UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Existência de uma solução positiva para problemas do tipo Kirchhoff sem condição de compacidade

Tarcyana do Socorro Figueiredo de Sousa

BELÉM

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Existência de uma solução positiva para problemas do tipo Kirchhoff sem condição de compacidade

Tarcyana do Socorro Figueiredo de Sousa

ORIENTADOR: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

BELÉM

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Sousa, Tarcyana do Socorro Figueiredo, 1989-
Existência de uma solução positiva para problemas do tipo kirchhoff sem condição de compacidade / Tarcyana do Socorro Figueiredo Sousa. - 2013.

Orientador: Giovany Figueiredo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2013.

1. Cálculo das variações. I. Título.
CDD 22. ed. 515.64

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Tarcyana do Socorro Figueiredo de Sousa

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Data da defesa: 26 de setembro de 2013.

Conceito: Aprovado

Banca Examinadora

____

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)

PPGME - UFPA

Ricardo Ruviaro

____

Prof. Dr. Ricardo Ruviaro

UNB

F. Corrêa

____

Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araújo Corrêa

PPGME - UFPA

Dedicatória

Aos meus pais, Tarciso e Anayle.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus.

Aos meus pais, Tarciso e Anayle, pela dedicação e amor ao longo da minha vida.

Agradeço ao meu irmão Caio e meu avô Edilton pelo apoio que me deram.

Ao meu noivo, Leandro, por todo seu amor e compreensão nos momentos difíceis.

Agradeço ao professor Giovany, por todo incentivo, dedicação, paciência e por acreditar no meu potêncial. Muito obrigada!

A todos os professores do PPGME que contribuiram na minha formação.

Agradeço aos professores Francisco Júlio S. A. Corrêa e Ricardo Ruviaro por terem aceito participar da banca examinadora.

A equipe de funcionárias do PPGME Dayana, Rayana, Cecilia e Carmem, pela ajuda em tudo que era necessário na secretaria.

Agradeço aos meus colegas de turma pela convivência. Em especial ao meu amigo Ryan, pelo companheirismo durante esses anos.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos que contribuiram direta ou indiretamente a conquistar mais essa vitória.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a existência de soluções positivas para o problema do tipo Kirchhoff dado por:

$$\left(a + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda b \int_{\mathbb{R}^N} u^2\right) [-\Delta u + bu] = f(u),$$

em $\mathbb{R}^N$, onde $N \geq 3$, a, b constantes positivas e $\lambda \geq 0$ um parâmetro.

Usaremos métodos variacionais sem requerer condições usuais que permitem que sequências Palais-Smale para o funcional associado seja limitada. Para contornar tal dificuldade usa-se uma função corte para obter um funcional truncado e um resultado denominado "monotonicity trick"devido a Struwe [17].

Palavras-chaves: Problema do tipo Kirchhoff, métodos variacionais.

Abstract

In this work we study the existence of positive solutions to Kirchhoff type problem given by:

$$\left(a+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+\lambda b\int_{\mathbb{R}^N}u^2\right)[-\Delta u+bu]=f(u),$$

in $\mathbb{R}^N$, where $N\geq 3$, a, b are positive constants and $\lambda\geq 0$ is a parameter.

We use variational methods does not require usual conditions that imply Palais-Smale sequences for the associated functional is bounded. To overcome this difficulty is utilized a cut-off function to obtain a modified functional and result called "monotonicity trick" due to Struwe [17].

keywords: Kirchhoff type problem, variational methods.

Conteúdo

Introdução

Um considerável esforço tem sido feito nos últimos anos para estudar o problema não-local do tipo Kirchhoff dado por:

$$\begin{cases} -(a+b\displaystyle\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx)\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

como pode ser visto nos artigos [2], [6], [7], [11], [14], [18], [19], [21] e em suas referências.

A denominação não-local decorre do fato do termo $\displaystyle\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx$ que aparece na equação não ser calculado pontualmente. Tal classe de problemas é o caso estacionário da equação de Kirchhoff dada por,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M(\|u\|^2)\Delta u(x) = f(x,u(x)),$$

a qual é uma generalização daquela introduzida por Kirchhoff [10] em 1883, dada por

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx|\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Essa equação é uma extensão da Equação Clássica da Corda Vibrante, proposta por D'Alembert, considerando os efeitos das mudanças no comprimento da corda durante a vibração.

Os parâmetros nesta equação têm os seguintes significados:

L é o comprimento da corda,

h é a área da seção transversal da corda,

E é o módulo de Young do material do qual a corda é feita,

ρ é a densidade de massa,

P_0 é a tensão inicial.

Por isso, essa classe de problemas é chamado não-locais do tipo Kirchhoff.

Nesta dissertação estudamos o artigo *Existence of a positive solution to Kirchhoff type problems without compactness conditions* devido a Yuhua Li, Fuyi Li e Junping Shi [11]. Nesse artigo os autores mostraram a existência de solução para o problema,

$$\left(a+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+\lambda b\int_{\mathbb{R}^N}u^2\right)[-\Delta u+bu]=f(u)\ \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

onde $N\geq 3$, e a, b constantes positivas, $\lambda\geq 0$ um número real. As hipóteses sobre a função f são dadas por:

(H_1) $f\in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ e $|f(t)|\leq C(|t|+|t|^{p-1})$ para todo $t\in\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$ e algum $p\in(2,2^*)$, onde $2^*=\dfrac{2N}{N-2}$ para $N\geq 3$.

(H_2) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=0$.

(H_3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\infty$.

Sob essas hipóteses os autores provaram os seguintes resultados:

Teorema 0.1. *Suponhamos que $N\geq 3$, a, b constantes positivas e $\lambda\geq 0$ um número real. Se as condições (H_1), (H_2) e (H_3) são satisfeitas, então existe λ_0 tal que para todo $\lambda\in[0,\lambda_0)$ a equação (1) possui pelo menos uma solução positiva.*

Corolário 0.1. *Suponha que $N\geq 3$ e b uma constante positiva. Se as condições (H_1), (H_2) e (H_3) ocorrem, então o problema*

$$-\Delta u+bu=f(u),\, em\, \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

possui pelo menos uma solução positiva.

A principal dificuldade dos autores foi a falta de compacidade nas imersões de Sobolev, onde não temos a garantia da existência de uma sequência Palais-Smale limitada, a qual seria suficiente para encontrarmos soluções do problema (1). Para contornar tal dificuldade os autores utilizaram um funcional truncado e neste funcional utilizaram o resultado denominado “monotonicity trick”devido a Struwe [17].

Para facilitar a leitura, dividimos esta dissertação da seguinte maneira:

No Capítulo 1, faremos um estudo inicial sobre o espaço das funções radiais e demonstraremos um resultado de compacidade devido a Strauss [20].

No Capítulo 2, faremos um truncamento no funcional associado ao problema (1). Provaremos algumas propriedades sobre sequências Palais-Smale para esse funcional truncado. O resultado principal deste trabalho será demonstrado no Capítulo 3.

No Apêndice A, provaremos que os funcionais estudados nesta dissertação são de classe C^1.

No Apêndice B, relembraremos e relacionaremos alguns resultados clássicos usados nesta dissertação, indicando as referências onde elas poderão ser encontradas.

Notação

Nesta dissertação usaremos as seguintes notações:

$B(y, \delta)$: Bola de raio δ e centro y.

$|\cdot|_q$: Norma usual no espaço $L^q(\mathbb{R}^N)$.

$\Box$: Fim da demonstração.

$\rightarrow$: Convergência forte.

$\rightharpoonup$: convergência fraca.

Capítulo

1

Espaço das funções radiais

Neste capítulo faremos um estudo sobre o espaço das funções radiais e provaremos que esse espaço está imerso compactamente em $L^q(\mathbb{R}^N)$, $2 < q < 2^*$. Tal resultado é devido a Strauss [20].

Definição 1.1. *O operador $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é dito* ***ortogonal*** *quando existe uma base ortonormal $\alpha \in \mathbb{R}^N$, tal que a matriz de A em relação à base α seja ortogonal.*

Definição 1.2. *Definimos o conjunto dos operadores lineares $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ que preservam o produto interno por:*

$$O(N) = \{A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N); \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle\}.$$

Definição 1.3. *Um* ***grupo topológico*** *é um espaço topológico $(G, \tau, +)$ munido de uma operação "+" que torna G um grupo ("τ" topologia de G), tal que*
i) a aplicação $+ : G \times G \to G$ definida por $+(g, h) = g + h$ é contínua;
ii) a função $I^{-1} : G \to G$ definida por $I^{-1}(g) = g^{-1}$ é contínua.

Observação 1.1. *O conjunto $O(N)$ munido com a operação produto de matrizes é um grupo topológico.*

Definição 1.4. *Uma* ***ação*** *de um grupo topológico G sobre um espaço vetorial normado H é uma aplicação contínua $G \times H \to H, (g, u) = gu$ satisfazendo as seguintes condições:*
i) $g : H \to H$, é linear;
ii) $(gh)u = g(hu)$;

iii) $1u = u$.

Se $|g(u)| = |u|$, *então* g *é uma isometria.*

Definição 1.5. *Um subconjunto* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *é dito* ***radialmente simétrico*** *se é mensurável e satisfaz a seguinte propriedade:*

$$\text{para } x_0 \in \Omega \text{ e } |x| = |x_0| \text{ então } x \in \Omega.$$

Exemplo 1.1. *São exemplos de conjuntos radialmente simétricos o* $\mathbb{R}^N$, ${}^{B}_{R}(0)$ *e as regiões anulares.*

Definição 1.6. ***(Forma Analítica)*** *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *um conjunto radialmente simétrico e* $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$. *Dizemos que* u *é uma função radial ou radialmente simétrica se existe* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $u(x) = f(|x|)$ *para quase todo* $x \in \Omega$.

Definição 1.7. ***(Forma Algébrica)*** *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *um conjunto radialmente simétrico e* $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$. *Dizemos que* u *é uma função radial ou radialmente simétrica se, para cada tranformação linear ortogonal* $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, *a igualdade* $u(Ax) = u(x)$ *vale para quase todo* $x \in \Omega$.

Proposição 1.1. *As Definições 1.6 e 1.7 são equivalentes.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Vamos mostrar que a Definição 1.6 implica na Definição 1.7. Dada qualquer transformação linear ortogonal isométrica $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, temos

$$u(Ax) = f(|Ax|) = f(|x|) = u(x), \text{ para quase todo } x \in \Omega.$$

$\Leftarrow$) Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ uma função radial. Estendemos u ao $\mathbb{R}^N$, fazendo $u(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^N/\Omega$. Usando o Teorema B.5, temos que

$$u(y) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{|B(y,\delta)|} \int_{B(y,\delta)} u(x)dx, \text{ para quase todo } y \in \mathbb{R}^N. \tag{1.1}$$

Seja $y_0 \in \mathbb{R}^N$ fixado, para qual a Definição 1.7 seja válida. Dado $y \in \mathbb{R}^N$ com $|y| = |y_0|$, seja $A(y, y_0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma transformação linear ortogonal que leva y a y_0. Temos que $A(y, y_0)$ é uma isometria, portanto leva $B(y,\delta)$ a $B(y_0,\delta)$ para qualquer $\delta > 0$. Pelo Teorema B.7 e pela Definição 1.7, temos

$$\begin{aligned} u(y_0) &= \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{|B(y_0,\delta)|}\int_{B(y_0,\delta)} u(x)dx \\ &= \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{|B(y,\delta)|}\int_{B(y,\delta)} u([A(y,y_0)](x))|[A(y,y_0)'](x)|dx \\ &= \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{|B(y,\delta)|}\int_{B(y,\delta)} u(x)dx. \end{aligned}$$

Seja $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(r) = u(y_r)$. Se existir $y_r \in \mathbb{R}^N$ satisfazendo (1.1) e $|y_r| = r$, então $f(r) = 0$. Caso contrário, temos

$$u(y) = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{|B(y,\delta)|}\int_{B(y,\delta)} u(x)dx = f(|y|),$$

para quase todo $y \in \mathbb{R}^N$.

$\square$

Seja $H^1(\mathbb{R}^N)$ o espaço de Sobolev usual induzido pelo produto interno dado por:

$$(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + buv)$$

e cuja norma associada é dada por $||u|| = (u,u)^{1/2}$. Denotamos por $H = H_r^1(\mathbb{R}^N)$ o subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$ que contém apenas as funções radiais dado por:

$$H = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); u(Ax) = u(x) \text{ para todo } A \in O(N)\}.$$

Teorema 1.1. *H é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Devemos mostrar que H é subespaço vetorial normado de $H^1(\mathbb{R}^N)$ e é completo com a norma $||\cdot||$.

Usando a Definição 1.7. Temos $0 \in H$, e dados u_1, $u_2 \in H$, $A \in O(N)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$(u_1 + \alpha u_2)(Ax) = u_1(Ax) + \alpha u_2(Ax) = u_1(x) + \alpha u_2(x) = (u_1 + \alpha u_2)(x).$$

Sejam $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em H e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ o limite dessa sequência, pois $H^1(\mathbb{R}^N)$ é Hilbert. Desde que a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ é contínua, então $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Assim, do Teorema de Vainberg (ver Teorema B.3 no Apêndice B) existe uma subsequência $\{u_n\}$ tal que $u_n(x) \to u(x)$, para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Dada uma tranformação linear ortogonal $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, temos

$$u(Ax) = \lim_{n\to\infty} u_n(Ax) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x),$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in H$. Logo H é Hilbert.

$\square$

Definição 1.8. *Seja G um subgrupo de $O(N)$, $y \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$, definimos*

$$m(y, r, G) = \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists\, g_1, g_2, \cdots, g_n \in G; j \neq k \Rightarrow B(g_j y, r) \cap B(g_k y, r) = \emptyset\}.$$

Definição 1.9. *Um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é invariante se $g\Omega = \Omega$ para toda $g \in G$. Um subconjunto invariante $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é compatível com G se, para algum $r > 0$, temos*

$$\lim_{\substack{|y|\to+\infty \\ dist(y,\Omega)\leq r}} m(y, r, G) = \infty.$$

Definição 1.10. *Sejam G um subgrupo de $O(N)$ e Ω um subconjunto invariante aberto de $\mathbb{R}^N$. A ação de G em $H_0^1(\Omega)$ é definida por*

$$gu(x) = u(g^{-1}x).$$

O subespaço de funções invariante é definido por

$$H^1_{0,G}(\Omega) = \{u \in H^1_0(\Omega); gu = u, \forall g \in G\}.$$

Teorema 1.2. *Se Ω é compatível com G, a seguinte imersão é compacta*

$$H^1_{0,G}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),\ 2 < p < 2^*.$$

Demonstração. Sejam $\{u_n\}$ uma sequência limitada em $H^1_{0,G}(\Omega)$. Desde que $H^1_{0,G}(\Omega)$ é reflexivo, passando a uma subsequência, temos que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1_{0,G}(\Omega)$. Note que, $v_n = u_n - u \rightharpoonup 0$, mostremos que $v_n \to 0$ em $L^p(\Omega)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{j=1}^{m(y,r,G)} \int_{B(g_j y,r)} |v_n|^2 dz \;=\; \int_{\bigcup_{j=1}^{m(y,r,G)} B(g_j y,r)} |v_n|^2 dz.$$

Tomando $z = g_j^{-1} x$, ou seja, $x = g_j z$. Pelo Teorema B.7 e da Definição 1.10, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B(g_j,r)} |v_n(x)|^2 dx &= \int_{B(y,r)} |v_n(g_j z)|^2 |g_j'| dz \\
&= \int_{B(y,r)} |g^{-1} v_n(z)|^2 dz \\
&= \int_{B(y,r)} |v_n(z)|^2 dz.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^{m(y,r,G)} \int_{B(g_j y,r)} |v_n|^2 dz = \sum_{j=1}^{m(y,r,G)} \int_{B(y,r)} |v_n|^2 dz = m(y,r,G) \int_{B(y,r)} |v_n|^2 dz.$$

Portanto,

$$\int_{B(y,r)} |v_n|^2 dz \leq \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} |v_n|_2^2}{m(y,r,G)}. \tag{1.2}$$

Como Ω é compátivel com G, temos $m(y,r,G) \to \infty$, quando $|y| \to \infty$. Por (1.2), temos para cada $\varepsilon > 0$, existe $R = R(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\sup_{|y| \geq R} \int_{B(y,r)} |v_n|^2 dz \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Pelo Teorema B.6, temos

$$\int_{B(0,R+r)} |v_n|^2 dz \to 0.$$

Em particular, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que

$$\int_{B(y,r)} |v_n|^2 dz \leq \int_{B(0,R+r)} |v_n|^2 dz \leq \varepsilon, \text{ se } |y| \leq R \text{ e } n \geq n_0. \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4), obtemos

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |v_n|^2 dz \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

Do Lema B.3, $v_n \to 0$ em $L^p(\Omega)$, então $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$.

□

Corolário 1.1. *Seja* $N_j \geq 2, j = 1, 2, \cdots, k, \sum_{j=1}^{k} N_j = N$ *e*

$$G = O(N_1) \times O(N_2) \times \cdots \times O(N_K).$$

Então a seguinte imersão é compacta

$$H^1_G(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \; 2 < p < 2^*.$$

Demonstração. Primeiramente mostraremos que $G = O(2)$ é compátivel com $\mathbb{R}^2$. De fato, dados $n \in \mathbb{N}$ e $r > 0$, sejam

$$x_j = R\left(\cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right), \text{sen}\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right), R > 0$$

e $g_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear ortogonal que leva $(R,0)$ a x_j, $j = 0,1,\cdots,n$. Logo

$$\begin{aligned}
|x_{j+1}-x_j|^2 &= R^2\left[\left(\cos\left((j+1)\frac{2\pi}{n}\right)-\cos\left(\frac{j2\pi}{n}\right)\right)^2+\left(\operatorname{sen}\left((j+1)\frac{2\pi}{n}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{j2\pi}{n}\right)\right)^2\right]\\
&= R^2\left[2-2\cos\left((j+1)\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{j2\pi}{n}\right)-2\operatorname{sen}\left((j+1)\frac{2\pi}{n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j2\pi}{n}\right)\right]\\
&= 2R^2\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]\to\infty,\ \text{quando } R\to\infty.
\end{aligned}$$

Para $R > 0$ suficientemente grande, temos que se $|y| \geq R$, $j_1, j_2 \in \{1,\cdots,n\}$ e $j_1 \neq j_2$, então $|x_{j_1} - x_{j_2}| \geq 2r$, de modo que $B(g_{j_1}y,r)\cap B(g_{j_2}y,r) = \emptyset$,

$$m(y,r,O(2)) \geq n,\ \text{sempre que } |y| \geq R.$$

Pelo Teorema 1.2 a imersão $H^1_G(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$ é compacta, $2 < p < 2^*$.

Agora, mostraremos que $G = O(M)$ é compátivel com $\mathbb{R}^M$. Dado $y \in \mathbb{R}^M$ com $|y| \geq R$, se R suficientemente grande, obtemos $g_1,\cdots,g_n \in O(M)$, tais que $B(g_{j_1}y,r)\cap B(g_{j_2},r) = \emptyset$, sempre que $j_1, j_2 \in \{1,\cdots,n\}$ e $j_1 \neq j_2$. Portanto, se $|y| \geq R$, então

$$m(y,r,O(M)) \geq n.$$

No caso geral, dado $y = (y_1,\cdots,y_k) \in \mathbb{R}^{N_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{N_k}$, com $|y| \geq R\sqrt{k} > 0$, existe $i \in \{1,\cdots,k\}$, tal que

$$|y_i| \geq R.$$

Assim, obtemos $g_1,\cdots,g_k \in O(N_j)$, tais que $B(g_{j_1}y_i,r)\cap B(g_{j_2}y_i,r) = \emptyset$, sempre que $j_1, j_2 \in \{1,\cdots,n\}$ e $j_1 \neq j_2$, temos

$$m(y_i,r,O(N_j)) \geq n.$$

Portanto, se $|y| \geq R\sqrt{k}$, então

$$m(y,r,G) \geq m(y_i,r,O(N_j)) \geq n.$$

□

Corolário 1.2 (Strauss)**.** *Seja $N \geq 2$. Então a seguinte imersão é compacta:*

$$H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N),\ 2 < p < 2^*.$$

Demonstração. Pela Definição 1.7 temos que $H = H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$. Aplicando o Corolário 1.1 para $N_1 = N$ concluímos a demonstração.

□

Capítulo

2

Resultados preliminares

Neste capítulo definiremos o funcional associado ao problema (1). Faremos um truncamento neste funcional e provaremos alguns resultados relacionado a este funcional.

Definimos para todo parâmetro $\lambda \geq 0$ o funcional J_λ associado ao problema (1) no espaço H, por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}a||u||^2 + \frac{1}{4}\lambda||u||^4 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u),\ u \in H.$$

No Apêndice A, mostraremos que o funcional $J_\lambda \in C^1$ e que

$$(J'_\lambda(u), v) = a(u,v) + \lambda||u||^2(u,v) - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v,\ \ u, v \in H.$$

Definição 2.1. *Sejam H um espaço de Banach e $J_\lambda : H \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Se existirem $c \in \mathbb{R}$ e $\{u_n\} \subset H$ tais que:*

$$J_\lambda(u_n) \to c$$

e

$$J'_\lambda(u_n) \to 0,$$

*dizemos que $\{u_n\}$ é uma sequência **Palais-Smale (PS) no nível** c **para** J_λ. Se tal sequência possui uma subsequência convergente, diz-se que J_λ satisfaz a **condição Palais-Smale no nível** c.*

Para contornar a falta de imersão compacta de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ e mostrar que sequências (PS) para o funcional J_λ são limitadas, vamos definir um truncamento para o funcional J_λ do seguinte modo:

Considere uma função $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{+}, \mathbb{R})$ com as seguintes propriedades;

$$\begin{cases} \psi(t) = 1,\ t \in [0,1], \\ 0 \leq \psi(t) \leq 1,\ t \in (1,2), \\ \psi(t) = 0,\ t \in [2,\infty), \\ ||\psi'||_{\infty} \leq 2. \end{cases}$$

Para cada $T > 0$ definimos $h_T(u) = \psi\left(\frac{||u||^2}{T^2}\right)$ e o seguinte funcional modificado $J_{\lambda}^{T} : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_{\lambda}^{T}(u) = \frac{1}{2}a||u||^2 + \frac{1}{4}\lambda h_T(u)||u||^4 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u),\ \ u \in H.$$

No Apêndice A mostraremos que o funcional J_{λ}^{T} é de classe C^1 e

$$((J_{\lambda}^{T}(u))', v) = a(u,v) + \lambda h_T(u)||u||^2(u,v) + \frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u||^2}{T^2}\right)||u||^4(u,v) - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v, u, v \in H.$$

Para $T > 0$ suficientemente grande e para λ suficientemente pequeno, poderemos encontrar um ponto crítico do funcional J_{λ}^{T} tal que $||u|| \leq T$, e por fim esse ponto crítico u também será um ponto crítico do funcional J_{λ}.

Vejamos um resultado muito importante devido a Struwe [20], o "*monotonicity trick*"que essencialmente nos garante a existência de uma sequência (PS) limitada para uma família de funcionais.

Teorema 2.1. *Seja $(X, ||\cdot||)$ um espaço de Banach e $I \subset \mathbb{R}^{+}$ um intervalo. Considere a família de funcionais Φ_{μ} de classe C^1 em X satisfazendo,*

(1) $\Phi_{\mu}(u) = A(u) - \mu B(u),\ \mu \in I$,

(2) B não negativo,

(3) ou $A(u) \to \infty$ ou $B(u) \to \infty$, quando $||u|| \to \infty$,

(4) $\Phi_{\mu}(0) = 0$.

Para cada $\mu \in I$, definimos o conjunto

$$\Gamma_\mu = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \Phi_\mu(\gamma(1)) < 0\}.$$

Se para todo $\mu \in I$ o conjunto Γ_μ é não vazio e

$$c_\mu = \inf_{\gamma \in \Gamma_\mu} \max_{t \in [0,1]} \Phi_\mu(\gamma(t)) > 0,$$

então para quase todo $\mu \in I$, existe uma sequência $\{u_n\} \subset X$, tal que
(i) $\{u_n\}$ é limitada,
(ii) $\Phi_\mu(u_n) \to c_\mu$,
(iii) $\Phi'_\mu(u_n) \to 0$ no dual X^{-1} de X.

Demonstração. Pela existência de c_μ existirá uma sequência $\{u_n\}$ em X, tal que $\Phi(u_n) \to c_\mu$, provando assim o item (ii).

Provaremos agora o item (i), suponha por contradição que $\{u_n\}$ não seja limitada, então existe uma subsequência de $\{u_n\}$ também denotada por $\{u_n\}$, tal que $||u_n|| \to +\infty$. Pelo item (1) ou $A(u_n) \to +\infty$ ou $B(u_n) \to +\infty$, em ambos os casos teriamos $\Phi(u_n) = A(u_n) - \mu B(u_n) \nrightarrow c_\mu$, que é uma contradição. Logo $\{u_n\}$ é limitada.

Agora suponhamos que o item (iii) não ocorra, então existe $\delta > 0$, tal que

$$||\Phi'_\mu(u_n)|| \geq 2\delta.$$

Pelo Lema de Deformação Clássica (ver Lema B.1 no Apêndice B), existe $M \in]0, \delta[$ e um homeomorfismo $\eta : X \to X$, tal que

$$\eta(u_n) = u_n \text{ se } |\Phi_\mu(u_n) - c_\mu| \geq \delta, \tag{2.1}$$

$$\Phi_\mu(\eta(u_n)) \leq \Phi_\mu(u_n), \text{ para todo } u_n \in X \tag{2.2}$$

e

$$\Phi_\mu(\eta(u_n)) \leq c_\mu - M \text{ para todo } u_n \in X, \tag{2.3}$$

satisfazendo

$$||u_n|| \leq \beta \text{ e } \Phi_\mu(u_n) \leq c_\mu + M.$$

Seja a sequência $\{\gamma_m\} \subset \Gamma_\mu$ obtida na Proposição B.1, onde a escolha de $\varepsilon = c_\mu > 0$ é feita. Pela Proposição B.1 (ii) escolhemos $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que

$$\max_{t \in [0,1]} \Phi_\mu(\gamma_k(t)) \leq c_\mu + M. \tag{2.4}$$

Por (2.1) e (2.2), $\eta \circ \gamma_k \in \Gamma_\mu$. Se $u_n = \gamma_k(t)$ com $\Phi_\mu(u_n) \leq c_\mu - c_\mu(\mu_k - \mu)$. Então (2.2) implica

$$\Phi_\mu(\eta(u_n)) \leq c_\mu - c_\mu(\mu_k - \mu). \tag{2.5}$$

Por outro lado, se $u_n = \gamma_k(t)$ com $\Phi_\mu(u_n) > c_\mu - c_\mu(\mu_k - \mu)$, então da Proposição B.1 e da desigualdade (2.4) implica que u é tal que $||u|| \leq \beta$ com $\Phi_\mu(u_n) \leq c_\mu + M$. De (2.3) e (2.5), temos

$$\max_{t \in [0,1]} \Phi_\mu(\eta \circ \gamma_k(t)) < c_\mu,$$

o que contradiz a definição de c_μ.

$\square$

Usaremos este resultado considerando, $X = H$ e a seguinte família de funcionais:

$$J^T_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}a||u||^2 + \frac{1}{4}\lambda h_T(u)||u||^4 - \mu \int_{\mathbb{R}^N} F(u), u \in H$$

e sua derivada dada por

$$((J^T_{\lambda,\mu})'(u), v) = a(u,v) + \lambda h_T||u||^2(u,v) + \frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u||^2}{T^2}\right)||u||^4(u,v) - \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v, u, v \in H.$$

Lema 2.1. $\Gamma_\mu = \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0, J^T_{\lambda,\mu}(\gamma(1)) < 0\} \neq \emptyset$ *para todo* $\mu \in I = [\delta, 1]$, *onde* $\delta \in (0,1)$ *é uma constante positiva.*

Demonstração. Escolhemos $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $\phi \geq 0$, $||\phi|| = 1$ e $\text{supp}(\phi) \subset B(0,R)$ para algum

$R > 0$. Pela condição (H_3), temos que para qualquer $C_1 > 0$ com $C_1\delta\int_{B(0,R)}\phi^2 > \frac{a}{2}$, existe $M > 0$, tal que

$$|f(t)| \geq C_1|t|, \ \forall\ |t| > M.$$

Portanto,

$$F(t) \geq C_1|t|^2, \ \forall\ |t| > M. \tag{2.6}$$

Temos também, que existe $C_2 > 0$, tal que

$$-F(t) \leq |F(t)| \leq C_2, \ t \in [0, M].$$

Portanto,

$$F(t) \geq -C_2, \ t \in [0, M]. \tag{2.7}$$

De (2.6) e (2.7), temos

$$F(t) \geq C_1|t|^2 - C_2, \ t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.8}$$

Então para $t^2 > 2T^2$, temos

$$\begin{aligned}
J^T_{\lambda,\mu}(t\phi) &= \frac{1}{2}a||t\phi||^2 + \frac{1}{4}\lambda\psi\left(\frac{||t\phi||^2}{T^2}\right)||t\phi||^4 - \mu\int_{\mathbb{R}^N} F(t\phi) \\
&= \frac{1}{2}at^2||\phi||^2 + \frac{1}{4}\lambda\psi\left(\frac{t^2||\phi||^2}{T^2}\right)t^4||\phi||^4 - \mu\int_{\mathbb{R}^N} F(t\phi) \\
&= \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{4}\lambda\psi\left(\frac{t^2}{T^2}\right)t^4 - \mu\int_{\mathbb{R}^N} F(t\phi) \\
&= \frac{1}{2}at^2 - \mu\int_{\mathbb{R}^N} F(t\phi) \\
&\leq \frac{1}{2}at^2 - \mu\int_{\mathbb{R}^N} (C_1|t\phi|^2 - C_2) \\
&\leq \frac{1}{2}at^2 - \delta\int_{\mathbb{R}^N} C_1t^2|\phi|^2 + \delta\int_{\mathbb{R}^N} C_2 \\
&\leq \frac{1}{2}at^2 - \delta C_1t^2\int_{B(0,R)}\phi^2 + C_3 \\
&= t^2\left(\frac{1}{2}a - \delta C_1\int_{B(0,R)}\phi^2\right) + C_3.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\tilde{t} > 0$ suficientemente grande, temos que $J^T_{\lambda,\mu}(\tilde{t}\phi) < 0$.

Assim definimos

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\to H \\ t &\mapsto \gamma(t) = t\tilde{t}\phi. \end{aligned}$$

Temos $\gamma(0) = 0$ e $J^T_{\lambda,\mu}(\gamma(1)) = J^T_{\lambda,\mu}(\tilde{t}\phi) < 0$, portanto $\gamma \in \Gamma_\mu$, logo $\Gamma_\mu \neq \emptyset$.

□

Lema 2.2. *Existe uma constante $c > 0$ tal que $c_\mu \geq c > 0$ para todo $\mu \in I$.*

Demonstração. Da condição (H_2), temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$,tal que

$$|f(t)| < \varepsilon b|t|,\ t \in (0,\delta). \tag{2.9}$$

Da condição (H_1) e para $|t| > \delta$, temos

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq C\frac{|t|^{p-2}}{|t|^{p-2}}|t| + C|t|^{p-1} \\ &= \left(\frac{C}{|t|^{p-2}} + C\right)|t|^{p-1} \\ &\leq \left(\frac{C}{\delta^{p-2}} + C\right)|t|^{p-1} = C_\varepsilon|t|^{p-1}. \end{aligned}$$

Então

$$|f(t)| \leq C_\varepsilon|t|^{p-1}, |t| > \delta. \tag{2.10}$$

De (2.9) e (2.10), temos

$$|f(t)| \leq b\varepsilon|t| + C_\varepsilon|t|^{p-1}. \tag{2.11}$$

Agora, para $\mu \in I$ e para $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{a}{2}\right)$, temos

$$
\begin{aligned}
J^T_{\lambda,\mu}(u) &= \frac{1}{2}a||u||^2 + \frac{1}{4}\lambda h_T(u)||u||^4 - \mu\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\\
&\geq \frac{1}{2}a||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^u f(t)dt\\
&\geq \frac{1}{2}a||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^u (\varepsilon b|t| + C_\varepsilon|t|^{p-1})\\
&= \frac{1}{2}a||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}\varepsilon b u^2 + \frac{C_\varepsilon}{p}|u|^p\right)\\
&\geq \frac{1}{2}a||u||^2 - \frac{1}{2}\varepsilon b\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2 - \frac{C_\varepsilon}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p.
\end{aligned}
$$

Pelo Corolário B.1, temos que a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ é contínua para $q \in [2, 2^*]$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
J^T_{\lambda,\mu}(u) &\geq \frac{1}{2}a||u||^2 - \frac{1}{2}\varepsilon||u||^2 - \frac{C_\varepsilon}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\\
&\geq \frac{1}{2}a||u||^2 - \frac{1}{4}a||u||^2 - \frac{C_\varepsilon}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\\
&\geq \frac{1}{4}a||u||^2 - \frac{C_\varepsilon}{p}||u||^p.
\end{aligned}
$$

Assim, existe $\rho > 0$ tal que, para todo u satisfazendo $0 < ||u|| \leq \rho$ temos $J^T_{\lambda,\mu}(u) > 0$. Se $||u|| = \rho$, existe $c > 0$, tal que

$$J^T_{\lambda,\mu}(u) \geq c > 0.$$

Pela definição do conjunto Γ_μ, temos $J^T_{\lambda,\mu}(\gamma(1)) < 0$ com $||\gamma(1)|| > \rho$. Pelo Teorema do Valor Intermediário existe $t_\gamma \in (0,1)$ tal que $||\gamma(t_\gamma)|| = \rho$. Portanto, para qualquer $\mu \in I$

$$c_\mu \geq \inf_{\gamma\in\Gamma_\mu} J^T_{\lambda,\mu}(\gamma(t_\gamma)) \geq c > 0,$$

logo

$$c_\mu \geq c > 0.$$

$\square$

Vejamos que com os Lemas 2.1 e 2.2, temos todas as hipóteses do Teorema 2.1, pois para $A(u) = \dfrac{1}{2}a||u||^2 + \dfrac{1}{4}\lambda h_T(u)||u||^4$ e $B(u) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(u)$, o funcional $J^T_{\lambda,\mu}$ pode ser escrito como $J^T_{\lambda,\mu}(u) = A(u) - \mu B(u)$. Por f ser não-negativa temos que $B(u)$ é não-negativo. $A(u)$ é coercivo para $n \to \infty$ e também que $J^T_{\lambda,\mu}(0) = 0$. Pelo Lema 2.1, temos $\Gamma_\mu \neq \emptyset$ e do Lema 2.2 $c_\mu > 0$. Portanto, temos que existe uma sequência (PS) limitada para o funcional $J^T_{\lambda,\mu}$.

Lema 2.3. *Para todo $\mu \in I$ e $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, cada sequência (PS) limitada do funcional $J^T_{\lambda,\mu}$ admite uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $\mu \in I$ e $\{u_n\}$ uma sequência (PS) limitada do funcional $J^T_{\lambda,\mu}$. Pelo Teorema 1.2, temos que a imersão $H \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ é compacta para $q \in (2, 2^*)$. Portanto, passando eventualmente uma subsequência, existe $u \in H$ tal que

$$\begin{array}{rcl} u_n & \rightharpoonup & u, \text{ em } H, \\ u_n & \to & u, \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N), \\ u_n & \to & u, \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N. \end{array}$$

Usando (2.11), temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n - u) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n)||u_n - u| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} [(\varepsilon b|u_n| + C_\varepsilon |u_n|^{p-1})|u_n - u| \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [\varepsilon b|u_n||u_n - u|] + \int_{\mathbb{R}^N} [C_\varepsilon |u_n|^{p-1}|u_n - u|] \\ &\leq \varepsilon b \int_{\mathbb{R}^N} [|u_n||u_n - u|] + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} [|u_n|^{p-1}|u_n - u|] \\ &\leq \varepsilon C||u_n||||u_n - u|| + C_\varepsilon |u_n|_p^{p-1}|u_n - u|_p \\ &\leq \varepsilon C||u_n||||u_n - u|| + C_\varepsilon ||u_n||^{p-1}|u_n - u|_p. \end{aligned}$$

Por $||u_n||$ ser limitada e $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n - u) \to 0.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
o(1) &= ((J^T_{\lambda,\mu})'(u_n), u_n - u) \\
&= a(u_n, u_n - u) + \lambda h_T(u_n)||u_n||^2(u_n, u_n - u) \\
&+\frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u||^2}{T^2}\right)||u_n||^4(u_n, u_n - u) - \mu\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n - u) \\
&= \left(a + \lambda h_T(u_n)||u_n||^2 + \frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u_n||^2}{T^2}\right)||u_n||^4\right)(u_n, u_n - u),
\end{aligned}
$$

temos

$$
\begin{aligned}
\left|a + \lambda h_T(u_n)||u_n||^2 + \frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u_n||^2}{T^2}\right)||u_n||^4\right| &\geq \\
\left|a + \lambda h_T(u_n)||u_n||^2\right| - \left|\frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u_n||^2}{T^2}\right)||u_n||^4\right| &\geq a - \frac{\lambda}{T^2}k > k_1 > 0,
\end{aligned}
$$

pois, $h_T(u_n) \geq 0$ e $\left|\psi'\left(\frac{||u_n||^2}{T^2}\right)\right| < 2$. Assim,

$$
\left(a + \lambda h_T(u_n)||u_n||^2 + \frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u_n||^2}{T^2}\right)||u_n||^4\right)(u_n, u_n - u) \to 0.
$$

Portanto $(u_n, u_n - u) \to 0$, pela definição de convergência fraca, obtemos $u_n \to u$ em H.

□

Do Lema 2.3, garantimos a existência de ponto crítico para o funcional $J^T_{\lambda,\mu}$ e para cada $\mu \in I$ temos u^μ ponto crítico do funcional $J^T_{\lambda,\mu}$.

Lema 2.4. *Para todo $\mu \in I$, existe $u^\mu \in H$, com $u^\mu \neq 0$ tal que $(J^T_{\lambda,\mu})'(u^\mu) = 0$ e $J^T_{\lambda,\mu}(u^\mu) = c_\mu$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.1 obtemos que, para todo $\mu \in I$, existe uma sequência $\{u^\mu_n\} \subset H$ limitada tal que

$$
\begin{aligned}
J^T_{\lambda,\mu}(u^\mu_n) &\to c_\mu, \\
(J^T_{\lambda,\mu})'(u^\mu_n) &\to 0.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema (2.3) existem $u^\mu \in H$ e uma subsequência de $\{u_n\}$, tal que $u_n^\mu \to u^\mu$ em H. Por continuidade

$$J_{\lambda,\mu}^T(u_n^\mu) \to J_{\lambda,\mu}^T(u^\mu),$$

pela unicidade do limite, temos

$$J_{\lambda,\mu}^T(u^\mu) = c_\mu.$$

E pela continuidade de $(J_{\lambda,\mu}^T)'$, temos

$$(J_{\lambda,\mu}^T)'(u^\mu) = \lim_{n\to+\infty} (J_{\lambda,\mu}^T)'(u_n^\mu) = 0.$$

□

De acordo com o Lema anterior, existem sequências $\{\mu_n\} \subset I$ com $\mu_n \to 1$ e $\{u_n\} \subset H$ sequências de pontos críticos do funcional $J_{\lambda,\mu}^T$.

Lema 2.5. *Se $u \in H$ é uma solução fraca de*

$$\left(a + \lambda h_T(u)||u||^2 + \frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u||^2}{T^2}\right)||u||^4\right)(-\Delta u + bu) = \mu f(u), \text{ em } x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.12}$$

onde $N \geq 3$, então

$$\left(\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \frac{Nb}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2\right)\left(a + \lambda h_T(u)||u||^2 + \frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u||^2}{T^2}\right)||u||^4\right) = \mu N \int_{\mathbb{R}^N} F(u). \tag{2.13}$$

Demonstração. Considere $u \in H$ uma solução fraca de (2.12). Por um argumento do tipo bootstrap, temos que $u \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$. Seja

$$g(u) = \frac{\mu f(u)}{a + \lambda h_T(u)||u||^2 + \frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u||^2}{T^2}\right)||u||^4} - bu.$$

Então $u \in H$ é também uma solução de

$$-\Delta u = g(u).$$

Pelo Lema B.2, temos

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u), \tag{2.14}$$

onde $G(t) = \int_0^t g(s)ds$. Note que (2.14) é uma identidade de Pohozaev (ver Lema B.2 no Apêndice B). Portanto

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u) = N\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^u g(s)ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 &= N\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^u\left[\frac{\mu f(s)}{a+\lambda h_T(s)||s||^2+\frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||s||^2}{T^2}\right)||s||^4} - bs\right]ds \\
&= N\int_{\mathbb{R}^N}\left[\int_0^u \frac{\mu f(s)}{a+\lambda h_T(s)||s||^2+\frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||s||^2}{T^2}\right)||s||^4}ds - \int_0^u bsds\right] \\
&= N\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{\mu F(u)}{a+\lambda h_T(u)||u||^2+\frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u||^2}{T^2}\right)||u||^4} - \frac{b}{2}u^2\right] \\
&= \frac{N\mu}{a+\lambda h_T(u)||u||^2+\frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u||^2}{T^2}\right)||u||^4}\int_{\mathbb{R}^N}F(u) - \frac{Nb}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + \frac{Nb}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2 = \frac{N\mu}{a+\lambda h_T(u)||u||^2+\frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u||^2}{T^2}\right)||u||^4}\int_{\mathbb{R}^N}F(u),$$

De onde concluímos

$$\left(\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + \frac{Nb}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2\right)\left(a+\lambda h_T(u)||u||^2+\frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u||^2}{T^2}\right)||u||^4\right) \tag{2.15}$$

$$= \mu N\int_{\mathbb{R}^N}F(u)$$

que é uma identidade do tipo Pohozaev.

$\square$

Usaremos a identidade de Pohozaev para mostrar que $||u_n|| \leq T$, e assim $\{u_n\}$ será uma sequência de pontos críticos para o funcional $J_{\lambda,\mu}$, definido como

$$J_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}a||u||^2 + \frac{1}{4}\lambda||u||^4 - \mu \int_{\mathbb{R}^N} F(u).$$

Lema 2.6. *Seja u_n um ponto crítico de $J^T_{\lambda,\mu}$ no nível c_{μ_n}. Então para $T > 0$ suficientemente grande, existe $\lambda_0 = \lambda_0(T)$ tal que para todo $\lambda \in [0, \lambda_0)$ temos $||u_n|| \leq T$ para todo $n \in N$, a menos de subsequência.*

Demonstração. Primeiramente, desde $(J^T_{\lambda,\mu})'(u_n) = 0$ pelo Lema 2.4, u_n satisfaz a seguinte identidade de Pohozaev

$$\left(\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + \frac{Nb}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2\right)\left(a + \lambda h_T(u_n)||u_n||^2 + \frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u_n||^2}{T^2}\right)||u_n||^4\right) \tag{2.16}$$

$$= \mu_n N \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n).$$

Usando $J^T_{\lambda,\mu}(u_n) = c_{\mu_n}$, temos que

$$\frac{1}{2}aN||u_n||^2 + \frac{1}{4}\lambda N h_T(u_n)||u_n||^4 - \mu_n N \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) = c_{\mu_n} N. \tag{2.17}$$

Portanto, por (2.16) e (2.17), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 &\leq \left(a + \lambda h_T(u_n)||u_n||^2 + \frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u_n||^2}{T^2}\right)||u_n||^4\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \qquad (2.18) \\ &= c_{\mu_n} N + \frac{1}{4}\lambda N h_T(u_n)||u_n||^4 + \frac{\lambda N}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u_n||^2}{T^2}\right)||u_n||^6. \end{aligned}$$

Pela definição do Nível do Passo da Montanha, do Lema 2.1 e da desigualdade (2.8), temos

$$\begin{aligned}
c_{\mu_n} &\leq \max_t J^T_{\lambda,\mu}(t\phi) \\
&= \max_t \left\{ \frac{1}{2}||t\phi||^2 + \frac{1}{4}\lambda\psi\left(\frac{||t\phi||^2}{T^2}\right)||t\phi||^4 - \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} F(t\phi) \right\} \\
&= \max_t \left\{ \frac{1}{2}at^2 - \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} F(t\phi) \right\} + \max_t \left\{ \frac{1}{4}\lambda\psi\left(\frac{t^2}{T^2}\right)t^4 \right\} \\
&\leq \max_t \left\{ \frac{1}{2}at^2 - \gamma C_1 t^2 \int_{B(0,R)} \phi^2 + C_3 \right\} + \max_t \left\{ \frac{1}{4}\lambda\psi\left(\frac{t^2}{T^2}\right)t^4 \right\} \\
&= C_3 + A_1(T).
\end{aligned}$$

Se $t^2 \leq 2T^2$, obtemos $\psi \leq 1$. Então

$$A_1(T) = \max_t \frac{1}{4}\lambda\psi\left(\frac{t^2}{T^2}\right)t^4 \leq \lambda T^4.$$

Se $t^2 \geq 2T^2$, então $\psi\left(\frac{t^2}{T^2}\right) = 0$, assim, temos que

$$A_1(T) \leq \lambda T^4.$$

Fazendo da mesma forma, se $||u_n||^2 \leq 2T^2$ ou $||u_n||^2 \geq 2T^2$, temos

$$\frac{1}{4}Nh_T(u_n)||u_n||^4 \leq \lambda N T^4.$$

Para a terceira parcela, se $||u_n||^2 \leq 2T^2$ e desde que $||\psi'||_\infty \leq 2$, temos que

$$\frac{\lambda N}{2T^2}\left|\psi'\left(\frac{||u_n||^2}{T^2}\right)||u_n||^6\right| \leq \frac{\lambda N}{2T^2}2(2T^2)^3 \leq 8\lambda N T^4.$$

Se $||u_n||^2 \geq 2T^2$, então ψ é constante e por consequência $\psi' = 0$. Logo

$$\frac{\lambda N}{2T^2}\left|\psi'\left(\frac{||u_n||^2}{T^2}\right)||u_n||^6\right| \leq 8\lambda N T^4.$$

Da desigualdade (2.18), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2 &\leq N(C_3+A_1(T))+\lambda NT^4+8\lambda NT^4\\&\leq NC_3+\lambda NT^4+\lambda NT^4+8\lambda NT^4\\&= NC_3+10\lambda NT^4.\end{aligned}$$

Concluímos que,

$$\begin{aligned}|\nabla u_n|_2^{2^*} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\right)^{\frac{2^*}{2}}\\&\leq \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{2^*}{2}}(NC_3+10\lambda NT^4)^{\frac{2^*}{2}}.\end{aligned}$$

Da condição (H_2), temos que dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$, tal que

$$|f(t)|<b\varepsilon|t|,\ t\in(0,\delta). \tag{2.19}$$

Da condição (H_1), para $|t|\geq\delta$, temos

$$\begin{aligned}|f(t)| &\leq C\frac{|t|^{2^*-2}}{|t|^{2^*-2}}|t|+C\frac{|t|^{2^*-p}}{|t|^{2^*-p}}|t|^{p-1}\\&\leq |t|^{2*-1}\left(\frac{C}{|t|^{2^*-2}}+\frac{C}{|t|^{2^*-p}}\right)\\&\leq |t|^{2^*-1}\left(\frac{C}{\delta^{2^*-2}}+\frac{C}{\delta^{2^*-p}}\right)=C_\varepsilon|t|^{2^*-1}.\end{aligned}$$

Então,

$$|f(t)|\leq C_\varepsilon|t|^{2^*-1},|t|>\delta. \tag{2.20}$$

De (2.19) e (2.20), temos

$$|f(t)|\leq b\varepsilon|t|+C_\varepsilon|t|^{2^*-1}. \tag{2.21}$$

Por outro lado, por $(J^T_{\lambda,\mu})'(u_n)=0$ e do crescimento (2.21), temos que

$$
\begin{aligned}
& a||u_n||^2 + \lambda h_T(u_n)||u_n||^4 + \frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u_n||^2}{T^2}\right)||u_n||^6 \\
= \; & \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n \leq \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} (b\varepsilon|u_n|^2 + C_\varepsilon |u_n|^{2^*}) \\
= \; & \mu_n \left[b\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \right] \\
\leq \; & b\varepsilon |u_n|_2^2 + C_\varepsilon |u_n|_{2^*}^{2^*} \\
\leq \; & \varepsilon ||u||^2 + C_\varepsilon |u_n|_{2^*}^{2^*}.
\end{aligned}
$$

Assim, pela Desigualdade de Sobolev, Gagliardo e Nirenberg (ver Teorema B.1 no Apêndice B), temos

$$
\begin{aligned}
(a-\varepsilon)||u_n||^2 & \leq C_\varepsilon |u_n|_{2^*}^{2^*} - \frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u_n||^2}{T^2}\right)||u_n||^6 \\
& \leq C_4 |\nabla u_n|_2^{2^*} + 8\lambda T^4 \\
& \leq C_5 (NC_3 + 10\lambda N T^4)^{\frac{2^*}{2}} + 8\lambda T^4.
\end{aligned}
$$

Tomando $T^2 \geq \frac{1}{(a-\varepsilon)}\left[C_5(NC_3 + 10\lambda NT^4)^{\frac{2^*}{2}} + 8\lambda T^4\right]$, temos $||u_n|| \leq T$.

$\square$

Capítulo

3

Demonstração do principal resultado

Neste capítulo, demontraremos a existência de soluções positiva para o problema (1).

Sejam T, λ_0, obtidos no Lema 2.6 e u_n um ponto crítico para J^T_{λ,μ_n} no nível c_{μ_n}. Do Lema 2.6 podemos assumir que

$$||u_n|| \leq T.$$

Assim,

$$J^T_{\lambda,\mu_n}(u_n) = \frac{1}{2}a||u_n||^2 + \frac{1}{4}\lambda||u_n||^4 - \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n).$$

Desde que $\mu_n \to 1$, então

$$\begin{aligned} J^T_{\lambda,\mu}(u_n) - J_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2}a||u_n||^2 + \frac{1}{4}\lambda||u_n||^4 - \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) \\ &- \left(\frac{1}{2}a||u_n||^2 + \frac{1}{4}\lambda||u_n||^4 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)\right) \\ &= (-\mu_n + 1) = o(1), \end{aligned}$$

assim, $J_\lambda(u_n) \to c_{\mu_n}$. Pelo mesmos raciocínio, temos

$$\begin{aligned} ((J^T_{\lambda,\mu})'(u_n) - J'_\lambda(u_n))v &= a(u_n, v) + \lambda||u||^2(u, v) - \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v \\ &- \left(a(u_n, v) + \lambda||u||^2(u, v) - \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v\right) \\ &= (-\mu_n + 1) \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v = o(1). \end{aligned}$$

Então $J'_\lambda(u_n) \to 0$.

Portanto, temos que a sequência de pontos críticos $\{u_n\}$ é uma sequência (PS) limitada para o funcional J_λ. Pelo Lema 2.3 existe uma subsequência convergente $\{u_n\}$ tal que, $u_n \to u$ em H. Desde que $J_\lambda \in C^1$, temos

$$J'_\lambda(u_n) \to J'_\lambda(u).$$

Pela unicidade do limite temos $J'_\lambda(u) = 0$, logo u é ponto crítico do funcional J_λ.

Vejamos que u é positiva. Seja $u = u^+ - u^-$, onde $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$. Desde que u é ponto crítico, temos que para todo $v \in H$

$$a(u, v) + \lambda ||u||^2(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v.$$

Escolhendo $v = u^-$, temos

$$a(u, u^-) + \lambda ||u||^2(u, u^-) = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u^-.$$

Assim,

$$a||u^-||^2 + ||u||^2||u^-||^2 = 0.$$

Portanto, $||u^-||^2 = 0$. Assim, $u = u^+ \geq 0$, segue do Principio do Máximo (ver [9], Teorema 10.2, página 32) que $u > 0$. Logo u é uma solução positiva do problema (1).

Observação 3.1. *Note que, se ao considerando $\lambda = 0$ no Teorema 0.1 resultará no Corolário 0.1. O mesmo resultado tem sido obtido nos trabalhos [3], [5], [12] e [16].*

Apêndice

$\mathcal{A}$

Funcionais diferenciáveis

Neste capítulo mostraremos que os funcionais J_λ e J_λ^T são de classe C^1.

1.1 Diferenciabilidade de funcionais

Definição A.1. *Dado um Espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, dizemos que I possui* ***Derivada de Fréchet*** *no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T \in X'$ tal que*

$$\lim_{||v||\to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - Tv}{||v||} = 0, \ \forall v \in X.$$

Definição A.2. *Se a derivada de Fréchet de I existe e é contínua em X, dizemos que o funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.*

Definição A.3. *Dado um Espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, dizemos que I possui* ***Derivada de Gateaux*** *no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T_0 \in X'$ tal que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - T_0 v}{t} = 0, \ \forall v \in X.$$

Proposição A.1. *Se I tem derivada de Gateaux contínua em X então $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Sejam $w \in X$ e $DI(w)$ a derivada de Gateaux de I em w. Do teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$, tal que

$$\begin{aligned} |I(w+v) - I(w) - DI(w)v| &= |DI(w+\theta v)v - DI(w)v| \\ &= ||DI(w+\theta v)v - DI(w)v||_{X'}||v||. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Como I possui derivada de Gateaux contínua em X, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para qualquer $||v|| < \delta$, temos

$$||DI(w + \theta v)v - DI(w)v||_{X'} < \varepsilon.$$

Por (A.1), temos

$$|I(w + v) - I(w) - DI(w)v| < \varepsilon||v||.$$

Assim concluímos que I possui derivada de Fréchet contínua.

□

1.2 $J_\lambda \in C^1$

Nesta seção mostraremos que $J_\lambda \in C^1$.

J_λ está bem definido em H e é de classe C^1, pois, considerando os funcionais $J_{\lambda_1}(u) = \frac{1}{2}||u||^2$, $J_{\lambda_2}(u) = \frac{1}{4}||u||^4 = \left(\frac{1}{2}||u||^2\right)^2 = (J_{\lambda_1}(u))^2$ e $J_{\lambda_3}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$ com $J_\lambda(u) = aJ_{\lambda_1}(u) + \lambda J_{\lambda_2}(u) - J_{\lambda_3}(u)$.

Seja $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$, para todo $u \in H$. Portanto,

$$\begin{aligned} J_{\lambda_1}(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2 + bu^2]dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx + b\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2dx < \infty. \end{aligned}$$

Temos também,

$$J_{\lambda_2}(u) = (J_{\lambda_1}(u))^2 < \infty.$$

Sabemos que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N}|F(u)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_0^t f(s)ds\right|dx.$$

Por (H_1), temos

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^t f(s)ds\right| &\leq \int_0^t |f(s)|ds \\
&\leq \int_0^t C(|s|+|s|^{p-1})ds \\
&\leq C\int_0^t |s|ds + \int_0^t C|s|^{p-1}ds \\
&= C\left(\frac{1}{2}|t|^2+\frac{1}{p}|t|^p\right).
\end{aligned}
$$

Da imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, com $q \in [2, 2^*]$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\left[C\left(\frac{1}{2}|u|^2+\frac{1}{p}|u|^p\right)\right]dx \\
&\leq C\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx + C\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^pdx < \infty.
\end{aligned}
$$

Agora, calculemos a Derivada de Gateux DJ_{λ_1}.

$$
\begin{aligned}
\frac{J_{\lambda_1}(u+tv)-J_{\lambda_1}(v)}{t} &= \frac{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla(u+tv)|^2+b(u+tv)^2] - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2+bu^2]}{t} \\
&= \frac{1}{2t}\left[\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla(u+tv)||\nabla(u+tv)| + b(u^2+2utv+t^2v^2)]\right. \\
&- \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} bu^2\,] \\
&= \frac{1}{2t}\left[2t\int_{\mathbb{R}^N}[\nabla u\nabla v + buv] + t^2\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla v|^2+bv^2]\right].
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
DJ_{\lambda_1}(u)v &= \lim_{t\to 0}\left[\int_{\mathbb{R}^N}[\nabla u\nabla v+buv] + \frac{t}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla v|^2+bv^2]\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}[\nabla u\nabla v+buv] \\
&= (u,v).
\end{aligned}
$$

Seja $\{u_n\}$ uma sequência em H, tal que $u_n \to u$ em H. Para cada $v \in H$ com $||v|| \leq 1$, temos

$$
\begin{aligned}
|[DJ_{\lambda_1}(u_n) - DJ_{\lambda_1}(u)]v| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla v + b u_n v] - \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + buv] \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla (u_n - u) \nabla v + bv(u_n - u)] \right| \\
&= |(u_n - u, v)|.
\end{aligned}
$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz (ver Lema B.4 no Apêndice B), temos

$$
|[DJ_{\lambda_1}(u_n) - DJ_{\lambda_1}(u)]v| = |(u_n - u, v)| \leq ||u_n - u|| ||v|| \leq ||u_n - u||.
$$

Portanto

$$
||DJ_{\lambda_1}(u_n) - DJ_{\lambda_1}(u)|| = \sup_{||v|| \leq 1} |[DJ_{\lambda_1}(u_n) - DJ_{\lambda_1}(u)]v| \leq ||u_n - u||.
$$

Mostrando que DJ_{λ_1} é contínuo. Pela Proposição A.1, temos $J_{\lambda_1} \in C^1$.

Pela definição da derivada da função composta, temos:

$$
DJ_{\lambda_2}(u)v = 2\left(\frac{1}{2}||u||^2\right) DJ_{\lambda_1}(u)v = ||u||^2(u, v)
$$

e portanto $J_{\lambda_2} \in C^1$.

Agora, calculemos a derivada de Gateaux de J_{λ_3}. Para cada $t \in \mathbb{R}$, com $0 < |t| < 1$, para cada $u, v \in H$, consideremos a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(s) = F(u + stv)$. Observe que $h'(s) = f(u + stv)tv$, $h(1) = F(u + tv)$ e $h(0) = F(u)$.

Desde que h é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, do Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que

$$
h(1) - h(0) = h'(\gamma),
$$

assim,

$$
\left| \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} \right| = |f(u + \gamma tv)||v|.
$$

Da condição de crescimento sobre a função f e tomando $K = \max\{2^{p-1}, \gamma^{p-1}|t|^{p-1}\}$, obtemos

$$\begin{aligned} |f(u+\gamma tv)||v| &\leq C(|u+\gamma tv| + |u+\gamma tv|^{p-1})|v| \\ &\leq C[|u| + \gamma|t||v| + 2^{p-1}(|u|^{p-1} + \gamma^{p-1}|t|^{p-1}|v|^{p-1})]|v| \\ &\leq C|u||v| + C|v| + K|u|^{p-1}|v| + K|v|^p \in L^1(\mathrm{I\!R}^N). \end{aligned}$$

Para uma sequência $|t_n| \to 0$, temos

$$f(u+\gamma t_n v)v \to f(u)v.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema B.2 no Apêndice B)

$$\begin{aligned} DJ_{\lambda_3}(u)v &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{\displaystyle\int_{\mathrm{I\!R}^N} F(u+tv) - \int_{\mathrm{I\!R}^N} F(u)}{t}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathrm{I\!R}^N} f(u+\gamma t_n v)v \\ &= \int_{\mathrm{I\!R}^N} f(u)v. \end{aligned}$$

Seja uma sequência $\{u_n\}$ em H tal que $u_n \to u$ em H. Assim, das imersões contínuas,

$$u_n \to u \text{ em } L^q(\mathrm{I\!R}^N), \text{ com } 2 \leq q \leq 2^*.$$

Do Teorema de Vainberg (ver Teorema B.3 no Apêndice B), existe $\{u_{nj}\} \subset \{u_n\}$ e $g \in L^q(\mathrm{I\!R}^N)$, tal que

$$u_{nj} \to u \text{ quase toda parte em } \mathrm{I\!R}^N,$$

$$|u_{nj}| \leq g \text{ quase toda parte em } \mathrm{I\!R}^N.$$

Por f ser uma função contínua, temos

$$[f(u_{nj}) - f(u)]^{\frac{p}{p-1}} \to 0, \text{ quase toda parte em } \mathrm{I\!R}^N,$$

Da condição (H_1) sobre a função f, obtemos

$$|f(u_{nj}) - f(u)|^{\frac{p}{p-1}} \leq k(g + g^{\frac{p}{p-1}}) \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema B.2 no Apêndice B), concluímos que

$$|f(u_{nj}) - f(u)|_{\frac{p}{p-1}} \to 0.$$

Para todo $v \in H$, tal que $||v|| \leq 1$, temos

$$|[DJ_{\lambda_3}(u_{nj}) - DJ_{\lambda_3}(u)]v| \leq \int_{\mathbb{R}^N} [|f(u_{nj}) - f(u)||v|].$$

Pela Desigualdade de Hölder (ver Teorema B.8 no Apêndice B), temos

$$|[DJ_{\lambda_3}(u_{nj}) - DJ_{\lambda_3}(u)]v| \leq |f(u_{nj}) - f(u)|_{\frac{p}{p-1}}|v|_p.$$

Das imersões contínuas, temos

$$\begin{aligned} |[DJ_{\lambda_3}(u_n) - DJ_{\lambda_3}(u)]v| &\leq |f(u_{nj}) - f(u)|_{\frac{p}{p-1}}||v|| \\ &\leq |f(u_{nj}) - f(u)|_{\frac{p}{p-1}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} ||DJ_{\lambda_3}(u_n) - DJ_{\lambda_3}(u)|| &= \sup_{||v|| \leq 1} |[DJ_{\lambda_3}(u_{nj}) - DJ_{\lambda_3}(u)]v| \\ &\leq |f(u_{nj}) - f(u)|_{\frac{p}{p-1}}. \end{aligned}$$

Implicando que DJ_{λ_3} é contínuo. Da Proposição A.1, temos $J_{\lambda_3} \in C^1$. Portanto $J_\lambda \in C^1$.

Assim, para todo $\lambda \geq 0$ temos,

$$(J'_\lambda(u), v) = a(u, v) + \lambda ||u||^2(u, v) - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v, \; u, v \in H.$$

1.3 $J_\lambda^T \in C^1$

Mostraremos que $J_\lambda^T \in C^1$.

Temos,

$$J_\lambda^T(u) = \frac{1}{2}a||u||^2 + \frac{1}{4}\lambda h_T(u)||u||^4 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u),$$

onde podemos escrever da forma $J_\lambda^T(u) = aJ_{\lambda_1}(u) + \lambda h_T(u)J_{\lambda_2}(u) - J_{\lambda_3}(u)$. Como já foi visto na seção anterior J_{λ_1}, J_{λ_2} e $J_{\lambda_3} \in C^1$, o que falta verificar se $h_T J_{\lambda_2} \in C^1$. Como $h_T \in C^\infty$, temos $h_T \cdot J_{\lambda_2} \in C^1$. Assim $J_\lambda^T \in C^1$. Pela regra de derivada do produto, temos para todo $v \in H$

$$((J_\lambda^T(u))', v) = a(u,v) + \lambda h_T(u)||u||^2(u,v) + \frac{\lambda}{2T^2}\psi'\left(\frac{||u||^2}{T^2}\right)||u||^4(u,v) - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v.$$

Apêndice

$\mathcal{B}$

Resultados importantes

Neste apêndice mostraremos os resultados utilizados nesse trabalho.

Teorema B.1 (Desigualdade de Sobolev, Gagliardo, Nirenberg)**.** *Seja* $1 \leq p \leq N$, *então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

onde p^* *é dado por* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$, *e existe uma constante* $c = c(p, N)$ *tal que*

$$||u||_{p^*} \leq ||\nabla u||_p,$$

para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Ver [4], página 278.

□

Corolário B.1. *Seja* $1 \leq p < N$. *Então a seguinte imersão é contínua:*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N),$$

para todo $q \in [p, p^*]$.

Demonstração. Ver [4], página 281.

□

Teorema B.2 (Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja A um conjunto mensurável do* $\mathbb{R}^N$ *e seja (f_j) uma sequência de funções mensuráveis tal que*

$$f_j(x) \to f(x) \text{ quase em toda parte em } A,$$

onde f é uma função mensurável. Se existir uma função $g \in L^1(A)$ tal que

$$|f_j(x)| \leq g(x) \text{ quase em toda parte em } A,$$

então

$$\lim_{j \to \infty} \int_A f_j(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

Demonstração. Ver [4], página 90.

□

Teorema B.3 (Vainberg)**.** *Sejam (f_j) uma sequência de funções em $L^q(\Omega)$ e $f \in L^q(\Omega)$ tais que*

$$f_j \to f \text{ em } L^q(\Omega).$$

Então, existe $(f_{jk}) \subset (f_j)$ e uma função $g \in L^q(\Omega)$ tal que

$$|f_{jk}(x)| \leq g(x) \text{ quase em toda parte em } \Omega,$$

$$f_{jk}(x) \to f(x) \text{ quase em toda parte em } \Omega.$$

Demonstração. Ver [4], página 94.

□

Lema B.1 (Lema de Deformação)**.** *Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1$ e $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Se*

$$||I'(u)|| \geq 4\varepsilon,$$

para todo $u \in I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$, então existe $\eta \in C(X,X)$ tal que

(i) $\eta(u) = u, \forall u \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$,

(ii) $\eta(I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$,

onde

$$I^d := I^{-1}(]-\infty, d[).$$

Demonstração. Ver [20], página 11.

□

Teorema B.4 (Teorema do Passo da Montanha)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que existem $\alpha, \rho > 0$ tais que*

(i)

$$I(u) \geq \alpha > 0 \text{ para todo } u \in X : ||u|| = \rho,$$

existe $e \in X$ tal que $||e|| > \rho$.

(ii)

$$I(e) < 0.$$

Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in X$, tal que

(a) $c - 2\varepsilon \leq I(u_\varepsilon) \leq c + 2\varepsilon$,

(b) $||I'(u_\varepsilon)|| < 4\varepsilon$,

onde

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{[0,1]} I(\gamma(t)),$$

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração. Primeiramente provemos que c é finito. De fato, desde que $\gamma(0) = 0 \in B_\rho(0)$, $\gamma(1) = e \in X\ \overline{B_\rho(0)}$ e $\gamma([0,1])$ é conexo, temos que

$$\gamma([0,1]) \cap \partial B_\rho(0) \neq \emptyset.$$

Logo, da hipótese (i), temos

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha,$$

implicando que $c \geq \alpha > 0$.

Suponha agora, por contradição, que para algum $\varepsilon > 0$ as condições (a) e (b) não ocorram, ou seja,

(c) $c - 2\varepsilon < I(u) < c + 2\varepsilon, \quad \forall u \in X,$

(d) $||I'(u)|| \geq 4\varepsilon, \quad \forall u \in X.$

Desde que $c > 0$ e diminuindo ε se necessário, temos

$$I(e) \leq I(0) = 0 < c - 2\varepsilon. \tag{B.1}$$

Dos itens (c) e (d), e do Lema de Deformação B.1, existe $\eta \in C(X, X)$ tal que

(I) $\eta(u) = u$ se $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$,

(II) $\eta(I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$.

Da definição de c, existe $\overline{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\overline{\gamma}(t)) \leq c + \varepsilon.$$

Conseideremos $\widehat{\gamma} : [0,1] \to X$ definido por $\widehat{\gamma}(t) = \eta(\overline{\gamma}(t))$. Observemos que

$$\widehat{\gamma}(0) = \eta(\overline{\gamma}(0)) = \eta(0) = 0,$$

$$\widehat{\gamma}(1) = \eta(\overline{\gamma}(1)) = \eta(e) = e.$$

Por (B.1), temos $0, e \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$.

Do Lema de Deformação B.1, $\eta(0)=0$ e $\eta(e)=e$. Portanto

$$\widehat{\gamma}(0)=0,$$

$$\widehat{\gamma}(1)=e,$$

mostrando que $\widehat{\gamma} \in \Gamma$. Do Lema de Deformação, para qualquer $t \in [0,1]$, encontramos

$$\widehat{\gamma}(t)=\eta(\overline{\gamma}(t)) \in I^{c-\varepsilon}.$$

Assim,

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\widehat{\gamma}(t)) \leq c-\varepsilon.$$

O que é um absurdo, provando o teorema.

$\square$

Observação B.1. *As hipóteses (i) e (ii) são chamadas, respectivamente,* 1^a *geometria e* 2^a *geometria do Passo da Montanha.*

Lema B.2 (Identidade de Pohozaev)**.** *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma fução contínua e $u \in H_0^1(\Omega)\cap H^2_{loc}(\overline{\Omega})$ uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\triangle u = g(u) \ \text{em } \Omega \\ u=0 \ \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x.\eta(x)dS_x = N\int_\Omega G(u),$$

onde, $G(s)=\int_0^s f(s)ds$ com $G\in L^1(\Omega)$ e $\eta(x)$ é um vetor normal exterior no ponto $x\in\partial\Omega$.

Se $\Omega=\mathbb{R}^N$, então

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u).$$

Demonstração. Temos que

$$0 = (\triangle u + g(u))x \cdot \nabla u.$$

Temos também,

$$\begin{aligned} g(u)x\nabla u &= \operatorname{div}(xG(u)) - NG(u), \\ \Delta u x\nabla u &= \operatorname{div}\left(\nabla u x \cdot \nabla - x\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) + \frac{N-2}{2}|\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Integrando por partes, obtemos

$$\int_{\partial\Omega}\left[xG(u) + \nabla u x \cdot \nabla u - x\frac{|\nabla u|^2}{2}\right]\eta dS_x = \int_{\Omega}\left[NG(u) - \frac{N-2}{2}|\nabla u|^2\right].$$

Mas em $\partial\Omega$, $u = 0$, então

$$G(u) = 0, \qquad \nabla u = \nabla\eta \cdot \eta.$$

Implicando que

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2 x \cdot \eta dS_x = \int_{\Omega}\left[NG(u) - \frac{N-2}{2}|\nabla u|^2\right].$$

Assim

$$\frac{N-2}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2 x.\eta(x)dS_x = N\int_{\Omega}G(u).$$

□

Teorema B.5 (Diferenciação de Lebesgue)**.** *Se* $\psi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$*, então*

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{|B(y,\delta)|}\int_{B(y,\delta)}\psi(x)dx = \psi(y).$$

Para quase todo $y \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Ver [15], página 140.

□

Lema B.3 (Lions)**.** *Sejam $r > 0$, $2 \leq 2 < 2^*$ e $N \geq 2$. Se $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e se*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q dz \to 0, \;\; quando \; n \to \infty,$$

então $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, $2 < p < 2^*$.

Demonstração. Ver [20], página 16.

□

Teorema B.6 (Rellich-Kondrachow)**.** *Sejam $N \geq 2$, e Ω um domínio limitado. Então $H^1(\Omega)$ está imerso compactamente em L^p, $p \in [1, 2^*)$.*

Demonstração. Ver [1], página 144.

□

Teorema B.7. *Suponha que:*
i) $X \subseteq V \subset \mathbb{R}^k$, V é aberto, $T : V \to \mathbb{R}^k$ contínua;
ii) X é Lebesgue mensurável, T é injetiva e diferenciavle em X;
iii) $m(T(V - X)) = 0$.
Então, fixando $Y = T(X)$, temos

$$\int_Y f dm = \int_X (f \circ T)|J_T| dm,$$

para toda fução mensurável $f : \mathbb{R}^k \to [0, \infty]$, onde $|J_T|$ é o determinate jacobiano de T.

Demonstração. Ver [15], página 153.

□

Proposição B.1. *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe uma sequência de caminhos* $\{\gamma_n\} \subset \Gamma_\mu$ *tal que para* $m \in \mathbb{N}$ *suficientemente grande*

(i) $||\gamma_n(t)||_2^2 \leq c'_\mu + 3\epsilon$ *onde*

$$\Phi(_n(t)) \geq c_\mu - \varepsilon(\mu_n - \mu), \tag{B.2}$$

(ii) $\max\limits_{t \in [0,1]} \Phi_\mu(\gamma_n(t)) \leq c_\mu + (c'_\mu + 2\varepsilon)(\mu_n - \mu).$

Escolhendo $\varepsilon = c_\mu > 0$ *, quando (B.2) ocorre, temos*

$$||\gamma_n(t)||^2 \leq \beta^2.$$

Demonstração. Ver [8], página 657.

□

Teorema B.8 (Desigualdade de Hölder)**.** *Seja* $f \in L^p$ *e* $g \in L^{p'}$ *com* $1 \leq p \leq \infty$*, onde* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$*. Então* $fg \in L^1$ *e*

$$\int |fg| \leq ||f||_p ||g||_{p'}.$$

Demonstração. Ver [4], página 92.

□

Lema B.4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Dados* x *e* y *no* $\mathbb{R}^N$*, temos*

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| ||y||.$$

Demonstração. Ver [13], página 15.

□

Bibliografia

[1] Adms, R. A., Sobolev Space, Academic Press, 1975.

[2] Alves, C.O., Corrêa F.J.S.A. e Ma, T.F., Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type, Comput. Math. Appl., 49(2005)85-93.

[3] Berestycki, H. e Lions, P.L., Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state. Arch. Ration. Mech. Anal., 82 (1983) 313-345.

[4] Brezis, H., Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2011.

[5] Ding, W.Y. e Ni. W.M., On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation. Arch. Ration. Mech. Anal., 91 (1986) 283-308.

[6] Figueiredo G. M., Existence of positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via trucation argument, J. Math. Anal. Appl. 401 (2013), 706-713.

[7] He, X. e Zou, W., Existence and concentration of positive solutions for a Kirchhoff equation in $\mathbb{R}^3$. JDE, 252 (2012) 1813-1834.

[8] Jeanjean, L., Local condition insuring bifurcation from the continuous spectrum. Math. Z., 232, (1999) 651-664.

[9] Kavian, O., Introduction à la Théorie des Points Critiques, Springer, Vergales, 1993.

[10] Kirchhoff G., Mechanik, Teubner, Leipzig, 1883.

[11] Li, Y., Li, F. e Shi, J., Existence of a positive solution to Kirchhoff type problems without compactness conditions. JDE, 253 (2012) 2285-2294.

[12] Li, Y., Wang, Z.Q. e Zeng, J., Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lonéaire, 23 (2006) 829-837.

[13] Lourêdo, A.T., Oliveira, A.M. e Lima, O.A., Cálculo Avançado, Eduepb, Campina Grande - PB, 2010.

[14] Ma, T.F., Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type. Nonlinear Anal., Volume 63, 5-7 (2005) 1967-1977.

[15] Rudin, W., Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, 3^a edição, 1986.

[16] Strauss, W.A., Existence of solitary waves in higher dimensions. Comm. Math. Phys., 55 (1997) 149-162.

[17] Struwe, M., Variational Methods Application to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Springer, 3^a edição, vol. 34, 2000.

[18] Wang, J., On a quasilinear Schrödinger-Kirchhoff-type equation with radial potentials. Nonlinear Anal. 83 (2013) 58-68.

[19] Wang, J., Tian, L., Xu, J. e Zhang, F., Multiplicity and concentration of positive solutions for a Kirchhoff type problem with critical growth. JDE, 253 (2012) 2314-2351.

[20] Willem, M., Minimax Theorems, Birkhäuser, vol. 24, 1996.

[21] Wu, X., Existence of nontrivial solutions and high energy solutions for Schrödinger-Kirchhoff-type equations in $\mathbb{R}^N$. Nonlinear Analysis, RWA 12 (2011) 1278-1287.