



Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística

Reginaldo Pereira Costa

**O MODELO BETA PARA RESPOSTA CONTÍNUA LIMITADA EM
TEORIA DA RESPOSTA AO ITEM**

Belém - PA

Reginaldo Pereira Costa

*O Modelo Beta para Resposta Contínua
Limitada em Teoria da Resposta ao Item*

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do grau de Mestre em Estatística.

Orientador:
Prof. Dr. Héilton Ribeiro Tavares

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Belém-PA

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Costa, Reginaldo Pereira, 1973-

O modelo beta para resposta contínua limitada
em teoria da resposta ao item / Reginaldo
Pereira Costa. - 2013.

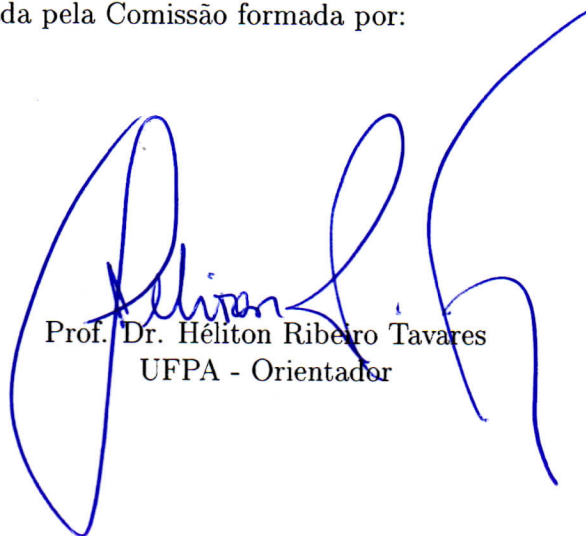
Orientador: Héilton Ribeiro Tavares.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal
do Pará, Instituto de Ciências Exatas e
Naturais, Programa de Pós-Graduação em
Matemática e Estatística, Belém, 2013.

1. Probabilidades. 2. Teoria da estimativa.
3. Simulação (Computadores). I. Título.
CDD 22. ed. 519.2

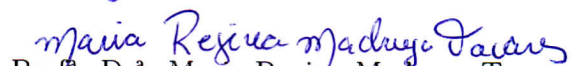
Reginaldo Pereira Costa

**O MODELO BETA PARA RESPOSTA CONTÍNUA LIMITADA EM
TEORIA DA RESPOSTA AO ITEM**


Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Estatística. Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística. Universidade Federal do Pará, aprovada pela Comissão formada por:



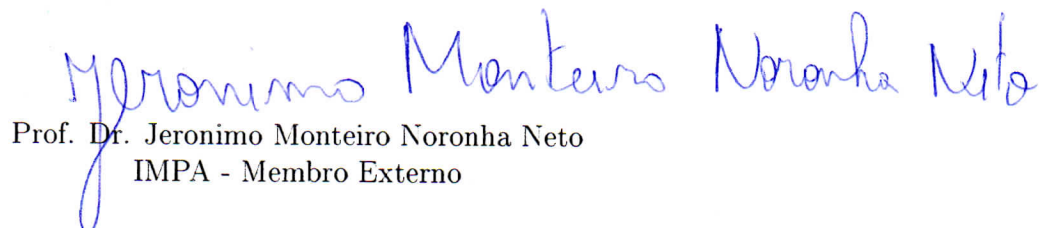
Prof. Dr. Héilton Ribeiro Tavares
UFPA - Orientador



Prof. Dr. Maria Regina Madruga Tavares
UFPA - Membro



Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias
UFPA - Membro



Prof. Dr. Jeronimo Monteiro Noronha Neto
IMPA - Membro Externo

Belém, 25 de julho de 2013

*Aos meus queridos: paiinho, João
Pereira Costa e mainha, Percília
Maria de Jesus.*

Agradecimentos

- A Deus, pelas bênçãos concedidas.
- Aos meus pais, pelos ensinamentos iniciais.
- Ao meu orientador Héilton Ribeiro Tavares pelas instruções.
- Aos professores do Programa que colaboraram com novos aprendizados.
- Aos colegas paraenses que me adotaram.

"Para tudo há um tempo, para cada coisa há um momento debaixo dos céus."

Eclesiastes 3,1

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma extensão do artigo desenvolvido por Noel and Dauvier (2007), que introduziu uma nova abordagem em Teoria da Resposta ao Item (TRI) na situação em que há variável resposta contínua limitada, com parâmetros estimados por máxima verossimilhança conjunta (MVC), mais apropriado para testes de baixa magnitude. Em situação paralela, imagens computacionais normalmente geram grandes bases de dados e o desenvolvimento ou adequação de técnicas para grandes bancos de dados tem sido um desafio cada vez maior. A TRI tem surgido como boa perspectiva para vários casos em que o tratamento atual é bastante demorado e cujos resultados ainda precisam ser melhorados, tal como na análise de dados de experimentos microarray, que possibilita a seleção de genes com diferentes níveis de expressão, ou o imageamento funcional por ressonância magnética (fMRI), responsável por determinar áreas do cérebro ligadas a determinadas funcionalidades físico-intelecto-emocionais. Em ambos os casos o nível de atividade pode ser aproximado por uma escala contínua limitada cujos parâmetros determinarão o nível de atividade de cada microregião. Assim, este trabalho visa a modelagem de dados de imagem através da TRI, mas as dimensões das bases de dados sugerem que use o Método da Máxima Verossimilhança Marginal (MVM), bem mais atualizado que o MVC, e ainda não disponíveis na literatura. São apresentados a modelagem matemática do fenômeno, o processo de estimação de parâmetros do modelo por MVM e resultados de simulação, e um algoritmo implementado na linguagem de programação MATLAB. Os resultados indicam uma perspectiva de alta eficiência do método na detecção de regiões de atividade cerebral.

Palavras-chave: Teoria da Resposta ao Item. Distribuição Beta. Máxima Verossimilhança Marginal.

Abstract

In this study we present an extension of the article developed by Noel and Dauvier (2007), which introduced a new approach to the Item Response Theory (IRT) in the situation where there is limited continuous response variable, with parameters estimated by maximum likelihood joint (MLJ), more suitable for testing low magnitude. In parallel situation, computational images usually generate large databases and the development or adaptation of techniques for large databases has been increasingly challenging. The IRT has emerged as a good prospect for several cases in which the current treatment is very time consuming and the results still need to be improved, such as the analysis of data from microarray experiments, enabling the selection of genes with different expression levels, or functional Magnetic Resonance Imaging (fMRI), responsible for determining areas of the brain linked to certain features physical-intellectual-emotional. In both cases the level of activity can be approximated by a continuous scale limited whose parameters determine the activity level of each microregion. Thus, this paper aims at the modeling of image data by IRT, but the dimensions of databases suggest that use the Marginal Maximum Likelihood Method (MML) and more current than the MLJ, and not yet available in the literature. Presents the mathematical modeling of the phenomenon, the process of estimating the model parameters by MML and simulation results, and an algorithm implemented in the programming language MATLAB. The results indicate a prospect of high efficiency of the method in detecting regions of brain activity.

Key-words: Item Response Theory. Beta Distribution. Marginal Maximum Likelihood.

Sumário

Agradecimentos	p. iii
Resumo	p. v
Abstract	p. vi
Lista de Figuras	p. ix
Lista de Tabelas	p. x
1 Teoria da Resposta ao Item - TRI	p. 1
1.1 Introdução	p. 1
1.2 Histórico	p. 2
1.3 Modelos Matemáticos	p. 2
1.3.1 Modelos para itens dicotômicos	p. 3
1.3.2 Modelos para itens não dicotômicos	p. 8
2 Modelo de Resposta Contínua - CRM	p. 14
2.1 Introdução	p. 14
2.2 A Distribuição Beta	p. 16
2.3 Processo de Estimação dos Parâmetros	p. 18
3 Aplicação a Dados Simulados	p. 27
3.1 Estimativas Iniciais	p. 27
3.2 Programa Computacional	p. 27

3.3	Resultados	p. 28
4	Conclusões e Sugestões	p. 30
4.1	Conclusões	p. 30
4.2	Sugestões	p. 31
	Apêndice A – Tabela dos Parâmetros Simulados e Estimados	p. 32
	Apêndice B – Programa em Matlab	p. 33
	Referências Bibliográficas	p. 39

Lista de Figuras

1	Curva Característica do Item - ML1	p.4
2	Curva Característica do Item - ML2	p.5
3	Curva Característica do Item - ML3	p.6
4	Curva Característica e Função de Informação	p.7
5	Modelo de Resposta Nominal - MRN	p.9
6	Modelo de Resposta Gradual - MRG	p.10
7	Modelo de Escala Gradual - MEG	p.11
8	Modelo de Crédito Parcial - MCP	p.12
9	Modelo de Crédito Parcial Generalizado - MCPG	p.12
10	Densidade Beta para alguns valores de parâmetros	p.17
11	Função Resposta Esperada	p.18
12	Estimativas do parâmetro de inclinação	p.29
13	Estimativas do parâmetro de posição	p.29
14	Parâmetros Simulados e Estimados	p.32

Lista de Tabelas

1	Exemplos estimados com maior erro	p. 28
2	Exemplos estimados com menor erro	p. 28

1 Teoria da Resposta ao Item - TRI

1.1 Introdução

Experiências com instrumentos de medições tais como réguas, balanças, ampulhetas, termômetros, velocímetros, entre outros, deixaram a impressão de que estes instrumentos são necessariamente físicos apresentando medidas lidas diretamente na escala numérica. Tal impressão não é válida para testes educacionais e psicológicos. As respostas não são medições diretas, mas fornecem os dados a partir dos quais as medições podem ser inferidas.

Na Teoria Clássica de Medidas (TCM) as aptidões são medidas pela soma da pontuação dos itens. Quando o indivíduo responde um item, ele recebe uma pontuação por sua resposta, assim ao final da aplicação do teste ele tem um escore, que é a soma dos pontos. A principal característica da TCM é que as análises e interpretações estão sempre associadas à prova como um todo, enquanto que a Teoria da Resposta ao Item (TRI) tem como elementos centrais os itens, possibilitando comparar indivíduos da mesma população que submeteram a provas diferentes, ou a comparação entre populações, desde que submetidas a provas que tenham alguns itens em comum.

Inúmeras áreas do conhecimento vêm se interessando pela aplicação de técnicas oriundas da Teoria da Resposta ao Item que propõe modelos para características do indivíduo, dita traços latentes, que são inferidas a partir da observação de variáveis secundárias relacionadas a elas. Os traços latentes, proficiências ou habilidades na área do conhecimento avaliado têm uma relação com a probabilidade de um indivíduo dar certa resposta ao item e esta metodologia sugere formas de representá-la.

1.2 Histórico

A TRI já tem uma longa história, ela surgiu formalmente a partir dos trabalhos de Lord (1952) nos Estados Unidos, quando desenvolveu o modelo unidimensional de 2 parâmetros e Rasch (1960), na Dinamarca, que propôs o modelo unidimensional de 1 parâmetro, ambos expressos na distribuição normal acumulada (ogiva normal). Tempos depois Lord achou importante incorporar o parâmetro da resposta correta dada por indivíduos de baixa habilidade - acerto casual - surgindo então o modelo de 3 parâmetros.

A função ogiva normal foi substituída por outra que fosse matematicamente mais adequada, por ter função explícita dos parâmetros do item e de habilidade, além de não envolver integração, que é a função logística, aplicada por Wright (1968) no modelo de 1 parâmetro, e por Birnbaum (1968) nos modelos de 2 e 3 parâmetros.

Objetivando obter maiores informações das respostas dos indivíduos e não puramente se estas estavam corretas ou incorretas, Samejima (1969) propôs o modelo de resposta gradual. Da mesma forma, Bock (1972), Andrich (1978), Masters (1982) e Muraki (1992) propuseram modelos para além de duas categorias de resposta.

A introdução dos modelos logísticos de 1, 2 e 3 parâmetros para duas ou mais populações de respondentes possibilitando comparar rendimentos de duas ou mais populações submetidas a diferentes testes com itens comuns, foi realizada por Bock & Zimowski (1997).

A Teoria da Resposta ao Item (TRI) é uma teoria psicométrica utilizada em todo o mundo nas áreas de avaliação educacional e psicologia cognitiva. Na medida em que cresce a aplicação da teoria, surgem novos fatores e questionamentos de grande importância prática, os quais, possivelmente, levariam a resultados de grande valor científico se forem contemplados pela TRI. A idéia básica consiste no emprego de modelos nos quais os parâmetros representem características importantes dos itens, e do indivíduo.

Atualmente a TRI vem tornando-se a técnica predominante no campo de testes em vários países e veio para ficar e substituir grande parte da Teoria Clássica de Medidas.

1.3 Modelos Matemáticos

Os vários modelos propostos pela TRI apresentam a relação entre a probabilidade de um indivíduo dar uma certa resposta a um item qualquer e os parâmetros do item e da

habilidade do respondente de forma que quanto maior a habilidade, maior a probabilidade de acerto no item (Andrade, D. F., Tavares, H. R., Valle, R. C., 2000).

Aqui, só será de interesse a referência a um único grupo de respondentes, que significa uma amostra de indivíduos retirada de uma mesma população.

1.3.1 Modelos para itens dicotômicos

São os mais utilizados, tendo basicamente três tipos, que se diferenciam em número de parâmetros que utilizam para descrever o item. Estes parâmetros são: discriminação (a_i), dificuldade do item (b_i) e resposta casual (c_i).

Modelo logístico de 1 parâmetro

É conhecido como o modelo de Rasch, dado pela expressão:

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j) = \frac{1}{1 + e^{-D(\theta_j - b_i)}}, \quad (1.1)$$

com $i = 1, 2, \dots, I$ e $j = 1, 2, \dots, n$, onde:

U_{ij} representa uma variável dicotômica que assume o valor 1 se o item i for respondido corretamente pelo indivíduo j , ou o valor 0 se o item i for respondido incorretamente pelo indivíduo j .

θ_j simboliza a habilidade do j -ésimo indivíduo.

$P(U_{ij} = 1|\theta_j)$ é a probabilidade de um indivíduo j com habilidade θ_j responder corretamente o item i . Esta probabilidade é chamada Função da Resposta do Item - FRI, e sua representação gráfica é conhecida por Curva Característica do Item - CCI.

D é um fator de escala e utiliza-se o valor 1,7 se desejar que a função logística forneça resultados semelhantes ao da ogiva normal.

b_i é o parâmetro de posição (ou dificuldade) do item i , medido na mesma escala da habilidade.

Desta forma o modelo considera que não existe o acerto ao acaso e todos os itens possuem o mesmo poder de discriminação.

A Figura 1 apresenta as CCIs de dois itens. Observa-se que para um indivíduo obter 50% de probabilidade de resposta certa de um item é preciso que $\theta_j = b_i$. Para a mesma probabilidade de responder corretamente ao item é necessária maior habilidade no item 2, de forma que este é mais difícil, ou seja, tem maior parâmetro de posição ($b_1 < b_2$).

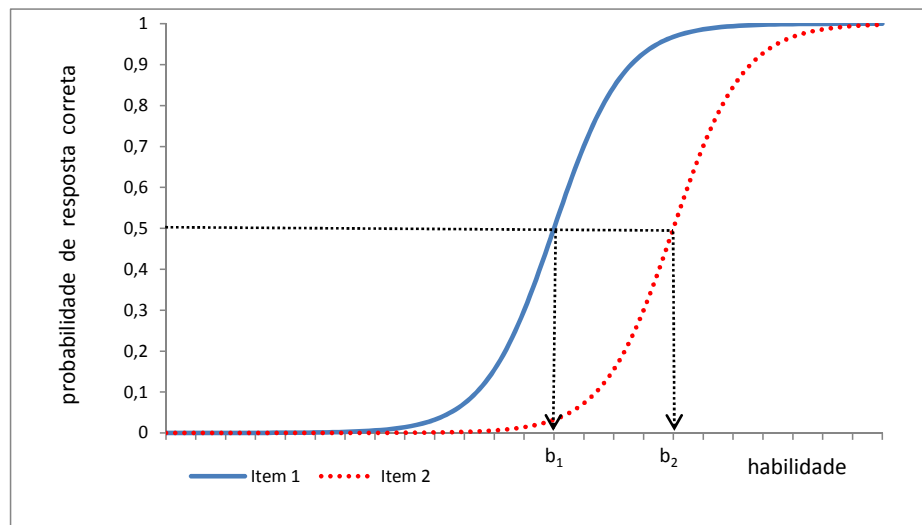


Figura 1: Curva Característica do Item - ML1

Modelo logístico de 2 parâmetros

Foi proposto para avaliar além da dificuldade do item o seu poder de discriminação, que teoricamente pode assumir qualquer valor. Os valores negativos de a_i significam que o item é respondido corretamente por respondentes de menor habilidade e respondido incorretamente por aqueles de maior habilidade, por este absurdo eles não são considerados. Assim, para o parâmetro de discriminação (a_i) considera-se mais tipicamente o intervalo de 0 a 2. Na CCI existe em b_i o ponto de inflexão, e a inclinação neste ponto é proporcional ao valor de a_i .

Na Figura 2 com os parâmetros de dificuldade iguais ($b_1 = b_2$), encontra-se alteração na inclinação das CCIs. A CCI para o item 2 tem inclinação mais acentuada, diz-se que este é melhor para discriminar ($a_1 < a_2$). Este modelo é definido por:

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j) = \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_j - b_i)}}, \quad (1.2)$$

com $i = 1, 2, \dots, I$ e $j = 1, 2, \dots, n$, onde:

a_i representa o parâmetro de discriminação do item e os demais elementos são os mesmos vistos anteriormente.

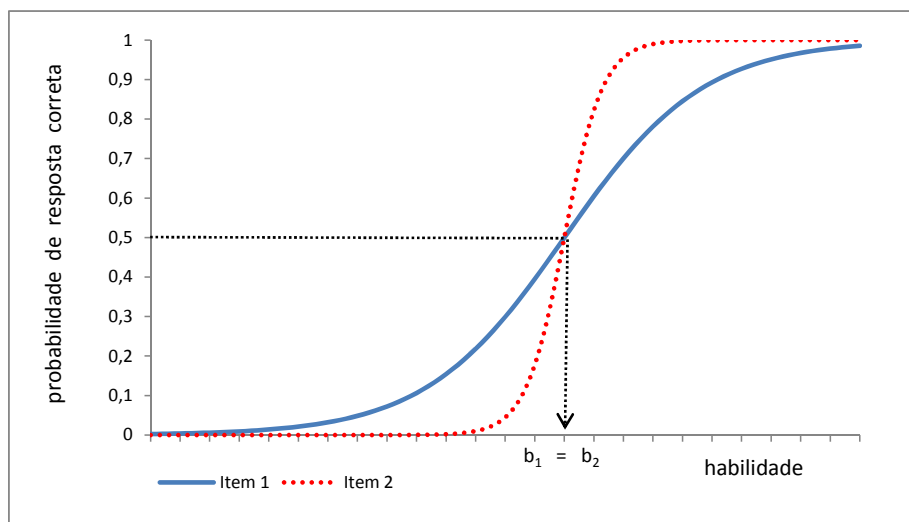


Figura 2: Curva Característica do Item - ML2

Modelo logístico de 3 parâmetros

Este modelo é representado por:

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_j - b_i)}}, \quad (1.3)$$

com $i = 1, 2, \dots, I$ e $j = 1, 2, \dots, n$, onde:

c_i é o parâmetro do item que representa a probabilidade de um indivíduo com baixa habilidade responder corretamente o item i . Então quando é permitido “chutar”, c difere de 0, considerado como o acerto ao acaso.

A Figura 3 mostra que quando θ_j se torna muito pequena a probabilidade de acerto praticamente não se modifica sendo o acerto casual, neste exemplo $c_1 = 0.1$ e $c_2 = 0.2$. Outra observação a ser feita é que b_i representa a habilidade necessária para uma

probabilidade de resposta correta igual a $\frac{1 + c_i}{2}$.

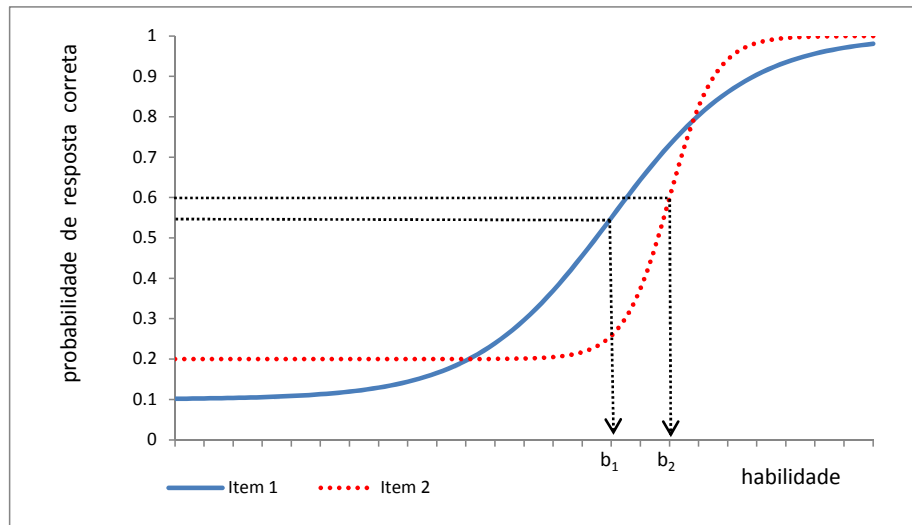


Figura 3: Curva Característica do Item - ML3

Função de Informação do Item e Função de Informação do Teste

A função de informação do item permite analisar quanto um item possui de informação para a medida de habilidade, esta medida é muito utilizada em conjunto com a Curva Característica do Item. Considerando o modelo logístico de 3 parâmetros, a função é dada por:

$$I_i(\theta) = D^2 a_i^2 \frac{Q_i(\theta)}{P_i(\theta)} \left[\frac{P_i(\theta) - c_i}{1 - c_i} \right]^2, \quad (1.4)$$

onde $P_i(\theta) = P(U_{ij} = 1|\theta)$ e $Q_i(\theta) = 1 - P_i(\theta)$.

O item com maior valor do parâmetro a_i tem a curva característica com inclinação mais acentuada e conseqüentemente é maior a informação do item em torno de $\theta = b_i$. A cada item está associado um intervalo de habilidade em que o item possui maior poder de discriminação, definido em torno do valor do parâmetro de dificuldade(b).

A Figura 4 apresenta exemplos de curvas características e de curvas de informação,

fixado b e variando a e c . Nota-se que o item-2 (FII mais achatado) tem menos informação que o item-1, com $a_1 = a_2$ (mesma inclinação), $b_1 = b_2$ e $c_1 = 0.2 < c_2 = 0.3$. A mesma conclusão pode-se ter quando observado o item-3 e o item-4. Se a análise for realizada entre o item-1 e o item-3 (análogo para item-2 e item-4), onde $a_1 < a_3$, $b_1 = b_2$ e $c_1 = c_2$, percebe-se que o item-3 tem maior informação do que o item-1.

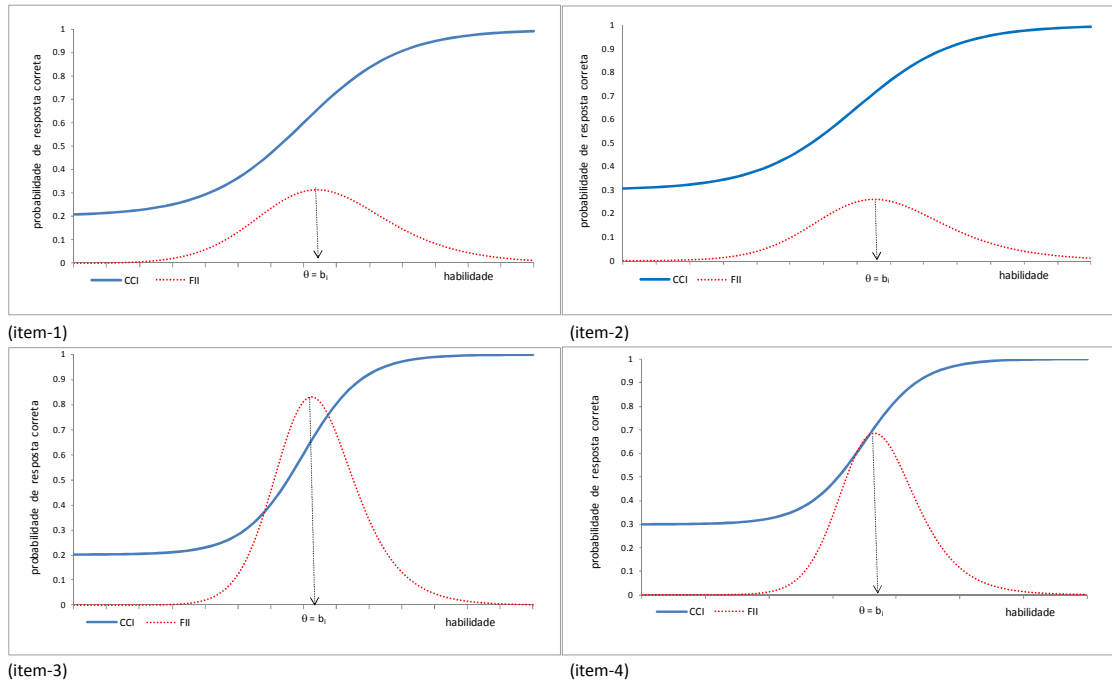


Figura 4: Curva Característica e Função de Informação

Desta forma, se terá maior informação quando:

- b_i se aproxima de θ ;
- a_i cresce;
- c_i se aproxima de zero.

Para se obter a função de informação do teste, soma-se as informações fornecidas por cada item que participa de sua composição, ou seja:

$$I(\theta) = \sum_{i=1}^I I_i(\theta). \quad (1.5)$$

1.3.2 Modelos para itens não dicotômicos

Aqui são incorporados aqueles modelos que tanto analisam itens abertos ou de resposta livre quanto os itens de múltipla escolha avaliados de forma graduada, ou seja, itens que possuem uma ou mais categorias intermediárias ordenadas entre o certo e o errado. Na correção destes itens considera-se qual foi a resposta dada pelo indivíduo além da resposta à alternativa.

Modelo de Resposta Nominal

Com o intuito de maximizar a precisão da habilidade estimada usando não apenas se o item foi respondido corretamente ou não, mas toda a informação contida nas respostas dos indivíduos, e baseado no modelo logístico de dois parâmetros, Bock (1972) desenvolveu algo que pode ser aplicado a todas as categorias de resposta escolhidas em um teste com itens de múltipla escolha.

Bock assumiu que a probabilidade com que o indivíduo j selecionaria uma particular opção k do item i seria representada por:

$$P_{i,k}(\theta_j) = \frac{e^{a_{i,k}^+(\theta_j - b_{i,k}^+)}}{\sum_{h=1}^{m_i} e^{a_{i,h}^+(\theta_j - b_{i,h}^+)}} \quad (1.6)$$

com $i = 1, 3, \dots, I$, $j = 1, 2, \dots, n$ e $k = 1, 2, \dots, m_i$.

As quantidades $(a_{i,k}^+; b_{i,k}^+)$ são parâmetros do item i relacionados a k -ésima opção. Este modelo assume a priori que não existe nenhuma ordenação das opções de resposta.

A Figura 5 apresenta um exemplo de um item com $m = 4$. Observa-se que indivíduos com habilidade baixa possuem maior probabilidade de escolher a opção-2, enquanto que a opção-3 tem maior probabilidade de ser selecionada pelos indivíduos com alta habilidade. Se as k opções de um item tiver o mesmo parâmetro $b_{i,k}^+$, as curvas interceptam em $\theta = b_i$. Mas se o parâmetro $a_{i,k}^+$ assumir um único valor no item, o gráfico será representado por retas paralelas ao eixo das habilidades. É importante ressaltar que $\sum_{k=1}^{m_i} P_{i,k}(\theta_j) = 1$. No exemplo apresentado, para o ponto θ_j , $P_{i,1} + P_{i,2} + P_{i,3} + P_{i,4} = .42 + .34 + .16 + .08 = 1$.

Modelo de Resposta Gradual

Com este modelo, Samejima (1969) tenta obter mais informações dos indivíduos do

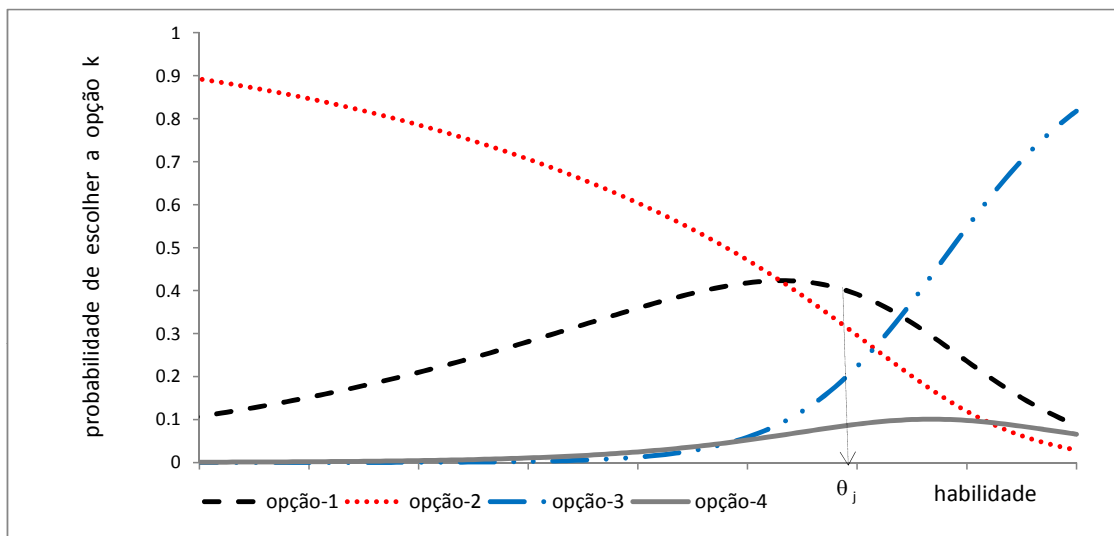


Figura 5: Modelo de Resposta Nominal - MRN

que simplesmente se eles deram respostas corretas ou não, assumindo que as categorias de resposta de um item podem ser ordenadas entre si.

Seja $k = 0, 1, \dots, m_i$ os escores de um item i com $(m_i + 1)$ categorias, arranjados em ordem crescente, a probabilidade de um indivíduo j escolher uma particular categoria ou outra mais alta do item i é expressa por:

$$P_{i,k}^+(\theta_j) = \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_j - b_{i,k})}}, \quad (1.7)$$

com $i = 1, 2, \dots, I$, e $j = 1, 2, \dots, n$, onde $b_{i,k}$ é o parâmetro de dificuldade da k -ésima categoria do item i .

A probabilidade com que um examinado com habilidade θ_j receba uma pontuação k no item i é dada pela expressão:

$$P_{i,k}(\theta_j) = P_{i,k}^+(\theta_j) - P_{i,k+1}^+(\theta_j). \quad (1.8)$$

Modelo de Escala Gradual

Ao se acrescentar no modelo anterior a suposição de que os escores das categorias são

igualmente espaçados, tem-se um modelo proposto por Andrich (1978), dado por:

$$P_{i,k}(\theta_j) = \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_j - b_i + d_k)}} - \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_j - b_i + d_{k+1})}}, \quad (1.9)$$

com $i = 1, 2, \dots, I$, $j = 1, 2, \dots, n$ e $k = 0, 1, \dots, m$ sendo que agora b_i é o parâmetro de locação do item i e d_k o parâmetro de categoria, uma decomposição do parâmetro $b_{i,k} = b_i - d_k$.

A Figura 6 apresenta um item no modelo de resposta gradual e a Figura 7 o modelo de escala gradual, com o mesmo valor de a para os itens, mostrando visivelmente a importância dos parâmetros de categoria.

Os valores atribuídos foram: $b_{1,1} = -2$, $b_{1,2} = -1.2$, $b_{1,3} = 0.8$, $b_{1,4} = 2$ no item 1, e $b_2 = 2$, $d_1 = 3$, $d_2 = 2$, $d_3 = 1$, $d_4 = 0$ para o item 2.

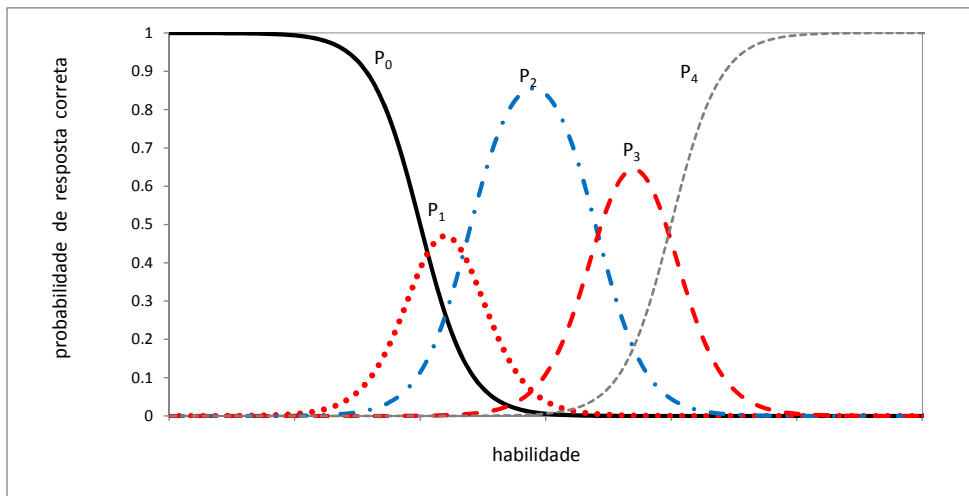


Figura 6: Modelo de Resposta Gradual - MRG

Observa-se na Figura 6 que no item 1 os indivíduos com habilidade até -2,0 têm maior probabilidade de responder apenas a categoria 0. Apenas indivíduos com habilidades entre -2,0 e -1,2 apresentam uma chance maior de responderem somente a categoria 1. Note que $b_{1,3} - b_{1,2} > b_{1,4} - b_{1,3}$, assim é visível o aumento da faixa de habilidade em que os indivíduos deverão responder somente até a categoria 2.

Sabe-se que $d_1 > d_2 > d_3 > d_4$ e ainda $d_1 - d_2 = d_2 - d_3 = d_3 - d_4$, na Figura 7 percebe-se que a probabilidade nos intervalos é a mesma em cada categoria P_1 , P_2 e P_3 .

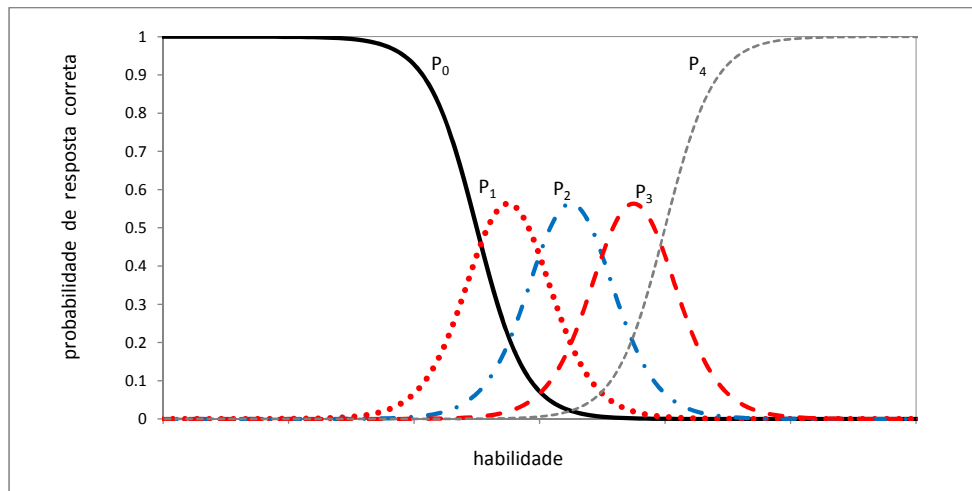


Figura 7: Modelo de Escala Gradual - MEG

Modelo de Crédito Parcial

Este modelo foi desenvolvido por Masters (1982), utilizado com os mesmos propósitos que outros já citados, que difere por pertencer à família de modelos de Rasch. Ele é uma extensão do modelo de Rasch para itens dicotômicos, desta forma, todos os parâmetros no modelo são de locação, assumindo o poder de discriminação comum para todos os itens.

Supondo $k = 0, 1, \dots, m_i$ os escores de um item i com $(m_i + 1)$ categorias de resposta ordenáveis, o modelo é fornecido por:

$$P_{i,k}(\theta_j) = \frac{e^{[\sum_{u=0}^k (\theta_j - b_{i,u})]}}{\sum_{u=0}^{m_i} e^{[\sum_{v=0}^u (\theta_j - b_{i,v})]}}, \quad (1.10)$$

com $i = 1, 2, \dots, I$, $j = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, m_i$ e $b_{i,0} \equiv 0$, onde:

$P_{i,k}(\theta_j)$ é a probabilidade do indivíduo j escolher no item i , a categoria k .

$b_{i,k}$ é o parâmetro que controla a probabilidade de escolher a categoria k em vez da categoria $k - 1$ no item i .

Assim, para itens com $(m_i + 1)$ categorias de resposta, será necessário estimar m_i parâmetros de itens.

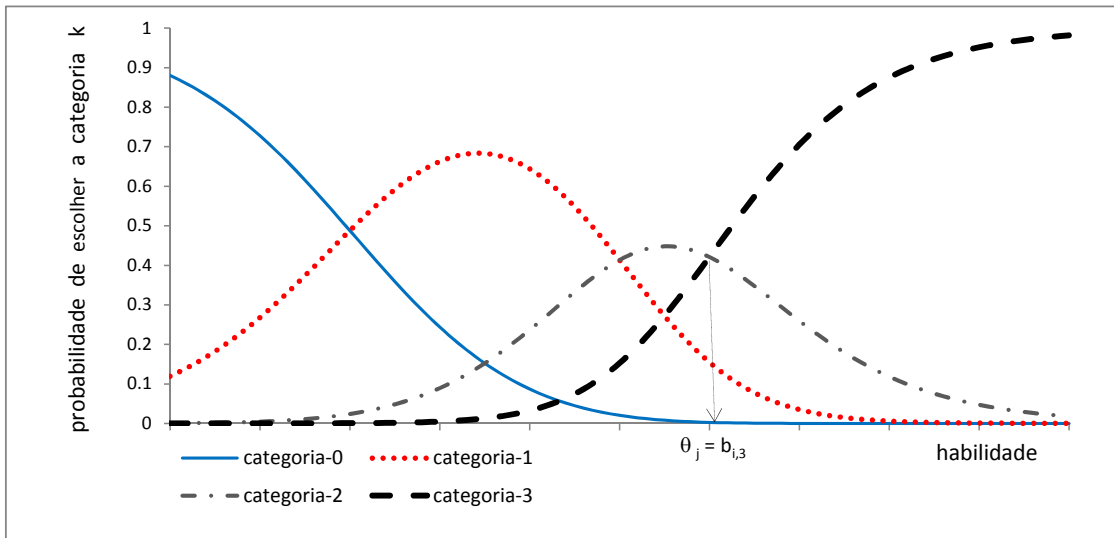


Figura 8: Modelo de Crédito Parcial - MCP

Modelo de Crédito Parcial Generalizado

Baseado no modelo de crédito parcial, Muraki (1992), retirando a uniformidade do poder de discriminação para todos os itens formulou:

$$P_{i,k}(\theta_j) = \frac{e^{\left[\sum_{u=0}^k Da_i(\theta_j - b_{i,u})\right]}}{\sum_{u=0}^{m_i} e^{\left[\sum_{v=0}^u Da_i(\theta_j - b_{i,v})\right]}}, \quad (1.11)$$

com $i = 1, 2, \dots, I$, $j = 1, 2, \dots, n$, e $k = 0, 1, \dots, m_i$.

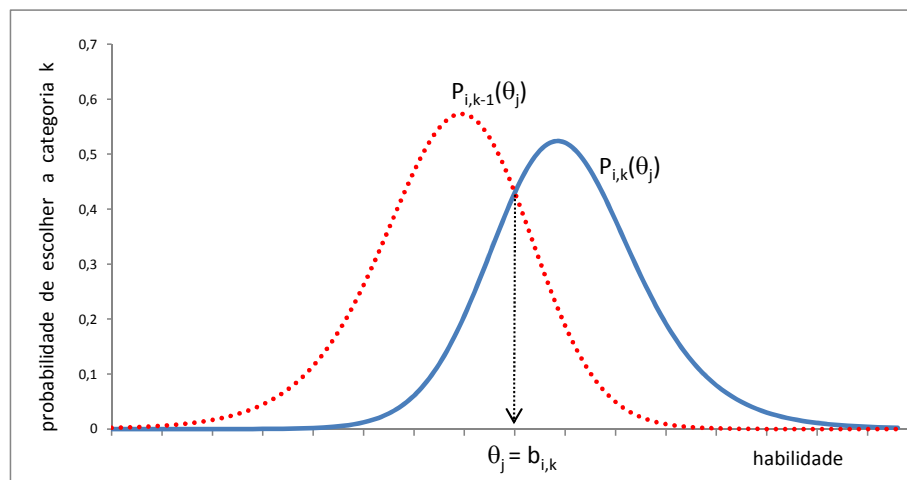


Figura 9: Modelo de Crédito Parcial Generalizado - MCPG

Conforme pode-se observar na Figura 9, os parâmetros de categoria do item, $b_{i,k}$, são os pontos na escala da habilidade em que há intercepção das curvas $P_{i,k-1}(\theta_j)$ e $P_{i,k}(\theta_j)$.

Sob a hipótese de $a_i > 0$,

- se $\theta_j = b_{i,k}$ então $P_{i,k-1} = P_{i,k}$,
- se $\theta_j > b_{i,k}$ então $P_{i,k-1} < P_{i,k}$,
- se $\theta_j < b_{i,k}$ então $P_{i,k-1} > P_{i,k}$.

Qualquer um dos $b_{i,k}$ pode ser escolhido aleatoriamente, pois este é cancelado no numerador e denominador do modelo. Normalmente se define $b_{i,0} \equiv 0$.

2 Modelo de Resposta Contínua - CRM

2.1 Introdução

Na medição de atitude e personalidade são utilizados diferentes formatos de respostas. Se as respostas observadas tiverem duas categorias (exemplo, “verdadeiro” ou “falso”), o item é dicotômico. Nas opções graduadas o sujeito escolhe uma opção em uma quantidade oferecida como “discordo totalmente”, “discordo”, “neutro”, “concordo” ou “concordo totalmente”.

Nas últimas décadas, inúmeros trabalhos têm sido destinados à modelagem probabilística de resposta Likert (1932). Para medir noções complexas como atitudes, crenças ou opiniões, Rensis Likert propôs a utilização de afirmações onde as respostas variam segundo o grau de intensidade, de acordo com a concordância do respondente. Esta escala de categorias ordenadas, igualmente espaçadas e com mesmo número de categorias em todos os itens é largamente utilizada. Várias alternativas de formatação das respostas já foram sugeridas, diferindo tanto no número de pontos a serem utilizados quanto nos descritores verbais incluídos e, mais recentemente, propondo a substituição do número finito de opções de resposta para um segmento contínuo.

A teoria estatística de estimar e testar modelos na TRI com respostas discretas foi amplamente desenvolvida. Em contraste poucas foram as propostas feitas para a análise de respostas contínuas que quase não recebeu qualquer atenção. Esta omissão é principalmente devido ao fato de que até agora o formato de resposta contínua tem sido pouco utilizado. A maioria das aplicações de modelos da TRI dizem respeito a dados categóricos, no entanto, também pode surgir situações onde as respostas aos itens são contínuas, tais como, reconstrução de imagens e análise de dados de experimentos microarray.

Melenbergh (1994) propôs um modelo de resposta linear simples, mas conforme Noel & Dauvier (2007), embora na prática possa dar resultados perspicazes, nem uma fun-

ção de resposta linear, nem uma distribuição normal para a resposta é apropriada para modelagem de dados limitados.

Müller (1987) apresentou um modelo em escala de classificação contínua que é uma extensão direta do modelo escala de classificação para respostas categóricas - Andrich (1978), em que a quantidade de categorias de resposta é aumentada. Tem como base um mecanismo de resposta onde uma variável latente originalmente ilimitada segue uma distribuição normal, e finalmente é truncada durante o processo.

Ferrando (2001) elaborou um mecanismo de truncamento semelhante ao proposto por Müller para estender o modelo linear a um não linear, considerando a natureza limitada dos dados.

O modelo de resposta contínua proposto por Samejima (1973, 1974) é obtido como um caso limitador do modelo de resposta gradual (Samejima, 1969), se aumentado o número de categorias até o infinito. Vejamos a seguir um breve comentário sobre este procedimento.

Seja θ_j o traço latente do indivíduo j , e $i (= 1, 2, \dots, I)$ um item, que tem atribuição de medir θ . Toda suposição aqui apresentada considera o princípio de independência local (Lord & Novick, 1968), isto é, para um valor fixo de θ , as respostas aos itens são independentes.

Admita $P_{i,k}(\theta_j)$ a probabilidade com que um examinado com capacidade θ_j receba uma pontuação k (inteiro não negativo: $0, 1, \dots, m_i$) para o específico item i . Seja y_i a pontuação relativa, $y_i = \frac{k}{m_i} \in \{0, \frac{1}{m_i}, \frac{2}{m_i}, \dots, \frac{m_i-1}{m_i}, 1\}$. Supondo um processo contínuo por trás da contagem y_i , então y_i pode ser interpretado como um conjunto de números, que são sucessivamente atribuído a $(m_i + 1)$ sub-categorias do processo contínuo. Supondo ainda que este processo contínuo é representado por um intervalo finito, e as sub-categorias pelos sub-intervalos de igual comprimento, no caso mais simples, $m_i = 1$, existe dois sub-intervalos. Se cada sub-intervalo for dividido em dois novos sub-intervalos de mesmo comprimento, de modo a ter uma sequência de conjuntos de sub-intervalos, o n -ésimo termo da sequência terá 2^n sub-intervalos ou categorias. Quando n tende para o infinito, k assume qualquer ponto do intervalo, assim o nível de resposta contínua pode ser considerada como uma situação limite do nível de resposta graduada.

Este é um modelo complexo, pois pressupõe um processo de resposta a dois níveis: supõe uma distribuição normal para alguma resposta latente, e leva-se a natureza limitada das observações em conta através de uma transformação monôtona da resposta

latente. Segundo Noel & Dauvier (2007), isso leva a uma densidade nula para as respostas extremas, o que não é real.

No modelo de resposta contínua (CRM), os indivíduos são instruídos a marcar as suas respostas em um segmento com comprimento fixado, em que os extremos são rotulados de “0% de acerto” e “100% de acerto”. A medição é realizada deste ponto até a extremidade esquerda do segmento. Já foi utilizada na avaliação de personalidade (Bejar, 1977; Ferrando, 2001) e intensidade da dor (Morin & Bushnell, 1998), entre outras.

Segundo Russel & Bobko (1992), alguns dados empíricos que têm interações sutis podem aparecer apenas com dados CRM e de acordo com Pfenning et al. (1995), as respostas CRM mostram mais sensibilidade na alteração da medição, e ainda, McKelvie (1978) relata que os respondentes muitas vezes preferem as escalas contínuas por serem mais agradáveis e consistentes para usar.

A TRI compreende um grupo de modelos lineares generalizados e procedimentos estatísticos associados que conectam as respostas aos itens. Estes modelos são equações matemáticas que descrevem a associação existente entre a probabilidade de uma resposta a um determinado item e o nível do indivíduo quanto a um traço latente e as características do item. A TRI oferece algumas das melhores opções para otimizar e projetar escalas, pesquisas e teste, e realizar análise de itens. É necessário, portanto, generalizar a TRI convencional a fim de incorporar a ela modelos que se ajustem adequadamente a situações que não são contempladas pelos modelos usuais.

2.2 A Distribuição Beta

Considerando situações em que a resposta (X) ao item i é contínua no intervalo $[0, M]$, adota-se a resposta contínua reescalada dada por $U = \frac{X}{M}$ em $[0, 1]$ (Noel & Dauvier, 2007). Seja U_{ji} a resposta dada por um indivíduo com habilidade θ_j ao item i em $[0, 1]$ e suponha para a resposta a função de densidade beta dada por

$$f(u_{ji}|\theta_j, \zeta_i) = \frac{\Gamma(\alpha_{ji} + \beta_{ji})}{\Gamma(\alpha_{ji})\Gamma(\beta_{ji})} u_{ji}^{\alpha_{ji}-1} (1 - u_{ji})^{\beta_{ji}-1} I_{[0,1]}(u), \quad (2.1)$$

com α_{ji} e $\beta_{ji} > 0$ representando os parâmetros da distribuição, tem-se

$$E(U_{ji}|\theta_j) = \mu_{ji} = \frac{\alpha_{ji}}{\alpha_{ji} + \beta_{ji}}, \quad (2.2)$$

$$V(U_{ji}|\theta_j) = \frac{\alpha_{ji}\beta_{ji}}{(\alpha_{ji} + \beta_{ji})^2(\alpha_{ji} + \beta_{ji} + 1)} = \mu_{ji}(1 - \mu_{ji}) \left[\frac{1}{\alpha_{ji} + \beta_{ji} + 1} \right]. \quad (2.3)$$

Dependendo dos valores de α e β , a distribuição beta pode surgir de formas muito diferentes, como apresentado na Figura 10.

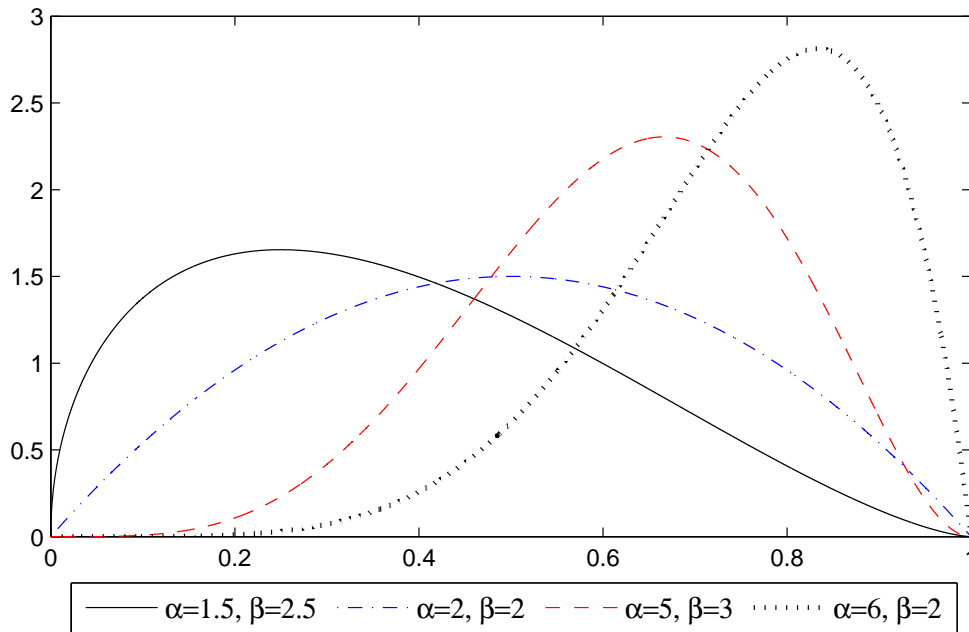


Figura 10: Densidade Beta para alguns valores de parâmetros

Considerando a reparametrização

$$\alpha_{ji} = \exp \left\{ \frac{Da_i(\theta_j - b_i)}{2} \right\} = e^v, \quad (2.4)$$

$$\beta_{ji} = \exp \left\{ -\frac{Da_i(\theta_j - b_i)}{2} \right\} = e^{-v}, \quad (2.5)$$

sendo que $\beta_{ji} = \frac{1}{\alpha_{ji}}$, obtém-se por 2.2

$$\mu_{ji} = \frac{e^v}{e^v + e^{-v}} = \frac{1}{1 + e^{-2v}} = \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_j - b_i)}}, \quad (2.6)$$

chegando ao Modelo Logístico de 2 parâmetros como valor esperado.

Observe a Figura 11 que apresenta este resultado com alguns valores para $\theta_j - b_i$.

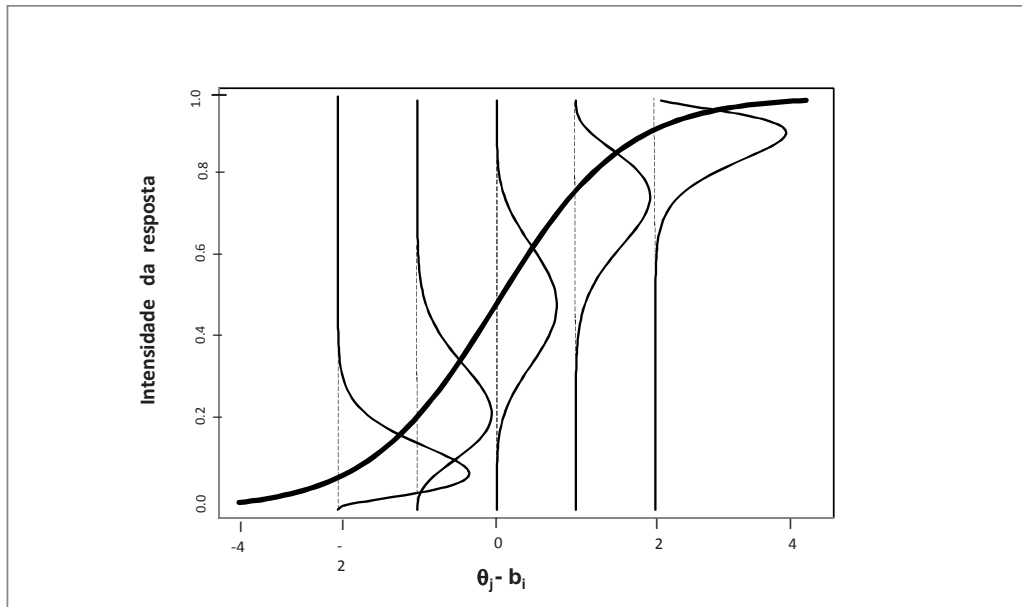


Figura 11: Função Resposta Esperada

2.3 Processo de Estimação dos Parâmetros

A estimação dos parâmetros dos itens é realizada utilizando o procedimento da Máxima Verossimilhança Marginal (Bock & Lieberman, 1970), em que os estimadores são obtidos através da maximização da função de verossimilhança (Bolfarine & Sandoval, 2010). Como as habilidades não são conhecidas, devemos adotar para θ uma distribuição Normal, tendo a função densidade de probabilidade $g(\theta|\boldsymbol{\eta})$, com $\boldsymbol{\eta} = (\mu, \sigma^2) = (0, 1)$.

Desta forma, assumindo que as respostas são independentes entre os indivíduos e que os itens são respondidos de forma independente por cada indivíduo, temos a função de verossimilhança de $\boldsymbol{\zeta}$ correspondente à amostra aleatória observada dada por

$$L(\boldsymbol{\zeta}) = f(\mathbf{u}_{..}|\boldsymbol{\zeta}) = \prod_{j=1}^n f(\mathbf{u}_j|\boldsymbol{\zeta}). \quad (2.7)$$

O logaritmo natural da função de verossimilhança de ζ é denotado por $l(\zeta) = \log L(\zeta)$, sendo que o valor de ζ que maximiza a função de verossimilhança, também maximiza $l(\zeta)$, além de simplificar o processo

$$l(\zeta) = \log L(\zeta) = \sum_{j=1}^n \log f(\mathbf{u}_j | \zeta). \quad (2.8)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança podem ser obtidos como solução das equações

$$\frac{\partial \log L(\zeta)}{\partial \zeta_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{u}_j | \zeta)}{\partial \zeta_i} \frac{1}{f(\mathbf{u}_j | \zeta)} = 0. \quad (2.9)$$

Notemos agora que a função de resposta definida em (2.1) é condicional em θ , de forma que para usarmos devemos observar que

$$f(\mathbf{u}_j | \zeta) = \int_{\mathcal{R}} f(\mathbf{u}_j | \theta, \zeta) g(\theta) d\theta. \quad (2.10)$$

Temos portanto que

$$\frac{\partial \log L(\zeta)}{\partial \zeta_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{f(\mathbf{u}_j | \zeta)} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \int_{\mathcal{R}} f(\mathbf{u}_j | \theta, \zeta) g(\theta) d\theta, \quad (2.11)$$

onde a ordem da integral e da derivada pode ser permutada com base no Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Vejamos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} f(\mathbf{u}_j | \theta, \zeta) g(\theta) d\theta &= \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \prod_{k=1}^I f(u_{jk} | \theta, \zeta_k) \right) g(\theta) d\theta \\
&= \int_{\mathcal{R}} \left(\prod_{k \neq i} f(u_{jk} | \theta, \zeta_k) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} f(u_{ji} | \theta, \zeta_i) \right) g(\theta) d\theta \\
&= \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial f(u_{ji} | \theta, \zeta_i) / \partial \zeta_i}{f(u_{ji} | \theta, \zeta_i)} \right) f(\mathbf{u}_j | \theta, \zeta) g(\theta) d\theta \\
&= \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \log f(u_{ji} | \theta, \zeta_i) \right) f(\mathbf{u}_j | \theta, \zeta) g(\theta) d\theta, \quad (2.12)
\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \log f(u_{ji} | \theta, \zeta_i) &= \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \log \left(\frac{1}{\text{Beta}(\alpha_i, \beta_i)} u_{ji}^{\alpha_i - 1} (1 - u_{ji})^{\beta_i - 1} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \log \left(\frac{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)}{\Gamma(\alpha_i) \Gamma(\beta_i)} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta_i} (\alpha_i - 1) \log u_{ji} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \zeta_i} (\beta_i - 1) \log(1 - u_{ji}) \\
&= \frac{\partial(\alpha_i + \beta_i)}{\partial \zeta_i} \Psi(\alpha_i + \beta_i) - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \zeta_i} \Psi(\alpha_i) - \frac{\partial \beta_i}{\partial \zeta_i} \Psi(\beta_i) + \frac{\partial}{\partial \zeta_i} (\alpha_i - 1) \log u_{ji} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \zeta_i} (\beta_i - 1) \log(1 - u_{ji}), \quad (2.13)
\end{aligned}$$

onde $\Psi(x) = \frac{\partial \log \Gamma(x)}{\partial x}$ é a função digama.

Segue de (2.11) a (2.13) que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log L(\zeta)}{\partial \zeta_i} &= \sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{R}} \left\{ \frac{\partial(\alpha_i + \beta_i)}{\partial \zeta_i} \Psi(\alpha_i + \beta_i) - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \zeta_i} \Psi(\alpha_i) - \frac{\partial \beta_i}{\partial \zeta_i} \Psi(\beta_i) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta_i} (\alpha_i - 1) \log u_{ji} + \frac{\partial}{\partial \zeta_i} (\beta_i - 1) \log(1 - u_{ji}) \right\} g_j^*(\theta) d\theta. \quad (2.14)
\end{aligned}$$

A distribuição

$$g_j^*(\theta) = \frac{f(\mathbf{u}_j | \theta, \zeta) g(\theta)}{f(\mathbf{u}_j | \zeta)} \quad (2.15)$$

é a densidade populacional ajustada pelo vetor de respostas.

Para as expressões

$$\frac{\partial \log L(\boldsymbol{\zeta})}{\partial a_i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\zeta})}{\partial b_i},$$

a partir de (2.4) e (2.5), veja que

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial a_i} = \frac{D(\theta - b_i)}{2} \alpha_i,$$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial a_i} = \frac{-D(\theta - b_i)}{2} \beta_i,$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial b_i} = \frac{-Da_i}{2} \alpha_i$$

e

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial b_i} = \frac{Da_i}{2} \beta_i.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_i} \log f(u_{ji}|\theta, \boldsymbol{\zeta}_i) &= \frac{D(\theta - b_i)}{2} (\alpha_i - \beta_i) \Psi(\alpha_i + \beta_i) - \frac{D(\theta - b_i)}{2} \alpha_i \Psi(\alpha_i) \\ &+ \frac{D(\theta - b_i)}{2} \beta_i \Psi(\beta_i) + \frac{D(\theta - b_i)}{2} \alpha_i \log u_{ji} - \frac{D(\theta - b_i)}{2} \beta_i \log(1 - u_{ji}) \\ &= \left[\frac{D(\theta - b_i)}{2} \right] \{ \alpha_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\alpha_i) + \log u_{ji}] \\ &- \beta_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\beta_i) + \log(1 - u_{ji})] \} \end{aligned} \quad (2.16)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b_i} \log f(u_{ji}|\theta, \boldsymbol{\zeta}_i) &= -\frac{Da_i}{2} (\alpha_i - \beta_i) \Psi(\alpha_i + \beta_i) + \frac{Da_i}{2} \alpha_i \Psi(\alpha_i) \\ &- \frac{Da_i}{2} \beta_i \Psi(\beta_i) - \frac{Da_i}{2} \alpha_i \log u_{ji} + \frac{Da_i}{2} \beta_i \log(1 - u_{ji}) \\ &= \left[-\frac{Da_i}{2} \right] \{ \alpha_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\alpha_i) + \log u_{ji}] \\ &- \beta_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\beta_i) + \log(1 - u_{ji})] \}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Considerando

$$\lambda_{1,ji} = \alpha_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\alpha_i) + \log u_{ji}] \quad (2.18)$$

$$\lambda_{2,ji} = \beta_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\beta_i) + \log(1 - u_{ji})] \quad (2.19)$$

teremos,

$$\frac{\partial \log L(\zeta)}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{D(\theta - b_i)}{2} [\lambda_{1,ji} - \lambda_{2,ji}] g_j^*(\theta) d\theta \quad (2.20)$$

e

$$\frac{\partial \log L(\zeta)}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} -\frac{Da_i}{2} [\lambda_{1,ji} - \lambda_{2,ji}] g_j^*(\theta) d\theta. \quad (2.21)$$

Estimativas dos parâmetros são obtidas igualando estas primeiras derivadas a zero. Por não possuir solução explícita é preciso utilizar métodos iterativos para se obter o Estimador de Máxima Verossimilhança dos parâmetros dos itens. Na aplicação do algoritmo Newton-Raphson (veja Andrade, D. F., Tavares, H. R., Valle, R. C., 2000) serão utilizadas as expressões para as segundas derivadas parciais de $\log L(\zeta)$ que virão a seguir:

$$\frac{\partial^2 \log L(\zeta)}{\partial \zeta_i \partial \zeta'_i} = \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta'_i} \log L(\zeta) \right]$$

por (2.9)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\zeta})}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i \partial \boldsymbol{\zeta}'_i} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})}{\partial \boldsymbol{\zeta}'_i} \frac{1}{f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})} \right] \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i} \left(\frac{\partial f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})}{\partial \boldsymbol{\zeta}'_i} \frac{1}{f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})} \right) \right] \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i \partial \boldsymbol{\zeta}'_i} \frac{1}{f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})} + \frac{\partial f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})}{\partial \boldsymbol{\zeta}'_i} \frac{\partial f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})^{-1}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i} \right] \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i \partial \boldsymbol{\zeta}'_i} \frac{1}{f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})} - \left(\frac{\partial f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i} \frac{1}{f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})} \right) \left(\frac{\partial f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})}{\partial \boldsymbol{\zeta}'_i} \frac{1}{f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})} \right) \right],
\end{aligned} \tag{2.22}$$

para $i = 1, \dots, I$, sendo que, por (2.10),(2.15)e (2.12)

$$\frac{\partial f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i} \frac{1}{f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})} = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i} \log f(u_{ji} | \theta, \boldsymbol{\zeta}_i) \right) g_j^*(\theta) d\theta$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i \partial \boldsymbol{\zeta}'_i} \frac{1}{f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}'_i} \left[\frac{\partial f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i} \right] \frac{1}{f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})} \\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}'_i} \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i} \log f(u_{ji} | \theta, \boldsymbol{\zeta}_i) \right) f(\mathbf{u}_j | \theta, \boldsymbol{\zeta}) g(\theta) d\theta \right] \frac{1}{f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}'_i} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i} \log f(u_{ji} | \theta, \boldsymbol{\zeta}_i) \right) f(\mathbf{u}_j | \theta, \boldsymbol{\zeta}) \right] \frac{1}{f(\mathbf{u}_j | \boldsymbol{\zeta})} g(\theta) d\theta \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i \partial \boldsymbol{\zeta}'_i} \log f(u_{ji} | \theta, \boldsymbol{\zeta}_i) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}_i} \log f(u_{ji} | \theta, \boldsymbol{\zeta}_i) \right] \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}'_i} \log f(u_{ji} | \theta, \boldsymbol{\zeta}_i) \right] \right\} g_j^*(\theta) d\theta.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Mas ainda temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \zeta_i \partial \zeta_i'} \log f(u_{ji} | \theta, \zeta_i) &= \frac{\partial}{\partial \zeta_i'} \left[\frac{\partial(\alpha_i + \beta_i)}{\partial \zeta_i} \Psi(\alpha_i + \beta_i) - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \zeta_i} \Psi(\alpha_i) - \frac{\partial \beta_i}{\partial \zeta_i} \Psi(\beta_i) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial \zeta_i} (\alpha_i - 1) \log u_{ji} + \frac{\partial}{\partial \zeta_i} (\beta_i - 1) \log(1 - u_{ji}) \\
&= \frac{\partial^2(\alpha_i + \beta_i)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_i'} \Psi(\alpha_i + \beta_i) + \frac{\partial(\alpha_i + \beta_i)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial(\alpha_i + \beta_i)}{\partial \zeta_i'} \Psi'(\alpha_i + \beta_i) - \frac{\partial^2(\alpha_i)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_i'} \Psi(\alpha_i) \\
&- \frac{\partial(\alpha_i)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial(\alpha_i)}{\partial \zeta_i'} \Psi'(\alpha_i) - \frac{\partial^2(\beta_i)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_i'} \Psi(\beta_i) - \frac{\partial(\beta_i)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial(\beta_i)}{\partial \zeta_i'} \Psi'(\beta_i) \\
&+ \frac{\partial^2(\alpha_i - 1)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_i'} \log u_{ji} + \frac{\partial^2(\beta_i - 1)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_i'} \log(1 - u_{ji}) \\
&= \frac{\partial(\alpha_i + \beta_i)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial(\alpha_i + \beta_i)}{\partial \zeta_i'} \Psi'(\alpha_i + \beta_i) - \frac{\partial(\alpha_i)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial(\alpha_i)}{\partial \zeta_i'} \Psi'(\alpha_i) - \frac{\partial(\beta_i)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial(\beta_i)}{\partial \zeta_i'} \Psi'(\beta_i) \\
&+ \frac{\partial^2(\alpha_i)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_i'} [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\alpha_i) + \log u_{ji}] + \frac{\partial^2(\beta_i)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_i'} [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\beta_i) + \log(1 - u_{ji})].
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Sabendo-se que

$$\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial a_i \partial a_i} = \left[\frac{D(\theta - b_i)}{2} \right]^2 \alpha_i,$$

$$\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial a_i \partial a_i} = \left[\frac{-D(\theta - b_i)}{2} \right]^2 \beta_i,$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial b_i \partial b_i} = \left[\frac{-Da_i}{2} \right]^2 \alpha_i,$$

$$\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial b_i \partial b_i} = \left[\frac{Da_i}{2} \right]^2 \beta_i,$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial a_i \partial b_i} = \frac{-D}{2} \left[\frac{Da_i(\theta - b_i)}{2} + 1 \right] \alpha_i$$

e

$$\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial a_i \partial b_i} = \frac{-D}{2} \left[\frac{Da_i(\theta - b_i)}{2} - 1 \right] \beta_i,$$

e substituindo em (2.24) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_i} \log f(u_{ji} | \theta, \zeta_i) &= \left[\frac{D(\theta - b_i)}{2} (\alpha_i - \beta_i) \right]^2 \Psi'(\alpha_i + \beta_i) \\
&- \left[\frac{D(\theta - b_i)}{2} \alpha_i \right]^2 \Psi'(\alpha_i) - \left[\frac{-D(\theta - b_i)}{2} \beta_i \right]^2 \Psi'(\beta_i) \\
&+ \left[\frac{D(\theta - b_i)}{2} \right]^2 \alpha_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\alpha_i) + \log u_{ji}] \\
&+ \left[\frac{-D(\theta - b_i)}{2} \right]^2 \beta_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\beta_i) + \log(1 - u_{ji})] \\
&= \left[\frac{D(\theta - b_i)}{2} \right]^2 \{ (\alpha_i - \beta_i)^2 \Psi'(\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \Psi'(\alpha_i) - \beta_i^2 \Psi'(\beta_i) \\
&+ \alpha_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\alpha_i) + \log u_{ji}] + \beta_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\beta_i) + \log(1 - u_{ji})] \} \\
&= \left[\frac{D(\theta - b_i)}{2} \right]^2 [\lambda_{1,ji} + \lambda_{2,ji} + \lambda_{3,i}], \tag{2.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial b_i \partial b_i} \log f(u_{ji} | \theta, \zeta_i) &= \left[\frac{-Da_i}{2} (\alpha_i - \beta_i) \right]^2 \Psi'(\alpha_i + \beta_i) \\
&- \left[\frac{-Da_i}{2} \alpha_i \right]^2 \Psi'(\alpha_i) - \left[\frac{Da_i}{2} \beta_i \right]^2 \Psi'(\beta_i) \\
&+ \left[\frac{-Da_i}{2} \right]^2 \alpha_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\alpha_i) + \log u_{ji}] \\
&+ \left[\frac{Da_i}{2} \right]^2 \beta_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\beta_i) + \log(1 - u_{ji})] \\
&= \left[\frac{Da_i}{2} \right]^2 \{ (\alpha_i - \beta_i)^2 \Psi'(\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \Psi'(\alpha_i) - \beta_i^2 \Psi'(\beta_i) \\
&+ \alpha_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\alpha_i) + \log u_{ji}] + \beta_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\beta_i) + \log(1 - u_{ji})] \} \\
&= \left[\frac{Da_i}{2} \right]^2 [\lambda_{1,ji} + \lambda_{2,ji} + \lambda_{3,i}] \tag{2.26}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial b_i} \log f(u_{ji} | \theta, \zeta_i) &= \frac{D(\theta - b_i)}{2} (\alpha_i - \beta_i) \left(\frac{-Da_i}{2} \right) (\alpha_i - \beta_i) \Psi'(\alpha_i + \beta_i) \\
&- \frac{D(\theta - b_i)}{2} \alpha_i \left(\frac{-Da_i}{2} \right) \alpha_i \Psi'(\alpha_i) - \left[\frac{-D(\theta - b_i)}{2} \right] \beta_i \frac{Da_i}{2} \beta_i \Psi'(\beta_i) \\
&+ \left[\frac{-D}{2} \right] \left[\frac{Da_i(\theta - b_i)}{2} + 1 \right] \alpha_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\alpha_i) + \log u_{ji}] \\
&+ \left[\frac{-D}{2} \right] \left[\frac{Da_i(\theta - b_i)}{2} - 1 \right] \beta_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\beta_i) + \log(1 - u_{ji})] \\
&= \left[\frac{-D}{2} \right] \left\{ \left[\frac{Da_i(\theta - b_i)}{2} \right] [(\alpha_i - \beta_i)^2 \Psi'(\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \Psi'(\alpha_i) - \beta_i^2 \Psi'(\beta_i)] \right. \\
&+ \left[\frac{Da_i(\theta - b_i)}{2} + 1 \right] \alpha_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\alpha_i) + \log u_{ji}] \\
&+ \left. \left[\frac{Da_i(\theta - b_i)}{2} - 1 \right] \beta_i [\Psi(\alpha_i + \beta_i) - \Psi(\beta_i) + \log(1 - u_{ji})] \right\}. \\
&= \left[\frac{-D}{2} \right] \left\{ \left[\frac{Da_i(\theta - b_i)}{2} \right] [\lambda_{1,ji} + \lambda_{2,ji} + \lambda_{3,i}] + \lambda_{1,ji} - \lambda_{2,ji} \right\}. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

considerando

$$\lambda_{3,i} = (\alpha_i - \beta_i)^2 \Psi'(\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \Psi'(\alpha_i) - \beta_i^2 \Psi'(\beta_i). \tag{2.28}$$

Admitindo $\hat{\zeta}^{(t)}$ a estimativa de ζ na iteração t , então na iteração seguinte tem-se

$$\hat{\zeta}_i^{(t+1)} = \hat{\zeta}_i^{(t)} - [\mathbf{H}(\hat{\zeta}_i^{(t)})]^{-1} \mathbf{h}(\hat{\zeta}_i^{(t)}), \tag{2.29}$$

onde

$$\mathbf{H}(\zeta_i) \equiv \frac{\partial^2 \log L(\zeta)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_i} \tag{2.30}$$

e

$$\mathbf{h}(\zeta_i) \equiv \frac{\partial \log L(\zeta)}{\partial \zeta_i}. \tag{2.31}$$

3 *Aplicação a Dados Simulados*

Neste capítulo será apresentada a aplicação do método utilizando dados simulados, gerados com base em amostras de $n = 1000$ indivíduos e processado em $R = 1000$ réplicas para se verificar a eficiência na estimação. Foi gerado um teste com $I = 100$ itens a fim de testar o desempenho do modelo. Os parâmetros de dificuldades dos itens foram gerados considerando a distribuição normal com parâmetro $\eta = (\mu, \sigma^2) = (0, 1)$. As habilidades também foram geradas de acordo com uma $N(0,1)$. Os parâmetros de discriminação foram gerados aleatoriamente de uma distribuição uniforme no intervalo $[0.5; 2]$.

As informações referentes aos parâmetros dos itens que foram gerados e posteriormente estimados utilizando o programa elaborado, se encontram no Apêndice A.

3.1 Estimativas Iniciais

Consideramos o fator de escala $D=1$. Foi adotado $a_i^{(0)} = 1$ como valor inicial para todos os parâmetros de discriminação. Para os parâmetros de dificuldade tomou-se a equação $b_i^{(0)} = \log\left(\frac{1-\delta_i}{\delta_i}\right)$, onde $\delta_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_{ji}$, ou seja, a média das respostas dadas ao item i pelos n indivíduos.

3.2 Programa Computacional

Tomando como base as informações relatadas anteriormente neste capítulo, e as fórmulas apresentadas no Capítulo 2, foi desenvolvido o algoritmo utilizado, que se encontra no Apêndice B.

Os cálculos foram realizados através do MATLAB 7.6 (MATrix LABoratory), um *software* com linguagem de computação de alto nível onde se pode analisar dados, desenvolver algoritmos, e criar modelos e aplicações incluindo processamento de imagens.

3.3 Resultados

É apresentado na Tabela 1 os itens que tiveram maior erro:

Tabela 1: Exemplos estimados com maior erro

Item	a-simulado	a-estimado	ϵ_a	b-simulado	b-estimado	ϵ_b
27	1.9422	1.7081	0.2341	2.0564	2.2390	0.1826
47	1.9274	1.7268	0.2006	-1.9371	-2.0770	0.1399

Observa-se que os itens com piores estimações para os parâmetros de discriminação são os mesmos referentes aos parâmetros de dificuldade (Item-27 e Item-47). Este fato ocorre na combinação entre valores extremos de b_i e altos valores de a_i .

Em relação às melhores estimativas observadas na Tabela 2, a_{35} , a_{56} e a_{93} possuem os menores erros, mas não há coincidência com o outro parâmetro, sendo que b_{13} , b_{34} e b_{89} tiveram ótimos resultados.

Tabela 2: Exemplos estimados com menor erro

Item	a-simulado	a-estimado	ϵ_a	b-simulado	b-estimado	ϵ_b
13	1.6407	1.6008	0.0399	-0.2475	-0.2483	0.0008
34	0.6119	0.5996	0.0123	-0.1525	-0.1529	0.0004
35	0.5491	0.5406	0.0085	-0.8878	-0.9034	0.0156
56	0.5522	0.5440	0.0082	-0.6323	-0.6374	0.0051
89	1.4024	1.3736	0.0288	-0.2897	-0.2901	0.0004
93	0.5287	0.5191	0.0096	0.8028	0.8310	0.0282

Ao se calcular os erros quadráticos médios

$$EQM_{\zeta} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\hat{\zeta}_i - \zeta)^2,$$

foram encontrados $EQM_a = 0.0027$ e $EQM_b = 0.0013$, considerando portanto satisfatório os resultados apresentados.

A Figura 12 apresenta graficamente o comportamento dos parâmetros de discriminação, onde pode-se perceber itens mal estimados para valores altos. Na Figura 13 estão os resultados encontrados nesta simulação para os parâmetros de dificuldade.

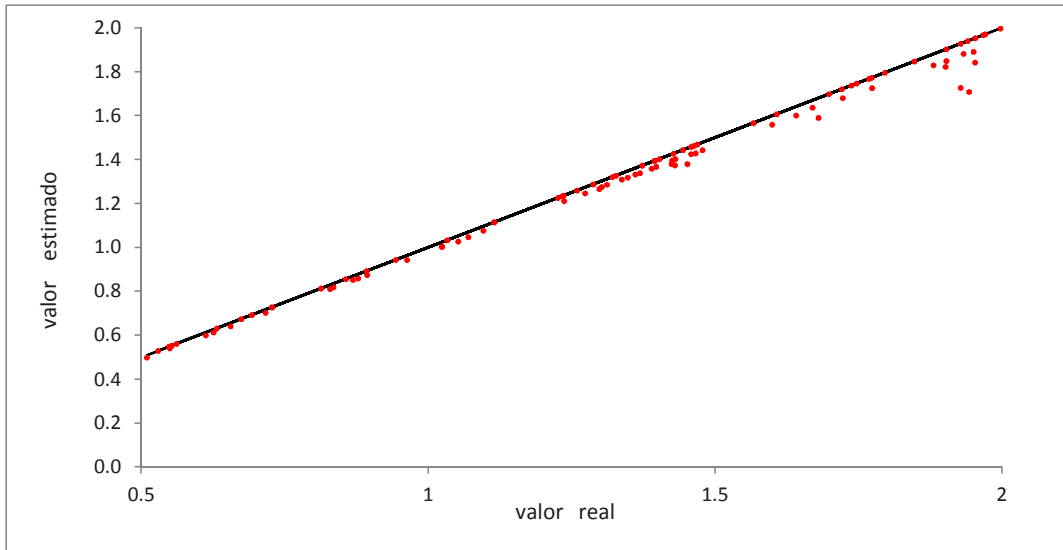


Figura 12: Estimativas do parâmetro de inclinação

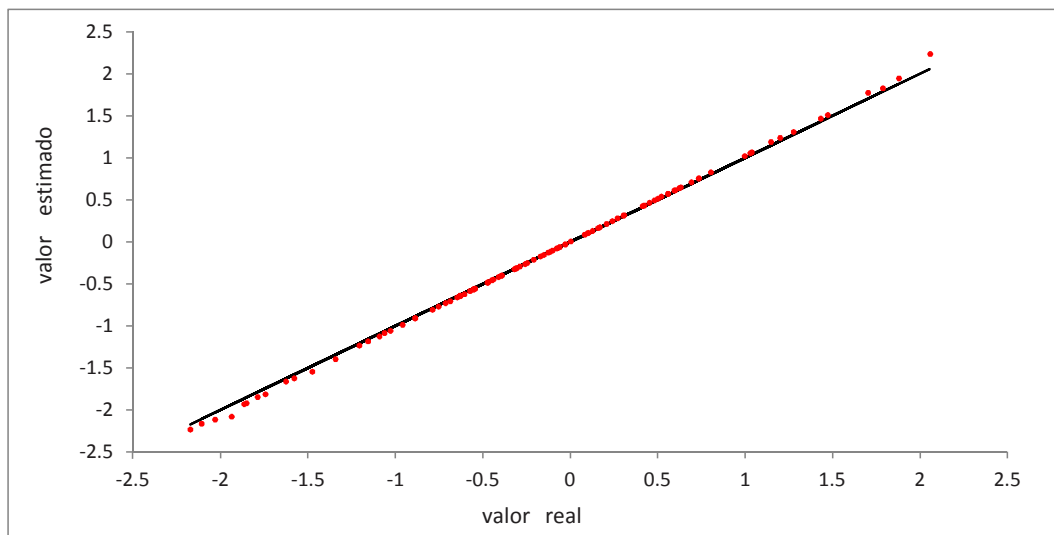


Figura 13: Estimativas do parâmetro de posição

4 *Conclusões e Sugestões*

4.1 Conclusões

Neste trabalho apresentou-se uma visão geral sobre os modelos matemáticos propostos pela Teoria da Resposta ao Item, seus avanços no decorrer de décadas e o aumento do interesse por sua aplicação em inúmeras áreas. Mesmo com uma longa história, e se tornando uma técnica predominante em vários países, a TRI pouco evoluiu na análise de respostas contínuas, até então pouco utilizada. Tais aplicações vão desde estudos em que os avaliados marcam os resultados em escalas contínuas de 1 a 10, por exemplo, ou reconstrução de imagens.

Apresentou-se a função de densidade beta para a resposta contínua limitada dada por um indivíduo com habilidade θ_j proposta por Noel & Duvier(2007), que usou Máxima verossimilhança Conjunta no processo de Estimação dos parâmetros. A distribuição beta pode assumir formas bastante diferenciadas a depender de seus parâmetros. Considerando a Esperança Matemática da mesma e objetivando escrevê-la através de um modelo logístico conhecido, seus parâmetros foram reparametrizados, com $\beta_{ji} = \frac{1}{\alpha_{ji}}$ funções de θ_j , a_i e b_i . Foram obtidas as Equações de Estimação baseadas em Máxima Verossimilhança Marginal, mais adotado atualmente, sendo adotado para θ uma distribuição Normal Padrão, já que as habilidades não eram conhecidas.

Utilizou-se o MATLAB 7.6 para desenvolver um algoritmo que realizasse o processo de estimação. Foi fixado um conjunto de parâmetros de itens (ver Apêndice A) e foram simuladas 1000 bases de dados (réplicas) para fins de análise do processo de estimação. Aplicou-se o processo para cada banco de dados e se verificou que os parâmetros dos itens foram muito bem estimados, com resultados que se mostraram bastante promissores para fins de aplicação.

4.2 Sugestões

- Sugere-se que novos estudos sejam realizados para estimar a proficiência, θ .
- Propõe-se ainda para trabalhos futuros a aplicação em imagens simuladas e reais na correção de erros ou sujeiras ocasionadas por motivos diversos.
- Sugere-se a aplicação de novos métodos de estimação, tais como Monte Carlo Markov Chain (MCMC).

APÊNDICE A – Tabela dos Parâmetros Simulados e Estimados

Item	discriminação - a		dificuldade - b		Item	discriminação - a		dificuldade - b	
	Real	Estimado	Real	Estimado		Real	Estimado	Real	Estimado
1	1.6693	1.6365	0.1681	0.1773	51	1.4682	1.4038	-1.8523	-1.9172
2	0.8771	0.8588	0.2688	0.2831	52	1.7728	1.7322	0.5001	0.5169
3	1.3474	1.3180	-0.3127	-0.3152	53	1.9530	1.9015	-0.0737	-0.0716
4	1.8801	1.8295	0.5582	0.5757	54	1.3206	1.2941	0.4226	0.4362
5	0.8284	0.8106	-0.7542	-0.7673	55	1.9399	1.8637	-0.9599	-0.9842
6	1.3687	1.3383	-0.5544	-0.5628	56	0.5522	0.5440	-0.6323	-0.6374
7	0.8345	0.8192	1.7862	1.8305	57	1.4578	1.3982	1.8778	1.9492
8	1.9526	1.8420	-1.3430	-1.3930	58	0.6737	0.6604	-0.3935	-0.3982
9	1.9026	1.8490	0.5937	0.6136	59	1.3948	1.3625	-0.2594	-0.2615
10	0.5091	0.4981	0.3063	0.3209	60	1.4433	1.4103	-0.6277	-0.6390
11	1.4775	1.4429	0.1260	0.1330	61	0.6309	0.6189	0.0974	0.1054
12	1.7731	1.7259	-0.5548	-0.5638	62	1.7463	1.7026	-0.5743	-0.5820
13	1.6407	1.6008	-0.2475	-0.2483	63	1.4267	1.3687	-1.8653	-1.9283
14	1.4247	1.3960	0.2393	0.2500	64	1.9275	1.8771	0.4123	0.4286
15	1.2364	1.2110	-0.4407	-0.4450	65	0.5608	0.5489	-1.0631	-1.0818
16	1.6798	1.5900	1.7014	1.7774	66	1.6983	1.6562	-0.4750	-0.4822
17	1.3890	1.3587	-0.1017	-0.0997	67	0.7272	0.7144	-0.3924	-0.3975
18	0.8930	0.8744	0.5201	0.5420	68	0.7274	0.7140	-0.4725	-0.4815
19	1.4296	1.3738	-1.7884	-1.8445	69	0.8921	0.8739	0.4806	0.4982
20	1.3370	1.3094	0.3024	0.3141	70	1.1143	1.0821	-2.1731	-2.2305
21	1.9500	1.8910	-0.6303	-0.6414	71	1.3268	1.2949	1.4307	1.4701
22	1.3111	1.2858	-0.1270	-0.1235	72	1.0329	1.0108	-1.6264	-1.6594
23	1.3969	1.3671	-0.3117	-0.3127	73	0.8128	0.7960	-0.7886	-0.8046
24	1.9012	1.8226	-1.0919	-1.1224	74	0.8560	0.8401	0.6913	0.7122
25	1.9326	1.8815	-0.3208	-0.3225	75	1.2352	1.2097	0.0813	0.0885
26	1.0233	1.0028	-0.7142	-0.7263	76	1.1148	1.0857	-2.1087	-2.1616
27	1.9422	1.7081	2.0564	2.2390	77	1.2587	1.2303	1.2756	1.3111
28	1.3605	1.3322	-0.2101	-0.2089	78	1.7678	1.7049	-1.0292	-1.0556
29	1.0956	1.0760	-0.1158	-0.1146	79	0.6921	0.6789	-0.0300	-0.0271
30	1.4657	1.4288	-0.8882	-0.9070	80	1.8468	1.7941	0.7335	0.7572
31	1.4303	1.4022	0.5992	0.6189	81	1.2330	1.2056	0.4520	0.4687
32	1.0237	1.0043	-0.4704	-0.4763	82	1.5664	1.5244	1.0365	1.0689
33	0.6551	0.6410	1.1987	1.2401	83	1.7368	1.6926	-0.4111	-0.4154
34	0.6119	0.5996	-0.1525	-0.1529	84	1.9024	1.8442	0.7341	0.7587
35	0.5491	0.5406	-0.8878	-0.9034	85	1.9968	1.9018	1.1464	1.1922
36	1.0694	1.0471	-1.2068	-1.2306	86	1.3938	1.3655	0.1023	0.1095
37	1.5989	1.5594	0.6230	0.6437	87	1.7204	1.6782	0.6307	0.6520
38	0.9626	0.9428	-0.1720	-0.1706	88	1.2874	1.2614	-0.0781	-0.0748
39	0.7159	0.7026	0.5574	0.5734	89	1.4024	1.3736	-0.2897	-0.2901
40	1.3019	1.2751	0.9962	1.0243	90	1.2339	1.2097	0.1576	0.1663
41	1.2977	1.2664	-1.1574	-1.1809	91	1.9705	1.8381	-1.4758	-1.5424
42	1.2730	1.2464	-0.3069	-0.3093	92	1.3725	1.3458	-0.4495	-0.4543
43	1.7220	1.6802	-0.0614	-0.0583	93	0.5287	0.5191	0.8028	0.8310
44	0.6255	0.6129	-0.6877	-0.7034	94	1.4617	1.4288	-0.6478	-0.6581
45	1.4236	1.3801	-1.5793	-1.6211	95	0.5476	0.5371	-0.5495	-0.5568
46	1.0518	1.0266	-0.6061	-0.6197	96	1.6070	1.5268	-1.7439	-1.8106
47	1.9274	1.7268	-1.9371	-2.0770	97	1.2256	1.2015	-0.0290	-0.0258
48	0.8683	0.8521	0.2063	0.2168	98	0.9429	0.9220	1.4711	1.5131
49	1.4511	1.3796	-2.0316	-2.1121	99	1.9670	1.9071	-0.5446	-0.5532
50	1.4578	1.4251	1.0285	1.0591	100	1.7954	1.7540	0.0014	0.0078

Figura 14: Parâmetros Simulados e Estimados

APÊNDICE B - Programa em Matlab

```
% Inicialmente é declarado os valores relacionados ao número de itens,  
% tamanho da amostra e repetições.
```

```
I=100;  
n=1000;  
r=1000;
```

```
% Simula as variáveis que não serão modificadas em relação às réplicas.  
% - Parâmetros de discriminação e dificuldade.
```

```
a=.5+1.5*rand(1,I);  
b=randn(1,I);
```

```
% - Pontos de quadratura, dimensão do vetor e valores da fdp.
```

```
d=.25;  
Q=(-4:d:4)';  
q=length(Q);  
g=normpdf(Q);
```

```
% Declara a matriz que receberá os valores estimados em cada repetição.
```

```
R=ones(r,2*I);
```

```
% Início de cada réplica
```

```
for k=1:r
```

```

disp('INÍCIO DA REPETIÇÃO: '),disp(k);

% Amostra aleatória composta de 1000 indivíduos.

theta=randn(n,1);
alfa=ones(n,I);
u=ones(n,I);
LU=ones(n,I);
lu=ones(n,I);

% Matriz u: dados-resposta
for i=1:I
    alfa(:,i)= exp( .5 * a(i) * (theta - b(i)));
    for j=1:n
        u(j,i)=betarnd(alfa(j,i),1./alfa(j,i));
        if u(j,i)<10^-15
            u(j,i)=10^-15;
        elseif u(j,i)>1-10^-15;
            u(j,i)=1-10^-15;
        end
        LU(j,i)=log(u(j,i));
        lu(j,i)=log(1-u(j,i));
    end
end

% Cálculo dos valores iniciais para os parâmetros

mu=mean(u);
a1=ones(1,I);
b1=log((1-mu)./(mu));
parf=[a1;b1];

M=1;

```

```

c=0;

disp('INÍCIO DAS ITERAÇÕES!');

while M>10^-4 && c<1000

    alfa1=ones(q,I);
    betha1=ones(q,I);

    s=0; for i=1:I
        alfa1(:,i)= exp(.5 * a1(i) * (Q - b1(i)));
        betha1(:,i)=1./alfa1(:,i);
        s=s+((alfa1(:,i)-1)*ones(1,n)).*(ones(q,1)*LU(:,i)')...
            +((betha1(:,i)-1)*ones(1,n)).*(ones(q,1)*lu(:,i)')...
            -(beta1n(alfa1(:,i),betha1(:,i)))*ones(1,n);
    end

    F=max(max(s)); if F>709
        w=0;
        while F>709
            F=F-709;
            w=w+1;
        end
        F=F+709*(w-1);
        f=F*ones(q,n);
        S=s-f;
    else
        S=s;
    end

    Nu=exp(S) .* (g*ones(1,n));
    De=ones(q,1)*d*sum(Nu)+(10^-320)*ones(q,n);
    ge=Nu./De;

```



```

soma=alfa1+betha1;
sub=alfa1-betha1;
m=ones(1,I);

% Início da atualização de cada parâmetro, por item.
for i=1:I

X1=sub(:,i).^2.*psi(1,soma(:,i))-alfa1(:,i).^2.*psi(1,alfa1(:,i))...
    -betha1(:,i).^2.*psi(1,betha1(:,i));
X2=alfa1(:,i)*ones(1,n).*((psi(soma(:,i))-psi(alfa1(:,i)))*ones(1,n)...
    +(ones(q,1)*LU(:,i)'));
X3=betha1(:,i)*ones(1,n).*((psi(soma(:,i))-psi(betha1(:,i)))*ones(1,n)...
    +(ones(q,1)*lu(:,i)'));
X4=X1*ones(1,n)+X2+X3;

A=(.5*(Q-b1(i)))*ones(1,n).*(X2-X3);
hjia=d*sum(A.*ge);
ha=sum(hjia);

B=-.5*a1(i)*(X2-X3);
hjib=d*sum(B.*ge);
hb=sum(hjib);

AA=(.5*(Q-b1(i))).^2*ones(1,n).*X4;
Hjiaa=d*sum((AA+A.*A).*ge);
Haa=sum(Hjiaa-hjia.*hjia);

BB=(.5*a1(i))^2*X4;
Hjibb=d*sum((BB+B.*B).*ge);
Hbb=sum(Hjibb-hjib.*hjib);

AB=-.5*(.5*a1(i)*(Q-b1(i)).*X1*ones(1,n)+(.5*a1(i)*(Q-b1(i))+1)...
    *ones(1,n).*X2+(.5*a1(i)*(Q-b1(i))-1)*ones(1,n).*X3);
Hjiab=d*sum((AB+A.*B).*ge);

```

```

Hab=sum(Hjiab-hjia.*hjib);

% Matriz de primeiras derivadas:

hab=[ha;hb];

% Matriz de segundas derivadas:

HAB=[Haa Hab;Hab Hbb];

% Atualização dos parâmetros

delta=inv(HAB)*hab;
parf(:,i)=parf(:,i)-delta;
m(i)=max(abs(delta));
a1(i)=parf(1,i);
b1(i)=parf(2,i);

end

% Cálculo do maior 'erro' até este momento e do número de iterações.
%           (critério de parada)

M=max(m);
c=c+1;

disp('.....I.t.e.r.a.ç.ã.o.....:'),disp(c);

end

R(k,:)=reshape(parf,1,[]);

end

% Média dos valores estimados nas 1000 réplicas.

```

```
mr=mean(R);  
mab=vec2mat(mr,2)';  
  
% Representação gráfica dos resultados.  
  
subplot(2,2,1),plot(a,a,a,mab(1,:),'.r');  
subplot(2,2,2),plot(b,b,b,mab(2,:),'.r');  
subplot(2,2,3),plot(a-mab(1,:),'.r');  
subplot(2,2,4),plot(b-mab(2,:),'.r');  
  
disp('... T ... E ... R ... M... I ... N ... O ... U ...');
```

Referências Bibliográficas

- ANDRADE, D. F., TAVERES, H. R., VALLE, R. C. *Teoria da Resposta ao Item: conceitos e aplicações*. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística, 2000.
- ANDRICH, D. A rating formulation for ordered response categories. *Psychometrika*, v. 43, n. 4, p. 561-573, dec. 1978.
- BEJAR, I. I. An application of the continuous response model to personality measurement. *Applied Psychological Measurement*, v. 1, p. 509-521, 1977.
- BIRNBAUM, A. Some latent trait models and their use in Inferring an Examinee's Ability. In LORD, F.M. & NOVICK, M.R. *Statistical theories of mental test scores*. Reading, MA: Addison - Wesley, 1968.
- BOCK, R. D. Estimating item parameters and latent ability when responses are scored in two or more nominal categories. *Psychometrika*, v. 37, n. 1, p. 29-51, mar. 1972.
- BOCK, R. D. and LIEBERMAN, M. Fitting a response model for n dichotomously scored items. *Psychometrika*, v. 35, n. 2, p. 179-197, june, 1970.
- BOCK, R. D. and ZIMOWSKI, M. F. Multiple Group IRT. In W.J. van der Linder & R.K. Hambleton (Eds.). *Handbook of Modern Item Response Theory*. New York: Springer-Verlag, 1997.
- BOLFARINE, H., SANDOVAL, M. C. *Introdução à Inferência Estatística*. Coleção Matemática Aplicada. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- FERRANDO, P. J. A nonlinear congeneric model for continuous item responses. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, v. 54, n.2, p. 293-313, 2001.
- LIKERT, R. A technique for the measurement of attitudes. *Archives of Psychology*, v. 140, p. 5-53, 1932.
- LORD, F. M. A theory of test scores. *Psychometric Monography*, n. 7, 1952.
- LORD, F. M and NOVICK, M. R. *Statistical theories of mental test scores*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1968.

- MASTERS, G. N. A Rasch model for partial credit scoring. *Psychometrika*, v. 47, n. 2, p. 149-174, june, 1982.
- MCKELVIE, S. J. Graphic rating scales: How many categories? *British Journal of Psychology*, v. 69, p. 185-202, 1978.
- MELLENBERGH, G. J. A unidimensional latent trait model for continuous item responses. *Multivariate Behavioral Research*, v. 29, p. 223-236, 1994.
- MORIN, C. & BUSHNELL, M. C. Temporal and qualitative properties of cold pain and heat pain: A psychophysical study. *Pain*, v. 4, p. 67-73, 1998.
- MÜLLER, H. A Rasch model for continuous ratings. *Psychometrika*, v. 52, n. 2, p. 165-181, june, 1987.
- MURAKI, E. A generalized partial credit model: Application of an EM algorithm. *Applied Psychological Measurement*, v. 16, n. 2, p. 159-176, june, 1992.
- NOEL, Y. and DUVIER, B. A Beta Item Response Model for Continuous Bounded Responses. *Applied Psychological Measurement*, v. 31, n. 1, p. 47-73, jan, 2007.
- PFENNINGS, L., COHEN, L. & van der PLOEG, H. Preconditions for sensitivity in measuring change: visual analogue scales compared to rating scales in a Likert format. *Psychological Reports*, v. 77, p. 475-480, 1995.
- RASH, G. *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. Copenhagen: Danish Institute for Educational Research, 1960.
- RUSSEL, C. J. & BOBKO, P. Moderated regression on analysis and Likert type scales: too coarse for comfort. *Journal of Applied Psychology*, v. 77, p. 336-342, 1992.
- SAMEJIMA, F. A. Estimation of latent ability using a response pattern of graded scores. *Psychometric Monograph*, v. 17, 1969.
- SAMEJIMA, F. A. Homogeneous case of the continuous response model. *Psychometrika*, v. 38, n. 2, p. 203-219, june, 1973.
- SAMEJIMA, F. A. Normal ogive model on the continuous response level in the multidimensional latent space. *Psychometrika*, v. 39, n. 1, p. 111-121, mar. 1974.
- WRIGHT, B. D. *Sample-free test calibration and person measurement*. Proceedings of the 1967 Invitational Conference on Testing Problems. Princeton, N.I.: Educational Testing Service, 1968.