}^N), \text{ com } 0 < ||u||_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_0.$$

Prova: De fato, do Lema 1.1,

$$I(u) > 0, \text{ para } u \in H^1(\mathbb{R}^N), \text{ com } 0 < ||u||_{H^1(\mathbb{R})^N} = \rho_0.$$

Suponha $||u||_{H^1(\mathbb{R}^N)} < \rho_0$. Como na demonstração do Lema 1.1, das imersões contínuas de Sobolev, podemos obter $C_3(\epsilon) = C_2(\epsilon)C^{\frac{2N}{N-2}}$ tal que, para $k_0 = \dfrac{1}{2}\min\{1, \nu - \epsilon\}$,

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx \\
&\geq k_0||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - C_2(\epsilon)|u|^{\frac{2N}{N-2}}_{\frac{2N}{N-2}} \\
&\geq ||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}\left(k_0 - C_3(\epsilon)||u||^{\frac{N}{N-2}}_{H^1(\mathbb{R}^N)}\right) \\
&> ||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}(k_0 - k_0) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Corolário 1.2 *Para g e I nas condições do Lema* 1.1*, existe $\rho_0 > 0$ (não necessariamente igual ao do Lema* 1.1*), tal que*

$$\kappa(u) = \frac{N-2}{2}|\nabla u|_2^2 - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)\,dx > 0,$$

para qualquer $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $0 < ||u||_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_0$.

Prova: De fato, na desigualdade (1.5) acima temos

$$-G(s) \geq \left(\frac{\nu-\epsilon}{2}\right)s^2 - C_2(\epsilon)|s|^{\frac{2N}{N-2}},\ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\kappa(u) &= \left(\frac{N-2}{2}\right)|\nabla u|_2^2 - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)\,dx \\
&\geq \left(\frac{N-2}{2}\right)|\nabla u|_2^2 + \left(\frac{N(\nu-\epsilon)}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N} u^2\,dx - NC_2(\epsilon)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{2N}{N-2}}\,dx.
\end{aligned}$$

Como no Lema 1.1, das imersões contínuas de Sobolev, podemos obter $C_3(\epsilon) = C_2(\epsilon)C^{\frac{2N}{N-2}}$ tal que, para $k_0 = \dfrac{1}{2}\min\{N-2, N(\nu-\epsilon)\}$,

$$\begin{aligned}
\kappa(u) &\geq \left(\frac{N-2}{2}\right)|\nabla u|_2^2 + \left(\frac{N(\nu-\epsilon)}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N} u^2\,dx - NC_2(\epsilon)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{2N}{N-2}}\,dx \\
&= \left(\frac{N-2}{2}\right)|\nabla u|_2^2 + \left(\frac{N(\nu-\epsilon)}{2}\right)|u|_2^2 - NC_2(\epsilon)|u|_{\frac{2N}{N-2}}^{\frac{2N}{N-2}} \\
&\geq k_0||u||_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 - NC_2(\epsilon)|u|_{\frac{2N}{N-2}}^{\frac{2N}{N-2}} \\
&\geq k_0||u||_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 - NC_3(\epsilon)||u||_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2N}{N-2}}.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\rho_0 > 0$ de forma que

$$0 < \rho_0 < \left(\frac{k_0}{NC_3(\epsilon)}\right)^{\frac{N-2}{N}},$$

obtemos

$$\kappa(u) = \frac{N-2}{2}|\nabla u|_2^2 - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)\,dx > 0,$$

para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $0 < ||u||_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_0$.

$\square$

Lema 1.2 *Suponha que g satisfaça $(g_0)-(g_3)$. Seja ω uma solução de energia mínima qualquer do problema (1), então existe um caminho $\gamma_\omega : [0,1] \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo*

$$\omega \in \gamma_\omega([0,1]) \tag{1.6}$$

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma_\omega(t)) = m. \tag{1.7}$$

Além disso,

$$\gamma_\omega(0) = 0 \text{ e } I(\gamma_\omega(1)) < 0.$$

Prova: Primeiro definiremos um caminho $\gamma : [0,L] \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$, com $L > 1$ apropriado, tal que

$$\gamma(0) = 0,\ I(\gamma(L)) < 0,$$

$$\omega \in \gamma([0,L]),$$

$$\max_{t\in[0,L]} I(\gamma(t)) = m.$$

Depois, por uma mudança de parâmetro, definiremos $\gamma_\omega : [0,1] \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ verificando as condições do lema. Para $L > 1$, considere $\gamma : [0,L] \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$\gamma(t)(x) = \begin{cases} \omega\left(\dfrac{x}{t}\right),\ t > 0 \\ 0,\ t = 0. \end{cases}$$

Note que, para cada $t \in (0,L]$,

$$\begin{aligned} ||\gamma(t)||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\gamma(t)(x)|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(t)(x)|^2\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega(x/t)|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\omega(x/t)|^2\, dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $z = x/t$, temos

$$\frac{\partial\omega(z)}{\partial x_i} = \frac{\partial\omega(z)}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial\omega(z)}{\partial z_i}\right)\frac{1}{t}$$

$$\text{e } \det z'(x) = \frac{1}{t^N},$$

onde $\det z'(x)$ denota o determinante da matriz jacobiana da função $z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ dada por $z(x) = x/t$. Pelo Teorema de Mundaça de Variável (ver Teorema C.3 no Apêndice C), temos

$$||\gamma(t)||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{t^N}{t^2}|\nabla\omega(z)|^2\, dz + \int_{\mathbb{R}^N} t^N|\omega(z)|^2\, dz,$$

ou seja,

$$||\gamma(t)||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = t^{N-2}|\nabla\omega|_2^2 + t^N|\omega|_2^2. \tag{1.8}$$

Com a mesma mudança feita acima, obtemos

$$\begin{aligned} I(\gamma(t)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\gamma(t)|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(\gamma(t))\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega(x/t)|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(\omega(x/t))\, dx \\ &= \frac{t^{N-2}}{2}|\nabla\omega|_2^2 - t^N\int_{\mathbb{R}^N} G(\omega)\, dx. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$I(\gamma(t)) = \frac{t^{N-2}}{2}|\nabla\omega|_2^2 - t^N\int_{\mathbb{R}^N} G(\omega)\, dx. \tag{1.9}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[I(\gamma(t))] &= \left(\frac{N-2}{2}\right)t^{N-3}|\nabla\omega|_2^2 - Nt^{N-1}\int_{\mathbb{R}^N} G(\omega)\, dx \\ &= t^{N-1}\left(\frac{N-2}{2t^2}|\nabla\omega|_2^2 - N\int_{\mathbb{R}^N} G(\omega)\, dx\right). \end{aligned}$$

Desde que ω é solução do problema (1), ω satisfaz a Identidade de Pohozaev (ver Proposição $B.1$ no Apêndice B), isto é,

$$\frac{N-2}{2}|\nabla\omega|_2^2 = N\int_{\mathbb{R}^N} G(\omega)\, dx.$$

Combinando esta igualdade com a derivada acima, temos

$$\begin{cases} t\in(0,1) & \Rightarrow \quad \dfrac{d}{dt}[I(\gamma(t))] > 0, \\ t>1 & \Rightarrow \quad \dfrac{d}{dt}[I(\gamma(t))] < 0, \\ t=1 & \Rightarrow \quad \dfrac{d}{dt}[I(\gamma(t))] = 0. \end{cases}$$

Observe que da relação acima $I(\gamma(t))$ atinge um máximo no ponto $t=1$ no intervalo $[0,L]$ e, com isso,

$$m = I(\omega(x)) = I(\gamma(1)) = \max_{t\in[0,L]} I(\gamma(t)).$$

Além disso, temos $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G(\omega)\, dx > 0$, pois, novamente da Identidade de Pohozaev,

$$N\int_{\mathbb{R}^N} G(\omega)\, dx = \frac{N-2}{2}|\nabla\omega|_2^2 > 0.$$

Como,

$$I(\gamma(L)) = L^N \left(\frac{L^{-2}}{2} |\nabla \omega|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(\omega)\, dx \right)$$

e L é arbitrário, para $L > 1$ suficientemente grande temos

$$I(\gamma(L)) < 0.$$

Note ainda que $\gamma \in C([0, L]; H^1(\mathbb{R}^N))$, pois (1.8) implica que γ é contínuo em $t = 0$. Por outro lado, desde que ω é uma solução de energia mínima, temos que γ é contínuo para $t \neq 0$. Finalmente, definindo o caminho $\gamma_\omega : [0, 1] \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ por

$$\gamma_\omega(t) = \gamma(Lt),$$

das propriedades do caminho γ acima, temos $\gamma_\omega \in C([0, 1]; H^1(\mathbb{R}^N))$ e, além disso,

$$\omega = \gamma(1) = \gamma_\omega(1/L) \in \gamma_\omega([0, 1]),$$

$$\gamma_\omega(0) = \gamma(0) = 0,\ I(\gamma_\omega(1)) = I(\gamma(L)) < 0,$$

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma_\omega(t)) = \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(Lt)) = \max_{t \in [0,L]} I(\gamma(t)) = m,$$

isto é, γ_ω satisfaz as propriedades do lema.

□

Dos dois lemas acima o nível minimax do passo da montanha para o funcional I está bem definido. Uma consequência imediata da igualdade (1.7) no Lema 1.2 é o seguinte resultado:

Corolário 1.3 *Para b e m definidos anteriormente temos $b \leq m$.*

Prova: Com efeito, no Lema 1.2 encontramos um caminho $\gamma_\omega \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma_\omega(t)) = m.$$

Logo,

$$b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma_\omega(t)) = m.$$

□

Nos lemas seguintes buscaremos a desigualdade contrária do Corolário 1.3. No próximo lema mostraremos que m é exatamente o ínfimo do funcional I restrito ao conjunto K, tal conjunto é chamado variedade de Pohozaev.

Lema 1.3 *Seja K o conjunto*

$$K = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \, dx = 0 \right\}.$$

Para m definido acima, temos

$$m = \inf_{u \in K} I(u).$$

Prova: Faremos a demonstração deste lema compassadamente em três afirmações. Primeiramente, consideremos o conjunto

$$S = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \, dx = 1 \right\}$$

e $\Phi : S \to K$ definida por

$$(\Phi(u))(x) = u\left(\frac{x}{t_u}\right), \text{ onde } t_u = \sqrt{\frac{N-2}{2N}} |\nabla u|_2.$$

Mostraremos que Φ está bem definida e é uma bijeção entre os conjuntos K e S.

***Afirmação 1**: Φ está bem definida.*

Com efeito, para $u \in S$, temos $|\nabla u|_2 \neq 0$ e assim $t_u \neq 0$. Por outro lado, dada $u \in S$, pelo Teorema de Mudança de Variável (ver Teorema $C.3$ no Apêndice C),

$$\begin{aligned}
\kappa(u(x/t_u)) &= \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x/t_u)|^2 \, dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x/t_u)) \, dx \\
&= \frac{N-2}{2} \cdot t_u^{N-2} |\nabla u|_2^2 - N t_u^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) \, dx \\
&= \frac{N-2}{2} \cdot \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} |\nabla u|_2^N - N \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N}{2}} |\nabla u|_2^N \\
&= \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N}{2}} |\nabla u|_2^N \left(\frac{N-2}{2} \cdot \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{-1} - N \right) \\
&= \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N}{2}} |\nabla u|_2^N (N - N),
\end{aligned}$$

isto é, $\kappa(u(x/t_u)) = 0$, implicando que $\Phi(u) \in K$. Logo, Φ está bem definida.

Afirmação 2: *Φ satisfaz, para todo $u \in S$,*

$$I(\Phi(u)) = \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} |\nabla u|_2^N.$$

De fato, dada $u \in S$, usando o Teorema de Mudança de Variável temos

$$\begin{aligned}
I(\Phi(u)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x/t_u)|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x/t_u))\, dx = \frac{1}{2} \cdot t_u^{N-2}|\nabla u|_2^2 - t_u^N \\
&= |\nabla u|_2^N \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2N}{N-2} - 1\right) = |\nabla u|_2^N \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{2}{N-2}\right) \\
&= \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N}{2}} |\nabla u|_2^N \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{2N}{N-2}\right) = \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} |\nabla u|_2^N.
\end{aligned}$$

Afirmação 3: *Φ é uma bijeção.*

Para a injetividade, sejam $u, v \in S$ tais que

$$\Phi(u)(x) = \Phi(v)(x), \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

Pela definição da função Φ, temos

$$u\left(\frac{x}{t_u}\right) = v\left(\frac{x}{t_v}\right), \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N. \tag{1.10}$$

Note que é sucifiente mostrarmos que $t_u = t_v$. Como $\Phi(u) \in K$, então

$$0 = \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x/t_u)|^2\, dx - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x/t_u))\, dx.$$

De (1.10) e do Teorema de Mudança de Variável, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x/t_v)|^2\, dx - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x/t_u))\, dx \\
&= \frac{N-2}{2} \cdot t_v^{N-2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2\, dx - N \cdot t_u^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))\, dx \\
&= \frac{N-2}{2} \cdot t_v^{N-2}|\nabla v|_2^2 - N \cdot t_u^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))\, dx.
\end{aligned}$$

Assim, usando na igualdade acima o fato de $u \in S$ e

$$|\nabla v|_2^2 = t_v^2\left(\frac{2N}{N-2}\right),$$

temos que

$$0 = \left(\frac{N-2}{2}\right) t_v^N \left(\frac{2N}{N-2}\right) - Nt_u^N = N(t_v^N - t_u^N) \Rightarrow t_u = t_v.$$

Para a sobrejetividade, dada $u \in K$, temos

$$\frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx. \tag{1.11}$$

Considere $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$v(x) = u\left(t_u^{2/N} x\right), \text{ onde } t_u = \sqrt{\frac{N-2}{2N}}|\nabla u|_2.$$

Observe que, do Terorema de Mudança de Variável e da igualdade (1.11),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} G(u(t_u^{2/N}x))\, dx \\
&= (t_u^{2/N})^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))\, dx \\
&= t_u^{-2}\left(\frac{N-2}{2N}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx \\
&= t_u^{-2}\cdot t_u^2 = 1.
\end{aligned}$$

Logo, $v \in S$. Além disso, novamente pelo Teorema de Mudança de Variável,

$$\begin{aligned}
t_v &= \sqrt{\frac{N-2}{2N}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{N-2}{2N}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t_u^{2/N}x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (t_u^{2/N})^{\frac{2-N}{2}}\cdot\sqrt{\frac{N-2}{2N}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = t_u^{(2-N)/N}\cdot t_u = t_u^{2/N}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Phi(v)(x) = v(x/t_v) = u\left(\frac{t_u^{2/N}}{t_v}\cdot x\right) = u(x),$$

isto é, Φ é sobrejetiva.

Das Afirmações acima, temos

$$\inf_{u\in K} I(u) = \inf_{u\in S} I(\Phi(u)) = \inf_{u\in S}\frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}}|\nabla u|_2^N.$$

Em [4] mostra-se que o ínfimo de $|\nabla u|_2^2$ restrito à S é atingido em uma solução de energia mímina ω_0. Portanto,

$$\inf_{u\in K} I(u) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}}|\nabla \omega_0|_2^N = I(\omega_0) = m.$$

$\square$

Lema 1.4 *Para qualquer que seja* $\gamma \in \Gamma$*, temos*

$$\gamma([0,1]) \cap K \neq \phi.$$

Prova: Do Corolário 1.2, existe $\rho_0 > 0$ tal que

$$0 < ||u||_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_0 \Rightarrow \kappa(u) > 0. \tag{1.12}$$

Por outro lado, para $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} \kappa(\gamma(1)) &= NI(\gamma(1)) - |\nabla\gamma(1)|_2^2 \\ &\leq NI(\gamma(1)) < 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\kappa(\gamma(0)) = 0 \quad \text{e} \quad \kappa(\gamma(1)) < 0. \tag{1.13}$$

Pelo Teorema $C.8$ (ver Apêndice C), de (1.12) e (1.13) existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$\kappa(\gamma(t_0)) = 0.$$

Note que $||\gamma(t_0)||_{H^1(\mathbb{R}^N)} > \rho_0$, pois caso contrário, teríamos $\kappa(\gamma(t_0)) > 0$. Logo, $\gamma(t_0) \neq 0$ e $\kappa(\gamma(t_0)) = 0$, mostrando que $\gamma(t_0) \in K$ e, portanto, $\gamma(t_0) \in \gamma([0,1]) \cap K$.

□

Corolário 1.4 *Para* b *e* m *definidos anteriormente temos* $b \geq m$*.*

Prova: Do Lema 1.3, temos

$$m = \inf_{u \in K} I(u).$$

Além disso, do Lema 1.4, para todo $\gamma \in \Gamma$, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\gamma(t_0) \in \gamma([0,1]) \cap K$. Assim,

$$m = \inf_{u \in K} I(u) \leq I(\gamma(t_0)) \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)), \ \forall\, \gamma \in \Gamma.$$

Portanto,

$$b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq m.$$

□

Para finalizar este capítulo, demostraremos o Teorema 0.1 para $N \geq 3$. Em verdade, os lemas anteriores foram etapas para a demonstração deste teorema. Com o auxilio desses lemas a demonstração ficará quase que imediata. Vejamos:

Teorema 1.1 *Suponha $N \geq 3$ e que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaça $(g_0) - (g_3)$. Sejam I, m e b como definidos anteriormente. Então*

$$b = m,$$

isto é, o valor do passo da montanha nos dá o nível de energia mínima. Além disso, para cada solução de energia mínima ω, existe um caminho $\gamma_\omega \in \Gamma$ tal que $\omega \in \gamma_\omega([0,1])$ e

$$I(\omega) = \max_{t \in [0,1]} I(\gamma_\omega(t)).$$

Prova: Do Corolário 1.3, $m \geq b$ e do Corolário 1.4, $m \leq b$. Assim, $b = m$. Ainda do Corolário 1.3, dada uma solução de energia mínima ω do problema (1), existe um caminho $\gamma_\omega \in \Gamma$ satisfazendo $\omega \in \gamma_\omega([0,1])$ e

$$I(\omega) = m = \max_{t \in [0,1]} I(\gamma_\omega(t)),$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Capítulo 2

A Caracterização no Caso $N = 2$

Neste capítulo estudaremos o Teorema 0.1 para o caso $N = 2$. Neste caso, as hipóteses sobre a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são as seguintes:

(g_0) A função g é contínua e ímpar;

(g_1) $\lim_{s \to 0} \dfrac{g(s)}{s} = -\nu \in (-\infty, 0)$;

(g_2) Dado $\alpha > 0$, existe $C_\alpha > 0$ tal que

$$|g(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2}, \text{ para todo } s \geq 0.$$

(g_3) Existe $\xi_0 > 0$ tal que $G(\xi_0) > 0$, onde $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(\tau)\, d\tau$.

Como no capítulo anterior, vale ressaltar que não estamos usando da hipótese (2), isto é, não estamos assumindo a monotonicidade de $s \longrightarrow g(s)/s$. Tão pouco, estamos usando a hipótese (g_3) para obtermos a primeira geometria do passo da montanha. Porém, precisamos desta hipótese para garantirmos a existência de solução de energia mínima do problema (1), este resultado é devido à Berestychi-Gallouët-Kavian [3]. No artigo [3] os autores também discutem a importância das hipóteses $(g_0) - (g_3)$ para existência de uma solução para o problema. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(s) = (s|s| - s)e^{(\alpha - \alpha_1)s^2}, \ \alpha, \alpha_1 > 0,$$

satisfaz as propriedades $(g_0) - (g_3)$, onde α_1 é tomado de forma que (g_2) e (g_3) sejam válidas.

Para a demonstração do Teorema 0.1 seguiremos os mesmos passos do caso $N \geq 3$. Primeiro mostraremos que o nível minimax está bem definido. No lema seguinte, mostraremos que o funcional I associado ao problema satisfaz a primeira geometria do passo da montanha (ver Teorema C.16 no Apêndice C).

Lema 2.1 *Suponha que g satisfaça $(g_0) - (g_2)$, então o funcional I associado ao problema tem as seguintes propriedades:*
(i) I(0)=0.
(ii) Existem $\rho_0, \delta_0 > 0$ tais que

$$I(u) \geq \delta_0, \quad \textit{para todo} \;\; u \in H^1(\mathbb{R}^2) \;\; \textit{com} \;\; ||u||_{H^1(\mathbb{R}^2)} = \rho_0. \tag{2.1}$$

Prova: (i) Para $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^2} G(u) \, dx.$$

Se $u \equiv 0$ então

$$\nabla u(x) = 0,$$
$$G(u(x)) = \int_0^{u(x)} g(\tau) \, d\tau = \int_0^0 g(\tau) \, d\tau = 0,$$

quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Logo, $I(0) = 0$.

(ii) Das hipóteses (g_1) e (g_2), dado $\epsilon > 0$ e $\alpha > 0$, existem $C_\alpha, \delta > 0$ tais que

$$\begin{cases} \dfrac{g(s)}{s} + \nu < \epsilon, \; \forall \; 0 < |s| < \delta; \\ \\ |g(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2}, \; \forall \; s \geq 0. \end{cases}$$

Em particular, para $\epsilon = \nu/2$ e $\alpha = 2\pi$, existem $\delta_1 > 0$ e $C_{2\pi} > 0$ tais que

$$\begin{cases} g(s) < -\dfrac{\nu}{2}s, \; \forall \; 0 < s < \delta_1; \\ \\ g(s) \leq \dfrac{C_{2\pi}}{\delta_1^4} s^4 e^{2\pi s^2}, \; \forall \; s \geq \delta_1. \end{cases}$$

Das desigualdades acima decorre que

$$g(s) < -\frac{\nu}{2}s + C_1 s^4 e^{2\pi s^2}, \; \forall \; s > 0,$$

onde $C_1 = C_2C_{2\pi}/\delta_1^4$ e $C_2 > 0$ é uma constante tomada de forma que

$$-\frac{\nu}{2}s + C_1 s^4 e^{2\pi s^2} \geq \frac{C_{2\pi}}{\delta_1^4} s^4 e^{2\pi s^2}.$$

Desde que $g(0) = 0$, temos

$$-g(s) \geq \frac{1}{2}\nu s - C_1 s^4 e^{2\pi s^2},\ \forall\ s \geq 0. \tag{2.2}$$

Como g é ímpar, de (2.2) temos

$$-G(s) = \int_0^{|s|} -g(\tau)\ d\tau \geq \frac{\nu}{2}\int_0^{|s|} \tau\ d\tau - C_1 \int_0^{|s|} \tau^4 e^{2\pi\tau^2}\ d\tau,\ \forall\ s \in \mathbb{R}.$$

Da fórmula de integração por partes, a segunda integral da expressão à direta acima fica

$$\begin{aligned}
\int_0^s \tau^4 e^{2\pi\tau^2}\ d\tau &= \int_0^s \tau^3(\tau e^{2\pi\tau^2})\ d\tau \\
&= \tau^3\left(\frac{1}{4\pi}e^{2\pi\tau^2}\right)\Big|_0^s - \int_0^s \frac{3\tau^2}{4\pi}e^{2\pi\tau^2}\ d\tau \\
&= \frac{s^3}{4\pi}e^{2\pi s^2} - \frac{3}{4\pi}\int_0^s \tau^2 e^{2\pi\tau^2}\ d\tau \\
&= \frac{s^3}{4\pi}e^{2\pi s^2} - \frac{3}{4\pi}\int_0^s \tau^2 e^{2\pi\tau^2}\ d\tau + \left(\frac{1}{4\pi}s^3 - \frac{1}{4\pi}s^3\right) \\
&= \frac{s^3}{4\pi}(e^{2\pi s^2} - 1) - \frac{3}{4\pi}\int_0^s \tau^2 e^{2\pi\tau^2}\ d\tau + \frac{3}{4\pi}\int_0^s \tau^2\ d\tau \\
&= \frac{s^3}{4\pi}(e^{2\pi s^2} - 1) - \frac{3}{4\pi}\int_0^s \tau^2(e^{2\pi\tau^2} - 1)\ d\tau \\
&\leq \frac{s^3}{4\pi}(e^{2\pi s^2} - 1),
\end{aligned}$$

para todo $s \geq 0$, pois $\tau^2(e^{2\pi\tau^2} - 1) \geq 0$, para $\tau \geq 0$. Assim,

$$-G(s) \geq \frac{\nu}{2}\int_0^{|s|} \tau\ d\tau - C_1\int_0^{|s|} \tau^4 e^{2\pi\tau^2}\ d\tau \geq \frac{\nu}{4}s^2 - \frac{C_1}{4\pi}|s|^3(e^{2\pi s^2} - 1),\ \forall\ s \in \mathbb{R}.$$

Com isso, para $k_0 = \dfrac{1}{2}\min\left\{1, \dfrac{\nu}{2}\right\}$, temos

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^2} G(u)\ dx \\
&\geq \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 + \frac{\nu}{4}\int_{\mathbb{R}^2} u^2\ dx - \frac{C_1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2} |u|^3(e^{2\pi u^2} - 1)\ dx \\
&\geq k_0||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} - \frac{C_1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2} |u|^3(e^{2\pi u^2} - 1)\ dx.
\end{aligned}$$

Gostaríamos de usar a Desigualdade de Hölder na integral da desigualdade acima. Para tanto, é necessário observar o seguinte,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{2\pi u^2} - 1)^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi u^2} - 2e^{2\pi u^2} + 1) \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi u^2} - 1) \, dx,$$

pois, $2e^{2\pi u^2(x)} - 1 \geq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Da Desigualdade de Moser-Trudinger (ver Teorema $C.15$ no Apêndice C), temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{2\pi u^2} - 1)^2 \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi u^2} - 1) \, dx < \infty.$$

Dessa forma, podemos usar a Desigualdade de Hölder (ver Terorema $C.9$ no Apêndice C) nos expoentes conjugados 2 e 2 para obtermos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^3 (e^{2\pi u^2} - 1) \, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} (|u|^3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^2} (e^{2\pi u^2} - 1)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

lembrando que a primeira integral do lado direito é finita por conta da imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^2)$ (ver Teorema $C.13$ no Apêndice C). Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u|_6 \leq C ||u||_{H^1(\mathbb{R}^2)}, \text{ para todo } u \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Com isso,

$$\begin{aligned} I(u) &\geq k_0 ||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} - \frac{C_1}{4\pi} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (|u|^3)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (e^{2\pi u^2} - 1)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= k_0 ||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} - \frac{C_1}{4\pi} |u|_6^3 \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi u^2} - 2e^{2\pi u^2} + 1) \, dx} \\ &\geq k_0 ||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} - \frac{C_2}{4\pi} ||u||^3_{H^1(\mathbb{R}^2)} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi u^2} - 1) \, dx}, \end{aligned}$$

onde $C_2 = C_1 C^3$. Logo,

$$I(u) \geq k_0 ||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} - \frac{C_2}{4\pi} ||u||^3_{H^1(\mathbb{R}^2)} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi u^2} - 1) \, dx}, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{2.3}$$

Novamente da Desigualdade de Moser-Trudinger, existe uma constante $C_0 > 0$, que não depende de u, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi u^2} - 1) \, dx \leq C_0, \tag{2.4}$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, com $||u||_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq \sqrt{1/2}$, pois $\alpha = 2\pi < 4\pi$ e $||2u||_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq 1$. Logo, da desigualdade (2.4), temos

$$I(u) \geq k_0||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} - \frac{C_0^{1/2}C_2}{4\pi}||u||^3_{H^1(\mathbb{R}^2)},$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, com $||u||_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq \sqrt{1/2}$. Assim, tomando

$$0 < \rho_0 < \min\left\{\frac{k_0 4\pi}{C_0^{1/2}C_2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right\},$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ com $||u||_{H^1(\mathbb{R}^2)} = \rho_0$, de (2.3) e (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &\geq k_0\rho_0^2 - \frac{C_0^{1/2}C_2}{4\pi}\rho_0^3 \\ &= \rho_0^2\left(k_0 - \frac{C_0^{1/2}C_2}{4\pi}\rho_0\right) \\ &> \rho_0^2(k_0 - k_0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, $I(u) \geq \delta_0 > 0$, onde

$$\delta_0 = k_0\rho_0^2 - \frac{C_0^{1/2}C_2}{4\pi}\rho_0^3 > 0.$$

□

Observação 1 . *No próximo lema demonstraremos a segunda geometria do passo da montanha para o funcional I. Antes disso, usaremos o crescimento da função g dado em (2.2), com algumas modificações adequadas, para provarmos duas afirmações necessárias para a demonstração deste lema. Vejamos:*

Afirmação 1: *Para quaisquer que sejam $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $\theta > 0$, tem-se $g(\theta u)u \in L^1(\mathbb{R}^2)$.*

Com efeito, desde que $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ é suficiente provarmos que $g(\theta u) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |g(\theta u)|^2 \, dx < \infty, \tag{2.5}$$

pois, nestas condições, poderemos usar a Desigualdade de Hölder nos expoentes 2 e 2 e obtermos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |g(\theta u)u| \, dx \leq |g(\theta u)|_2 \cdot |u|_2 < \infty.$$

Para provar (2.5) note que com os mesmos argumentos usados para obter (2.2), para $\epsilon = \nu/2$ e $\alpha = \pi/\theta^2$, podemos encontrar $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|g(s)| \leq C_1|s| + C_2 s^2 e^{\alpha s^2}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Em particular,

$$|g(\theta u)|^2 \leq 4\theta^2 C_1 |u|^2 + 4\theta^4 C_2 |u|^4 e^{2\pi u^2},\ u \in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{2.6}$$

Desde que $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, temos que $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Assim, a primeira parcela do lado direito da equação (2.6) é integrável. Por outro lado, usando a Desigualdade de Moser-Trudinger, mostramos no Lemma 2.1 que $|u|^4 e^{2\pi u^2} \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Logo, a segunda parcela do lado direito da equação (2.6) também é integrável. Isto prova que $g(\theta u) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e, portanto, $g(\theta u)u \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Afirmação 2*: Seja $\omega \in H^1(\mathbb{R}^2)$ uma solução de energia mínima do problema (1). Então, existe $\theta_1 > 1$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(\theta\omega)\omega\, dx > 0,\ \forall\, \theta \in [1, \theta_1].$$

Com efeito, considere $h : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(\theta) = \int_{\mathbb{R}^2} g(\theta\omega)\omega\, dx.$$

Pela Afirmação 1 acima, h está bem definida. Além disso, h é contínua e como ω é uma solução de energia mínima do problema (1), então

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(\omega)\omega\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla\omega \cdot \nabla\omega)\, dx = |\nabla\omega|_2^2 > 0,$$

isto é, $h(1) > 0$. Do Teorema da Conservação do Sinal, existe $\theta_0 > 0$ tal que

$$h(\theta) > 0,\ \forall\, \theta \in [1, 1 + \theta_0).$$

Fazendo $\theta_1 = \dfrac{1 + \theta_0}{2}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(\theta\omega)\omega\, dx = h(\theta) > 0,\ \forall\, \theta \in [1, \theta_1].$$

Agora demonstraremos que o funcional I satisfaz a segunda geometria do passo da montanha (ver Teorema C.16 no Apêndice C).

Lema 2.2 *Suponha que g satisfaça $(g_0)-(g_3)$. Seja ω solução de energia mínima qualquer do problema (1), então existe um caminho $\gamma_\omega : [0,1] \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo*

$$\omega \in \gamma_\omega([0,1]) \tag{2.7}$$

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma_\omega(t)) = m. \tag{2.8}$$

Além disso,

$$\gamma_\omega(0) = 0 \text{ e } I(\gamma_\omega(1)) < 0.$$

Prova: Como ω é uma solução de energia mínima do problema (1), pela *Afirmação 2* acima, podemos encontrar $\theta_1 > 1$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(\theta\omega)\omega \, dx > 0, \quad \forall\, \theta \in [1,\theta_1]. \tag{2.9}$$

Considere $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(s) = \begin{cases} \dfrac{g(s)}{s}, \ s \neq 0; \\ -\nu, \ s = 0. \end{cases}$$

Note que das hipóteses (g_0) e (g_1) sobre a função g, tem-se $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Além disso, para $\omega(x) \neq 0$, de (2.9)

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\theta\omega)\omega^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{g(\theta\omega)}{\theta\omega}\omega^2 \, dx = \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^2} g(\theta\omega)\omega \, dx > 0, \quad \forall\, \theta \in [1,\theta_1].$$

Lembremos que o funcional I é de classe C^1 (veja Proposição $A.1$ no Apêndice A). Agora, façamos $\omega_t = \omega(x/t)$, pela regra de Leibniz (ver Teorema $C.4$ no Apêndice C) e pela Regra da Cadeia (ver Teorema $C.14$ no Apêndice C), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} I(\theta\omega_t) &= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla(\theta\omega_t)\cdot\nabla\omega_t) \, dx - \int_{\mathbb{R}^2} g(\theta\omega_t)\omega_t \, dx \\ &= \theta|\nabla\omega_t|_2^2 - \theta\int_{\mathbb{R}^2} \frac{g(\theta\omega_t)}{\theta\omega_t}\omega_t^2 \, dx \\ &= \theta\left(|\nabla\omega_t|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\theta\omega_t)\omega_t^2 \, dx\right). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Mudança de Variável (ver Teorema $C.3$ no Apêndice C), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} I(\theta\omega_t) &= \theta\left(t^{2-2}|\nabla\omega|_2^2 - t^2\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\theta\omega)\omega^2 \, dx\right) \\ &= \theta\left(|\nabla\omega|_2^2 - t^2\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\theta\omega)\omega^2 \, dx\right). \end{aligned}$$

De (2.9) podemos obter $t_0 \in (0,1)$ suficientemente pequeno tal que

$$|\nabla\omega|_2^2 - t_0^2 \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\theta\omega)\omega^2 \, dx > 0, \quad \forall\, \theta \in [1, \theta_1].$$

Analogamente, podemos obter $t_1 > 1$ tal que

$$\theta \left(|\nabla\omega|_2^2 - t_1^2 \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\theta\omega)\omega^2 \, dx \right) \leq -\frac{1}{\theta_1 - 1}|\nabla\omega|_2^2, \quad \forall\, \theta \in [1, \theta_1].$$

Assim, o caminho $\gamma : [0, \theta_1] \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$, dado por

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} \theta\omega_{t_0}, \ \theta \in [0, t_0]; \\ \theta\omega_\theta, \ \theta \in [t_0, t_1]; \\ \theta\omega_{t_1}, \ \theta \in [t_1, \theta_1]. \end{cases}$$

é tal que $\gamma \in C^1([1, \theta_1], H^1(\mathbb{R}^N))$, $\omega \in \gamma([0,1])$ e $\gamma(0) = 0$. Note ainda que

$$\begin{cases} \theta \in (0,1) & \Rightarrow & \dfrac{d}{d\theta}[I(\gamma(\theta))] > 0, \\ \theta > 1 & \Rightarrow & \dfrac{d}{d\theta}[I(\gamma(\theta))] < 0, \\ \theta = 1 & \Rightarrow & \dfrac{d}{d\theta}[I(\gamma(\theta))] = 0, \end{cases}$$

isto é, $I(\gamma(\theta))$ atinge um máximo no ponto $\theta = 1$ no intervalo $[0, \theta_1]$. Assim,

$$\max_{\theta \in [0, \theta_1]} I(\gamma(\theta)) = I(\gamma(1)) = I(\omega) = m.$$

Por outro lado, da Identidade de Pohozaev (ver Proposição $B.1$ no Apêndice B), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\omega) \, dx = \frac{2-2}{4} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega|^2 \, dx = 0.$$

Dessa forma, $I(\gamma(\theta_1)) < 0$, pois

$$I(\theta_1\omega_{t_1}) = I(\omega_{t_1}) + \int_1^{\theta_1} \frac{d}{d\theta} I(\theta\omega_{t_1}) \, d\theta \leq \frac{t_1^{2-2}}{2}|\nabla\omega|_2^2 - \int_1^{\theta_1} \frac{1}{\theta_1 - 1}|\nabla\omega|_2^2 \, d\theta = -\frac{1}{2}|\nabla\omega|_2^2 < 0.$$

Definindo o caminho $\gamma_\omega : [0,1] \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ por $\gamma_\omega(t) = \gamma(\theta_1 t)$, temos $\gamma_\omega \in \Gamma$, $\omega \in \gamma_\omega([0,1])$, $I(\gamma_\omega(1)) = I(\gamma(\theta_1)) < 0$ e, além disso,

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma_\omega(t)) = \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(\theta_1 t)) = \max_{\theta \in [0, \theta_1]} I(\gamma(\theta)) = m.$$

$\square$

Corolário 2.1 *Para b e m definidos anteriormente, temos $b \leq m$.*

Prova: Com efeito, no Lema 2.2 encontramos um caminho $\gamma_\omega \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma_\omega(t)) = m.$$

Logo,

$$b = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_\omega(t)) = m.$$

□

Agora mostraremos que m é o ínfimo do funcional I restrito à variedade de Pohozaev K.

Lema 2.3 *Seja $N = 2$ e K o conjunto*

$$K = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \, dx = 0 \right\}.$$

Para m definido anteriormente, temos

$$m = \inf_{u\in K} I(u).$$

Prova: Neste caso, observe que

$$K = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\} : \int_{\mathbb{R}^2} G(u) \, dx = 0 \right\},$$

pois, para $N = 2$, temos

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 - N \int_{\mathbb{R}^2} G(u) \, dx = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} G(u) \, dx = 0.$$

Além disso, para $u \in K$,

$$I(u) = \frac{1}{2} |\nabla u|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^2} G(u) \, dx = \frac{1}{2} |\nabla u|_2^2.$$

No artigo [3], os autores mostram que o ínfimo do funcional I restrito ao conjunto K é atingido em alguma $\omega_0 \in K$, solução de energia mínima do problema (1), isto é,

$$m = I(\omega_0) = \inf_{u\in K} \frac{1}{2} |\nabla u|_2^2 = \inf_{u\in K} I(u).$$

□

Como no capítulo anterior, para provar a desigualdade contrária a do Corolário 2.1, neste ponto, é suficiente mostrar que $\gamma([0,1]) \cap K \neq \emptyset$. Antes de demonstrarmos isto vejamos dois lemas que nos auxiliarão na demonstração.

Observação 2 . *Como mencionamos nas notações, uma função* $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *pertence ao conjunto* $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ *se* $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e tem suporte compacto. A função* $\eta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\eta(x) = \begin{cases} \widetilde{C} e^{\frac{-1}{|x|^2-1}}, \ se \ \ |x| < 1 \\ 0, \ se \ \ |x| \geq 1 \end{cases}, \ onde \ \ \widetilde{C} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-1}{|x|^2-1}} \, dx \right)^{-1},$$

é tal que $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\eta(x) \geq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^2$, *e* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \eta(x) \, dx = 1$. *Utilizaremos funções desse tipo no próximo lema.*

Lema 2.4 *Considere* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ *tal que*

$$\phi(x) \geq 0, \ \forall \, x \in \mathbb{R}^2,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x) \, dx = 1.$$

Para cada $\gamma \in \Gamma$ *e* $\epsilon > 0$, *seja* $\gamma_\epsilon : [0,1] \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^2)$ *definida por*

$$\gamma_\epsilon(t)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \gamma(t)(y) \, dy.$$

Então:

(i) $\forall \, \epsilon > 0, \ \forall \, t \in [0,1], \ \gamma_\epsilon(t) \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(ii) $\gamma_\epsilon : [0,1] \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^2)$ *é contínua.*

(iii) $\max\limits_{t\in[0,1]} ||\gamma_\epsilon(t) - \gamma(t)||_{H^1(\mathbb{R}^2)} \to 0, \ \epsilon \to 0$.

Prova: Denotaremos por Y o suporte da função ϕ. Primeiramente, vamos mostrar que γ_ϵ está bem definida, em outras palavras, que $|\gamma_\epsilon(t)(x)| < \infty$ e $\gamma_\epsilon(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Para tanto, seja $t \in [0,1]$ e $x \in \mathbb{R}^2$. Pelo Teorema de Mundança de Variável (ver Teorema C.3 no Apêndice C), fazendo $z = (x-y)/\epsilon$ temos

$$\begin{aligned} |\gamma_\epsilon(t)(x)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^2} \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \gamma(t)(y) \, dy \Big| \\ &\leq \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\phi(z)||\gamma(t)(x-\epsilon z)| \, dz \\ &= \epsilon^2 \int_Y |\phi(z)||\gamma(t)(x-\epsilon z)| \, dz \\ &\leq \epsilon^2 \left(\sup_{x\in Y} |\phi(x)| \right) \int_Y |\gamma(t)(x-\epsilon z)| \, dz < \infty, \end{aligned}$$

pois $\gamma(t) \in H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Por outro lado, para cada $\epsilon > 0$ e cada $t \in [0,1]$, pelo Teorema de Mundança de Variável e pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
|\gamma_\epsilon(t)(x)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^2} \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \gamma(t)(y)\, dy \Big| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \phi^2 \left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\gamma(t)(y)|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \epsilon \left(\int_{\mathbb{R}^2} \phi^2(z)\, dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\gamma(t)(y)|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \epsilon |\phi|_2 |\gamma(t)|_2,
\end{aligned}$$

para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^N$. Logo, $|\gamma_\epsilon(t)|_\infty < \infty$. Agora vamos demonstrar as três propriedades acima:

(i) Sejam $t \in [0,1]$ e $\epsilon > 0$ quaisquer. Acabamos de mostrar que $\gamma_\epsilon(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Por outro lado, pelo Teorema $C.12$ no Apêndice C, também temos $\gamma_\epsilon(t) \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Logo,

$$\gamma_\epsilon(t) \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2).$$

(ii) Considere $t_0 \in [0,1]$ e seja (t_n) uma sequência tal que $0 \leq t_n \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $t_n \to t_0$. Assim,

$$\begin{aligned}
|\gamma_\epsilon(t_n)(x) - \gamma_\epsilon(t_0)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) |\gamma(t_n)(y) - \gamma(t_0)(y)|\, dy \\
&= \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^2} \phi(z) |\gamma(t_n)(x - \epsilon z) - \gamma(t_0)(x - \epsilon z)|\, dz \\
&= \epsilon^2 \int_{Y} \phi(z) |\gamma(t_n)(x - \epsilon z) - \gamma(t_0)(x - \epsilon z)|\, dz.
\end{aligned}$$

Desde que $\gamma \in \Gamma$ tem-se $\gamma(t_n) \to \gamma(t_0)$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Da Desigualdade de Hölder, temos

$$|\gamma_\epsilon(t_n)(x) - \gamma_\epsilon(t_0)(x)| \leq \epsilon^2 |\phi|_2 |\gamma(t_n) - \gamma(t_0)|_2$$

para todo $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, em $\mathbb{R}^2$. Logo,

$$|\gamma_\epsilon(t_n)(x) - \gamma_\epsilon(t_0)(x)| \to 0,\ n \to \infty,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$, mostrando que

$$\gamma_\epsilon(t_n) \to \gamma_\epsilon(t_0) \;\; em \;\; L^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Portanto,

$$\gamma_\epsilon : [0,1] \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^2)$$

é contínua.

(iii) Do Teorema C.12 do Apêndice C, temos

$$\nabla\gamma_\epsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \nabla\gamma(t)(y)\, dy. \tag{2.10}$$

Como $\gamma(t) \in H^1(\mathbb{R}^2)$, para todo $t \in [0,1]$, e

$$||\gamma_\epsilon(t) - \gamma(t)||^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} = |\gamma_\epsilon(t) - \gamma(t)|_2^2 + |\nabla\gamma_\epsilon(t) - \nabla\gamma(t)|_2^2,$$

utilizando a igualdade (2.10) os mesmos argumentos do item (ii), obtemos

$$\max_{t\in[0,1]} ||\gamma_\epsilon(t) - \gamma(t)||_{H^1(\mathbb{R}^2)} \to 0,\ \epsilon \to 0.$$

$\square$

Lema 2.5 *Existe $\rho_0 > 0$ tal que, para $u \in\ H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$,*

$$0 < |u|_\infty \leq \rho_0 \Rightarrow \kappa(u) > 0.$$

Prova: Da hipótese (g_1) sobre g, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |s| < \delta \Rightarrow \left|\frac{g(s)}{s} + \nu\right| < \epsilon.$$

Tomando $\epsilon_1 > 0$ de modo que $\epsilon_1 - \nu < 0$, existe $\rho_0 > 0$ tal que

$$0 < |s| \leq \rho_0 \Rightarrow \left|\frac{g(s)}{s} + \nu\right| < \epsilon_1.$$

Suponha $0 < |s| \leq \rho_0$. Para $s > 0$,

$$g(s) < (\epsilon_1 - \nu)s < 0$$

$$\Rightarrow -G(s) = \int_0^s (-g(\tau))\, d\tau > 0.$$

Para $s < 0$,

$$-G(s) = \int_0^s g(-\tau)\, d\tau = -\int_0^{-s} g(\tau)\, d\tau > 0.$$

Assim, obtemos um $\rho_0 > 0$ tal que

$$0 < |s| \leq \rho_0 \Rightarrow -G(s) > 0.$$

Para $u \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ com $0 < |u|_\infty \leq \rho_0$, temos

$$0 < |u(x)| \leq |u|_\infty \leq \rho_0, \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2.$$

Portanto,

$$\kappa(u) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} G(u)\, dx > 0.$$

□

Lema 2.6 *Para qualquer que seja $\gamma \in \Gamma$, temos*

$$\gamma([0,1]) \cap K \neq \phi.$$

Prova: Seja $\gamma \in \Gamma$, lembremos que

$$\kappa(u) = NI(u) - |\nabla u|_2^2 = 2I(u) - |\nabla u|_2^2.$$

Da convergência em (iii) no Lema 2.4, podemos obter $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$\kappa(\gamma_\epsilon(1)) \leq 2I(\gamma_\epsilon(1)) < 0.$$

De fato, suponha que para todo $\epsilon > 0$ tenhamos $I(\gamma_\epsilon(1)) \geq 0$. Da continuidade do funcional I (ver Proposição A.1 no Apêndice A) e da convergência (iii) temos $I(\gamma(1)) \geq 0$, o que contradiz a definição de Γ. Por outro lado, para todo $\epsilon > 0$, $\gamma_\epsilon(0) = 0$, pois $\gamma \in \Gamma$ implica $\gamma(0) = 0$. Agora, observe que, para t suficientemente pequeno, $\gamma_\epsilon(t)$ se aproxima de $\gamma_\epsilon(0)$, assim,

$$|\gamma_\epsilon(t)|_\infty < \rho_0 \;\Rightarrow\; \kappa(\gamma_\epsilon(t)) > 0.$$

Com isso, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $t_\epsilon \in [0,1]$, pequeno, tal que

$$\kappa(\gamma_\epsilon(t_\epsilon)) = 0 \;\; e \;\; |\gamma_\epsilon(t_\epsilon)|_\infty > \rho_0,$$

onde ρ_0 é obtido no Lema 2.5. Logo, $\gamma_\epsilon(t_\epsilon) \in K$, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Tomemos uma sequência (ϵ_n), $\epsilon_n > 0$, com $\epsilon_n \to 0$, $n \to \infty$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe

$t_{\epsilon_n} \in [0,1]$ tal que $\kappa(\gamma_{\epsilon_n}(t_{\epsilon_n})) = 0$. Como $t_{\epsilon_n} \in [0,1]$, a menos de subsequência, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $t_{\epsilon_n} \to t_0,\ n \to \infty$. Note que

$$||\gamma_{\epsilon_n}(t_{\epsilon_n}) - \gamma(t_0)||_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq ||\gamma_{\epsilon_n}(t_{\epsilon_n}) - \gamma(t_{\epsilon_n})||_{H^1(\mathbb{R}^2)} + ||\gamma(t_{\epsilon_n}) - \gamma(t_0)||_{H^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Da convergência (iii) e da continuidade do funcional I, temos

$$||\gamma_{\epsilon_n}(t_{\epsilon_n}) - \gamma(t_0)||_{H^1(\mathbb{R}^2)} \to 0,\ n \to \infty,$$

$$e\ \ \kappa(\gamma(t_0)) = 0.$$

Por fim, mostraremos que $\gamma(t_0) \neq 0$ e, assim, $\gamma(t_0) \in K$ e, portanto, $\gamma(t_0) \in K \cap \gamma([0,1])$. Para isto, lembremos que em [3] os autores mostram que

$$\inf_{u \in K} |\nabla u|_2^2 = 2m > 0.$$

Assim,

$$||u||_{H^1(\mathbb{R}^2)} = \sqrt{|\nabla u|_2^2 + |u|_2^2} \geq \sqrt{2m} > 0,\ \forall\, u \in K.$$

Logo,

$$||\gamma_{\epsilon_n}(t_{\epsilon_n})||_{H^1(\mathbb{R}^2)} \geq \sqrt{2m} > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

mostrando que $\gamma(t_0) \neq 0$ e finalizando a demonstração do lema.

□

Corolário 2.2 *Para b e m definidos anteriormente temos $b \geq m$.*

Prova: Do Lema 2.3,

$$m = \inf_{u \in K} I(u).$$

Além disso, Lema 2.6, para todo $\gamma \in \Gamma$, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\gamma(t_0) \in \gamma([0,1]) \cap K$. Assim,

$$m = \inf_{u \in K} I(u) \leq I(\gamma(t_0)) \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),\ \forall\, \gamma \in \Gamma.$$

Portanto,

$$b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq m.$$

□

Por fim, demostraremos o Teorema 0.1 para $N = 2$.

Teorema 2.1 *Suponha* $N = 2$ *e que* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfaça* $(g_0) - (g_3)$. *Sejam* I, m *e* b *como definidos anteriormente. Então*

$$b = m,$$

isto é, o valor do passo da montanha nos dá o nível de energia mínima. Além disso, para cada solução de energia mínima ω, *existe um caminho* $\gamma_\omega \in \Gamma$ *tal que* $\omega \in \gamma_\omega([0,1])$ *e*

$$I(\omega) = \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_\omega(t)).$$

Prova: Do Corolário 2.1, $m \geq b$ e do Corolário 2.2, $m \leq b$. Assim, $b = m$. Ainda do Corolário 2.1, dada uma solução de energia mínima ω do problema (1), existe um caminho $\gamma_\omega \in \Gamma$ satisfazendo $\omega \in \gamma_\omega([0,1])$ e

$$I(\omega) = m = \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_\omega(t)),$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Apêndice A

Regularidade do Funcional

Neste apêndice, demonstraremos a regularidade do funcional I associado ao problema (1). Novamente, pelas hipóteses sobre a função g, será necessário dividirmos a demonstração nos casos $N = 2$ e $N \geq 3$. Antes disso, faremos uma breve revisão sobre diferenciabilidade de funcionais em Espaços de Banach.

Definição 1 . *Seja X um espaço de Banach. Dado um funcional $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dizemos que I possui Derivada de Gâteaux no ponto $u \in X$ quando existe um funcional $T_0 \in X'$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u + tv) - I(u) - T_0 v}{t} = 0, \ \forall\, v \in X.$$

Definição 2 . *Seja X um espaço de Banach. Dado um funcional $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dizemos que I possui Derivada de Fréchet no ponto $u \in X$ quando existe um funcional $T \in X'$ tal que*

$$\lim_{v \to 0} \frac{I(u + v) - I(u) - Tv}{||v||_X} = 0.$$

Observação 3 *: Note que pela unicidade do limite a Derivada de Fréchet no ponto $u \in X$, bem como a Derivada de Gâteaux no ponto $u \in X$, quando existe, é única. Denotaremos por $DI(u)$ a Derivada de Gâteaux no ponto $u \in X$ e por $I'(u)$ a Derivada de Fréchet no ponto $u \in X$. Como vemos facilmente, se existe a Derivada de Fréchet $I'(u)$ em $u \in X$, então também existe a Derivada de Gâteaux $DI(u)$ em $u \in X$, além disso, $I'(u) = DI(u)$. Porém, a recíproca deste fato não é verdadeira em geral. No lema seguinte mostraremos que, sob certas condições, a Derivada de Fréchet coincide com a Derivada de Gâteaux. Antes do lema, veremos a definição de funcionais de classe C^1.*

Definição 3 . *Seja X um espaço de Banach e $A \subset X$ um aberto em X. Dizemos que o funcional I é de classe C^1 em A e denotamos $I \in C^1(X;\mathbb{R})$, quando sua derivada de Fréchet existe em todo ponto $u \in A$ e a aplicação $I' : A \to X'$ é contínua.*

Da Observação 3 acima, nem todo funcional que possui Derivada de Gâteaux possui necessariamente Derivada de Fréchet. Porém, vale o seguinte resultado (este resltado será usado para obtermos a derivada de Fréchet do funcional I associado ao nosso problema):

Lema A.1 *Seja $I : A \to \mathbb{R}$, onde A é um aberto no espaço de Banach X. Se I possui Derivada de Gâteaux para todo $u \in A$ e se, além disso, $DI : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em A, então $I \in C^1(A;\mathbb{R})$.*

Prova: Dado $u \in A$, desde que A é aberto, existe $v \in A$ tal que $u+tv \in A$, para todo $t \in (0,1)$. Consideremos a função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(t) = I(u+tv)$. Como I tem Derivada de Gâteaux em todo ponto de A, então f é derivável em $[0,1]$ e $f'(t) = DI(u+tv)(v)$. Pelo Teorema do Valor Médio (ver Teorema $C.2$ no Apêndice C), existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $f(1)-f(0) = f'(t_0)$, isto é,

$$I(u+v) - I(u) = DI(u+t_0v)(v). \tag{A.1}$$

Como DI é contínuo, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $||v||_X < \delta$ implica

$$||DI(u+t_0v) - DI(u)||_{X'} < \epsilon. \tag{A.2}$$

De $(A.1)$ e $(A.2)$, $||v||_X < \delta$ implica

$$\begin{aligned} |I(u+v) - I(u) - DI(u)(v)| &= |DI(u+t_0)(v) - DI(u)(v)| \\ &\leq ||DI(u+t_0v) - DI(u)||_{X'}||v||_X \\ &< \epsilon||v||_X, \end{aligned}$$

ou seja,

$$DI(u)(v) = \lim_{v\to 0} \frac{I(u+v) - I(u)}{||v||_X},$$

mostrando que para todo $u \in A$ a Derivada de Fréchet existe e $I'(u) = DI(u)$. Em particular, o operador $I' : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínuo.

$\square$

Mostraremos agora que o funcional $I : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx,\ \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

está bem definido, é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N);\mathbb{R})$ e sua Derivada de Fréchet é dada por

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(u)v\, dx,\ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Para tanto, vamos considerar $I = I_1 - I_2$, em que

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx \quad \text{e} \quad I_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx.$$

Em seguida mostraremos que I_1 e I_2 estão bem definidos e são de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N);\mathbb{R}))$, com

$$I_1'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v\, dx \quad \text{e} \quad I_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)v\, dx,\ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Notemos que I_1 está sempre bem definido para qualquer que seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, desde que I_1 não depende da função g, as demonstrações para os casos $N = 2$ e $N \geq 3$ são idênticas. Para o funcional I_2 é preciso considerar estes dois casos. Dividiremos a demonstração desta regularidade em três lemas.

Observação 4 . *Nos dois capítulos anteriores usamos as hipóteses sobre a função g para demonstrar os seguintes crescimentos:*

Para $N \geq 3$

$$|g(s)| \leq (\nu - \epsilon)|s| + C_\epsilon |s|^{\frac{N+2}{N-2}},\ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Note que o crescimento demonstrado no Lema 1.1 *é um caso particular do crecimento acima, mas a demonstração deste segundo crecimento é feita exatamente como no Lema* 1.1*.*

Para $N = 2$

$$|g(s)| \leq C_1|s| + C_2 s^2 e^{\alpha s^2},\ \forall\, \alpha \geq 0, s \in \mathbb{R}.$$

Este crecimento foi demonstrado na Observação 1 *do Capítulo 2.*

Observação 5 . *No artigo Berestycki-Lions [4] os autores monstram, para o caso $N \geq 3$, que o funcional I é de classe C^1. Nos lemas seguintes mostraremos esta propriedade também para o caso $N = 2$. Nossas ideias serão baseadas no Capítulo 1 do livro [1].*

Lema A.2 *Seja $N \geq 2$. O funcional $I_1 : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx, \ \forall \, u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

é de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$, com

$$I_1'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v \, dx, \ \forall \, u, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Prova: Observe inicialmente que, para $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $t \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{I_1(u+tv) - I_1(u)}{t} &= \frac{1}{2t}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u+tv)|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx\right) \\ &= \frac{1}{2t}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u+tv)\nabla(u+tv) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx\right) \\ &= \frac{1}{2t}\left(2t\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v \, dx + t^2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dx\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$DI_1(u)v = \lim_{t \to 0} \frac{I_1(u+tv) - I_1(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v \, dx.$$

Logo, I_1 possui Derivada de Gâteaux para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Pelo Lema $A.1$, é suficiente mostrarmos que DI_1 é contínuo em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Para tanto, dado $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, seja (u_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u_0$, em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Para $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $||v||_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq 1$,

$$|DI_1(u_n)v - DI_1(u_0)v| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u_0)\nabla v \, dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u_0)||\nabla v| \, dx.$$

Da Desigualdade de Hölder, para os expoentes 2 e 2, temos

$$|DI_1(u_n)v - DI_1(u_0)v| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u_0)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq ||u_n - u_0||_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Portanto,

$$||DI_1(u_n) - DI_1(u_0)||_{(H^1(\mathbb{R}^N))'} = \sup_{||v||_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq 1} |DI_1(u_n)v - DI_1(u_0)v| \leq ||u_n - u_0||_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

mostrando que DI_1 é contínuo e, com isso, $I_1 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N); \mathbb{R})$. Além disso,

$$I_1'(u)v = DI_1(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v \, dx, \ \forall \, u, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

$\square$

Lema A.3 *Seja $N \geq 3$. O funcional $I_2 : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$I_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx,\ \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

é de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$, com

$$I_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)v\, dx,\ \forall\, u, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Prova: Primeiramente, mostraremos que o funcional I_2 está bem definido. Para tanto, note que da Observação 4 temos

$$|G(u)| \leq \left(\frac{\nu - \epsilon}{2}\right) |u|^2 - \left(\frac{(N-2)C_\epsilon}{2N}\right) |u|^{\frac{2N}{N-2}},\ \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Das imersões contínuas de Sobolev, temos $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}$. Assim, $G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, para qualquer que seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, I_2 está bem definido. Para calcular a derivada de Gâteaux $DI_2(u)$, com $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, consideremos uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = G(u + stv),\ t \in (-1,1),\ v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Temos $f(0) = G(u)$, $f(1) = G(u + tv)$ e, desde que g é contínua, $f'(s) = g(u + stv)tv$. Assim, do Teorema do Valor Médio (ver Teorema $C.2$ no Apêndice C), existe um $s_0 \in (0,1)$ tal que

$$g(u + s_0tv)tv = f'(s_0) = f(0) - f(1) = G(u + tv) - G(u),$$

ou seja,

$$\frac{G(u + tv) - G(u)}{t} = g(u + s_0tv)v,\ t \neq 0.$$

Observe que $g(u + s_0tv)v \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, da Observação 4, temos

$$\begin{aligned} |g(u + s_0tv)||v| &\leq (\nu - \epsilon)|u + s_0tv||v| + C_\epsilon |u + s_0tv|^{\frac{N+2}{N-2}} |v| \\ &\leq (\nu - \epsilon)|u||v| + (\nu - \epsilon)|s_0t||v|^2 + 2^{\frac{N+2}{N-2}} C_\epsilon |u|^{\frac{N+2}{N-2}} |v| + 2^{\frac{N+2}{N-2}} |s_0t|^{\frac{N+2}{N-2}} |v|^{\frac{2N}{N-2}}. \end{aligned}$$

É imediato que $|uv|, |v|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, para quaisquer que sejam $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Por outro lado, usando a Desigualdade de Hölder nos expoentes $\dfrac{2N}{N+2}$ e $\dfrac{2N}{N-2}$, e a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}$, obtemos $g(u + s_0tv)v \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{N+2}{N-2}} |v|\, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{2N}{N-2}}\, dx\right)^{\frac{N+2}{2N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\frac{2N}{N-2}}\, dx\right)^{\frac{N-2}{2N}} < \infty.$$

Além disso, para uma sequência (t_n), com $t_n \to 0$, temos que

$$g(u(x) + s_0 t_n v(x))v(x) \to g(u(x))v(x), \text{ pontualmente em } \mathbb{R}^N,$$

pois a função g é contínua. Nessas condições, podemos usar o Teorema do Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema C.10 no Apêndice C) para obter

$$\begin{aligned} DI_2(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{I_2(u+tv) - I(u)}{t} &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{G(u+tv) - G(u)}{t} \right) dx \\ &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} g(u + s_0 tv)v \; dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(u + s_0 t_n v)v \; dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} g(u)v \; dx. \end{aligned}$$

Mostraremos agora que o operador DI_2 é contínuo. Para tanto, seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e (u_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Das imersões contínuas de Sobolev (ver Teorema $C.13$ no Apêndice C), temos

$$u_n \to u_0 \text{ em } L^q(\mathbb{R}^N), \; 2 \leq q \leq \frac{2N}{N-2}.$$

Do Teorema de Vainberg (ver Teorema $C.11$ no Apêndice C), existe uma função $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n(x) \to u_0(x), \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N;$$

$$|u_n(x)| \leq h(x), \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

Desde que g é contínua,

$$[g(u_n(x)) - g(u_0(x))]^{p/(p-1)} \to 0, \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, da Observação 4, temos

$$[g(u_n(x)) - g(u_0(x))]^{p/(p-1)} \leq 2 \left[(\nu - \epsilon)h(x) + C_\epsilon h(x)^{\frac{N+2}{N-2}} \right]^{p/(p-1)} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$|g(u_n) - g(u_0)|_{p/(p-1)} \to 0.$$

Desde que p e $p/(p-1)$ são expoentes conjugados, para $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $||v||_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq 1$, obtemos

$$|[DI_2(u_n) - DI_2(u_0)]v| = \int_{\mathbb{R}^N} [g(u_n) - g(u_0)]v\, dx \leq |g(u_n) - g(u_0)|_{p/(p-1)}|v|_p.$$

Das imersões contínuas de Sobolev, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|[DI_2(u_n) - DI_2(u_0)]v| \leq C|g(u_n) - g(u_0)|_{p/(p-1)}||v||_{H^1(\mathbb{R}^N)} = C|g(u_n) - g(u_0)|_{p/(p-1)},$$

mostrando que DI_2 é contínuo em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $I_2 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N); \mathbb{R})$, com

$$I'(u)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)v\, dx,\ \forall\, u, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

$\square$

Lema A.4 *Seja $N = 2$. O funcional $I_2 : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$I_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx,\ \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

é de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$, com

$$I_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)v\, dx,\ \forall\, u, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Prova: Da mesma forma que no Lema $A.3$, o crecimento

$$|g(s)| \leq C_1|s| + C_2 s^2 e^{\alpha s^2},\ \forall\, \alpha \geq 0, s \in \mathbb{R},$$

da Observação 4, implica que I_2 está bem definido. Para calcular a derivada de Gâteaux $DI_2(u)$, com $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, consideremos uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = G(u + stv),\ t \in (-1, 1),\ v \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Temos $f(0) = G(u)$, $f(1) = G(u + tv)$ e, desde que g é contínua, $f'(s) = g(u + stv)tv$. Assim, do Teorema do Valor Médio (ver Teorema $C.2$ no Apêndice C), existe um $s_0 \in (0, 1)$ tal que

$$g(u + s_0tv)tv = f'(s_0) = f(0) - f(1) = G(u + tv) - G(u),$$

ou seja,

$$\frac{G(u + tv) - G(u)}{t} = g(u + s_0tv)v,\ t \neq 0.$$

Observe que $g(u+s_0tv)v \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Novamente da Observação 4, temos $g(u+s_0tv)v \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Além disso, para uma sequência (t_n), com $t_n \to 0$, temos que

$$g(u(x)+s_0t_nv(x))v(x) \to g(u(x))v(x), \text{ pontualmente em } \mathbb{R}^2.$$

Do Teorema do Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\begin{aligned} DI_2(u)v = \lim_{t\to 0}\frac{I_2(u+tv)-I(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{G(u+tv)-G(u)}{t}\right)\,dx \\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^2} g(u+s_0tv)v\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} g(u+s_0t_nv)v\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(u)v\,dx. \end{aligned}$$

Para mostrar que DI_2 é contínuo, usaremos os mesmos passos do Lema $A.3$. Para tanto, seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e (u_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $u_n \to u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Das imersões contínuas de Sobolev (ver Teorema $C.13$ no Apêndice C), temos

$$u_n \to u_0 \text{ em } L^q(\mathbb{R}^2),\ 2 \le q < \infty.$$

Do Teorema de Vainberg (ver Teorema $C.11$ no Apêndice C), existe uma função $h \in L^q(\mathbb{R}^2)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n(x) \to u_0(x), \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2;$$

$$|u_n(x)| \le h(x), \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2.$$

Desde que g é contínua,

$$[g(u_n(x)) - g(u_0(x))]^{p/(p-1)} \to 0, \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2.$$

Além disso, da Observação 4, temos

$$[g(u_n(x)) - g(u_0(x))]^{p/(p-1)} \le 2\left[C_1h(x) + C_2h(x)^2e^{\alpha h(x)^2}\right]^{p/(p-1)},\ \forall\, \alpha \ge 0.$$

Com os mesmos argumentos usados no Capítulo 2, obtemos

$$[g(u_n(x)) - g(u_0(x))]^{p/(p-1)} \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$|g(u_n) - g(u_0)|_{p/(p-1)} \to 0.$$

Desde que p e $p/(p-1)$ são expoentes conjugados, para $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$, com $||v||_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq 1$, obtemos

$$|[DI_2(u_n) - DI_2(u_0)]v| = \int_{\mathbb{R}^2} [g(u_n) - g(u_0)]v \, dx \leq |g(u_n) - g(u_0)|_{p/(p-1)}|v|_p.$$

Das imersões contínuas de Sobolev, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|[DI_2(u_n) - DI_2(u_0)]v| \leq C|g(u_n) - g(u_0)|_{p/(p-1)}||v||_{H^1(\mathbb{R}^2)} = C|g(u_n) - g(u_0)|_{p/(p-1)},$$

mostrando que DI_2 é contínuo em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Portanto, $I_2 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^2); \mathbb{R})$, com

$$I'(u)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)v \, dx, \; \forall \, u, v \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

□

Proposição A.1 . *Seja* $N \geq 2$ *O funcional* $I : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$*, definido por*

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \, dx, \; \forall \, u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

está bem definido, é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N); \mathbb{R})$ *e sua Derivada de Fréchet é dada por*

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(u)v \, dx, \; \forall \, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Prova: Decorre dos lemas $A.2$, $A.3$ e $A.4$ acima.

□

Apêndice B

Identidade de Pohozaev

Neste apêndice, enunciaremos e demonstraremos a Identidade de Pohozaev para o $\mathbb{R}^N$. Uma versão mais geral desta identidade pode ser encontrada no livro [1] e também no artigo [13], sendo este último de Pohozaev.

Observação 6 . *(i) Para facilitar as contas abaixo, neste apêndice utilizaremos a seguinte notação para a derivada parcial:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \partial_i(x),\ \forall\, i = 1, \cdots, N,$$

onde $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto e as derivadas parciais de f no ponto $x \in U$ existem.
(ii) Consideremos $\omega \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma solução fraca do problema (1) *e façamos $\omega_t = \omega(x/t)$. Pelo Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teorema C.*3 *no Apêndice C), temos*

$$I(\omega_t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega(x/t)|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(\omega(x/t))\, dx = \frac{t^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega|^2\, dx - t^N \int_{\mathbb{R}^N} G(\omega)\, dx, \quad \text{(B.1)}$$

*onde I é o funcional associado ao problema (*1*). Pela Proposição A.*1 *do Apêndice A, temos que ω é um ponto crítico do funcional I. Assim, usando a Regra da Cadeia (ver Teorema C.*14 *no Apêndice C) e a igualdade em (B.*1*), temos*

$$0 = I'(u)\left(\frac{d\omega_t}{dt}\right) = \frac{d}{dt}I(\omega_t) = \frac{(N-2)t^{N-3}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega|^2\, dx - Nt^{N-1}\int_{\mathbb{R}^N} G(\omega)\, dx.$$

Observe que o argumento acima será verdadeiro somente se $d\omega_t/dt$ existir. Se este for o caso, para t=1, teremos:

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\omega|^2\, dx = N\int_{\mathbb{R}^N} G(\omega)\, dx.$$

A igualdade acima é chamada Identidade de Pohozaev. Assim, informalmente, as soluções fracas do problema (1) *satisfazem essa identidade. Veremos a seguir que este resultado é uma consequência da Proposição* $(B.1)$. *Argumentos do tipo acima são geralmente chamados pelos físicos de Teorema Virial.*

Lema B.1 *Seja* $\varphi_0 : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^∞, *tal que* $\varphi_0(s) = 1$, *para* $s \in [0,1]$ *e* $\varphi_0(s) = 0$, *para* $s \in [2,\infty)$. *Para todo* $j \in \mathbb{N}$, *definamos* $\varphi_j : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *por*

$$\varphi_j(x) = \varphi_0\left(\frac{|x|}{j}\right). \tag{B.2}$$

Então, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ *tais que*

(i) $|\varphi_j(x)| \leq C_1, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N$;

(ii) $|x||\nabla\varphi_j(x)| \leq C_2|\varphi_0'|_\infty, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N$.

Prova: (i) Desde que φ_0 é de classe C^∞ existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\varphi_j(x)| = \left|\varphi_0\left(\frac{|x|}{j}\right)\right| \leq C, \text{ para } \frac{|x|}{j} \in [1,2].$$

Pela definição da função φ_0, $\varphi_j(x) = 1$ para $|x|/j \in [0,1]$ e $\varphi_j(x) = 0$ para $|x|/j \geq 2$. Fazendo $C_1 = \max\{1, C\}$, temos

$$|\varphi_j(x)| \leq C_1, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

(ii) Observe que para $x \neq 0$, da regra da cadeia (ver Teorema $C.1$ no Apêndice C), temos

$$\partial_i\varphi_j(x) = \varphi_0'\left(\frac{|x|}{j}\right)\frac{x_i}{j|x|},$$

ou seja,

$$(\partial_i\varphi_j(x))^2 = \left[\varphi_0'\left(\frac{|x|}{j}\right)\right]^2\frac{x_i^2}{j^2|x|^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|\nabla\varphi_j(x)|^2 &= \sum_{i=1}^N(\partial_i\varphi_j(x))^2 \\
&= \sum_{i=1}^N\left[\varphi_0'\left(\frac{|x|}{j}\right)\right]^2\frac{x_i^2}{j^2|x|^2} \\
&= \left[\varphi_0'\left(\frac{|x|}{j}\right)\right]^2\sum_{i=1}^N\frac{x_i^2}{j^2|x|^2} \\
&= \left[\varphi_0'\left(\frac{|x|}{j}\right)\right]^2\frac{1}{j^2},
\end{aligned}$$

o que implica

$$|\nabla \varphi_j(x)| = \varphi_0'\left(\frac{|x|}{j}\right)\frac{1}{j},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^N,$$

pois $|\nabla \varphi_j(0)| = 0$ e $\varphi_0'(0)) = 0$. Notemos ainda que $\varphi_0'(|x|/j) = 0$ quando $|x|/j \notin [1,2]$. Dessa forma, podemos encontrar uma constante $C_2 \in [1,2]$ tal que

$$\begin{aligned} |x||\nabla \varphi_j(x)| &= \frac{|x|}{j}\varphi_0'\left(\frac{|x|}{j}\right) \\ &\leq \frac{|x|}{j}|\varphi_0'|_\infty \\ &\leq C_2|\varphi_0'|_\infty, \end{aligned}$$

para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^N$.

$\square$

Observação 7 *: Considere φ_j a mesma função definida no Lema B.1. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, observe que para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $j \to \infty$ implica $\frac{|x|}{j} \to 0$. Assim,*

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_j(x) = 1 \quad e \quad \lim_{j\to\infty} \partial_i\varphi_j(x) = 0.$$

Pelo Lema B.1,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_j(x)f(x)|\, dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, dx \quad e$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x_i\partial_i\varphi_j(x)f(x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |x||\nabla\varphi_j(x)||f(x)|\, dx \leq C_2 \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, dx.$$

Em outras palavras, $\varphi_j f$, $\pi_i\partial_i\varphi_j f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, onde π_i é i-ésima projeção do vetor $x \in \mathbb{R}^N$. Usaremos esta observação na proposição seguinte.

Proposição B.1 ***(Identidade de Pohozaev)*** *Suponha que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $g(0) = 0$, e seja $G(t) = \int_0^t g(s)ds$. Se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz*

$$-\Delta u = g(u), \tag{B.3}$$

então vale a seguinte igualdade, chamada Identidade de Pohozaev,

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx\ .$$

Prova: A ideia para encontrarmos a identidade é multiplicar ambos os membros de $(B.3)$ por $x_i\partial_i u(x)\varphi_j(x)$ para um índice i fixo, $x \in \mathbb{R}^N$, φ_j a função definida no Lema $B.1$ e $\partial_i u(x)$ denotando a i-ésima derivada parcial, no sentido fraco, de u no ponto $x \in \mathbb{R}^N$. Em seguida, integrar usando a fórmula de integração por partes. Vejamos,

$$-(\Delta u(x)) \cdot (x_i\partial_i u(x)\varphi_j(x)) = g(u(x)) \cdot (x_i\partial_i u(x)\varphi_j(x)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{B.4}$$

Veremos que a parte mais trabalhosa será no primeiro membro de $(B.4)$ por envolver o operador laplaciano. Por outro lado, integrando por partes seu segundo membro, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(u(x))x_i\partial_i u(x)\varphi_j(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i(G(u(x)))x_i\varphi_j(x)\, dx$$

$$= G(u(x))x_i\varphi_j(x)\big|_{\partial\mathbb{R}^N} - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))\partial_i(x_i\varphi_j(x))\, dx.$$

Desde que φ_j tem suporte compacto e $\partial\mathbb{R}^N = \emptyset$ (no que segue usaremos bastante este fato), então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} g(u(x))x_i\partial_i u(x)\varphi_j(x)\, dx &= -\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))\partial_i(x_i\varphi_j(x))\, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))\partial_i(x_i)\varphi_j(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))x_i\partial_i(\varphi_j(x))\, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))\varphi_j(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} x_i\partial_i(\varphi_j(x))G(u(x))\, dx.
\end{aligned}$$

Da Observação 7, temos que as duas integrais acima são finitas e os integrando são limitados por uma função em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, para todo $x \in \mathbb{R}^N$

$$\lim_{j\to 0}[G(u(x))\varphi_j(x)] = G(u(x)) \quad \text{e} \quad \lim_{j\to 0}[x_i\partial_i(\varphi_j(x))G(u(x))] = 0.$$

Com isso, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema $C.10$ no Apêndice C) para obtermos

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(u(x))x_i\partial_i u(x)\varphi_j(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))\, dx. \tag{B.5}$$

Vejamos agora o que ocorre com o segundo membro de $(B.4)$. Pela Fórmula de Green (ver Teorema $C.7$ no Apêncice C),

$$\Rightarrow -\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u(x)x_i\partial_i u(x)\varphi_j(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \cdot \nabla[x_i\partial_i u(x)\varphi_j(x)]\, dx. \tag{B.6}$$

Fazendo $K_{ij}(x) = \nabla u(x) \cdot \nabla[x_i \partial_i u(x) \varphi_j(x)]$, temos

$$\begin{aligned} K_{ij}(x) &= \nabla u \cdot [\nabla(x_i)\partial_i u(x)\varphi_j(x) + x_i \nabla(\partial_i u(x))\varphi_j(x) + x_i \partial_i u(x) \nabla(\varphi_j(x))] \\ &= \nabla u \cdot (\nabla(x_i)\partial_i u(x)\varphi_j(x)) + \nabla u \cdot (x_i \nabla(\partial_i u(x))\varphi_j(x)) + \nabla u \cdot (x_i \partial_i u(x) \nabla(\varphi_j(x))) \\ &= |\partial_i u(x)|^2 \varphi_j(x) + x_i \varphi_j(x) \sum_{k=1}^{N} (\partial_k u(x) \partial_{ki} u(x)) + x_i \partial_i u(x)(\nabla u(x) \cdot \nabla \varphi_j(x)) \\ &= |\partial_i u(x)|^2 \varphi_j(x) + \frac{1}{2} x_i \varphi_j(x) \sum_{k=1}^{N} (2.\partial_k u(x) \partial_{ik} u(x)) + x_i \partial_i u(x)(\nabla u(x) \cdot \nabla \varphi_j(x)) \\ &= |\partial_i u(x)|^2 \varphi_j(x) + \frac{1}{2} x_i \varphi_j(x) \sum_{k=1}^{N} (\partial_i |\partial_k u(x)|^2) + x_i \partial_i u(x)(\nabla u(x) \cdot \nabla \varphi_j(x)) \\ &= |\partial_i u(x)|^2 \varphi_j(x) + \frac{1}{2} x_i \varphi_j(x) \partial_i(|\nabla u(x)|^2) + x_i \partial_i u(x)(\nabla u(x) \cdot \nabla \varphi_j(x)). \end{aligned}$$

Assim,

$$K_{ij}(x) = |\partial_i u(x)|^2 \varphi_j(x) + \frac{1}{2} x_i \varphi_j(x) \partial_i(|\nabla u(x)|^2) + x_i \partial_i u(x)(\nabla u(x) \cdot \nabla \varphi_j(x)). \tag{B.7}$$

Obeservemos agora o seguinte:

(i) Como acima, do Lema $B.1$ e da Observação 7, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e provarmos que

$$\lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u(x)|^2 \varphi_j(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u(x)|^2\, dx$$

e

$$\lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i u(x) x_i (\nabla u(x) \cdot \nabla \varphi_j(x))\, dx = 0.$$

(ii) Pela fórmula de integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_j(x) x_i \partial_i(|\nabla u(x)|^2)\, dx &= \frac{\varphi_j(x) x_i}{2} |\nabla u(x)|^2 \Big|_{\partial \mathbb{R}^N} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \partial_i(\varphi_j(x) x_i)\, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \partial_i(\varphi_j(x) x_i)\, dx. \end{aligned}$$

Novamente pelo Lema $B.1$ e pela Observação 7, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e concluirmos que

$$\frac{1}{2} \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_j(x) x_i \partial_i(|\nabla u(x)|^2)\, dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx.$$

Dessas duas observações e da igualdade $(B.7)$, obtemos

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} K_{ij}(x)\, dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u(x)|^2\, dx. \tag{B.8}$$

Lembrando que $K_{ij}(x) = \nabla u(x)\cdot\nabla[x_i\partial_i u(x)\varphi_j(x)]$, de $(B.6)$, $(B.7)$ e $(B.8)$

$$-\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u(x) x_i \partial_i u(x)\varphi_j(x)\, dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u(x)|^2\, dx. \tag{B.9}$$

Por fim, de $(B.4)$ temos que o primeiro membro da equação $(B.5)$ é igual ao primeiro membro da equação $(B.9)$, ou seja,

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u(x)|^2\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))\, dx.$$

Como essa igualdade é válida para todo $i\in\{1,2,\cdots,N\}$, somando em i, obtemos

$$-\frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx = -N\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))\, dx.$$

Portanto,

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))\, dx,$$

mostrando a identidade.

$\square$

Apêndice C

Resultados Importantes

Neste apêndice serão enunciados os principais resultados utilizados no texto. Também serão indicadas as referências para consulta de teorias e demonstrações.

Teorema C.1 *(Veja [11]) (**Regra da Cadeia**) Sejam $U \subset \mathbb{R}^M$, $V \subset \mathbb{R}^N$ abertos, $f : U \longrightarrow V$ uma aplicação cujas funções coordenadas $f_1, \cdots, f_N$ possuem derivadas parciais no ponto $a \in U$ e $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b = f(a)$. Então $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ possui derivadas parciais no ponto a e vale*

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i},\ i = 1, \cdots, m,$$

onde as derivadas parciais relativas aos x_i são calculadas no ponto a e as relativas aos y_k são calculadas no ponto $b = f(a)$. Além disso, se f e g são de classe C^1 então $g \circ f$ é de classe C^1.

$\square$

Teorema C.2 *(Veja [11]) (**do Valor Médio**) Dada $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^N$, se o segmento de reta $[a, a+v]$ estiver contido em U então existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$f(a+v) - f(a) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta v) \cdot \alpha_i,$$

onde $v = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$.

$\square$

Teorema C.3 *(Ver [11]) (**de Mudança de Variável**) Sejam $X \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto compacto J-mensurável, $h : U \longrightarrow V$ um difeomorfismo de classe C^1 entre os abertos $U, V \subset \mathbb{R}^N$ e $f : h(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então*

$$\int_{h(X)} f(y)\, dy = \int_X f(h(x)) \cdot |\det h'(x)|\, dx.$$

$\square$

Teorema C.4 *(Ver [11]) (**Regra Leibniz**) Dado $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto, seja $f : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que a i-ésima derivada parcial $\partial f/\partial x_i(x,t)$ existe para todo ponto $(x,t) \in U \times [a,b]$ e a função $\partial f/\partial x_i : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, assim definida, é contínua. Então a função $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt,$$

possui a i-ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x.t)\, dt.$$

Em suma: pode-se derivar sob o sinal de integral, desde que o integrando resultante seja uma função contínua.

$\square$

Teorema C.5 *(Ver [8]) (**da Divergência**) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio cuja fronteira ($\partial\Omega$) é uma união finita de curvas suaves. Seja $F : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ um campo vetorial de classe C^1 em $\overline{\Omega}$. Se η denota o vetor normal exterior a $\partial\Omega$, então*

$$\int_{\overline{\Omega}} \nabla F\, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \eta ds\ .$$

$\square$

Teorema C.6 *(Ver [7]) (**Fórmula de Integração por Partes**) Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com $\partial U \in C^1$ e $u, v \in C^1(\overline{U})$. Se ν^i denota a i-ésima coordenada do vetor normal à ∂U, então*

$$\int_U (\partial_i u(x)) v(x)\, dx = \int_{\partial U} u(y)v(y)\nu^i\, dS(y) - \int_U u(x)\partial v(x)\, dx,\ \forall\ i = 1, \cdots, N.$$

$\square$

Teorema C.7 *(Ver [8]) (**Identidades de Green**) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio onde vale o teorema da divergência e sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Se η denota o vetor normal exterior a $\partial\Omega$, então valem as seguintes identidades:*

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u + \nabla v \nabla u)\, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds$$

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u - u\nabla v)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds\ .$$

□

Teorema C.8 *(Ver [10]) (**do Valor Intermediário**) Seja M um espaço métrico conexo e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f(M)$ é um intervalo.*

□

Teorema C.9 *(Ver [2]) (**Desigualdade de Hölder**) Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$, onde $p > 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e $|fg|_1 \leq |f|_p \cdot |g|_q$.*

□

Teorema C.10 *(Ver [2]) (**da Convergência Dominada de Lebesgue**) Considere (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge quase sempre para a função mensurável f. Se existir uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f\, dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, dx.$$

□

Teorema C.11 *(Ver [5]) (**de Vainberg**) Sejam (f_n) uma sequência de funções em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tais que $f_n \longrightarrow f$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Então existe uma subsequência (f_{n_j}) de (f_n) e uma função $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tais que*

$$|f_{n_j}| \leq g, \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N$$

$$f_{n_j} \longrightarrow f, \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

□

Teorema C.12 *(Veja [5]) Seja* $\phi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *e seja* $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$*, com* $1 \leq p \leq \infty$*. Então*

$$\phi * v \in H^1(\mathbb{R}^N) \ e \ \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi * v) = \phi * \frac{\partial v}{\partial x_i}, \ \forall \, i = 1, 2, \cdots, N,$$

onde

$$\phi * v(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y - x) v(y) \ \ dy, \ \forall \, x \in \mathbb{R}^N.$$

$\square$

Teorema C.13 *(Veja [5]) (**Teoremas de Imersão**) Seja* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *o espaço de Sobolev* $W^{1,\,2}(\mathbb{R}^N)$*, então as seguintes inclusões são contínuas, chamadas imersões contínuas de Sobolev:*

$$H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), \ \forall \, q \in [2, 2N/(N-2)], \quad se \quad N > 2.$$

$$H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), \ \forall \, q \in [2, \infty), \quad se \quad N = 2.$$

$\square$

Teorema C.14 *(Veja [1]) (**Regra da Cadeia Para Derivada de Fréchet**) Sejam* X *um espaço de Banach,* $U \subset X$ *um conjunto aberto,* I *diferenciável à Fréchet no ponto* $u \in X$ *e* $f : \mathbb{R} \longrightarrow U$ *derivável em* $s_0 \in \mathbb{R}$*. Se* $u = f(s_0)$ *então a composição* $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $\eta(s) = I(f(s))$ *é derivável em* s_0*, além disso, vale a seguinte relação:*

$$\eta'(s_0) = I'(u) \circ f'(s_0).$$

$\square$

Teorema C.15 *(Veja [12]) (**Desigualdade de Moser-Trudinger**) Se* $\alpha > 0$ *e* $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$*, então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1) \, dx < \infty.$$

Além disso, se $|\nabla u|_2 \leq m < 1$*,* $|u|_2 \leq M < \infty$ *e* $\alpha \leq 4\pi$*, então existe uma constante* $C > 0$ *que depende somente de* α *e* M*, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1) \, dx \leq C.$$

$\square$

Teorema C.16 *(Ver [15]) (**do Passo da Montanha**) Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X;\mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que:*

(H_1) (Primeira Geometria do Passo da Montanha)

Existem $\alpha, \rho > 0$ tais que

$$I(u) \geq \alpha > 0, \quad \text{para todo} \quad u \in X \quad \text{com} \quad ||u|| = \rho.$$

(H_2) (Segunda Geometria do Passo da Montanha)

Existe $e \in X$ tal que $||e|| > \rho$ e

$$I(e) < 0.$$

Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $u_\epsilon \in X$ tal que

(i) $b - 2\epsilon \leq I(u_\epsilon) \leq b + 2\epsilon$;

(ii) $||I'(u_\epsilon)|| < 4\epsilon$,

onde

$$0 < b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]; X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

□

Bibliografia

[1] M. Badiale, E. Serra, Semilinear Elliptic Equations for Beginners, Springer, London, 2011.

[2] R. G. Bartle, The Elements of integration and Lebesgue Measure, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1995.

[3] H. Berestycki, T. Gallouët, O. Kavian, Equations de Champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan, C. R. Acad. Sci; Paris Ser. I Math. 297 (1983), 5, 307-310 and Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université de Paris VI, (1984).

[4] H. Berestycki, P. L. Lions, Nonlinear scalar field equations, I, Arch. Rat. Mech. Anal. 82 (1983), 313-346.

[5] H. Brézis, Analyse Fonctionnalle Théorie et Applications, Dunod, Paris, 1999.

[6] Y. Ding, W. Y. Ni, On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equations, Arch. Rat. Mech. Mech. Anal. 91 (1986), 283–308.

[7] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, Volume 19, 1998.

[8] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Classics in Mathematics, Springer, 3º edition, New York, 2001.

[9] L. Jeanjean, K. Tanaka, A remark on least energy solutions in $\mathbb{R}^N$, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), 8, 2399–2408.

[10] E. L. Lima, Espaços Métricos, Projeto Euclides, IMPA, Rio deJaneiro, 1997.

[11] E. L. Lima, Análise Real, vol 2 , Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[12] J. M. B. do Ó, On a class of semilinear problems with critical growth to the N-Laplacian in $\mathbb{R}^N$, Abstr. Appl. Anal. 2, 301-315, 1997.

[13] S. I. Pohozaev, Eigenfunctions of the equation $\Delta u - \lambda f(u) = 0$, Sov. Math Doklady 5, (1965) 1408-1411.

[14] P. H. Rabinowitz, On class of nonlinear Schrödinger equations, Z. Angew. Math. Phys. 43 (1992) 272–291.

[15] M. Willem, Minimax Theorems, Progressin Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, Boston, 1996.