UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ARI JÚNIOR DOS SANTOS MACHADO

LIMITES E DERIVADAS PARA O ENSINO MÉDIO

BELÉM- PARÁ
2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Machado, Ari Júnior dos Santos, 1978 –
Limites e derivadas para o ensino médio /
Ari Júnior dos Santos Machado. – 2013.
Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Junior
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Porgrama de Pós-Graduação em Matemática, Belém, 2013.

1. Funções (Matemática). 2. Cálculo. 3. Derivadas (Matemática). I. Título.

CDD 22 . ed . 515

ARI JÚNIOR DOS SANTOS MACHADO

LIMITES E DERIVADAS PARA O ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada à Universidade Federal do Pará – UFPA, como instrumento parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior.

BELÉM-PARÁ
2013

ARI JÚNIOR DOS SANTOS MACHADO

Monografia apresentada à Universidade Federal do Pará (UFPA), como trabalho de conclusão de curso de Mestrado em Matemática, e aprovada em 14/08/2013, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Orientador: ______________________________

Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Membro interno: ______________________________

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias

Membro externo: ______________________________

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Conceito: ExC

Aos meus familiares e aos meus amigos, pela compreensão, pela paciência e pelo apoio neste importante momento de minha vida.

Agradeço a Deus, princípio de tudo, pela presença constante e pela proteção.

A meus pais, exemplos e alicerces em minha vida, pela formação e pela fé inabalável que depositam em mim.

A meus familiares e aos amigos, pelos bons e pelos maus momentos e pela força que me deram para seguir.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), pela oportunidade de participar do PROFMAT, programa que nos proporcionou imensurável crescimento intelectual.

A Universidade Federal do Pará (UFPA), pela estrutura física e intelectual que nos proporcionou.

A CAPES, pelo reconhecimento e pelo investimento que viabilizaram este importante projeto.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior, pela dedicação, pela compreensão e pela contribuição para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de oferecer à comunidade da educação básica uma proposta de ensino para a construção de gráficos de funções reais, a partir dos conceitos de limites e de derivadas. O diferencial deste material é que os conceitos de limites e de derivadas são apresentados a começar da motivação geométrica. Iniciaremos com uma noção intuitiva de limite, mostrando variados exemplos, utilizando tabelas e gráficos. Mostraremos também a ideia de função contínua, de limites laterais, de limites infinitos e de limites no infinito. Na sequência, surgirá o conceito de derivada, partindo do problema da velocidade instantânea e do problema da reta tangente, passando pela definição através de limite. Mostraremos, ainda, algumas regras de derivação e finalizaremos com a construção do gráfico de funções, em que serão destacadas as características dos gráficos, como pontos de máximo ou de mínimo, intervalos de crescimento e decrescimento e intervalos em que o gráfico é côncavo para cima ou para baixo.
Palavras-chave: funções, limites, derivadas, gráficos.

ABSTRACT

This work aims to provide the community with basic education a teaching proposal for the construction of graphs of real functions, based on the concepts of limits and derivatives. The differential of this material is that the concepts of limits and derivatives are presented beginning with the geometric motivation. Starts rowing with an intuitive notion of limit, showing various examples, using charts and graphs. We will also show the idea of continuous function, late-ral limits, infinite limits and limits at infinity. Following, you will see the concept of derivative, leaving the problem of the instantaneous velocity and the problem of the tangent line passing through the definition of limit. Show also some rules of derivation and conclude with the construction of the graph of functions, which will highlight the characteristics of graphs, as points of maximum or minimum intervals of growth and degrowth and intervals where the graph is concave upward or downward.
Keywords: functions, limits, derivatives, graphs.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho é uma proposta de ensino das noções de limites e das de derivadas no ensino médio. No entanto, sem o rigor matemático das demonstrações e das simbologias utilizadas no ensino superior. A abordagem será feita a partir do aspecto geométrico, buscando os conceitos de forma intuitiva. Um dos objetivos é apresentar ferramentas de cálculo diferencial, a fim de que o aluno tenha condições de esboçar os gráficos de vários tipos de funções reais, pois sabemos que nos ensinos fundamental e médio são estudadas as funções, como as polinomiais de 1º e de 2º graus, as exponenciais e as logarítmicas, assim como seus respectivos gráficos. Entretanto, quando se trata da construção do gráfico de uma função polinomial de grau maior ou igual a três, como $f(x) = x^3 + 4x^2 - 20x + 30$, ou de uma função racional, como $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, os alunos têm dificuldades de saber o comportamento do gráfico, uma vez que são necessários conceitos de limites e de derivadas que, a meu ver, deveriam fazer parte do currículo do ensino médio. Além disso, sem ter a noção de limite e de derivada no ensino médio, os alunos ingressam no nível superior e apresentam muita dificuldade nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Neste trabalho, dar-se-á ênfase no esboço de gráficos de funções reais, reunindo informações necessárias a estas construções, como: identificar pontos de máximos e de mínimos, intervalos de crescimento e de decrescimento e intervalos em que o gráfico é côncavo para cima ou para baixo. Iniciaremos com a ideia geométrica de limites, perpassando pelo cálculo de limites até o conceito de derivada, a partir dos problemas de velocidade instantânea e da reta tangente em uma e finalizaremos com as aplicações de derivada na construção dos gráficos.

CAPÍTULO 1
LIMITES DE FUNÇÕES

1.1 – Noção Intuitiva de Limite

A noção intuitiva de limite está ligada a várias ideias, dentre elas a de tendência. Dizer que x tende a um determinado valor *p*, do domínio de uma função, significa que os valores de x se aproximam de *p.*

Dizer que o limite de uma função f, quando x tende a *p (*representa-se: $x \to p$*)*, é igual a *L*, significa que, quando os valores de x se aproximam de *p*, os valores f(x) da função aproximam-se de *L*. Simbolicamente, escreve-se: $\lim_{x \to p} f(x) = L$.

Vejamos os seguintes exemplos:

Exemplo 1.1 – Usando a noção intuitiva, vamos identificar o limite, quando x tende a 2, da função f(x) = x – 1. De outro modo, vamos calcular $\lim_{x \to 2}(x-1)$.

Vamos construir tabelas para obtermos o valor do limite:

x	*f(x) = x – 1*	*f(x)*
1,5	*f(1,5) = 1,5 – 1*	*0,5*
1,8	*f(1,8) = 1,8 – 1*	*0,8*
1,9	*f(1,9) = 1,9 – 1*	*0,9*
1,99	*f(1,99) = 1,99 – 1*	*0,99*
$\downarrow$		$\downarrow$

x	*f(x) = x – 1*	*f(x)*
2,5	*f(2,5) = 2,5 – 1*	*1,5*
2,2	*f(1,5) = 2,2 – 1*	*1,2*
2,01	*f(2,01) = 2,01 – 1*	*1,01*
2,001	*f(2,001) = 2,001 – 1*	*1,001*
$\downarrow$		$\downarrow$

Graficamente, temos:

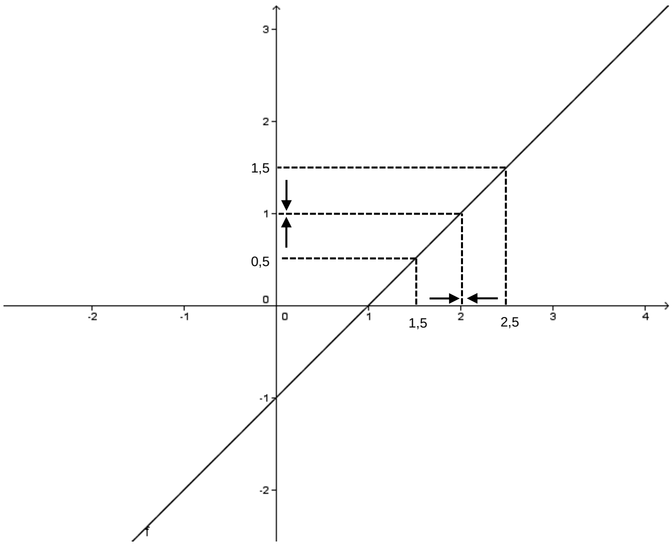


Figura 1.1: Gráfico de f(x) = x – 1

Observe que, quando x tende a 2, tanto por valores menores quanto por valores maiores que 2, f(x) aproxima-se de 1, portanto, $\lim_{x \to 2}(x-1) = 1$.

É importante observar que f(2) = 2 – 1 = 1, ou seja, $\lim_{x \to 2}(x-1) = f(2)$.

Exemplo 1.2 – Calcule o $\lim_{x \to 1}(x^2+1)$, usando a noção intuitiva.

Construindo as tabelas para os valores da função f(x) = x^2 + 1, temos:

x	*f(x) = x^2 + 1*	*f(x)*
0,7	*f(0,7) = $(0,7)^2$ + 1*	*1,49*
0,8	*f(0,8) = $(0,8)^2$ + 1*	*1,64*
0,9	*f(0,9) = $(0,9)^2$ + 1*	*1,81*
0,99	*f(0,99) = $(0,99)^2$ + 1*	*1,9801*
↓		↓

x	*f(x) = x^2 + 1*	*f(x)*
1,2	*f(1,2) = $(1,2)^2$ + 1*	*2,44*
1,1	*f(1,1) = $(1,1)^2$ + 1*	*2,21*
1,01	*f(1,01) = $(1,01)^2$ + 1*	*2,0201*
1,001	*f(1,001) = $(1,001)^2$ + 1*	*2,002001*
↓		↓

Fazendo a análise do gráfico, temos:

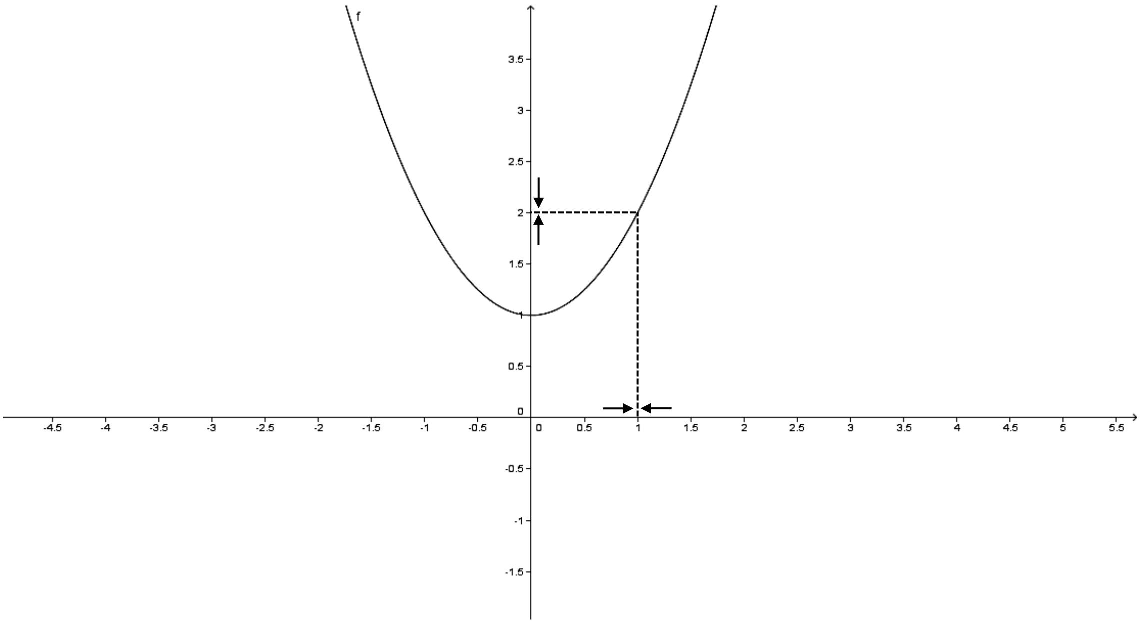


Figura 1.2: Gráfico de f(x) = x^2 + 1

Assim, temos que, quando os valores de x se aproximam de 1, tanto pela direita quanto pela esquerda do número 1, f(x) aproxima-se de 2, logo, $\lim_{x \to 1}(x^2 + 1) = 2$.

Notemos que f(1) = 1^2 + 1 = 2, logo, $\lim_{x \to 1}(x^2 + 1) = f(1)$.

Exemplo 1.3 – Através da noção intuitiva de limite, calcule o $\lim_{x \to 3}\sqrt{x+1}$.

Construindo as tabelas para os valores da função f(x) = $\sqrt{x+1}$, temos:

x	*f(x)* = $\sqrt{x+1}$	*f(x)*
2,7	*f(2,7)* = $\sqrt{2{,}7+1}$	*1,9235*
2,8	*f(2,8)* = $\sqrt{2{,}8+1}$	*1,9494*
2,9	*f(2,9)* = $\sqrt{2{,}9+1}$	*1,9748*
2,99	*f(2,99)* = $\sqrt{2{,}99+1}$	*1,9975*
↓		↓

x	*f(x)* = $\sqrt{x+1}$	*f(x)*
3,2	*f(3,2)* = $\sqrt{3{,}2+1}$	*2,0494*
3,1	*f(3,1)* = $\sqrt{3{,}1+1}$	*2,0248*
3,01	*f(3,01)* = $\sqrt{3{,}01+1}$	*2,0025*
3,001	*f(3,001)* = $\sqrt{3{,}001+1}$	*2,0002*
↓		↓

Observemos o gráfico da função:

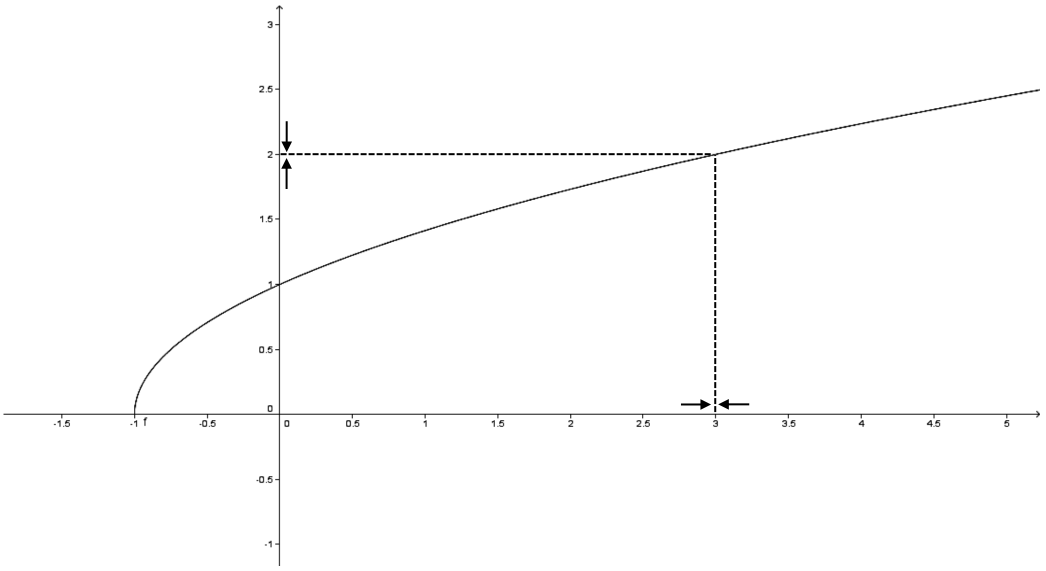


Figura 1.3: Gráfico de f(x) = $\sqrt{x+1}$

Note que, quando os valores de x se aproximam de 3, tanto pela direita quanto pela esquerda, f(x) aproxima-se de 2, logo, $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$.

Veja que $f(3)=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$, portanto, $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=f(3)$.

Exemplo 1.4 – Calcular o limite da função $f(x)=|x+2|$, quando x tende a – 3.

Vamos obter o $\lim\limits_{x\to -3}|x+2|$ de forma intuitiva, a partir da construção das tabelas para os valores da função $f(x)=|x+2|$. Assim:

X	$f(x)=\|x+2\|$	*f(x)*
– 3,2	*f(– 3,2) =* $\|-3{,}2+2\|$	*1,2*
– 3,1	*f(– 3,1) =* $\|-3{,}1+2\|$	*1,1*
– 3,01	*f(– 3,01) =* $\|-3{,}01+2\|$	*1,01*
– 3,001	*f(– 3,001) =* $\|-3{,}001+2\|$	*1,001*
↓		↓

x	$f(x)=\|x+2\|$	*f(x)*
– 2,7	*f(– 2,7) =* $\|-2{,}7+2\|$	*0,7*
– 2,8	*f(– 2,8) =* $\|-2{,}8+2\|$	*0,8*
– 2,9	*f(– 2,9) =* $\|-2{,}9+2\|$	*0,9*
– 2,99	*f(– 2,99) =* $\|-2{,}99+2\|$	*0,99*
↓		↓

Vejamos o gráfico da função:

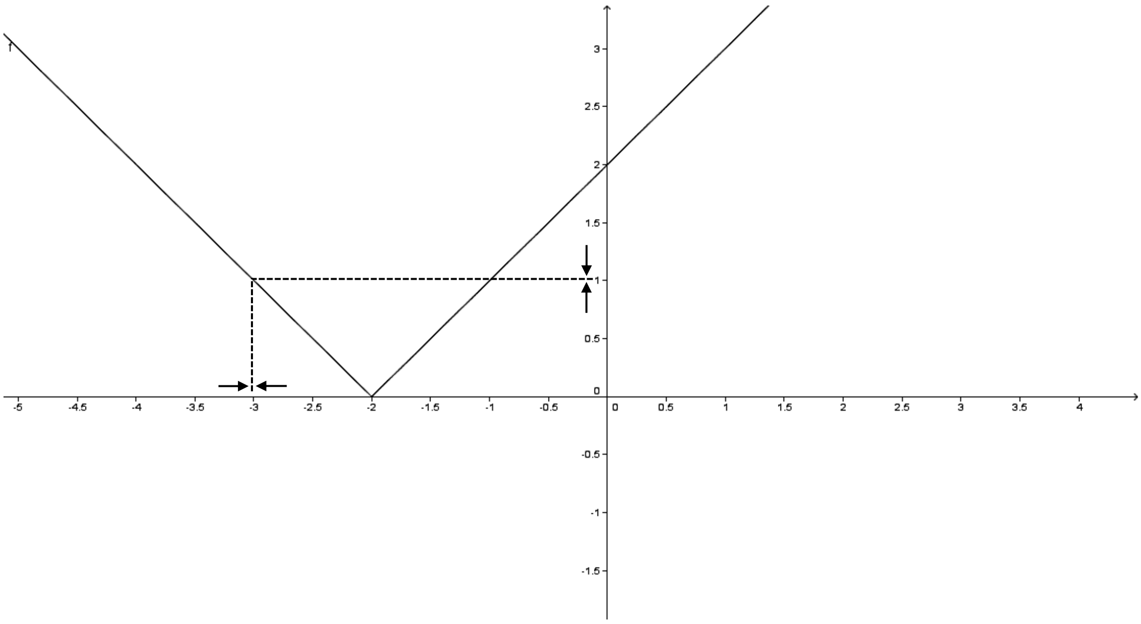


Figura 1.4: Gráfico de $f(x)=|x+2|$

Vamos observar que, quando os valores de x se aproximam de – 3, tanto pela direita quanto pela esquerda do mesmo, f(x) aproxima-se de 1, portanto, $\lim_{x\to -3}|x+2|=1$.

É importante notar que $f(-3)=|-3+2|=|-1|=1$, ou seja, $\lim_{x\to -3}|x+2|=f(-3)$.

Nos exemplos apresentados até aqui, os limites das funções, com x tendendo a um determinado valor *p*, foram iguais ao valor numérico das funções naquele ponto, ou seja, $\lim_{x\to p} f(x)=f(p)$. Mas será sempre assim? Vejamos outros exemplos:

Exemplo 1.5 – Vamos obter agora seguinte limite: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$.

Primeiramente, devemos notar que o número 1 não pertence ao domínio da função, pois a função $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ não está definida para x = 1, já que $f(1)=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$ é uma indeterminação. No entanto, é possível obter o limite, pois o cálculo do limite dá-se para valores x próximos de 1 (e não para x = 1), ou seja, para x ≠ 1. Assim sendo, podemos fazer a seguinte simplificação:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1).(x-1)}{x-1};\ x\neq 1\ \Rightarrow f(x)=x+1$$

Logo, calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ equivale a calcular $\lim\limits_{x \to 1}(x + 1)$. De forma intuitiva, através da tabela e do gráfico, vamos obter o valor do limite:

X	*f(x) = x + 1*	*f(x)*
0,7	*f(0,7) = 0,7 + 1*	*1,7*
0,8	*f(0,8) = 0,8 + 1*	*1,8*
0,9	*f(0,9) = 0,9 + 1*	*1,9*
0,99	*f(0,99) = 0,99 + 1*	*1,99*
$\downarrow$		$\downarrow$

x	*f(x) = x + 1*	*f(x)*
1,2	*f(1,2) = 1,2 + 1*	*2,2*
1,1	*f(1,1) = 1,1 + 1*	*2,1*
1,01	*f(1,01) = 1,01 + 1*	*2,01*
1,001	*f(1,001) = 1,001 + 1*	*2,001*
$\downarrow$		$\downarrow$

Graficamente, temos:

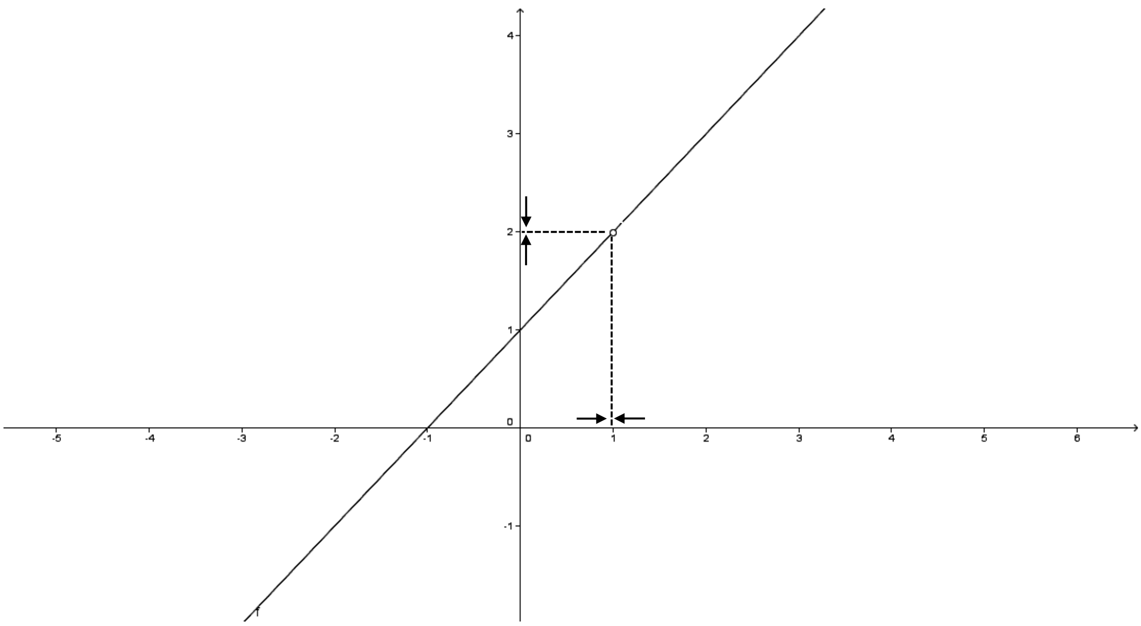


Figura 1.5: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Daí concluímos que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Exemplo 1.6 – Calcular o limite a seguir:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

De modo análogo ao exemplo anterior, o número 2 não pertence ao domínio da função, pois a função $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ não está definida para x = 2, pois $f(2)=\dfrac{2-2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\dfrac{0}{0}$ é uma indeterminação. Mas é possível obter o limite, já que o cálculo do limite dá-se para valores x próximos de 2 (e não para x = 2), ou seja, para x ≠ 2. Assim sendo, podemos fazer a seguinte simplificação:

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right).\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}};\ x\neq 2 \quad \Rightarrow f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2}$$

Logo, calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ equivale a calcular $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)$. De forma intuitiva, através da tabela e do gráfico, vamos obter o valor do limite:

x	$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2}$
1,7	$f(1{,}7)=\sqrt{1{,}7}+\sqrt{2}$
1,8	$f(1{,}8)=\sqrt{1{,}8}+\sqrt{2}$
1,9	$f(1{,}9)=\sqrt{1{,}9}+\sqrt{2}$
1,99	$f(1{,}99)=\sqrt{1{,}99}+\sqrt{2}$
↓	↓
2	$2\sqrt{2}$

x	$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2}$
2,2	$f(1{,}7)=\sqrt{2{,}2}+\sqrt{2}$
2,1	$f(1{,}7)=\sqrt{2{,}1}+\sqrt{2}$
2,01	$f(1{,}7)=\sqrt{2{,}01}+\sqrt{2}$
2,001	$f(1{,}7)=\sqrt{2{,}001}+\sqrt{2}$
↓	↓
2	$2\sqrt{2}$

Graficamente, temos:

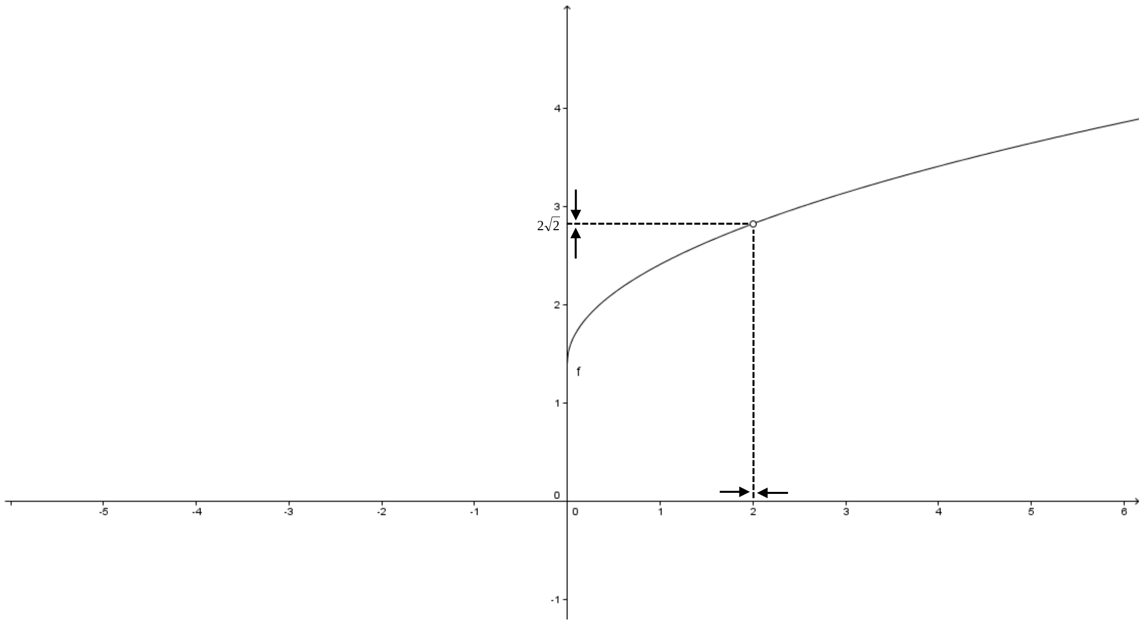


Figura 1.6: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

Portanto, concluímos que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Com esses dois exemplos, vimos que o limite não se dá exatamente no ponto, mas sim nas redondezas dele, o que chamamos de vizinhança do ponto. Nos exemplos 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4 temos o que chamamos de funções contínuas.

Funções contínuas, intuitivamente, são aquelas cujos gráficos não apresentam “saltos” nem “buracos”. Podemos dizer, ainda, que funções contínuas são aquelas em que traçamos completamente seu gráfico e não afastamos a ponta do grafite do papel. A função descontínua, por sua vez, é aquela em que, em algum momento durante o desenho do gráfico, teremos de afastar a ponta do grafite de um ponto, para continuarmos a partir de outro.

Vejamos os gráficos das funções a seguir:

Gráfico 1: f(x) = x + sen x

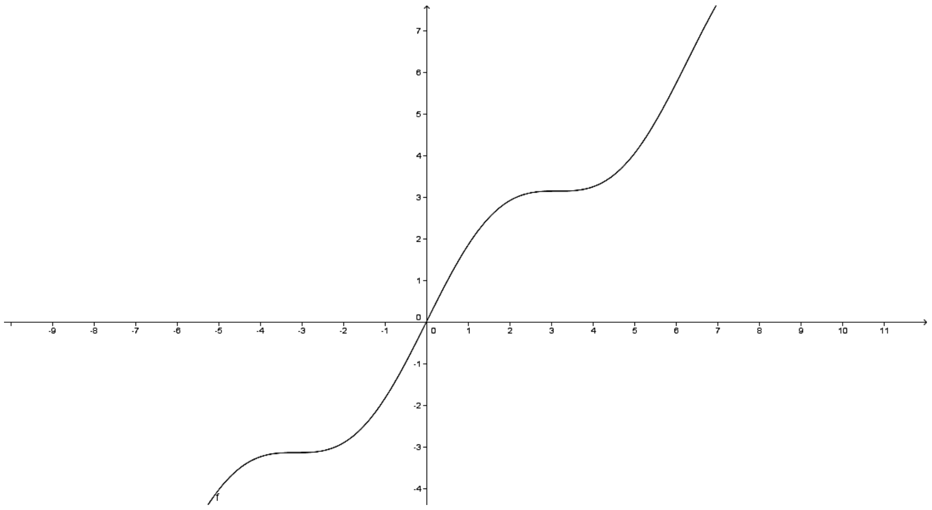


Figura 1.7: Gráfico de f(x) = x + sen x

Gráfico 2: $f(x) = \frac{1}{x}$

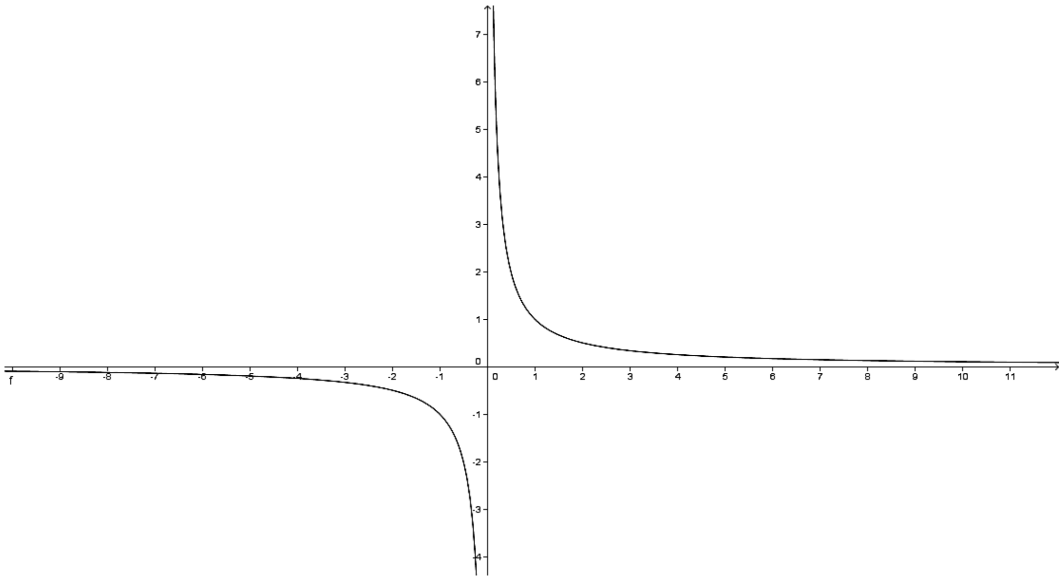


Figura 1.8: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$

Gráfico 3: $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

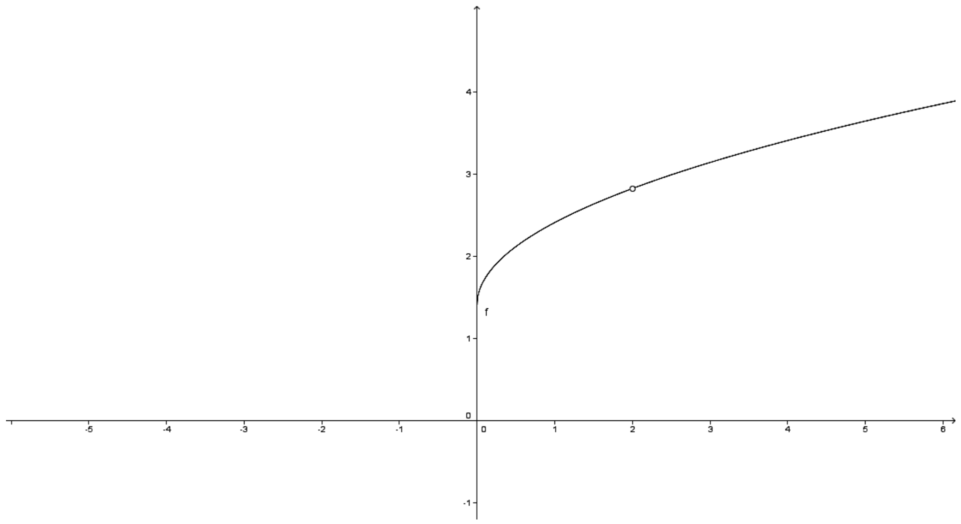


Figura 1.9: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

O gráfico 1 é de uma função contínua e os 2 e 3, de funções descontínuas.

Quando uma função f é contínua, temos que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.

No ensino médio, são estudadas as funções polinomiais, as exponenciais, as logarítmicas, as modulares e outras, assim como seus respectivos gráficos, que são exemplos de funções contínuas.

Vejamos alguns exemplos de cálculo de limites.

Exemplo 1.6 – Determine o limite $\lim\limits_{x \to -2} x^2$.

Solução:

Como as funções polinomiais são contínuas, então:

$$\lim_{x \to -2} x^2 = (-2)^2 = 4$$

Exemplo 1.7 – Calcule o valor do limite $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}$.

Solução:

Como as funções exponenciais são contínuas, então:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{1}{16}.$$

Exemplo 1.8 – Calcule o valor do limite $\lim\limits_{x \to 16} \log_2^x$.

Solução:

Como as funções logarítmicas são contínuas, então:

$$\lim_{x \to 16} \log_2^x = \log_2^{16} = 4$$

Exemplo 1.9 – Calcule o valor do limite $\lim\limits_{x \to -1} |2x|$.

Solução:

Como as funções modulares são contínuas, temos:

$$\lim_{x \to -1} |2x| = |2 \cdot (-1)| = |-2| = 2$$

Exemplo 1.10 – Calcule o valor do limite $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Solução:

Agora temos uma função descontínua em x = – 1, pois

$$\frac{(-1)^2 - 1}{(-1) + 1} = \frac{1 - 1}{(-1) + 1} = \frac{0}{0}$$

é uma indeterminação. Neste caso, vamos simplificar a expressão $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$, com o objetivo de obtermos uma expressão que seja equivalente a ela, porém, contínua em x = – 1.

Então, simplificando, obteremos:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1) \cdot (x - 1)}{(x + 1)} = x - 1$$

Assim,

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} x - 1 = -1 - 1 = -2.$$

Em todos os exemplos estudados até agora, mesmo com “buracos” de descontinuidades, as funções sempre tendiam a um certo valor *L*, quando *x* tendia a um certo valor *a*, independentemente dos valores assumidos por *x* na vizinhança de *a*, ou seja, os limites sempre existiram. Mas há situações, como na função:

$$f(x) = \begin{cases} x, & se \ x \le 2 \\ x^2, & se \ x > 2 \end{cases},$$

em que além da descontinuidade, temos uma mudança na tendência de *f*(*x*), quando nos aproximamos de x = 2 pela esquerda ou pela direita. Vejamos:

x	$f(x) = x$
1,7	*f(1,7) = 1,7*
1,8	*f(1,7) = 1,8*
1,9	*f(1,7) = 1,9*
1,99	*f(1,7) = 1,99*
↓	↓
2	2

x	$f(x) = x^2$	*f(x)*
2,2	*f(2,2) = (2,2)*^{2}	*4,84*
2,1	*f(2,2) = (2,1)*^{2}	*4,41*
2,01	*f(2,2) = (2,01)*^{2}	*4,0401*
2,001	*f(2,2) = (2,001)*^{2}	*4,004001*
↓		↓
2		*4*

Se *x* tende a 2 pela esquerda, observamos que *f*(*x*) tende a 2 e podemos representar assim:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x = 2.$$

Mas, se *x* tende a 2 pela direita, observamos que *f*(*x*) tende a 3 e podemos representar isso por:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 = 4$$

O gráfico que ilustra esta situação segue abaixo:

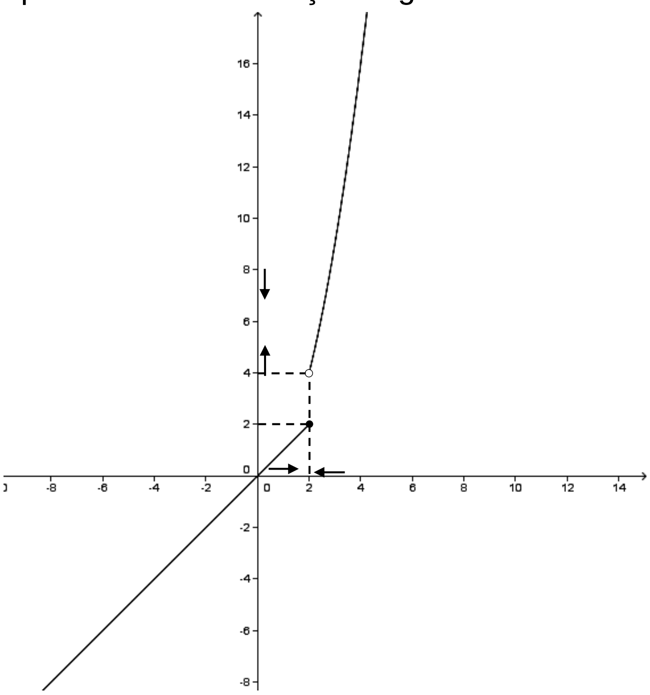


Figura 1.10: Gráfico de $f(x) = \begin{cases} x, & se\ x \leq 2 \\ x^2, & se\ x > 2 \end{cases}$

Os limites $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ são chamados de limites laterais à esquerda e à direita, respectivamente.

Neste exemplo, como os limites laterais são diferentes, dizemos que não existe o limite de *f*, quando x tende a 2.

Podemos dizer então que, dada uma função *f*, o limite $\lim_{x \to p} f(x)$ só existe se existirem e forem iguais os limites laterais $\lim_{x \to p^-} f(x)$ e $\lim_{x \to p^+} f(x)$.

Exemplo 1.11 – Considere a função $f(x) = \begin{cases} 2x - 3; \ se \ x \leq 3 \\ 5 - x; \ se \ x > 3 \end{cases}$. Determine o valor do limite $\lim_{x \to 3^-} f(x)$.

Solução:

Como a tendência do limite é pela esquerda, então *f* é dada pela sentença *f(x)* = 2x – 3, portanto, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 2x - 3 = 2 \cdot 3 - 3 = 6 - 3 = 3$

1.2 – Propriedades Operatórias dos Limites

Para algumas funções, são necessárias algumas propriedades para o cálculo do limite, estas vamos assumir como verdadeiras e citá-las a seguir:

Sendo k uma constate, $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, temos:

1.2.1 – Limite da Soma ou da Diferença

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = L_1 \pm L_2$$

1.2.2 – Uma constante vezes uma função

$$\lim_{x \to a} \left[k \cdot f(x) \right] = k \cdot L_1$$

1.2.3 – Limite do Produto

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = L_1 \cdot L_2$$

1.2.4 – Limite do Quociente

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L_1}{L_2}$$

Vejamos alguns exemplos de aplicação

Exemplo 1.12 – Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 2}\left[(x^2+2)\cdot 2^x\right]$.

Solução:

Como o limite da produto é igual a produto dos limites, então

$$\lim_{x\to 2}\left[(x^2+2)\cdot 2^x\right]=\lim_{x\to 2}(x^2+2)\cdot\lim_{x\to 2}2^x=(2^2+2)\cdot 2^2=24$$

Exemplo 1.13 – Determine o valor do limite $\lim\limits_{x\to -3}\left[\left|-x^2-6\right|+x^3\right]$.

Solução:

Como o limite da soma é igual a soma dos limites, temos

$$\lim_{x\to -3}\left[2\left|-x^2-6\right|+x^3\right]=\lim_{x\to -3}2\cdot\left|-x^2-6\right|+\lim_{x\to -3}x^3=2\cdot\left|-(-3)^2-6\right|+(-3)^3=30-27=3$$

Exemplo 1.14 – Determine o valor do limite $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log_2^{x+3}}{x+1}$.

Solução:

Como o limite do quociente é igual ao quociente dos limites, temos

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log_2^{x+3}}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\log_2^{x+3}}{\lim\limits_{x\to 1}x+1}=\frac{\log_2^{1+3}}{1+1}=\frac{2}{2}=1$$

1.3 – Limites Infinitos

Vamos analisar a tendência do gráfico da função $f(x)=\dfrac{1}{x}$, quando x se aproxima ao máximo de zero, tanto pela esquerda quanto pela direita, ou seja, vamos calcular $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$ e $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$ e obteremos os valores desses limites através das tabelas de valores, observe:

Tabela 1

x	$f(x)=\frac{1}{x}$	*f(x)*
– 1	$f(-1)=\frac{1}{-1}$	*– 1*
– 0,1	$f(-0{,}1)=\frac{1}{-0{,}1}$	*– 10*
– 0,01	$f(-0{,}01)=\frac{1}{-0{,}01}$	*– 100*
– 0,001	$f(-0{,}001)=\frac{1}{-0{,}001}$	*– 1000*
– 0,0001	$f(-0{,}0001)=\frac{1}{-0{,}0001}$	*– 10000*
– 0,00001	$f(-0{,}00001)=\frac{1}{-0{,}00001}$	*– 100000*
↓		↓
0		

Tabela 2

x	$f(x)=\frac{1}{x}$	*f(x)*
1	$f(1)=\frac{1}{1}$	*1*
0,1	$f(0{,}1)=\frac{1}{0{,}1}$	*10*
0,01	$f(0{,}01)=\frac{1}{0{,}01}$	*100*
0,001	$f(0{,}001)=\frac{1}{0{,}001}$	*1000*
0,0001	$f(0{,}0001)=\frac{1}{0{,}0001}$	*10000*
0,00001	$f(0{,}00001)=\frac{1}{0{,}00001}$	*100000*
↓		↓
0		

Veja que, quando x se aproxima de zero, tanto pela esquerda quanto pela direita, os valores da função não se aproximam de nenhum valor L. Pelo contrário, quanto mais próximos de zero os valores de x pela esquerda, menores os valores da função, ou seja, os valores da função diminuem indefinidamente. Para representar essa situação, usamos o símbolo – ∞. Logo, escrevemos:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Quando x tende a zero pela direita, os valores da função crescem indefinidamente, então,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty .$$

Geometricamente, temos o seguinte gráfico:

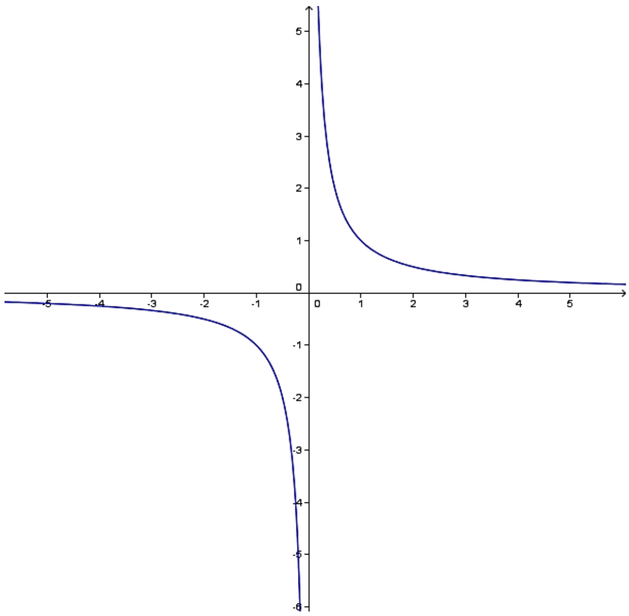


Figura 1.11: Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Poderíamos obter essa tendência da função analisando a fração $\dfrac{1}{x}$. Veja que, mantendo o numerador da fração constante, quanto mais próximo de zero for o denominador, maior valor absoluto terá a função.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.12 – Determine o limite a seguir

$$\lim_{x \to 1^+} 1 + \frac{1}{x-1}$$

Solução:

Quando x $\to$ 1, temos que, x – 1 $\to$ 0, então $\dfrac{1}{x-1} \to +\infty$, pois, x > 1. Logo,

$$\lim_{x \to 1^+} 1 + \frac{1}{x-1} = +\infty$$

Assim, podemos dizer que a reta x = 1 é uma assíntota vertical, veja o gráfico:

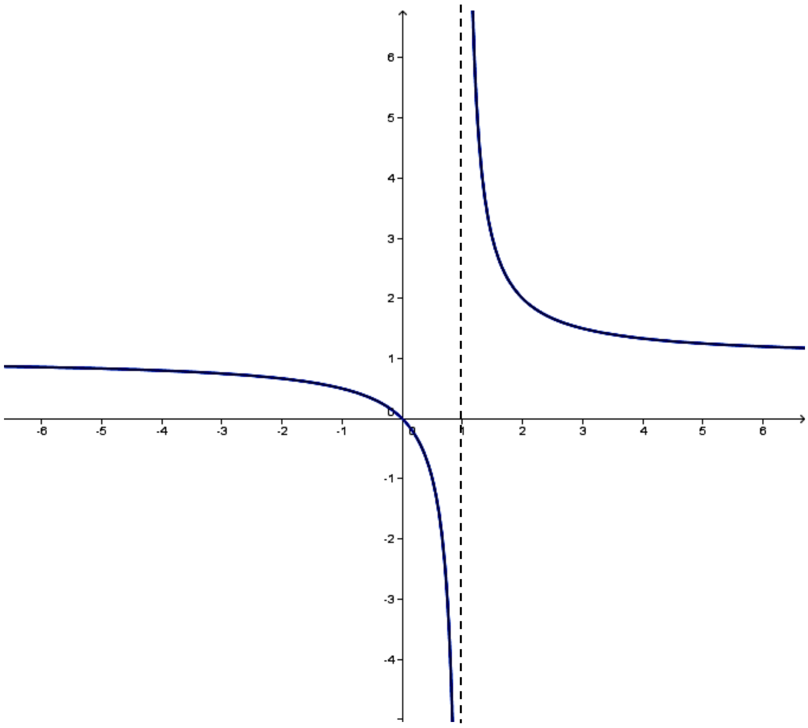


Figura 1.12: Gráfico de $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-1}$

Analisando estes dois últimos gráficos, podemos afirmar que, se $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = \pm\infty$ e/ou $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = \pm\infty$, então x = p é uma assíntota vertical.

1.4 – Limites no Infinito

Nesta seção, vamos analisar o comportamento de uma função, quando x cresce ou decresce indefinidamente, ou seja, vamos aprender a calcular limites no infinito (limites com x $\to \pm\infty$). Simbolicamente,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Vejamos os exemplos a seguir,

Exemplo 1.13 – Calcule o valor do limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$.

Solução:

Analisando a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, temos que, como o numerador da fração é constante, quanto maior for o denominador dela, mais próximo de zero estará o valor da função, ou seja, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Observe o gráfico de f.

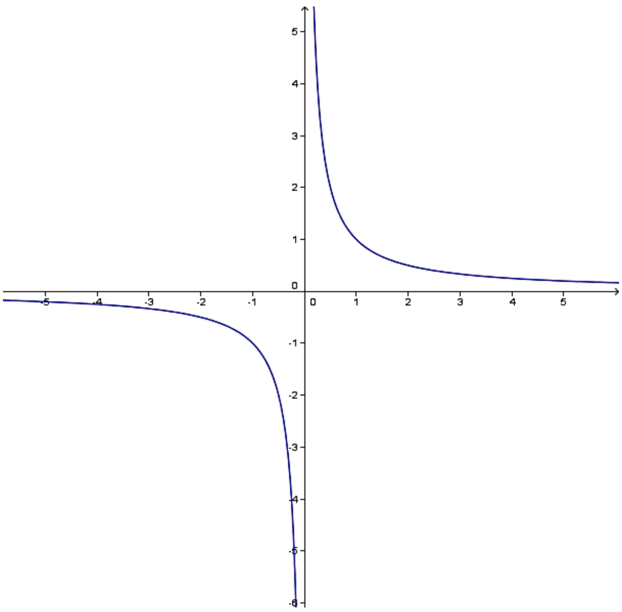


Figura 1.13: Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Exemplo 1.14 – Determine o valor do limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1}$.

Solução:

Neste caso, devemos colocar em evidência a maior potência de *x* tanto no numerador como no denominador:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^5}\right)}{x^5 \cdot \left(2 + \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^5}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^5}}{2 + \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^5}}$$

Deste modo, os termos do tipo $\dfrac{1}{x^n} \to 0$ quando $x \to +\infty$, assim:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\cdot\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\cdot\left(2+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}{2+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Geometricamente, obtemos:

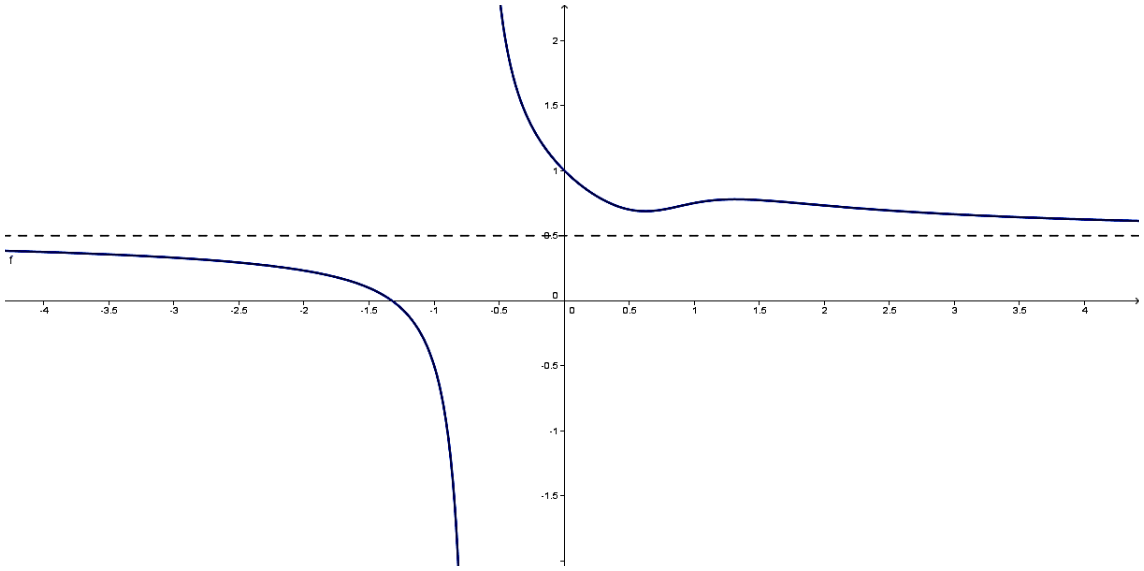


Figura 1.14: Gráfico de $f(x)=\dfrac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}$

Exemplo 1.15 – Dada a função $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}$, determine o valor do limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solução:

Queremos calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}\right)$$

Note que, quando x $\to$+∞, os termos $\sqrt{x+1}$ e $\sqrt{x+3}$ também tendem a +∞, então teríamos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}\right)=\infty-\infty\,,$$

que é uma expressão que não tem sentido. Então, vamos fazer a seguinte manipulação algébrica:

$$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\right)}=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x+3}\right)^2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\right)}=\frac{x+1-x-3}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\right)}$$

Assim,

$$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}\right)=\frac{-2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\right)}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\right)}=\frac{-2}{(\infty+\infty)}=0.$$

Geometricamente, temos:

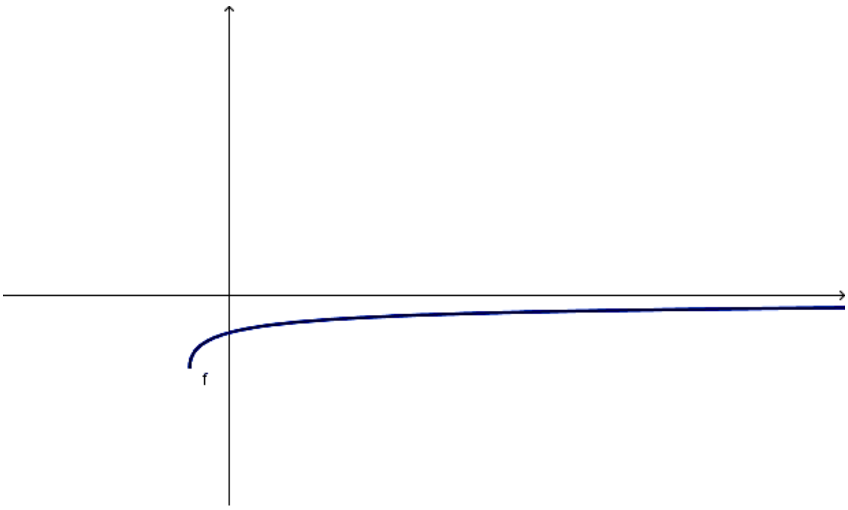


Figura 1.15: Gráfico de $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}$

CAPÍTULO 2
NOÇÕES DE DERIVADA

2.1 – A Velocidade Instantânea

Vamos considerar que Chico Bento foi dar um chute em uma bola de futebol. Como o chute, porém, foi quase vertical, a bola caiu em sua própria cabeça.

(http://mundodedesenhosparacolorir.blogspot.com.br/2011/07/chico-bento-jogando-bola.html; Acesso em: 29/07/13)

Suponha que o movimento completo da bola levou um pouco mais de 2 segundos e que a partir de fotografias tiradas em intervalos regulares foi possível medir a altura da bola a cada meio segundo. Estes valores estão na tabela a seguir:

Alturas da bola

Tempo (s)	0	0,5	1	1,5	2
Altura (m)	1	5,25	7	6,25	2

Qual foi a velocidade da bola no instante t = 1 segundo?

Vamos supor um movimento quase vertical, a partir dos dados obtidos, podemos calcular a velocidade média, que é a razão entre o espaço percorrido (em metros) e o intervalo de tempo que se levou para percorrer este espaço (em segundos), entre os instantes t = 0,5 s e t = 1 s.

$$Vm = \frac{espaço \;\; percorrido}{tempo} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{7-5{,}25}{1-0{,}5} = \frac{1{,}75}{0{,}5} \Rightarrow Vm = 3{,}5 \; m/s$$

O problema é que a velocidade varia muito entre t = 0,5 e t = 1. Quando se chuta uma bola verticalmente para cima, a velocidade diminui até que a bola pare e comece a voltar.

Com medições mais precisas, podemos calcular uma velocidade média em intervalos menores em torno de t = 1. Observe que até aqui não temos uma definição para velocidade em um instante, apenas velocidades médias.

Vamos supor que foram feitas as seguintes medições um pouco mais precisas:

Alturas da bola

Tempo (s)	0	0,25	0,5	0,75	1
Altura (m)	1	3,44	5,25	6,44	7

Usando o intervalo entre t = 0;75 s e t = 1 s, obtemos a velocidade média

$$Vm = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{7 - 6{,}44}{1 - 0{,}75} = \frac{0{,}56}{0{,}25} \Rightarrow Vm = 2{,}24\ m/s$$

Medidas ainda mais precisas do movimento, permitem o cálculo de velocidades médias em intervalos menores. Digamos que a altura da bola foi medida a cada 0,1 segundo e que os valores próximos a t = 1 estão na tabela a seguir:

Alturas da bola

Tempo (s)	0,8	0,9	1	1,1	1,2
Altura (m)	6,6	6,85	7	7,05	7

Calculando a velocidade média no intervalo entre t = 1 s e t = 1,1 s, obtemos:

$$Vm = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{7{,}05 - 7}{1{,}1 - 1} = \frac{0{,}05}{0{,}1} \Rightarrow Vm = 0{,}5\ m/s\ ,$$

que é a velocidade média em um intervalo de 0,1 segundo, iniciando no instante t = 1. Logicamente que medidas mais precisas poderiam permitir o cálculo da velocidade média em intervalos cada vez menores em torno de t = 1, mas ainda não seria a velocidade no instante t = 1 s.

Intuitivamente, quanto menor o intervalo, mais próxima à velocidade média fica da velocidade instantânea. Para definir esta, temos que recorrer ao conceito de limite.

Se s(t) é a altura da bola no tempo t, então considerando a velocidade média no intervalo de tempo [1; 1 + h], quando h tende a 0, então esta velocidade média tende a um valor que pode ser considerado a velocidade instantânea em t = 1, ou seja, podemos definir

$$v(1) = \lim_{h \to 0} \frac{s(1+h) - s(1)}{h} .$$

De maneira mais geral, se s(t) é a função posição de um objeto, então a velocidade deste objeto no tempo t = t_0 é definida por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} ,$$

se tal limite existir.

2.2 – A Reta Tangente

A situação que vamos citar agora corresponde a encontrar a equação da reta tangente passando por um certo ponto de uma curva que é gráfico de uma função y = f(x).

Seja f(x) uma função e seja x = x_A um ponto do seu domínio. Seja $x_B = x_A + h$. Observe o gráfico de uma função f(x), em que traçamos a reta secante que passa pelos pontos A = (x_A; f(x_A)) e B = (x_B; f(x_B)). Note que o gráfico foi traçado supondo h > 0. No entanto, a situação h < 0 dá-se de modo análogo.

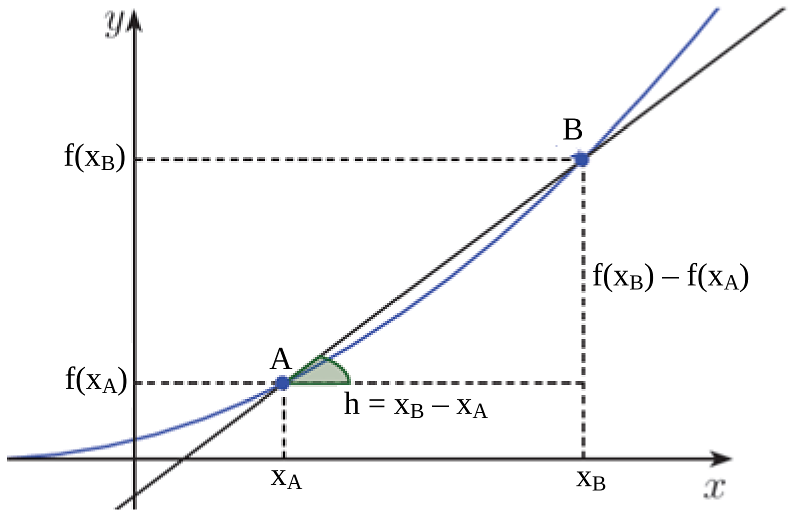


Figura 2.1: Reta secante

Sabemos que o coeficiente angular ou inclinação da reta secante à curva, passando pelos pontos A = (x_A; f(x_A)) e B = (x_B; f(x_B)) é dado por

$$\frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A}=\frac{f(x_A+h)-f(x_A)}{h}.$$

Tomando h cada vez mais próximo de zero, obtemos retas secantes que cortam a curva em dois pontos A e B_i, cada vez mais próximos. Observe a figura abaixo:

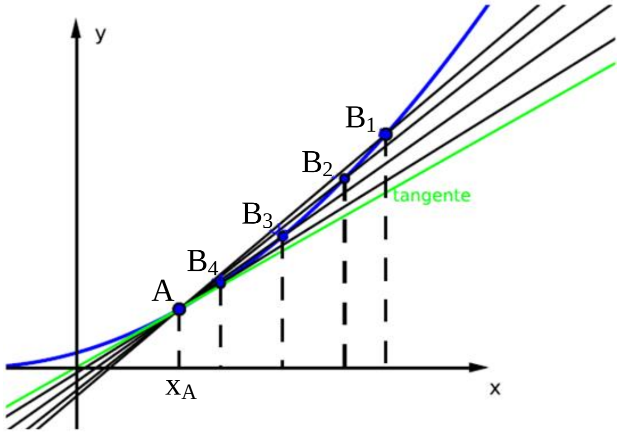


Figura 2.2: Reta tangente

Intuitivamente, percebemos que, quando x_A + h se aproximam de x_A, então os pontos f(x_A + h) e f(x_A), em que a secante corta a curva, ficam cada vez mais próximos e assim estas curvas secantes se aproximam cada vez mais da tangente em x_A.

Quando h se aproxima de zero, se o quociente $\frac{f(x_A+h)-f(x_A)}{h}$, que representa o coeficiente angular da reta secante, que passa por (x_A; f(x_A)) e (x_A + h; f(x_A + h)), aproxima-se de um determinado valor, este, de forma intuitiva, deverá ser o coeficiente angular da reta tangente.

Na verdade, o que fazemos é definir reta tangente da curva em P = (x_0; f(x_0)) como a reta que passa por P e cujo coeficiente angular é dado por

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Se o limite não existir, não há reta tangente no ponto.

Note que este problema está relacionado com o problema de encontrar a velocidade instantânea no instante t = t_0.

O limite encontrado corresponde exatamente à definição de derivada de uma função.

Portanto, podemos definir:

A derivada de uma função y = f(x) definida em um intervalo aberto I em um ponto $x_0 \in$ I é dada por

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

caso este limite exista.

Se o limite existir, a função f é dita derivável em x_0.

A seguir, temos a definição de função derivada:

Uma função *f* definida em um intervalo aberto *I*. Se *f* é derivável em todos os pontos de seu domínio, dizemos que a função é derivável e que a função $f': I \to R$, que associa a cada $x \in I$ o valor *f'(x)*, é a função derivada de *f*.

Usa-se também a notação $\frac{dy}{dx}$ para representar a derivada f'(x), tanto $f'(x_0)$ quanto $\frac{dy}{dx}\Big|x = x_0$ representam a derivada da função f no ponto x_0 de seu domínio.

Vejamos alguns exemplos de como calcular a derivada de algumas funções.

Exemplo 2.1 – Vamos obter a derivada da função constante f(x) = k.

Sendo *f(x) = k* uma função constante, sabemos que seu gráfico é uma reta horizontal, que tem coeficiente angular zero. A tangente em qualquer ponto é a própria reta e, portanto, também tem coeficiente angular zero. Portanto, se *f(x) = k* então *f'(x) = 0*.

Podemos também usar o conceito de derivada a partir do limite. Veja:

Para todo $x \in R$, temos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} \Rightarrow f'(x) = 0$$

Exemplo 2.2 – Vamos agora obter a derivada da função afim f(x) = mx + n.

Seja *f(x) = mx + n* uma função afim, como o gráfico é uma reta *r*, é evidente que sua reta tangente em qualquer ponto é própria reta *r* e a derivada da função em qualquer ponto é o coeficiente angular *m* da reta, isto é: Se *f(x) = mx + n*, então *f'(x) = m*.

Usando o limite, temos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{m(x+h) + n - (mx+n)}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{mx + mh + n - mx - n}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} \Rightarrow f'(x) = m.$$

Exemplo 2.3 – Determinar a derivada da função f(x) = x.

Devemos observar que a função *f(x) = x é* uma função do tipo *f(x) = mx + n*, com *m = 1 e n = 0*, portanto, de acordo com o exemplo anterior, sua derivada será *f'(x) = 1*.

Exemplo 2.4 – Calcular a derivada da função f(x) = x^2.

Usando o conceito de derivada através de limite, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h.(2x+h)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} 2x+h \Rightarrow f'(x) = 2x.$$

Exemplo 2.5 – Calcular a derivada da função f(x) = x^3.

Usando o conceito de derivada através de limite, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h.(3x^2+3xh+h^2)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} 3x^2+3xh+h^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2.$$

Exemplo 2.6 – Determinar a derivada da função f(x) = x^4.

Usando o conceito de derivada através de limite, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^4}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h.(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} 4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3.$$

Exemplo 2.7 – Obter a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$, para x > 0.

Utilizando a definição de derivada através de limite, temos:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \;\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}{h}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \;\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{h.\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h.\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \;\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h.\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Se formos comparar, nos últimos exemplos, as funções primitivas e as respectivas derivadas, vamos obter um padrão. Vejamos:

$$f(x)=x \;\to\; f'(x)=1=1.x^{1-1}$$
$$f(x)=x^2 \;\to\; f'(x)=2x=2.x^{2-1}$$
$$f(x)=x^3 \;\to\; f'(x)=3x^2=3.x^{3-1}$$
$$f(x)=x^4 \;\to\; f'(x)=4x^3=4.x^{4-1}$$

A partir deste padrão, podemos dizer que: $f(x)=x^n \;\to\; f'(x)=n.x^{n-1}$.

Vimos que a derivada da função *f*(x) = x^3 é *f'*(x) = $3x^2$, é se a função for *f*(x) = $5x^3$, qual será sua derivada? Vamos calcular usando a definição,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \;\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)^3-5x^3}{h} \;\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}5\cdot\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}5\cdot\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \;\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}5\cdot\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}5\cdot\frac{h.(3x^2+3xh+h^2)}{h} \;\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}5\cdot(3x^2+3xh+h^2) \;\Rightarrow\; f'(x)=5\cdot 3x^2$$

$$\Rightarrow\; f'(x)=15x^2$$

Veja que a derivada de *f*(x) = $5x^3$ nada mais é do que 5 vezes a derivada de x^3. Assim, podemos concluir que para calcular a derivada de uma constante vezes uma função, basta multiplicar a constante vezes a derivada da função, ou seja, se *h(x) = k.f(x)* é derivável, então sua derivada será *h'(x) = k.f'(x)*.

Consideremos agora as funções u(x) = x^2 e v(x) = 2x, se f(x) = u(x) + v(x), então sua derivada será:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+2(x+h)-x^2-2x}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2+2x+2h-x^2-2x}{h} \Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2+2h}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h.(2x+h+2)}{h} \Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}2x+h+2 \Rightarrow f'(x)=2x+2.$$

Ou seja, se f(x) = x^2 + 2x, então, f'(x) = 2x + 2. Note que a derivada de f(x) = u(x) + v(x) nada mais é do que f'(x) = u'(x) + v'(x).

Assim, de forma intuitiva, podemos dizer que a derivada da soma de funções corresponde à soma das derivadas das parcelas.

E de modo análogo temos que, se f(x) = u(x) – v(x) então, f'(x) = u'(x) – v'(x).

Vejamos na sequência, funções definidas por produtos e por quocientes.

Exemplo 2.8 – Dada a função *f(x)* = x^2. (2x – 1), encontre *f'(x)*.

Solução:

A partir da definição de função derivada, temos:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2\cdot(2\cdot(x+h)-1)-x^2\cdot(2x-1)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(x^2+2hx+h^2\right).(2x+2h-1)-2x^3+x^2}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2x^3+2x^2h-x^2+4x^2h+4xh^2-2xh+4xh^2+2h^3-h^2-2x^3+x^2}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{6x^2h+8xh^2-2xh+2h^3-h^2}{h} \Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(6x^2+8xh-2x+2h^2-h)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}6x^2+8xh-2x+2h^2-h \Rightarrow f'(x)=6x^2-2x$$

É importante observar, que

$$f'(x) = (x^2)'.(2x-1) + x^2.(2x-1)' \Rightarrow f'(x) = (2x).(2x-1) + x^2.2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^2 - 2x + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 2x$$

Então, veja que se a função é definida como o produto de duas funções, para calcular sua derivada, devemos derivar a primeira função e multiplicar pela segunda, daí somamos com o produto da primeira pela derivada da segunda, ou seja:

se *f(x)* = u(x) . v(x) então, *f'(x)* = u'(x). v(x) + u(x).v'(x).

Exemplo 2.9 – Determine a derivada da função $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$.

Solução:

Usando a definição de função derivada, por limites, temos:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \;\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x+h-2}{x+h+3}-\dfrac{x-2}{x+3}}{h}$$

$$\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(x+h-2)\cdot(x+3)-(x-2)\cdot(x+h+3)}{(x+h+3)\cdot(x+3)}}{h}$$

$$\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+3x+x.h+3h-2x-6-x^2-x.h-3x+2x+2h+6}{(x+h+3)\cdot(x+3)}\cdot\frac{1}{h}$$

$$\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{5h}{(x+h+3)\cdot(x+3)\cdot h} \;\Rightarrow\; f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{5}{(x+h+3)\cdot(x+3)}$$

$$\Rightarrow\; f'(x)=\frac{5}{(x+0+3)\cdot(x+3)} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{5}{(x+3)^2}$$

No exemplo 2.9, a função *f* é definida por um quociente, portanto poderia ser expressa por um produto, veja:

$$f(x)=\frac{x-2}{x+3} \;\Rightarrow\; f(x)=(x-2)\cdot(x+3)^{-1}$$

E assim, poderíamos usar a regra da derivada do produto, mas a derivada do fator $(x + 3)^{-1}$ é calculada através da regra da cadeia, que ainda não abordamos aqui. Porém, existe uma regra para calcular-se a derivada de um quociente de funções, a saber: se uma função *f* é definida como o produto de duas funções, para calcular sua derivada, devemos derivar a primeira função e multiplicar pela segunda, daí subtrairmos pelo o produto da primeira pela derivada da segunda e, por fim, dividimos o resultado por pelo quadrado da segunda função, ou seja,

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Aplicando esta regra à função do exemplo 2.9, temos:

$$f(x)=\frac{x-2}{x+3} \Rightarrow f'(x)=\frac{(x-2)'\cdot(x+3)-(x-2)\cdot(x+3)'}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x+3)-(x-2)\cdot 1}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x+3-x+2}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{(x+3)^2}$$

Existem outras regras para o cálculo da derivada de uma função, porém, abordaremos aqui mais a regra para derivar funções compostas, chamada Regra da Cadeia, que enunciaremos a seguir.

Sejam *f* e *g* duas funções tais que *f* é derivável em *x* e *g* é derivável em *f*(*x*). Então, a função composta *gof*, dada por (*gof*)(*x*) = *g*(*f*(*x*)) é derivável em *x* e sua derivada é dada por (*gof*)'(*x*) = *g'*(*f*(*x*)).*f'*(*x*).

Façamos alguns exemplos de aplicação da regra da cadeia.

Exemplo 2.10 – Determine a derivada da função $f(x) = (2x + 3)^{10}$.

Solução:

Vamos considerar $u(x) = 2x + 3$ e $v(u) = u^{10}$. Note que $f(x) = v(u(x))$ e que $u'(x) = 2$ e $v'(u) = 10u^9$. Aplicando a regra da cadeia, temos:

$$f'(x) = v'(u(x)).\ u'(x) \quad\Rightarrow\quad f'(x) = 10.(2x + 3)^9.2 \quad\Rightarrow\quad f'(x) = 20.(2x + 3)^9$$

Exemplo 2.11 – Sendo a função $f(x)=\sqrt{x^2+x}$, determine a derivada *f'* da função.

Solução:

Vamos considerar $u(x) = x^2 + x$ e $v(u) = \sqrt{u}$. Note que $f(x) = v(u(x))$, e que $u'(x) = 2x+1$ e $v'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$. Aplicando a regra da cadeia, temos:

$$f'(x) = v'(u(x)).\ u'(x) \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x+1) \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot$$

Exemplo 2.12 – Determine a equação da reta tangente à curva y = x^2 no ponto x = 3.

Solução:

Primeiro calculamos a derivada de y = x^2 no ponto x = 3. Temos $\frac{dy}{dx} = 2x$, em x = 3 obteremos $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6$.

Assim, o coeficiente angular da reta tangente a curva no ponto x = 3 é igual a 6, ou seja, m = 6. A equação da reta é dada por

$$y = mx + n \;\rightarrow\; y = 6x + n,$$

em que *n* é o coeficiente linear da reta, que devemos calcular a partir de um ponto da reta. Como ela corta a parábola $y = x^2$ no ponto de abscissa $x = 3$, este ponto tem ordenada $y = 3^2 = 9$.

Substituindo o ponto (3; 9) na equação da reta, teremos:

$y = 6x + n \;\Rightarrow\; 9 = 6.3 + n \;\Rightarrow\; 9 = 18 + n \;\Rightarrow\; 9 - 18 = n \;\Rightarrow\; n = -9$

Portanto, a equação da reta é $y = 6x - 9$.

Geometricamente, temos:

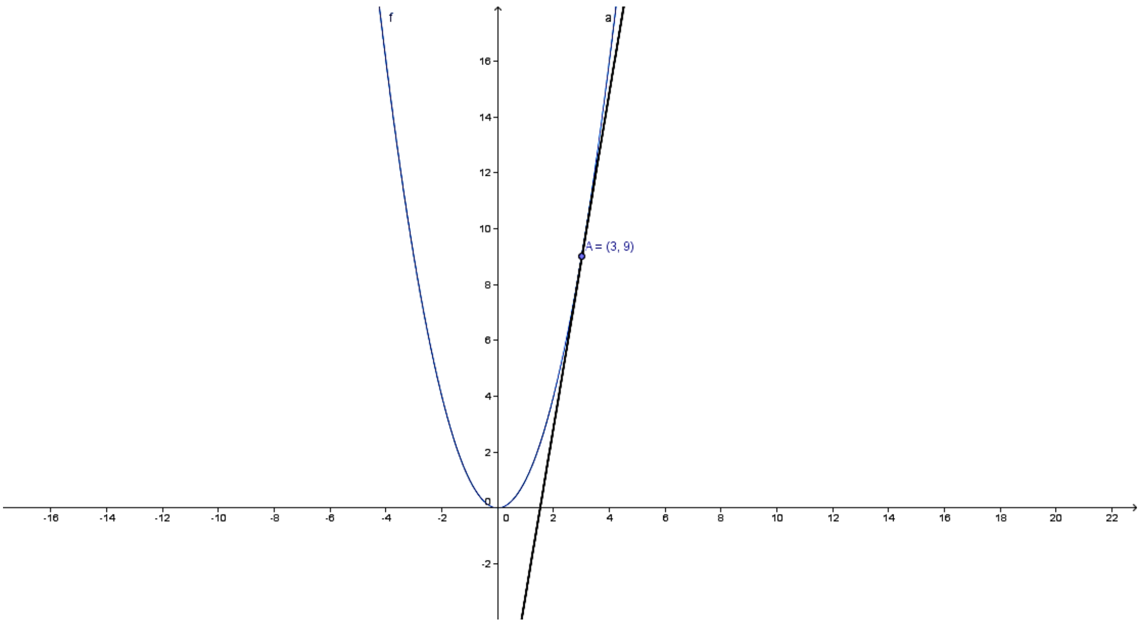


Figura 2.3: Reta tangente ao gráfico de y = x^2 no ponto x = 3.

CAPÍTULO 3
CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO DE FUNÇÕES

Um problema que podemos abordar com o auxílio das derivadas é o de fazer o esboço do gráfico de uma função. Para tal, devemos considerar alguns aspectos importantes na construção destes gráficos: os pontos de máximo e/ou de mínimo, os intervalos de crescimento e de decrescimento da função e a concavidade do gráfico. Para funções deriváveis, esses aspectos estão relacionados ao valor e aos sinais da derivada, como veremos a seguir.

3.1 – Intervalos de Crescimento e Decrescimento

Observemos parte do gráfico de uma função *f* e três retas tangentes (*r*, *s* e *t*).

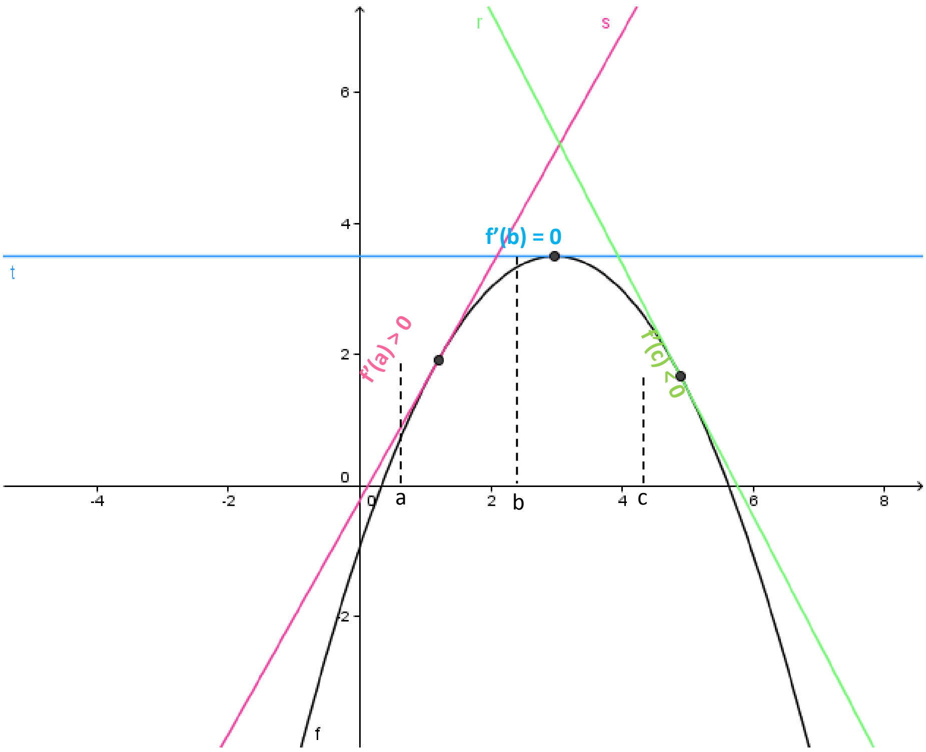


Figura 3.1: Retas tangentes.

Note que *f* é crescente para x < b e decrescente para x > b. No intervalo em que a função é crescente, a reta tangente a um ponto qualquer deste intervalo é uma reta crescente (reta s na figura acima), logo seu coeficiente angular é positivo, ou seja, a derivada da função neste ponto é positiva, e no intervalo em que *f* é decrescente, a reta tangente a um ponto qualquer é uma reta decrescente (reta r na figura acima), portanto seu coeficiente angular é negativo, ou seja, a derivada da função, neste ponto, é negativa. A derivada é nula em x = b, em que a reta tangente é horizontal. Sendo assim, o ponto (b, *f*(b)) é considerado um ponto crítico do gráfico, que pode ser máximo ou mínimo.

Portanto, de forma intuitiva, podemos afirmar que a relação entre o crescimento e a derivada é a de que a função é decrescente nos intervalos, em que a derivada é negativa, e a mesma é crescente nos intervalos em que a derivada é positiva. No ponto em que a derivada é nula, temos os pontos de máximo ou de mínimo. Vejamos alguns exemplos:

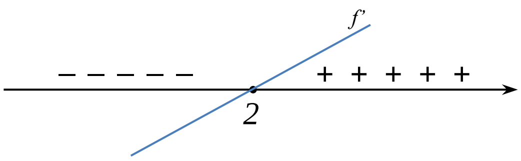
Exemplo 3.1 – Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento da função $f(x) = x^2 - 4x - 5$ e esboce seu gráfico.

Solução:

Inicialmente temos que obter a função derivada. Temos $f'(x) = 2x - 4$.

Em seguida obtemos o zero da função derivada e estudamos o sinal. Logo,

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2.$$



Portanto,

$f'(x) < 0$ *para* $x < 2$;

$f'(x) = 0$ *para* $x = 2$;

$f'(x) > 0$ *para* $x > 2$.

Temos também que o valor da função em $x = 2$ é:

$$f(2) = 2^2 - 4.2 - 5 \Rightarrow f(2) = 4 - 8 - 5 \Rightarrow f(2) = -9.$$

Concluindo, assim, que *f* é decrescente no intervalo $(-\infty, 2[$ (já que a derivada é negativa neste intervalo), atinge o ponto extremo $P = (2, -9)$ e é crescente no intervalo $]2, +\infty)$, pois a derivada é positiva neste intervalo.

Assim, podemos fazer o esboço do gráfico da função, que é uma parábola.

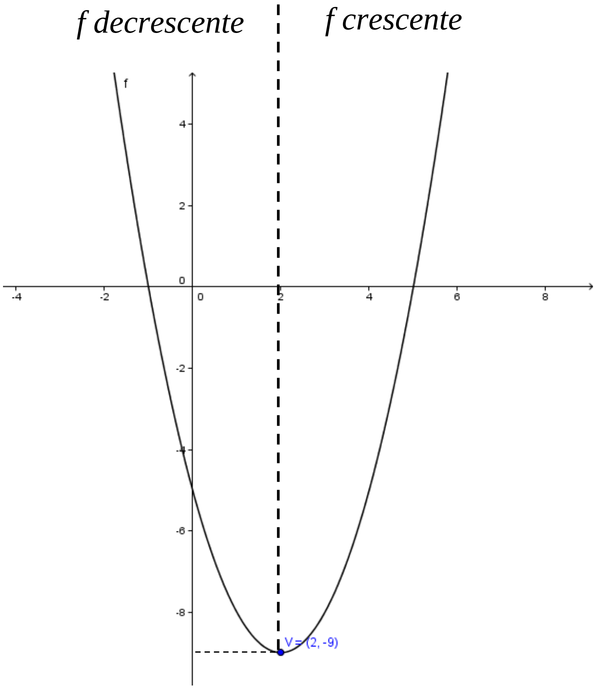


Figura 3.2: Gráfico de f(x) = $x^2 - 4x - 5$

Exemplo 3.2 – Esboce o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}$, destacando os intervalos de crescimento e decrescimento e seus pontos extremos.

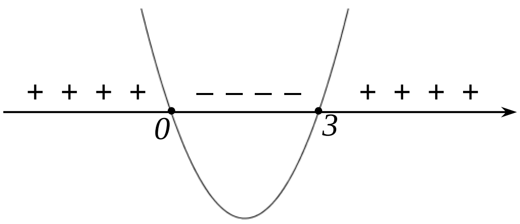
Solução:

O primeiro passo é obter a derivada da função. Portanto, temos $f'(x) = x^2 - 3x$.

O segundo consiste em obtermos os zeros da função derivada e estudarmos seu sinal. Logo,

$$x^2 - 3x = 0 \;\Rightarrow\; x.(x-3) = 0 \;\Rightarrow\; x = 2 \text{ ou } x = 3,$$

ou seja,



Portanto,

$f'(x) < 0$ *para* $0 < x < 3$;

f'(x) = 0 para x = 0 ou para x = 3;

f'(x) > 0 para x < 0 ou para x > 3.

Temos também que o valor de *f* em *x = 0 é:*

$$f(0)=\frac{0^3}{3}-\frac{3.0^2}{2} \Rightarrow f(0)=0.$$

E o valor de *f* em *x = 3* é:

$$f(3)=\frac{3^3}{3}-\frac{3.3^2}{2} \Rightarrow f(3)=\frac{27}{3}-\frac{3.9}{2} \Rightarrow f(3)=9-13{,}5 \Rightarrow f(3)=-4{,}5$$

Concluindo, assim, que:

- *f* é crescente no intervalo *(– ∞, 0[*, já que a derivada é positiva neste intervalo);
- atinge um ponto extremo *P = (0, 0), em que* a derivada se anula;
- decresce no intervalo *]0, 3[*, pois a derivada é negativa neste intervalo);
- atinge um ponto extremo *Q = (3; – 4,5)*, em que a derivada se anula;
- e é crescente no intervalo *]3, +∞*), uma vez que a derivada é positiva neste intervalo);

Assim, teremos o seguinte gráfico:

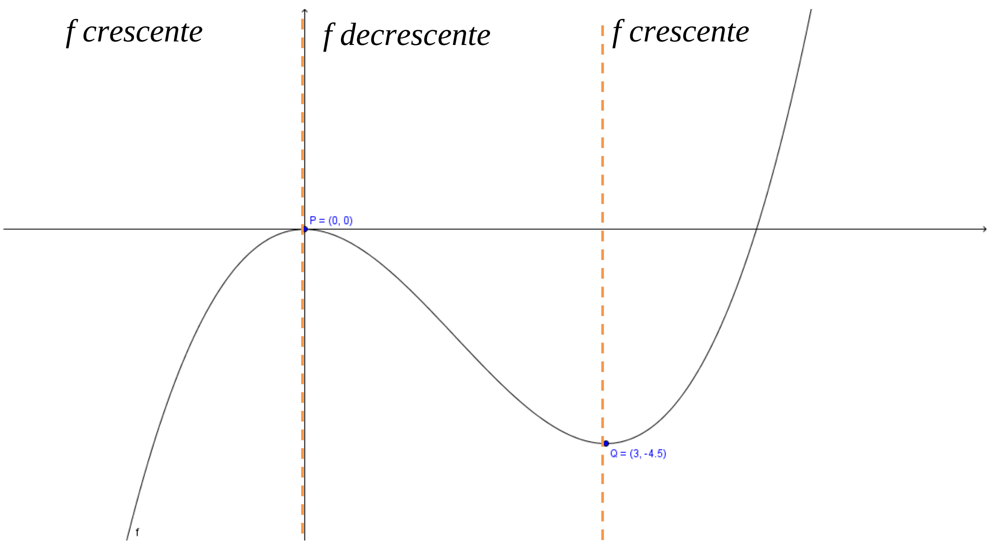


Figura 3.3: Gráfico de $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}$

É bem verdade que estes procedimentos parecem suficientes para esboçar--se o gráfico de uma função, porém, não podemos garantir que as curvas do gráfico são dessa forma, pois temos que analisar a concavidade dele.

3.2 – Concavidade do Gráfico de uma Função

É fato que existem gráficos de funções côncavos para cima e gráficos côncavos para baixo. Vejamos os gráficos das funções *f* e *g* na figura a seguir.

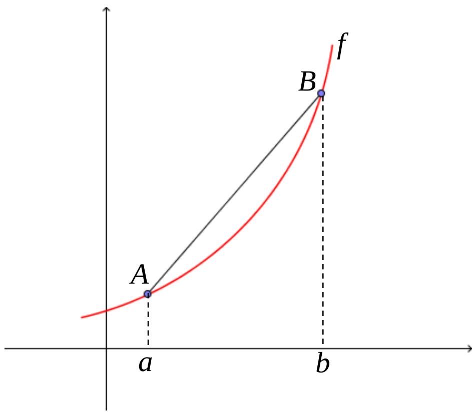


Figura 3.4a – Concavidade para cima

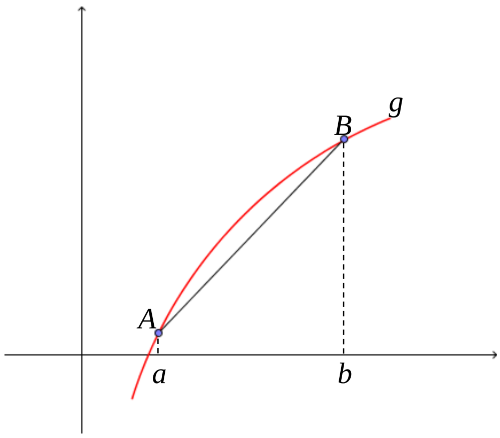


Figura 3.4b – Concavidade para baixo

Note que os dois gráficos são crescentes entre os pontos A e B, porém, eles têm formatos de curvas diferentes. Ligando os pontos A e B com um segmento de reta, temos que o gráfico de *f* está abaixo do segmento AB, o que caracteriza concavidade para cima, enquanto que o gráfico de *g* está acima do segmento, o que caracteriza concavidade para baixo.

Outra forma de caracterizarmos a concavidade de um gráfico de uma função é através das retas tangentes aos gráficos nos pontos da curva. Observe a seguir.

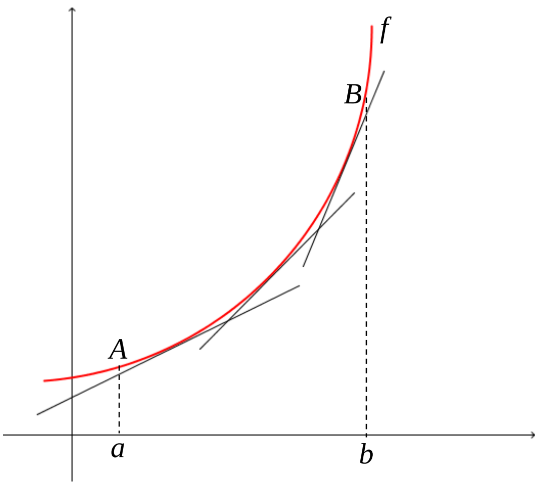


Figura 3.5a – Concavidade para cima

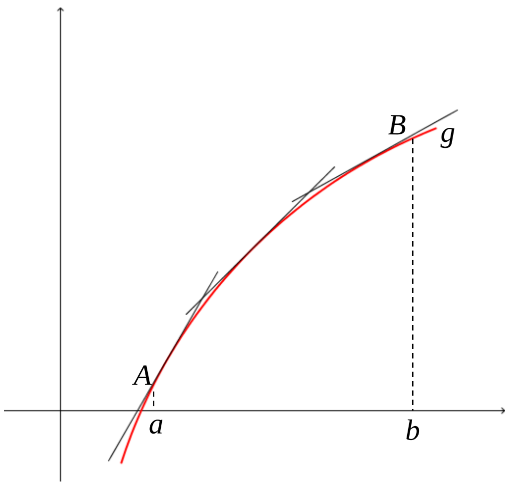


Figura 3.5b – Concavidade para baixo

Observe que, quando a concavidade é para cima, as retas tangentes à curva ficam abaixo do gráfico da função, por outro lado, quando a concavidade é para baixo, as retas tangentes à curva ficam acima do gráfico da função.

Agora, vamos associar a concavidade do gráfico de uma função com a derivada segunda.

Sabemos que a inclinação da reta tangente a uma curva, em um determinado ponto, é dada pela derivada primeira (*f'*) da função. Observando as inclinações das retas tangentes ao gráfico de *f* (concavidade para cima) na figura anterior, percebemos que aumentando o valor de x no intervalo [a, b], as inclinações das retas também aumentam, ou seja, os valores de *f'* também aumentam, então concluímos que *f'(x)* é crescente nesse intervalo. Como a derivada de uma função crescente é positiva, teremos a derivada da função derivada (derivada segunda), ou seja, $(f'(x))' = f''(x)$ é positiva no caso de concavidade para cima.

Por outro lado, no gráfico de *g* (concavidade para baixo) na figura anterior, percebemos que aumentando o valor de x no intervalo [a, b], as inclinações das retas diminuem, ou seja, os valores de *g'* diminuem, sendo então *g'(x)* decrescente no intervalo. Como a derivada de uma função decrescente é negativa, teremos que $(g'(x))' = g''(x)$ é negativa no caso de concavidade para baixo.

Então, sendo *f* uma função duas vezes derivável em um intervalo I, temos, em resumo, que:

- Se $f''(x) > 0$, para todo $x \in I$, então o gráfico de *f* tem concavidade para cima em I;
- Se $f''(x) < 0$, para todo $x \in I$, então o gráfico de *f* tem concavidade para baixo em I.

A partir das características dos gráficos vistas até aqui, vamos analisar alguns exemplos:

Exemplo 3.3 – Encontre os intervalos onde a função $f(x) = x^3 - x$ é crescente e onde é decrescente, estude a concavidade da função e faça um esboço do gráfico.

Solução:

O primeiro passo é derivar a função:

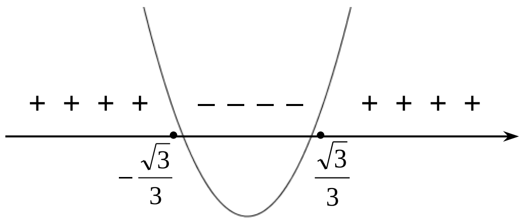
$$f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 1$$

O segundo é encontrar os zeros da função *f'* e, em seguida, estudar o sinal da função derivada.

$$3x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\; x = \frac{\sqrt{3}}{3} \;\; ou \;\; x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Estudando o sinal



Portanto,

f'(x) < 0 para $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ o gráfico de *f* é decrescente;

f'(x) = 0 para $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

f'(x) > 0 para $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou para $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ o gráfico de f é crescente;.

O terceiro passo é calcular o valor da função *f*, em que a derivada se anula, então:

- *Para* $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$*, temos:*

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{27}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{9} \;\Rightarrow\; f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

- *Para* $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$*, temos:*

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{27}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{9} \;\Rightarrow\; f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

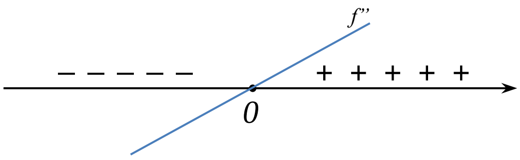
Assim, os pontos críticos de *f* são $A = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ e $B = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$.

O quarto e último passo é estudar a concavidade e isso se faz através da segunda derivada, portanto, vamos derivar a função $f'(x) = 3x^2 - 1$:

$$(f'(x))' = f''(x) = 6x$$

Encontrar os zeros e fazer o estudo do sinal: $6x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Estudo do sinal



Temos,

$x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ concavidade, do gráfico de f, para baixo;

$x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade, do gráfico de f, para cima;

E finalmente o traçado do gráfico de f.

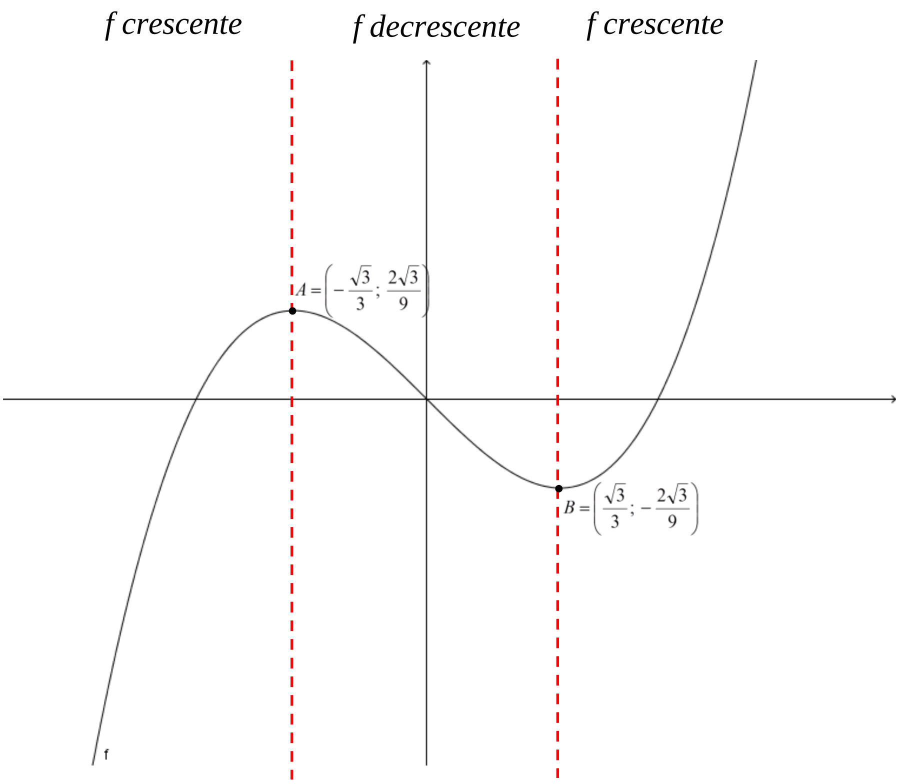


Figura 3.6: Gráfico de $f(x) = x^3 - x$

Exemplo 3.4 – Faça o esboço do gráfico da função $f(x) = x^3 + 2x^2$, destacando os intervalos de crescimento e decrescimento e os intervalos em que o gráfico é côncavo para cima ou para baixo.

Solução:

Inicialmente obtemos a derivada primeira de *f*, portanto temos:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + 4x.$$

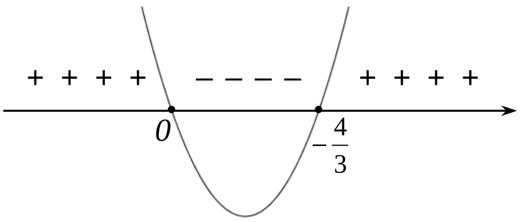
Em seguida, encontramos os zeros da função *f'*, veja:

$$3x^2 + 4x = 0 \;\Rightarrow\; x.(3x+4) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\; ou \;\; 3x + 4 = 0 \;\Rightarrow\; 3x = -4 \;\Rightarrow\; x = -\frac{4}{3},$$

ou seja,

$$x = 0 \;\; ou \;\; x = -\frac{4}{3} \Rightarrow f'(x) = 0$$

E na sequência, estudando o sinal de *f'*,



Então temos,

Intervalo	*Sinal de f'*	*Gráfico de f*
x < 0 ou x > $-\frac{4}{3}$	**+**	*crescente*
0< x < $-\frac{4}{3}$	**–**	*decrescente*

O próximo passo é identificar os pontos extremos do gráfico, calculado o valor da função *f*, em que a derivada se anula, logo:

- *Para x = 0, temos:*

$$f(0) = 0^3 + 2.0^2 \;\Rightarrow\; f(0) = 0 + 0 \;\Rightarrow\; f(0) = 0$$

- *Para* $x = -\frac{4}{3}$*, temos:*

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^2 \Rightarrow f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{27} + 2\cdot\left(\frac{16}{9}\right)$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{27} + \frac{32}{9} \Rightarrow f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{-64+96}{27} \Rightarrow f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{27}$$

Portanto, os pontos extremos de *f* são *A = (0, 0)* e $B = \left(-\frac{4}{3}; \frac{32}{27}\right)$.

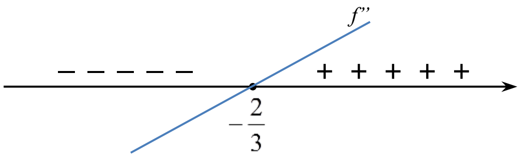
Finalmente temos que estudar a concavidade de *f*, a partir do sinal da segunda derivada, então, devemos derivar a função *f'(x) = 3x*^{2} *+ 4x*:

$$\left(f'(x)\right)' = f''(x) = 6x + 4$$

Para fazer o estudo do sinal de *f”*, calculamos o zero da função:

$$6x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{4}{6} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{2}{3}$$

Fazendo o estudo do sinal, temos:



Assim, podemos resumir no quadro a seguir:

Intervalo	*Sinal de f’*	*Concavidade do gráfico de f*
$x < -\frac{2}{3}$	**–**	*para baixo*
0< x < $-\frac{4}{3}$	**+**	*para cima*

Por fim, traçamos um esboço do gráfico da função $f(x) = x^3 + 2x^2$.

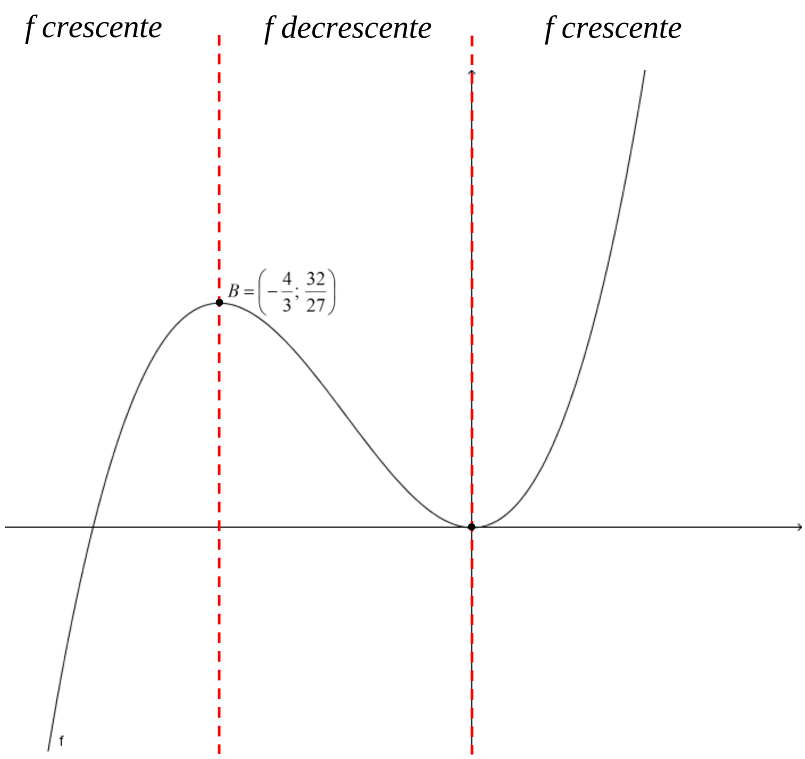


Figura 3.7: Gráfico de $f(x) = x^3 + 2x^2$.

Exemplo 3.5 – Dada a função $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 12$, determine seus pontos extremos (para cada um, diga se é máximo ou mínimo), os intervalos de crescimento e o de decrescimento e os intervalos em que o gráfico de *f* é côncavo para cima e para baixo. Faça um esboço do gráfico da função.

Solução:

Os pontos críticos e os intervalos de crescimento e de decrescimento são obtido a partir da primeira derivada, então:

Primeiro passo: derivar a função.

$$f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 12 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 36x.$$

Segundo passo: encontrar os zeros de $f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 36x.$

$12x^3 + 24x^2 - 36x = 0 \;\Rightarrow\; x.(12x^2 + 24x - 36) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ ou } 12x^2 + 24x - 36 = 0$

$\Rightarrow\; (12x^2 + 24x - 36 = 0) \div 12 \;\Rightarrow\; x^2 + 2x - 3 = 0,$

Por Bháskara, temos: $x^2 + 2x - 3 = 0 \;\Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = 1.$

Logo, os zeros de f’ são $x = -3,\ x = 0 \text{ ou } x = 1.$

Terceiro passo: fazer o estudo do sinal da função derivada e identificar os intervalos de crescimento e decrescimento.

Escrevendo a forma fatorada de *f’*, temos:

$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 36x \;\Rightarrow\; f'(x) = 12x.(x^2 + 2x - 3) \;\Rightarrow$

$f'(x) = 12x \cdot (x-1) \cdot (x+3)$

Assim, podemos fazer o jogo de sinais em uma tabela, logo;

-3 $\qquad$ 0 $\qquad$ 1

(12x)	–	–	+	+
x – 1	–	–	–	+
x + 3	–	+	+	+
f’(x)	–	+	–	+

Então temos,

Intervalo	*Sinal de f’*	*Gráfico de f*
$x < -3$ ou $0 < x < 1$	–	*decrescente*
$-3 < x < 0$ ou $x > 1$	+	*Crescente*

Quarto passo: pontos críticos do gráfico.

Calculando o valor da função f, em que a derivada se anula, temos:

- *Para x = – 3, temos:*

$$f(-3) = 3.(-3)^4 + 8.(-3)^3 - 18.(-3)^2 + 12$$
$$\Rightarrow f(-3) = 3.81 + 8.(-27) - 18.9 + 12$$
$$\Rightarrow f(-3) = 243 - 216 - 162 + 12$$
$$\Rightarrow f(-3) = -123$$

- *Para x = 0, temos:*

$f(0) = 3.(0)^4 + 8.(0)^3 - 18.(0)^2 + 12 \Rightarrow f(0) = 0 + 0 - 0 + 12 \Rightarrow f(0) = 12$

- *Para x = 1, temos:*

$$f(1) = 3.(1)^4 + 8.(1)^3 - 18.(1)^2 + 12$$
$$\Rightarrow f(1) = 3.1 + 8.1 - 18.1 + 12$$
$$\Rightarrow f(1) = 3 + 8 - 18 + 12$$
$$\Rightarrow f(1) = 5$$

Portanto, os pontos críticos de f são $A = (-3, -123)$; $B = (0, 12)$ e $C = (1, 5)$.

Analisando os resultados obtidos no terceiro e quarto passos, temos:

A função decresce no intervalo $(-\infty, -3[$, chegando ao ponto $A = (-3, -123)$, a partir de onde começa a crescer, concluímos, com isso, que o A é um ponto de mínimo local. Este crescimento se dá no intervalo $]-3, 0[$, onde a função atinge o ponto $B = (0, 12)$, de onde começa a decrescer, portanto, podemos afirmar que B é ponto de máximo local. A partir do ponto B, o decrescimento dá-se no intervalo $]0, 1[$ até o ponto $C = (1, 5)$ e a partir daí cresce para todo $x > 1$. Logo, dizemos que C também é ponto de mínimo local.

A concavidade do gráfico depende do sinal da segunda derivada, então:

Quinto passo: obter a segunda derivada.

$$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 36x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 36x^2 + 48x - 36$$

Sexto passo: encontrar os zeros de $f''(x) = 36x^2 + 48x - 36$.

$$(36x^2 + 48x - 36 = 0) \div 12 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 4x - 3 = 0$$

Por Bháskara, temos:

$3x^2 + 4x - 3 = 0$

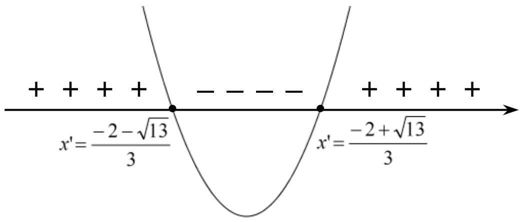
$\Delta = b^2 - 4.a.c \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4^2 - 4.3.(-3) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 16 + 36 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 52$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{2.3} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot 13}}{6} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{13}}{6}$$

$$\Rightarrow x' = \frac{-4 + 2\sqrt{13}}{6} \Rightarrow x' = \frac{2(-2+\sqrt{13})}{6} \Rightarrow x' = \frac{-2+\sqrt{13}}{3}$$

$$\Rightarrow x'' = \frac{-4 - 2\sqrt{13}}{6} \Rightarrow x'' = \frac{2(-2-\sqrt{13})}{6} \Rightarrow x'' = \frac{-2-\sqrt{13}}{3}$$

Sétimo passo: fazendo o estudo do sinal.



Resumindo em um quadro, temos:

Intervalo	*Sinal de f''*	*Concavidade do gráfico de f*
$x < \frac{-2-\sqrt{13}}{3}$ *ou* $x > \frac{-2+\sqrt{13}}{3}$	**+**	*para cima*
$\frac{-2-\sqrt{13}}{3} < x < \frac{-2+\sqrt{13}}{3}$	**–**	*para baixo*

Oitavo passo: esboço do gráfico.

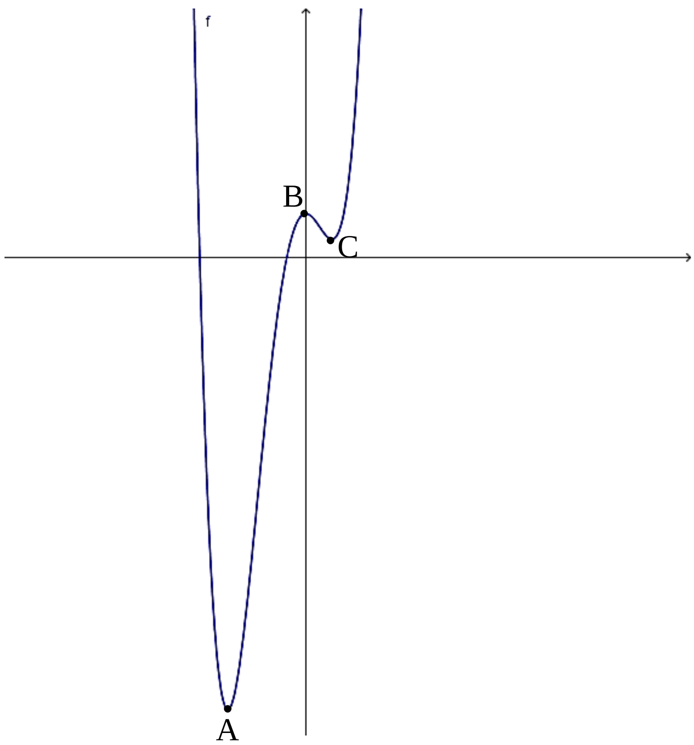


Figura 3.8: Gráfico de $f(x) = x^3 + 2x^2$.

Exemplo 3.6 – Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Solução:

Primeiramente devemos observar que a função não está definida em *x = 0*, pois, se assim fosse, teríamos $f(0) = \dfrac{1}{0^2} \Rightarrow f(0) = \dfrac{1}{0}$, mas a divisão $\dfrac{1}{0}$ não existe.

Vamos obter a primeira derivada de *f* para sabermos seus pontos críticos e os intervalos de crescimento e decrescimento. Derivando, temos:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

Note que não existe valor de *x* que torna *f(x) = 0*, portanto a função não possui ponto crítico.

E ainda,

- Se *x < 0*, então $x^3 < 0$, daí *f'(x) > 0*. Logo, a função *f* é crescente para *x < 0*.
- Se *x > 0*, então $x^3 > 0$, daí *f'(x) < 0*. Portanto, a função *f* é decrescente para x > 0.

Vamos obter a derivada segunda para sabermos os intervalos em que o gráfico é côncavo para cima ou para baixo. Derivando *f'*, temos:

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3} = -2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6x^{-4} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{6}{x^4}$$

Analisando a função *f''*, é fácil ver que ela não está definida em *x = 0*, e como o expoente de *x* é par, então a potência x^4 é sempre positiva, seja *x < 0 ou x > 0*. Sendo assim, *f''(x) > 0* para qualquer *x ≠ 0*, logo, a concavidade do gráfico de *f* é sempre para cima.

Para fazermos o traçado do gráfico, devemos analisar o comportamento dele nas proximidades do zero, já que a função não está definida em *x = 0*, e para isso vamos recorrer ao seguinte limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$. Veja que quando os valores de x se aproximam de zero, os valores de f(x) crescem indefinidamente, pois mantendo-se constante o numerador de uma fração, quanto menor for seu denominador, maior será seu valor. Assim, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, pois $x^2 > 0$, para todo *x ≠ 0*, ou seja, quando x se aproxima de zero, tanto pela esquerda quanto pela direita, os valores da função tendem para $+\infty$.

Além disso, vale observar que, *como* $x^2 > 0$, então a função só assumirá valores positivos, mesmo quando x aumentar muito ou diminuir muito, podemos concluir isso através dos limites: $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Assim, o gráfico de f será:

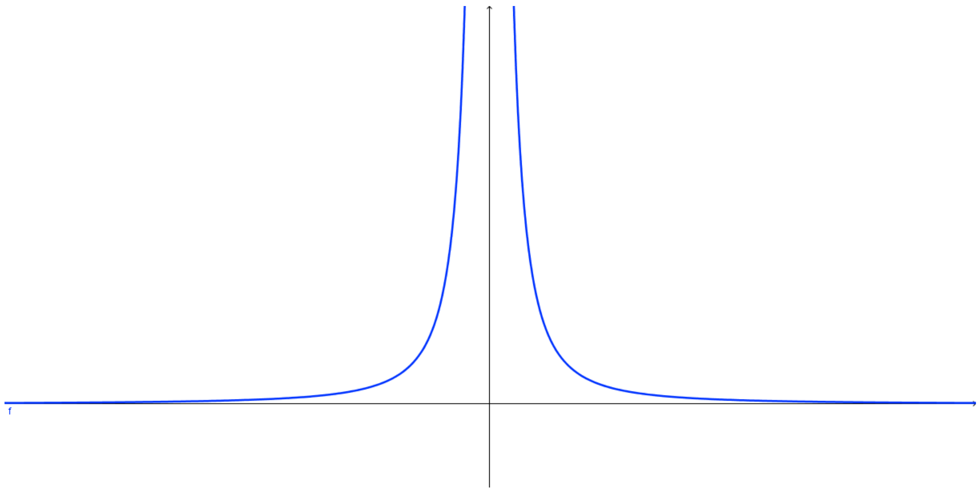


Figura 3.9: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao escrever um trabalho de conclusão de curso abordando as noções de limites e derivadas sem o rigor matemático das demonstrações e das definições formais, o objetivo foi elaborar um material que possa ser utilizado por professores e por alunos de ensino médio, principalmente, para a construção de gráficos, pois sabemos das dificuldades que se tem para a construção dos gráficos de algumas funções. Além disso, sabemos que, com as noções vistas no ensino médio, teremos alunos melhores no ensino superior.

Foi uma apresentação dos limites sem os épsilons e deltas, fizemos a apresentação da ideia geométrica e intuitiva, pois acreditamos que os alunos do ensino médio conseguirão entender o conceito. De forma intuitiva, também apresentamos a ideia de função contínua e de limites infinitos e no infinito.

Vimos o conceito de derivada a partir de um problema de Física, para motivar os alunos, já que trata de um tema que é abordado no ensino médio. E a partir daí reunimos informações para a construção dos gráficos.

Esperamos com a produção deste material, possa inspirar uma reflexão acerca do currículo do ensino de Matemática na Educação Básica brasileira, pois trata-se de um assunto bastante significativo para quase todas as áreas no ensino superior e esperamos ajudar a preparar melhor os alunos para que possam ingressar no ensino superior com um conhecimento matemático mais conciso.

REFERÊNCIAS

(1) ANTON, Howard, BIVES, Irl, DAVIS, Stephen. Cálculo, volume 1. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

(2) GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de Cálculo, volume 1. São Paulo: LTC, 2001.

(3) RIVERA, Jaime E. Muñoz. Cálculo Diferencial e Integral Light. Rio de Janeiro: Editora EAC, 2008.